Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 32–42

УДК 517.9

Симетрійні властивості деяких рівнянь гідродинамічного типу

В.М. БОЙКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: slava@apmat.freenet.kiev.ua

Досліджено симетрійні властивості узагальнення рівняння Вахненка, деяких узагальнень рівняння Бюргерса та однієї нелінійної системи гідродинамічного типу.

Symmetry properties of a generalization of the Vakhnenko equation, of some generalizations of the Burgers equation and of a nonlinear system of hydrodynamic type are investigated.

1. Узагальнення рівняння Вахненка. В роботі [1] Вахненко для опису розповсюдження короткохвильових збурень у релаксуючому середовищі запропонував наступне нелінійне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u+u=0. \tag{1}$$

В цій же роботі побудовані деякі солітонні розв'язки рівняння (1). В [2] досліджена стійкість цих розв'язків і запропонована назва рівняння (1), як рівняння Вахненка. В даній роботі ми досліджуємо симетрійні властивості наступного узагальнення рівняння (1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F(u), \tag{2}$$

де $F(u)$ – довільна гладка функція.

Очевидно, що при довільній $F(u)$ рівняння (2) інваріантне відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами $P_0 = \partial_t$, $P_1 = \partial_x$. Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2) в розумінні Лі, тобто опишемо всі функції $F(u)$, при яких допускається розширення алгебри інваріантності.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) в залежності від $F(u)$ є алгебри*

1. $\langle P_0, P_1 \rangle$, *якщо* $F(u)$ *– довільна.*
2. $\langle P_0, P_1, Y \rangle$, *якщо* $F(u) = a(u+b)^p$, $a, b, p = \mathrm{const}$, $a, p \neq 0$,

$$Y = t\partial_t + \left(\frac{p-2}{p}x - \frac{2b}{p}t\right)\partial_x - \frac{2}{p}(u+b)\partial_u.$$

3. $\langle P_0, P_1, Z \rangle$, *якщо* $F(u) = a\exp(u)$, $a = \mathrm{const}$, $a \neq 0$,

$$Z = t\partial_t + (x-2t)\partial_x - 2\partial_u.$$

4. $\langle P_0, D, X \rangle$, *якщо* $F(u) = 1$,

$$D = x\partial_x + u\partial_u, \quad X = g(t)\partial_x + g'(t)\partial_u,$$

$g(t)$ *– довільна гладка функція.*

5. $\langle P_0, D, D_1, A, X \rangle$, *якщо* $F(u) = 0$

$$D_1 = t\partial_t - u\partial_u, \; A = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x-tu)\partial_u.$$

Доведення всіх результатів в даній роботі проводиться за допомогою алгоритму Лі [3, 4], через громіздкість ми упускаємо всі доведення.

Зауваження. При $F(u) = \mathrm{const}$ рівняння (2) один раз інтегрується і зводиться до квазілінійного рівняння в частинних похідних (випадки 4, 5 теореми 1).

Слід зазначити, що кожен з операторів Y та Z можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея, тому групові перетворення, що відповідають операторам Y і Z, можна інтерпретувати як деяку композицію дилатаційних та галілеївських перетворень (перехід від однієї інерціальної системи до іншої відбувається одночасно з масштабними перетвореннями).

Скінченні групові перетворення, що відповідають операторам Y та Z, мають вигляд:

$$Y: \quad t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \qquad x \to \tilde{x} = x\exp\left(\frac{p-2}{p}\theta\right) - bt\exp(\theta),$$
$$u \to \tilde{u} = (u+b)\exp\left(-\frac{2}{p}\theta\right) - b,$$

$$Z: \quad t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \qquad x \to \tilde{x} = (x - 2\theta t)\exp(\theta),$$
$$u \to \tilde{u} = u - 2\theta.$$

Наведемо два приклади редукції для рівняння (2) (для випадків 2 та 3 теореми 1). Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(u+b)^p. \tag{3}$$

Анзац, побудований по оператору

$$Y = t\partial_t + \left(\frac{p-2}{p}x - \frac{2b}{p}t\right)\partial_x - \frac{2}{p}(u+b)\partial_u,$$

має вигляд

$$u = t^{-2/p}\varphi(\omega) - b, \qquad \omega = (x+bt)t^{(2-p)/p}. \tag{4}$$

Він редукує рівняння (3) до звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\varphi\varphi'' + \frac{2-p}{p}\omega\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\varphi^p. \tag{5}$$

При $p = 1$, $a = -1$, $b = 0$ розв'язки рівняння (5) визначатимуть розв'язки рівняння Вахненка (1).

Для рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a\exp(u) \tag{6}$$

анзац, побудований по оператору

$$Z = t\partial_t + (x-2t)\partial_x - 2\partial_u,$$

має вигляд

$$u = \varphi(\omega) - \ln t^2, \qquad \omega = \frac{x}{t} + \ln t^2. \tag{7}$$

Він редукує рівняння (6) до звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\varphi\varphi'' + (2-\omega)\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\exp(\varphi).$$

2. Узагальнення рівнянь Бюргерса та Кортевега-де Фріза. Нижче ми проведемо симетрійну класифікацію наступних узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега-де Фріза:

$$u_0 + uu_1 = \partial_1 \left(F(u_1)\right), \tag{8}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1 \left(F(u_{11})\right), \tag{9}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1 \left(F(u)u_1\right), \tag{10}$$

де $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, F – довільна гладка функція свого аргументу.

Розгляд рівнянь (8)–(10) є продовженням досліджень симетрійних властивостей нелінійних узагальнень рівнянь дифузійного типу [5, 6].

Рівняння (8) можна переписати у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_1)u_{11}, \tag{11}$$

де $f(u_1)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u_1) = \mathrm{const}$ упускаємо з розгляду, оскільки тоді рівняння (11) співпадає з класичним рівнянням Бюргерса.

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11) в залежності від $f(u_1)$ є алгебри*

1. $\langle P_0, P_1, G\rangle$, якщо $f(u_1)$ – довільна.

2. $\langle P_0, P_1, G, D\rangle$, якщо $f(u_1) = C(u_1)^k$, де

$$D = 2t\partial_t + (1-k)x\partial_x - (k+1)u\partial_u,$$

$C, k = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, $k \neq 0, -2$.

3. Якщо $f(u_1) = C(u_1)^{-2}$, $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, тоді алгебра інваріантності нескінченновимірна з базисними операторами

$$X = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \eta\partial_u,$$

де

$$\xi^0 = K_1t^2 + K_2t + K_3,$$
$$\xi^1 = \left(-\frac{K_1}{4C}u^2 - \frac{K_4}{2C}u - \frac{K_1}{2}t + K_5\right)x + q(u,t),$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}(2K_1t + K_2)u + K_4t + K_6, \qquad K_1, \ldots, K_6 = \mathrm{const},$$

$q(u,t)$ *– довільний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності*

$$q_0 - Cq_{uu} = \frac{K_1}{4C}u^3 + \frac{K_4}{2C}u^2 + \left(\frac{7}{2}K_1 t + \frac{3}{2}K_2 - K_5\right)u + K_4 t + K_6.$$

Розглянемо детальніше випадок 3 теореми 2, тобто рівняння

$$u_0 + uu_1 = C(u_1)^{-2}u_{11}. \tag{12}$$

Наявність нескінченновимірної алгебри вказує на можливість лінеаризації цього рівняння. В рівнянні (12) виконаємо перетворення годографа

$$u = \omega, \qquad t = \tau, \qquad x = v(\tau, \omega). \tag{13}$$

При заміні змінних (13) похідні перетворюються наступним чином

$$u_1 = \frac{1}{v_\omega}, \quad u_0 = -\frac{v_\tau}{v_\omega}, \quad u_{11} = -\frac{v_{\omega\omega}}{(v_\omega)^3}.$$

Виконавши необхідні перетворення в рівняні (12), одержимо рівняння теплопровідності

$$v_\tau - Cv_{\omega\omega} = \omega. \tag{14}$$

Якщо в (14) виконати заміну

$$v = z - \frac{1}{6C}\omega^3, \tag{15}$$

то приходимо до лінійного однорідного рівняння теплопровідності

$$z_\tau - Cz_{\omega\omega} = 0. \tag{16}$$

Таким чином, заміни змінних (13), (15) лінеаризують рівняння (12) і задача побудови його розв'язків зводиться до розв'язання лінійного рівняння теплопровідності (16).

Рівняння (9) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_{11})u_{111}, \tag{17}$$

де $f(u_{11})$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u_{11}) = \mathrm{const}$ не розглядаємо, оскільки (17) у цьому випадку є класичним рівнянням Кортевега-де Фріза.

Теорема 3. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (17) в залежності від $f(u_{11})$ є алгебри*

1. $\langle P_0, P_1, G\rangle$, *якщо* $f(u_{11})$ *– довільна.*

2. $\langle P_0, P_1, G, D\rangle$, *якщо* $f(u_{11}) = C(u_{11})^k$, *де*

$$D = (k+3)t\partial_t + (1-k)x\partial_x - (2k+2)u\partial_u,$$

$C, k = \mathrm{const}$; $C, k \neq 0$.

Рівняння (10) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u)u_{11} + f_u(u)(u_1)^2, \tag{18}$$

де $f(u)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u) = \mathrm{const}$ не розглядаємо, оскільки у цьому випадку одержимо рівняння Бюргерса.

Теорема 4. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (18) в залежності від $f(u)$ є алгебри*

1. $\langle P_0, P_1\rangle$, *якщо* $f(u)$ *– довільна.*

2. $\langle P_0, P_1, Y\rangle$, *якщо* $f(u) = a\exp(bu)$, *де*

$$Y = t\partial_t + \left(x + \frac{1}{b}t\right)\partial_x + \frac{1}{b}\partial_u,$$

$a, b = \mathrm{const}$, $a, b \neq 0$.

Знову ж таки зазначимо, що оператор Y можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея

$$Y = t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{b}(t\partial_x + \partial_u) = D + \frac{1}{b}G.$$

Перетворення, що відповідають Y, є комбінацією дилатаційних і галілеївських перетворень, хоча рівняння не є інваріантним відносно розширеної алгебри Галілея.

3. Багатовимірна система рівнянь гідродинамічного типу. В роботі [7] запропоновано наступне узагальнення рівняння Нав'є-Стокса

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v} + \lambda_4\nabla p, \tag{19}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \lambda_3 \triangle, l = 1,2,3,$$

$\vec{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$, $v^l = v^l(t,\vec{x})$, $l = 1,2,3$, $p = p(t,\vec{x})$, ∇ – градієнт, $\triangle$ – оператор Лапласа, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні дійсні параметри, $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна гладка функція, $\vec{v}^{\,2} = \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2$. Тут і надалі за індексами, що повторюються, йде підсумовування.

В даній роботі розглядається рівняння (19) у випадку $\lambda_3, \lambda_4 = 0$. Тоді рівняння (19) матиме вигляд

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}\,) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}, \tag{20}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} + v^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

У випадку, коли $\lambda_2 = 0$, $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$, рівняння (20) є системою рівнянь Ейлера.

Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то систему (20) можна переписати у вигляді

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + \lambda L\vec{v} = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}, \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{21}$$

або в розгорнутому записі

$$\begin{gathered} v^l_{00} + 2v^k v^l_{0k} + v^k_0 v^l_k + v^m v^k_m v^l_k + v^m v^k v^l_{mk} + \\ +\lambda\left(v^l_0 + v^k v^l_k\right) = F\left(v^k v^k\right) v^l, \end{gathered}$$

де k, m, l змінюються від 1 до 3; верхні індекси відповідають компонентам вектора швидкості $\vec{v}$, а нижні індекси визначають диференціювання по відповідній незалежній змінній. Прослідковуючи аналогію з системою рівнянь Ейлера, систему (21) будемо називати узагальненням системи Ейлера.

В [8] вивчено симетрійні властивості одновимірного аналогу системи (21)

$$L(Lu) + \lambda Lu = F(u), \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{22}$$

де $u = u(t,x)$, $L \equiv \partial_t + u\partial_x$.

Для рівняння (22) нами одержано нові нелінійні розширення алгебри Галілея. В [8, 9] для рівняння (22) при $F(u) = \text{const}$ побудовано класи точних розв'язків, що містять довільні функції.

Далі ми проведемо дослідження симетрійних властивостей системи (21). Симетрійна класифікація (21) проводиться за допомогою алгоритму Лі в класі диференціальних операторів першого порядку. Очевидно, що для дослідження симетрії рівняння (21) принципово різними будуть випадки $\lambda = 0$ та $\lambda \neq 0$. При $\lambda \neq 0$, виконавши заміну змінних, завжди можна досягти, що $\lambda \equiv 1$. Тому ми розглянемо окремо два випадки $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$. Наводимо лише результати симетрійної класифікації, упускаючи досить громіздкі доведення.

I. Розглядаємо (21) у випадку $\lambda = 0$, тобто систему рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}. \tag{23}$$

Симетрійна класифікація системи (23) дає 4 принципово різних випадки.

Випадок 1.1. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна неперервно-диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (23) є 7-вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}\rangle$, де

$$\begin{aligned} &P_\mu = \partial_{x_\mu}, \qquad J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a}, \\ &\mu = \overline{0,3}; \quad a,b = \overline{1,3};\ a<b. \end{aligned} \tag{24}$$

Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C\left(\vec{v}^{\,2}\right)^n$, $C, n = \text{const}$, $C \neq 0$, $n \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = C\left(\vec{v}^{\,2}\right)^n\vec{v} \tag{25}$$

є 8-вимірна алгебра $AE_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, D\rangle$ (розширена алгебра Евкліда), де

$$D = x_0\partial_{x_0} + \frac{n-1}{n}x_b\partial_{x_b} - \frac{1}{n}v^b\partial_{v^b}.$$

Випадок 1.3. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C$, $C = \text{const}$, $C \neq 0$. У цьому випадку внаслідок заміни змінних можна покласти $C = 1$ або $C = -1$, тому ми розглянемо ці випадки окремо.

а) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = \vec{v} \tag{26}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, R_a, Z_a, B_1, B_2\rangle$, де

$$\begin{aligned}
&M_{ab} = x_a\partial_{x_b} + v^a\partial_{v^b},\\
&R_a = \operatorname{sh} x_0\partial_{x_a} + \operatorname{ch} x_0\partial_{v^a}, \quad Z_a = \operatorname{ch} x_0\partial_{x_a} + \operatorname{sh} x_0\partial_{v^a},\\
&B_1 = \operatorname{sh} x_0\partial_{x_0} + x_a\operatorname{ch} x_0\partial_{x_a} + x_a\operatorname{sh} x_0\partial_{v^a},\\
&B_2 = \operatorname{ch} x_0\partial_{x_0} + x_a\operatorname{sh} x_0\partial_{x_a} + x_a\operatorname{ch} x_0\partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

b) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\,(L\vec{v}\,) = -\vec{v} \tag{27}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, \widetilde{R}_a, \widetilde{Z}_a, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2\rangle$, де

$$\begin{aligned}
&\widetilde{R}_a = \sin x_0\partial_{x_a} + \cos x_0\partial_{v^a}, \quad \widetilde{Z}_a = -\cos x_0\partial_{x_a} + \sin x_0\partial_{v^a},\\
&\widetilde{B}_1 = \sin x_0\partial_{x_0} + x_a\cos x_0\partial_{x_a} - x_a\sin x_0\partial_{v^a},\\
&\widetilde{B}_2 = \cos x_0\partial_{x_0} - x_a\sin x_0\partial_{x_a} - x_a\cos x_0\partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

Випадок 1.4. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\,(L\vec{v}\,) = 0 \tag{28}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, D_0, G_a, K_a, A\rangle$, де

$$\begin{aligned}
&D_0 = x_0\partial_{x_0} - v^a\partial_{v^a}, \quad G_a = x_0\partial_{x_a} + \partial_{v^a},\\
&K_a = (x_0)^2\partial_{x_a} + 2x_0\partial_{v^a}, \quad A = (x_0)^2\partial_{x_0} + 2x_0x_a\partial_{x_a} + 2x_a\partial_{v^a}.
\end{aligned}$$

II. Розглядаємо систему (21) у випадку $\lambda \neq 0$ (як уже зазначалося, можна вважати $\lambda = 1$), тобто систему рівнянь

$$L\,(L\vec{v}\,) + L\vec{v} = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}. \tag{29}$$

Симетрійна класифікація системи (29) приводить до 4 принципово різних випадків.

Випадок 2.1. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна неперервно-диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (29) є 7–вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}\rangle$.

Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C\vec{v}^{\,2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$, $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\,(L\vec{v}\,) + L\vec{v} = \left(C\vec{v}^{\,2} - \frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)\vec{v} \tag{30}$$

є 8-вимірна алгебра $\langle P_\mu, J_{ab}, Q\rangle$, де

$$Q = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_0\right)\left(\partial_{x_0} - \frac{1}{\sqrt{3}}v^a\partial_{v^a}\right).$$

Випадок 2.3. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C$, $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = C\vec{v} \tag{31}$$

є 19-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, Y_{1a}, Y_{2a}\rangle$, де

$$Y_{1a} = \exp\left(\alpha x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \alpha\partial_{v^a}\right), \quad Y_{2a} = \exp\left(\beta x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \beta\partial_{v^a}\right),$$

$\alpha = \dfrac{-\sqrt{3} - i}{2\sqrt{3}}$, $\beta = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2\sqrt{3}}$.

Випадок 2.4. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = 0 \tag{32}$$

є 19-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, G_a, T_a\rangle$, де

$$T_a = \exp\left(-x_0\right)\left(\partial_{x_a} - \partial_{v^a}\right).$$

Таким чином, проведена повна симетрійна класифікація системи рівнянь (21), одержано нові розширення алгебр Евкліда і Галілея (див. випадки 1.3, 1.4, 2.3, 2.4). Зауважимо, що при $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = \mathrm{const}$ система (21) допускає пониження порядку (див. детальніше [9]).

Автор висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Vakhnenko V.A. Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – **25**, № 15. – P. 4181–4187.

[2] Parkes E.J. The stability of solutions of Vakhnenko's equation // J. Phys A: Math. Gen. – 1993. – **26**. – P. 6469–6475.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[4] Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[5] Фущич В., Бойко В. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де-Фріза високого порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1589–1601.

[6] Boyko V. On new generalizations of the Burgers and Korteweg-de Vries equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 122–129.

[7] Fushchych W., Symmetry analysis // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Institute of Mathematics, 1992. – P. 5–6.

[8] Boyko V. Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of a hydrodynamic type // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – **2**, № 3–4. – P. 418–424.

[9] Фущич В., Бойко В., Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики // Доп. НАН України, 1996. – № 9. – С. 43–48.