

Топологічна еквівалентність функцій на поверхнях

Нехай M — гладкий замкнений двовимірний многовид, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкі функції, тобто $\{f, g\} \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Означення 1. Дві гладкі функції f та g на гладкому замкнутому многовиді M називаються топологічно (гладко) еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм (дифеоморфізм) $h : M \rightarrow M$ многовиду на себе та гомеоморфізм (дифеоморфізм) $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ числової прямої на себе, що зберігає орієнтацію, такі що: $l \circ f = g \circ h$. Дві функції f та g називаються право еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм $h : M \rightarrow M$ многовиду на себе, такий що: $f = g \circ h$.

Означення 2. Точка $x \in M$ називається критичною точкою функції $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, якщо диференціал функції f у цій точці рівний нулю $df(x) = 0$. Нехай (U, h) — карта в точці x , $h(x) = 0$, x_1, x_2 — локальні координати. Тоді точка x буде критичною, якщо $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = 0$. Точки, що не є критичними, називаються регулярними.

Означення 3. Критична точка $x \in M$ називається невідродженою, якщо матриця Гесе $H = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,2}$ у деяких локальних координатах невідроджена.

Означення 4. Гладка функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називається функцією Морса, якщо всі її критичні точки невідроджені.

Лема 1 (Морс). Точка $p \in M$ є невідродженою критичною точкою функції f тоді і тільки тоді, коли існує локальна система координат x_1, x_2 в точці p , в якій $f(x_1, x_2) = f(p) \pm x_1^2 \pm x_2^2$.

Наслідок 1. Всі невідроджені критичні точки є ізольованими.

Наслідок 2. Функція Морса на компактному многовиді може мати лише скінченну кількість критичних точок.

Наслідок 3. Функція на двовимірному замкнутому многовиді може мати невідроджені критичні точки трьох типів: локальний мінімум, сідло, локальний максимум.

Означення 5. Функція Морса f , для якої $f^{-1}(a)$ містить не більше ніж одну критичну точку для довільного $a \in \mathbb{R}$, називається функцією загального положення.

Означення 6. Компоненти зв'язності $f^{-1}(a)$ називаються шарами.

Означення 7. Дві гладкі функції з ізольованими особливостями на поверхні називаються пошарово еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм поверхні на себе, який переводить шари однієї функції в шари іншої. Дві гладкі функції з ізольованими особливостями на поверхні називаються оснащено пошарово еквівалентними, якщо існує гомеоморфізм поверхні на себе, який переводить шари однієї функції в шари іншої зі збереженням напрямку зростання функції.

Означення 8. Графом Кронрода–Ріба гладкої функції з ізольованими критичними точками на замкненій поверхні називається фактор-простір $M^2 / \sim$ з ребрами, орієнтованими у відповідності до напрямку зростання функції, та з індукованою топологією, де $x \sim y$, якщо x та y належать одному шару. Графи Кронрода–Ріба розглядаються з точністю до ізоморфізму орієнтованих графів.

Означення 9. Графом Кронрода–Ріба функції Морса загального положення з нумерацією називається граф Кронрода–Ріба, на множині вершин якого заданий лінійний порядок, що відповідає значенням функції у відповідних критичних точках. Графи Кронрода–Ріба з нумерацією розглядаються з точністю до ізоморфізму орієнтованих графів, який зберігає нумерацію вершин.

Теорема 1 (Кулініч). Дві функції Морса загального положення на замкненій орієнтовній поверхні топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх графи Кронрода–Ріба з нумерацією ізоморфні.

Задамо довільним чином на всіх трубках (тобто бічних поверхнях циліндрів, які складаються з регулярних шарів функції) орієнтацію. Далі задамо орієнтацію на всіх сідлових атомах, які не є неорієнтовними сідловими атомами, наступним чином. Межа таких сідлових атомів складається з трьох компонент зв'язності (кіл). Дві з них рівноправні, бо значення функції на них одночасно більші або менші за значення функції в сідловій точці, а третя відрізняється. Задамо орієнтацію атома згідно з орієнтацією трубки, що приклеєна до третьою компоненти зв'язності межі атома. А поруч із вершинами графа Кронрода–Ріба, що відповідають таким сідловим атомам розставимо по два знаки, які будуть означати, чи узгоджена орієнтація двох компонент зв'язності межі атома з орієнтацією трубок, які приклеєні до атома по цим колам.

Означення 10. Графом Кронрода–Ріба зі знаками функції Морса загального положення називається граф Кронрода–Ріба цієї функції, на кінцях тих його ребер, які входять в вершини валентності три (у випадку, коли два ребра входять, і одне виходить з цих вершин), і тих ребер, які виходять з вершин валентності три (у випадку, коли два ребра виходять, і одне входить в ці вершини), розставлені знаки за сформульованим вище правилом. Два графи Кронрода–Ріба зі знаками називаються ізоморфними, якщо вони ізоморфні як орієнтовані графи, і ізоморфізм переводить набір знаків в еквівалентний. Набори вважаються еквівалентними, якщо від одного до іншого можна перейти за допомогою скінченного числа зміни знаків на обох кінцях довільного ребра на протилежні.

Якщо поверхня орієнтовна, то одним із можливих наборів знаків є всі плюси, тому в орієнтовному випадку знаки можна не ставити, вважаючи що відповідний граф Кронрода–Ріба зі знаками оснащений лише плюсами.

У випадку графів Кронрода–Ріба з нумерацією вершин оснащення знаками відбувається аналогічно, еквівалентність наборів знаків означається так само.

Теорема 2. *Дві функції Морса загального положення на замкненому двовимірному многовиді оснащено пошарово еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм графи Кронрода–Ріба зі знаками ізоморфні. Дві функції Морса загального положення на поверхні топологічно еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні їм графи Кронрода–Ріба з нумерацією вершин і знаками ізоморфні.*

Теорема 3 (Пришляк). *Для кожної ізольованої критичної точки x_0 (крім локального мінімуму і максимуму) існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re}(x + iy)^k$ для деякого натурального числа k .*

Означення 11. Атомом називається окіл P^2 критичного шару, що задається нерівністю $c - \varepsilon \leq f \leq c + \varepsilon$ для досить малого ε , розширований на лінії рівня функції f і що розглядається з точністю до гомеоморфізму, який шари переводить в шари. f -Атомом називається пара (P^2, f) , що розглядається з точністю до оснащеної пошарової еквівалентності.

Означення 12. Молекулою функції f називається граф, отриманий з поверхні стягненням шарів функції в точку, в вершинах якого розташовані атоми відповідних критичних шарів. Причому вказано взаємно однозначна відповідність між граничними колами атома і ребрами графа, що інцидентні вершині, в яку поміщений атом. f -Молекулою функції f називається молекула, ребра якої орієнтовані згідно з напрямком зростання функції f .

Теорема 4. *Гладкі функції з ізольованими критичними точками на орієнтовній поверхні пошарово еквівалентні зі збереженням орієнтації тоді і тільки тоді, коли відповідні їм молекули еквівалентні. Гладкі функції з ізольованими критичними точками на орієнтовній поверхні оснащено пошарово еквівалентні зі збереженням орієнтації тоді і тільки тоді, коли відповідні їм f -молекули еквівалентні.*

Означення 13. fd -Графом називається граф, вершини якого мають валентність 4 і містять мітку-знак, а ребра орієнтовані і розфарбовані в два кольори (внутрішні і граничні). Причому, в кожному вершину входить і з кожної вершини виходить точно по одному ребру кожного кольору, і внутрішні ребра утворюють орієнтовані цикли довжини k_j , $j = 1, \dots, n$, де n — кількість критичних точок шара, в околах яких функція еквівалентна $\operatorname{Re}(x + iy)^{k_j}$, $j = 1, \dots, n$. Граничним колам від’ємних кілець f -атома відповідають цикли граничних ребер fd -графа. Граничним колам додатних кілець f -атома відповідають змішані цикли, де внутрішні і граничні ребра чергуються, причому знак вершини визначає по ребру з якою орієнтацією слід продовжувати обхід (якщо плюс, то напрямком наступного ребра повинен співпадати з напрямком попереднього, якщо ж мінус — то навпаки). Кожне ребро належить точно одному з циклів, що відповідають граничним колам додатних кілець. Еквівалентність fd -графів задається ізоморфізмом, який зберігає орієнтації ребер і мітки вершин, а також операцією зміни напрямків усіх ребер будь-якого однокольорового циклу з одночасною заміною знаків інцидентних вершин на протилежні.

Теорема 5. *Два f -атоми гладких функцій з ізольованими критичними точками на поверхнях еквівалентні тоді і лише тоді, коли відповідні fd -графи еквівалентні.*

Правило задання знаків. Задамо довільним чином на всіх трубках (тобто бічних поверхнях циліндрів, які складаються з регулярних шарів функції) орієнтацію. Далі задамо довільним чином орієнтацію на всіх сідлових атомах, які не є неорієнтовними сідловими атомами. І поруч із кінцями ребер молекули, які відповідають граничним колам таких сідлових атомів розставимо по знаку, які вказують на те, чи узгоджена орієнтація відповідної компоненти зв’язності межі атома з орієнтацією трубки, яка приклеєна до атома по цьому колу.

Через довільний вибір орієнтації на трубках, розстановка знаків не буде однозначною. Зміна орієнтації трубки означає одночасну заміну знаків на обох кінцях відповідного ребра на протилежні. При цьому, якщо на одному з кінців ребра знака не має (тобто ребро інцидентне вершині, яка відповідає локальному екстремуму або неорієнтовному атому), то можна замінити знак на іншому кінці на довільний. Зміна орієнтації сідлового атома означає одночасну заміну знаків на тих кінцях ребер, які інцидентні відповідній вершині. В орієнтовному випадку знаки можна не ставити.

Означення 14. f -Молекулою з нумерацією вершин та зі знаками гладкої функції з ізольованими критичними точками називається f -молекула, вершини якої занумеровані згідно зі значеннями функції у відповідних точках, і яка оснащена знаками у відповідності до правила задання знаків.

Означення 15. Дві f -молекули з нумерацією вершин та зі знаками називаються ізоморфними, якщо існує їх гомеоморфізм, який продовжується на атоми та зберігає нумерацію вершин та еквівалентність наборів знаків, що задається замінами, які відповідають змінам орієнтацій трубок або сідлових атомів.

Теорема 6. *Гладкі функції з ізольованими критичними точками на поверхні топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм f -молекули з нумерацією вершин та зі знаками ізоморфні.*