

ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ГРАФІКІВ НЕПЕРЕРВНИХ КАНТОРІВСЬКИХ ПРОЕКТОРІВ

ПАНАСЕНКО О.Б.

Анотація. Неперервні канторівські проектори — це специфічний клас неперервних ніде не диференційовних функцій, що був введений у розгляд в роботах [1, 2]. В доповіді досліджується питання про фрактальну розмірність їх графіків.

1. ВСТУП

Нехай $s > 2$ і дано вектор $Q = \|a_i\|$, $i = \overline{0, s-1}$, елементи якої задовольняють умови $a_i > 0$, $\sum_{i=0}^{s-1} a_i = 1$. Нагадаємо [2, 3], що Q -представленням дійсного числа $x \in [0, 1]$ називається його подання у вигляді

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^Q,$$

де $\alpha_k \in N_{s-1}^0 \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — цифри числа x , $\gamma_m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i$. Таке представлення існує для всіх чисел з $[0, 1]$, причому деякі мають єдине зображення у вигляді $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^Q$ (тоді такі числа називають Q -ірраціональними), а решта мають два різних зображення: $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (0)}^Q$ з періодом 0 та $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots [\alpha_n - 1] (s-1)}^Q$ з періодом $s-1$ (такі числа називаються Q -раціональними).

З допомогою Q -представлення чисел в роботах [1, 2] означено наступний клас функцій.

Зафіксуємо вектор $Q = \|a_i\|$, $i = \overline{0, s-1}$, $a_i > 0$, $\sum_{i=0}^{s-1} a_i = 1$.

Означення 1. Неперервними канторівськими проекторами називаються функції виду

$$f_{p,r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^2, \quad (1)$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} p, & \text{якщо } \alpha_1(x) = r \\ 1-p, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq r, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x) \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1, \end{cases}$$

$\alpha_k(x)$ — k -та цифра в Q -зображенні x , r — фіксований елемент з множини N_{s-1}^0 , $p \in \{0, 1\}$.

Доведено [1, 2], що: 1) означення 1 коректне в тому сенсі, що різним Q -зображенням Q -раціональних чисел відповідає одне і теж саме значення функції; 2) означені функції є неперервними і ніде не диференційовними.

Деякі роботи присвячені дослідженню фрактальних властивостей неперервних канторівських проекторів [4, 5], а особливо того випадку, коли вектор Q складається з однакових елементів (тобто аргумент подається s -адичним дробом). Саме для цього типу канторівських проекторів доведено [5], що їх графіками є фрактальні множини з клітинковою розмірністю $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_s 2$ і розмірністю Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2(1 + (s-1)^{\log_s 2})$.

В даній роботі досліджується питання про клітинкову розмірність означених вище функцій.

Основним результатом роботи є:

Теорема 1. *Фрактальна клітинкова розмірність графіків неперервних канторівських проекторів дорівнює d , де d — єдиний додатний корінь рівняння $\sum_{k=0}^{s-1} a_k^{d-1} = 2$.*

2. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1

Для спрощення записів обмежимося розглядом випадку, коли $s = 3$; для більш загального випадку доведення проводиться аналогічно.

В роботі [5] обґрунтовано специфічні самоафінні властивості графіків неперервних канторівських проекторів (рис. 1). На рисунку $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ — графіки функцій відповідно $f_{0,0}(x), f_{0,1}(x), f_{0,2}(x), f_{1,0}(x), f_{1,1}(x), f_{1,2}(x)$.

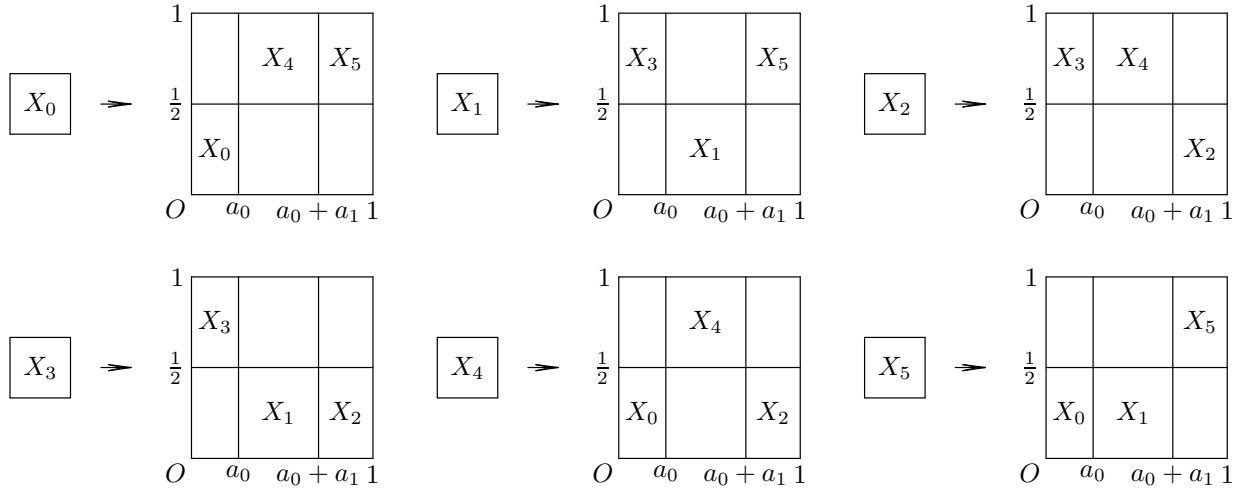


РИС. 1. Самоафінність графіків неперервних канторівських проекторів.

Лема 1 ([6, 7]). *Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$, $N(\varepsilon)$ — найменша кількість квадратів виду $[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon] \times [(l-1)\varepsilon, l\varepsilon]$, $k, l \in \mathbb{Z}$, необхідних для покриття множини E . Якщо існує границя:*

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon},$$

то фрактальна клітинкова розмірність множини E дорівнює d .

Нехай $N^{X_i}(\varepsilon)$ — найменша кількість квадратів зі стороною ε , необхідних для покриття множини X_i . Нехай також $N_j^{X_i}(\varepsilon)$ — найменша кількість квадратів зі стороною ε , необхідних для покриття множини X_i на циліндричному відрізку першого рангу Δ_j^Q .

Лема 2. Для кожного $\varepsilon > 0$, $i \neq j$, мають місце співвідношення:

$$|N^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_j}(\varepsilon)| < \frac{1}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Доведення. Передусім зазначимо, що в силу симетричності відносно прямої $y = \frac{1}{2}$ графіків X_0 та X_3 , X_1 та X_4 , X_2 та X_5 , мають місце рівності $N^{X_0}(\varepsilon) = N^{X_3}(\varepsilon)$, $N^{X_1}(\varepsilon) = N^{X_4}(\varepsilon)$, $N^{X_2}(\varepsilon) = N^{X_5}(\varepsilon)$ для кожного $\varepsilon > 0$, що не суперечить (2).

Для спрощення доведення нерівності (2), розглянемо її для випадку, наприклад, $i = 0$, $j = 5$. Розглянемо графіки цих множин на основі схематичного рисунку 1. На відрізках $[0, a_0]$ та $[a_0 + a_1, 1]$ графіки цих функцій повністю співпадають, і, отже, для їх покриття на цих відрізках необхідна однакова кількість квадратів. На відрізку $[a_0, a_0 + a_1]$ графіки відрізняються, але вони симетричні відносно прямої $y = \frac{1}{2}$, тому на цьому відрізку необхідна також однакова кількість квадратів для покриття графіка. Єдине неспівпадіння може виявитись для найменшої кількості тих квадратів, що перетинають прямі $x = a_0$ та $x = a_0 + a_1$. Але їх кількість не може перевищувати $2 \cdot \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$.

Для довільних i, j доведення проводиться аналогічно. Лему доведено. $\square$

Аналогічними міркуваннями одержуємо таку лему:

Лема 3. Для кожного $\varepsilon > 0$, має місце співвідношення:

$$N_0^{X_i}(\varepsilon) + N_1^{X_i}(\varepsilon) + N_2^{X_i}(\varepsilon) - N^{X_i}(\varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Нехай здійснено ефективне покриття множини X_0 . Для цього використано $N^{X_0}(\varepsilon)$ квадратів зі стороною ε . В силу неперервності графіка X_0 ці квадрати можна виділити в $K(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ колонок. Занумеруємо ці колонки числами від 1 до $K(\varepsilon)$ і нехай $n_j(\varepsilon)$, $j = 1, K(\varepsilon)$ — кількість квадратів зі стороною ε , які містяться в j -ій колонці. Подіємо на це покриття таким перетворенням: здійснимо стиск з коефіцієнтом a_0 по горизонталі і $\frac{1}{2}$ по вертикалі. При цьому перетворенні квадрати зі стороною ε переходять в прямокутники з шириною $a_0\varepsilon$ та висотою $\frac{\varepsilon}{2}$, а j -а колонка (прямокутник з шириною ε і висотою $n_j(\varepsilon) \cdot \varepsilon$) — в новий прямокутник з шириною $a_0\varepsilon$ і висотою $\frac{n_j(\varepsilon)\varepsilon}{2}$. Перейдемо тепер до квадратів зі стороною $a_0\varepsilon$. Для того, щоб покрити j -у колонку, їх необхідно мінімум $\left\lceil \frac{(n_j-1)\varepsilon}{2} \right\rceil$ і максимум $\left\lceil \frac{n_j\varepsilon}{2} \right\rceil$. Таким чином, можемо зробити таку оцінку величини $N_0^{X_0}(a_0\varepsilon)$:

$$\sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) - 1}{2a_0} \leq \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \left\lceil \frac{(n_j(\varepsilon) - 1)\varepsilon}{2a_0\varepsilon} \right\rceil \leq N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \left\lceil \frac{n_j(\varepsilon)\varepsilon}{2a_0\varepsilon} \right\rceil \leq \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) + 1}{2a_0},$$

звідки

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) - \frac{K(\varepsilon)}{2a_0} = \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) - 1}{2a_0} \leq N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{K(\varepsilon)} \frac{n_j(\varepsilon) + 1}{2a_0} = \frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) + \frac{K(\varepsilon)}{2a_0}.$$

Нарешті здійснимо останню оцінку:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) - \frac{A}{\varepsilon} \leq N_0^{X_0}(a_0\varepsilon) \leq \frac{1}{2a_0}N^{X_0}(\varepsilon) + \frac{B}{\varepsilon},$$

де A, B — деякі додатні константи, що залежать від a_0 . Перепишемо останню нерівність у такому вигляді:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) - \frac{A_0}{\varepsilon} \leq N_0^{X_0}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{B_0}{\varepsilon}.$$

Аналогічними міркуваннями одержуємо наступні нерівності:

$$\frac{1}{2a_1}N^{X_4}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) - \frac{A_1}{\varepsilon} \leq N_1^{X_0}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2a_1}N^{X_4}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{B_1}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{2a_2}N^{X_5}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A_2}{\varepsilon} \leq N_2^{X_0}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2a_2}N^{X_5}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \frac{B_2}{\varepsilon},$$

де A_i, B_i — деякі фіксовані додатні числа, що залежать від значення a_i .

Додамо останні три подвійні нерівності і, враховуючи леми 2 і 3, одержуємо:

$$\frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A}{\varepsilon} \leq N^{X_0}(\varepsilon), \quad (3)$$

$$N^{X_0}(\varepsilon) \leq \frac{1}{2a_0}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2}N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \frac{B}{\varepsilon}, \quad (4)$$

де A, B — деякі фіксовані додатні константи.

Лема 4. *Існують такі додатні C_1, C_2, ε^* , що для будь-якого $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$ виконується нерівність*

$$C_2\varepsilon^{-d} \leq N^{X_0}(\varepsilon) \leq C_1\varepsilon^{-d}, \quad (5)$$

де d — єдиний додатний корінь рівняння $\sum_{i=0}^{s-1} a_i^{d-1} = 2$.

Доведення. Доведення леми складатиметься з двох частин. Спочатку доведемо праву, а потім ліву нерівності в (5).

В доведенні леми ми будемо використовувати такі додаткові позначення: $a_{\min} = \min\{a_0, a_1, \dots, a_{s-1}\}$, $a_{\max} = \max\{a_0, a_1, \dots, a_{s-1}\}$.

1. Оберемо $\varepsilon_0 > 0$ і $C_1 > 0$ такими, що нерівність

$$N^{X_0}(\varepsilon) \leq C_1\varepsilon^{-d} - \frac{2B}{\varepsilon} \quad (6)$$

виконується для всіх $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$. Тоді для $a_{\max}\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\varepsilon_0 \leq \frac{a_{\max}}{a_i}\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{a_i} \leq \frac{\varepsilon_0}{a_i} \leq \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}},$$

тобто $\varepsilon_0 \leq \frac{\varepsilon}{a_i} \leq \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, і, отже, для таких значень ε нерівність (6) можна переписати у вигляді:

$$N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right) \leq C_1\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right)^{-d} - \frac{2B \cdot a_i}{\varepsilon}.$$

Повернемось до нерівності (4) для $a_{\max}\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} N^{X_0}(\varepsilon) &\leq \frac{1}{2a_0} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) + \frac{B}{\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{1}{2a_0} \left(C_1 \varepsilon^{-d} a_0^d - \frac{2Ba_0}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2a_1} \left(C_1 \varepsilon^{-d} a_1^d - \frac{2Ba_1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2a_2} \left(C_1 \varepsilon^{-d} a_2^d - \frac{2Ba_2}{\varepsilon} \right) + \frac{B}{\varepsilon} = \\ &= C_1 \varepsilon^{-d} \left(\frac{1}{2} a_0^{d-1} + \frac{1}{2} a_1^{d-1} + \frac{1}{2} a_2^{d-1} \right) - \frac{2B}{\varepsilon} = C_1 \varepsilon^{-d} - \frac{2B}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Таким чином, ми показали, що якщо нерівність (6) виконується для $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, то вона виконується і для $a_{\max}\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Позначимо тепер $\varepsilon_1 = a_{\max}\varepsilon_0$, тоді для нерівність $a_{\max}\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ можна переписати у вигляді $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_1}{a_{\max}} \leq \frac{\varepsilon_1}{a_{\min}}$ і для ε_1 повторити міркування, які проводились для ε_0 . Продовжимо такі ж міркування далі, врешті-решт знаходимо, що нерівність (6) виконується для всіх ε таких, що $(a_{\max})^k \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки при $k \rightarrow \infty$: $(a_{\max})^k \varepsilon_0 \rightarrow 0$, то стверджуємо, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}\right]$ має місце:

$$N^{X_0}(\varepsilon) \leq C_1 \varepsilon^{-d} - \frac{2B}{\varepsilon} < C_1 \varepsilon^{-d},$$

що і доводить праву частину нерівності (5).

2. Оскільки функції $f_{p,q}(x)$ ніде не диференційовні [2], то вони є функціями необмеженої варіації і їх 1-мірна міра Хаусдорфа дорівнює нескінченності. Це означає, що $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} N^{X_0}(\varepsilon)\varepsilon =$

∞ , а значить існує таке $\delta_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$:

$$N^{X_0}(\varepsilon) \cdot \varepsilon \geq 4A,$$

де A — константа з (3). Тоді для всіх $0 < C_2 \leq 2Aa_{\min}\delta_0^{d-1}$ і всіх $\delta_0 \leq \varepsilon \leq \frac{\delta_0}{a_{\min}}$ виконується нерівність

$$N^{X_0}(\varepsilon) \geq \frac{2A}{\varepsilon} + \frac{2A}{\varepsilon} \geq \frac{2Aa_{\min}}{\delta_0} + \frac{2A}{\varepsilon} \geq C_2 \varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon}. \quad (7)$$

Повторимо ті ж самі міркування, які використовувались при доведенні правої частини нерівності (5), а саме перейдемо до $\varepsilon \in [a_{\max}\delta_0, \delta_0]$. Тоді $\delta_0 \leq \frac{\varepsilon}{a_i} \leq \frac{\delta_0}{a_{\min}}$ і перепишемо нерівність (7) у вигляді

$$N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_i}\right) \geq C_2 \varepsilon^{-d} a_i^d + \frac{2A \cdot a_i}{\varepsilon}.$$

Знову розглянемо нерівність (3) для $\delta_0 \leq \frac{\varepsilon}{a_i} \leq \frac{\delta_0}{a_{\min}}$:

$$\begin{aligned} N^{X_0}(\varepsilon) &\geq \frac{1}{2a_0} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right) + \frac{1}{2a_1} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_2} N^{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{a_2}\right) - \frac{A}{\varepsilon} \geq \\ &\geq \frac{1}{2a_0} \left(C_2 \varepsilon^{-d} a_0^d + \frac{2Aa_0}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2a_1} \left(C_2 \varepsilon^{-d} a_1^d + \frac{2Aa_1}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{2a_2} \left(C_2 \varepsilon^{-d} a_2^d + \frac{2Aa_2}{\varepsilon} \right) - \frac{A}{\varepsilon} = \\ &= C_2 \varepsilon^{-d} \left(\frac{1}{2} a_0^{d-1} + \frac{1}{2} a_1^{d-1} + \frac{1}{2} a_2^{d-1} \right) + \frac{2A}{\varepsilon} = C_2 \varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отже, ми показали, що існують такі $\delta_0 > 0$ і $C_2 > 0$, що виконується нерівність (7) для $\varepsilon \in \left[a_{\max}\delta_0, \frac{\delta_0}{a_{\min}}\right]$. Позначивши $\delta_1 = a_{\max}\delta_0$ знаходимо, що аналогічні міркування можна

повторити замінивши δ_0 на δ_1 . Таким чином, нерівність (7) має місце для $\varepsilon \in \left[a_{\max}^k \delta_0, \frac{\delta_0}{a_{\min}} \right]$, $k \in \mathbb{N}$, а оскільки $a_{\max}^k \rightarrow 0$ (при $k \rightarrow \infty$), то і для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta_0}{a_{\min}} \right]$:

$$N^{X_0}(\varepsilon) \geq C_2 \varepsilon^{-d} + \frac{2A}{\varepsilon} > C_2 \varepsilon^{-d}.$$

Отже, при $\varepsilon^* = \min \left\{ \frac{\varepsilon_0}{a_{\min}}, \frac{\delta_0}{a_{\min}} \right\}$ має місце (5) для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$. □

З лем 1 та 4 випливає твердження теореми 1, оскільки:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} &\leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lg C_1 \varepsilon^{-d}}{-\lg \varepsilon} = d, \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} &\geq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lg C_2 \varepsilon^{-d}}{-\lg \varepsilon} = d, \end{aligned}$$

тобто $\alpha^K(X_0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\lg N(\varepsilon)}{-\lg \varepsilon} = d$. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С. 78–90.
- [2] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.
- [3] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [4] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної, ніде не диференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002. — С. 327–338.
- [5] *Панасенко О. Б.* Розмірність Хаусдорфа–Безиковича ніде не диференційовної функції Працьовитого (готується до публікації).
- [6] *Barnsley M. F.* Fractals everywhere. — San Diego, 1988.— 396 p.
- [7] *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського
E-mail address: panasenko_alex@bigmir.net