

ФУНКЦІЇ ТИПУ ТАКАГІ–ВАН ДЕР ВАРДЕНА

ПАНАСЕНКО О.Б.

Анотація. Для різних послідовностей дійсних чисел (a_n) таких, що $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k} < \infty$ розглядаються функції виду:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1} \varphi(2^k x)}{2^k},$$

де $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$, які ми називаємо функціями типу Такагі–Ван дер Вардена. Досліджено (частково) питання про розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіків цих функцій, а також деякі інші фрактальні та арифметичні властивості.

Abstract. For different sequences (a_n) of real numbers such that $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k} < \infty$ we consider the next family of functions:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+1} \varphi(2^k x)}{2^k},$$

where $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$, which we call the Takagi–Van der Waerden-like functions. We investigate (partly) the Hausdorff–Besicovitch dimension of its graphs and some other fractal and arithmetical properties.

1. ВСТУП

Одним з класичних прикладів неперервної функції без скінченної похідної є функція, що була запропонована голландським математиком Б. Л. Ван дер Варденом у 1930 році [1]. Вона задається як сума наступного ряду:

$$F_W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \varphi(10^n x), \quad (1)$$

де $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$ — відстань до найближчого цілого числа — періодична з періодом 1 функція, яка на $[0, \frac{1}{2}]$ рівна x , а на $[\frac{1}{2}, 1]$ — $(1-x)$. Традиційно в вітчизняній літературі ця функція та певні її модифікації так і називається — функція Ван дер Вардена [2]. Втім до аналогічної ідеї побудови неперервних ніде не диференційовних функцій ще у 1903 році прийшов японський математик Т. Такагі [3]. Приклад Такагі мав вигляд:

$$F_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi(2^n x). \quad (2)$$

Беручи останнє до уваги, ми дещо змінимо традиції і називатимемо усі функції виду

$$F_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^n} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |b^n x - m|,$$

де b — парне, *функціями Такагі–Ван дер Вардена*. Проте в більшості випадків, якщо інше окремо не зауважено, під функцією Такагі–Ван-вер-Вардена ми будемо розуміти функцію (2).

Вивченням властивостей цих функцій займались чимало дослідників. Крім цього досліджувались і більш широкі класи функцій. Одне з узагальнень бере свій початок від К. Кноппа (1918) [4]. Розглянемо функції виду

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \varphi(b^n x),$$

де, як і раніше, $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$, $a \in (0, 1)$, $ab > 1$. В роботі [5] доведено, що функції цього класу неперервні та ніде не диференційовні.

В роботі [6], зокрема, розглядаються фрактальні властивості класу функцій виду:

$$F_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-\alpha n} \Phi(b^n x + \theta_n),$$

де $0 \leq \theta_n < 1$, $b > 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $\Phi(x)$ — періодична функція з періодом 1. Автори Р. Молдін та С. Вільямс в цій праці ввели нову геометричну властивість функцій: опукла ліпшицева порядку α , і використали це для оцінок фрактальної розмірності графіків описаного класу функцій та довели, що розмірність Хаусдорфа–Безиковича функції Такагі–Ван дер Вардена дорівнює 1.

Об'єктом дослідження цієї роботи є клас функцій, що був введений в роботах [7, 8].

2. КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо систему функцій Радемахера:

$$R_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } \alpha_k = 0, \\ -1 & \text{якщо } \alpha_k = 1, \end{cases}$$

де α_k — k -та двійкова цифра x . Для коректності такого означення в двійково-раціональній точці $x = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k}$, покладемо $R_m(x) = 0$ для всіх $m \geq n$. Зафіксуємо довільну послідовність дійсних чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і введемо у розгляд наступну послідовність функцій:

$$T_k(x) = a_k \cdot \int_0^x R_k(t) dt.$$

Об'єктом нашого дослідження є функція, що задається як сума ряду:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x). \quad (3)$$

Дамо геометричну інтерпретацію побудови вказаних функцій. Функції $R_k(x)$ та $T_k(x)$ періодичні з періодом $2^{-(k-1)}$, причому друга є неперервною на $[0, 1]$ функцією, що

лінійна з кутовим коефіцієнтом $(-1)^l a_k$ на кожному з проміжків виду $[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}]$, $l = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Тому часткові суми ряду (3)

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n T_k(x).$$

є неперервними функціями, графіком кожної з яких є ламана, що складається з 2^n ланок. Геометрично, графік функції $f_{n+1}(x)$ може бути одержаний з графіка функції $f_n(x)$ заміною кожної її лінійної ланки на ламану, що складається з двох частин, причому її початок та кінець співпадають з кінцями ланки, що замінюється.

Ми будемо розглядати описаний клас функцій також з дещо іншої точки зору, а саме, функція (3) може бути представлена у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} \varphi(2^n x)}{2^n}, \quad (4)$$

де $\varphi(x) = \inf_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$, оскільки $\int_0^x R_k(t) dt = \frac{1}{2^{k-1}} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1}x - m|$.

Таким чином, кожна нескінченна послідовність (a_n) дійсних чисел визначає функцію $f(x)$ за формулою (3). Для з'ясування умов, коли ряд в (3) рівномірно збіжний, використаємо наступну ознаку Вейєрштрасса:

Лема 1. *Нехай маємо два ряди: функціональний $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, членами якого є функції визначені на множині E , та числовий $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$). Якщо цей числовий ряд збіжний і для кожного k : $|u_k(x)| \leq b_k$, то функціональний ряд абсолютно і рівномірно збігається на множині E .*

Теорема 1. *Якщо послідовність (a_n) така, що числовий ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \quad (5)$$

збіжний, то функція (3) неперервна на $[0, 1]$.

Доведення. Оцінимо k -й член функціонального ряду в (3):

$$|T_k(x)| = |a_k| \cdot \left| \int_0^x R_k(t) dt \right| \leq \frac{|a_k|}{2^k} \quad (6)$$

Отже, з леми 1 слідує рівномірна збіжність ряду в правій частині рівності (3) за умови, коли ряд (5) збіжний, а оскільки всі члени ряду — неперервні функції на $[0, 1]$, то такою буде і сума ряду. $\square$

Означення 1. Нехай (a_n) — фіксована послідовність дійсних чисел така, що ряд (5) збігається. Функцію, яка задається формулою (3), називатимемо *функцією типу Такагі–Ван дер Вардена*, що визначається послідовністю (a_n) .

Зауваження 1. Назва зумовлена тим, що у випадку коли всі члени послідовності (a_n) рівні 1, то функція (3) є прикладом Такагі (2). Якщо, наприклад, $a_{2n-1} = 1$, $a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$, то $f(x)$ є модифікованим прикладом функції Ван дер Вардена, який розглядається в [2].

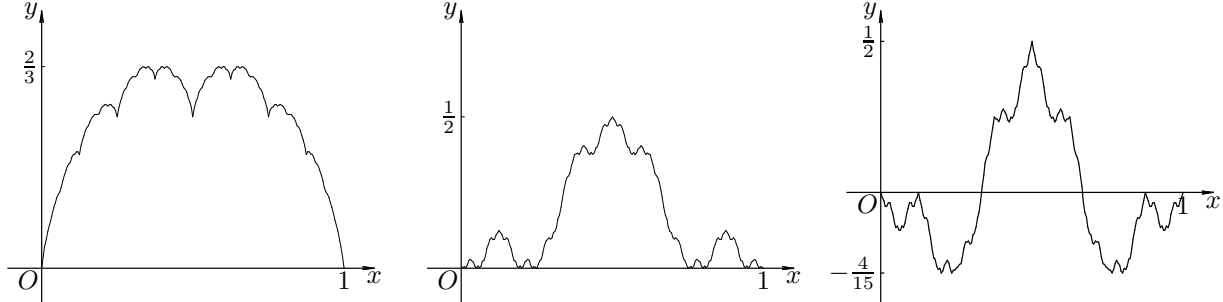


Рис. 1. Графіки функцій типу Такагі–Ван дер Вардена, що відповідають різним послідовностям: ліворуч для $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$; в центрі для $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; праворуч для $a_{2n-1} = 1$, $a_{2n} = -2$, $n \in \mathbb{N}$.

Умову ніде не диференційовності функції типу Такагі–Ван дер Вардена $f(x)$, що визначається послідовністю (a_n) , дає наступна теорема.

Теорема 2 ([8]). *Якщо послідовність (a_n) така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то функція (3) ніде не диференційовна. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, але $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, то функція (3) недиференційовна майже скрізь.*

Інші, більш загальні, диференціальні властивості функцій вказаного класу досліджено в [7].

3. ФРАКТАЛЬНА РОЗМІРНІСТЬ ГРАФІКА

Слідуючи [9], сформулюємо означення клітинкової розмірності та розмірності Хаусдорфа–Безиковича множини.

Клітинковою розмірністю множини $E \subset \mathbb{R}^n$ називається число

$$\alpha^K(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lg N_\delta(E)}{-\lg \delta}, \quad (7)$$

(якщо границя існує), де $N_\delta(E)$ — число n -мірних кубів зі стороною δ , які покривають E і мають вигляд $[m_1\delta, (m_1+1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n+1)\delta]$, де $m_1, m_2, \dots, m_n$ — цілі.

Зауважимо, що границя (7) залишається незмінною, якщо замість неперервної змінної δ розглянути довільну фіксовану послідовність покриттів множини кубами зі стороною δ_n , таких що $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \delta_{n+1}}{\lg \delta_n} = 1$, і розглянути відповідну границю в (7) при $n \rightarrow \infty$.

Сім'я підмножин (E_i) називається ε -покриттям множини E , якщо $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ і діаметр $|E_i| < \varepsilon$ для всіх i . Для заданої множини E та довільного $\varepsilon > 0$ означимо функцію

$$m_{\alpha}^{\varepsilon}(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^{\alpha} : \bigcup_i E_i \supset E \right\},$$

де інфімум береться за всіма можливими ε -покриттями множини E . α -мірною мірою Хаусдорфа множини E називається число

$$H_{\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} m_{\alpha}^{\varepsilon}(E).$$

Міра $H_{\alpha}(E)$, взагалі кажучи, може бути нулем, нескінченністю або додатнім числом. Число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_{\alpha}(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_{\alpha}(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E* (деякі автори називають його розмірністю Хаусдорфа множини E).

Для довільної множини E має місце нерівність:

$$\alpha_0(E) \leq \alpha^K(E). \quad (8)$$

Теорема 3. *Якщо послідовність (a_n) дійсних чисел обмежена, то клітинкова розмірність та розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції (3) дорівнюють 1.*

Доведення. Нехай

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) = \sum_{k=1}^n T_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(x),$$

де $T_k(x) = a_k \cdot \int_0^x R_k(t) dt$ і $R_k(x)$ — система функцій Радемахера.

Спочатку доведемо, що клітинкова розмірність графіка дорівнює 1. З цією метою використаємо покриття графіка функції квадратами зі стороною 2^{-n} , $n \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що графіком функції $\sum_{k=1}^n T_k(x)$ є ламана, що складається з 2^n ланок, довжина проєкцій кожної з яких на вісь Ox дорівнює 2^{-n} , а на вісь Oy — не перевищує число $2^{-n} \cdot \sum_{k=1}^n |a_k|$.

Згідно з (6), $\sum_{k=n+1}^{\infty} T_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k}$. Таким чином, графік функції $f(x)$ може бути покритий 2^n прямокутниками, сторони якого паралельні осям координат, із шириною 2^{-n} та висотою $2^{-n} \cdot \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k}$.

Перейдемо від покриття прямокутниками до покриття квадратами зі стороною $\delta_n = 2^{-n}$. Нехай N_{δ_n} — найменша кількість квадратів зі стороною δ_n , необхідних для цього. Маємо:

$$N_{2^{-n}} \leq 2^n \cdot \frac{2^{-n} \cdot \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{2^k}}{2^{-n}} + 2^n = 2^n \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{n+k}|}{2^k} + 1 \right).$$

Оскільки послідовність (a_n) обмежена, то існує таке $M > 0$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leq M$.
Маємо:

$$\begin{aligned} \alpha^K(\Gamma_f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(N_{2^{-n}})}{-\lg 2^{-n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \left(2^n \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{n+k}|}{2^k} + 1 \right) \right)}{\lg 2^n} \leq \\ &\leq 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(Mn + M + 1)}{\lg 2^n} = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Загальновідомо, що фрактальна розмірність (клітинкова, розмірність Хаусдорфа–Безиковича) графіка неперервної функції не менша 1. Отже, $\alpha^K(\Gamma_f) = 1$. В силу нерівності (8) стверджуємо, що і розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції (3) дорівнює 1. $\square$

Наслідок 1. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича прикладу Такагі (2) дорівнює 1.

Наслідок 2. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича модифікованої функції Ван дер Вардена з [2] дорівнює 1.

Теорему 3 можна ще більше узагальнити, дещо замінивши умову обмеженості послідовності (a_n) .

Теорема 4. Нехай послідовність (a_n) така, що для кожного $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{q^n} = 0$. Тоді клітинкова розмірність та розмірність Хаусдорфа–Безиковича графіка функції (3), що визначається послідовністю (a_n) , дорівнюють 1.

Доведення. Умова, що накладається на послідовність (a_n) , фактично означає, що абсолютні величини членів цієї послідовності прямують до нескінченності „повільніше“, ніж будь-яка зростаюча показникова функція. Це означає, що для кожного $q \in (1, 2)$ існує своє $C > 0$ таке, що $|a_n| < C \cdot q^n$ для кожного n .

Розглянемо довільну спадну послідовність $(q_i)_{i=1}^{\infty}$ таку, що $q_i \in (1, 2)$ і $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = 1$, а разом з нею і послідовність (c_i) таку, що $|a_k| \leq c_i \cdot q_i^k$, але $\lim_{q_i \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{c_i q_i^k} = 1$. Така послідовність (c_i) існує; остання умова лише визначає її певну „мінімальність“, і з неї слідує, що:

$$\lim_{q_i \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c_i}{q_i^k} = 0. \quad (10)$$

Повторивши міркування, які використовувались при доведенні теореми 3, оцінимо суми:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k| &\leq \sum_{k=1}^n c_i q_i^k \leq c_i \cdot n q_i^n; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{n+k}|}{2^k} &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_i q_i^{n+k}}{2^k} = c_i q_i^n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q_i}{2} \right)^k = c_i q_i^n \cdot \frac{q_i}{2 - q_i}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $q_i > 1$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \alpha^K(\Gamma_f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(N_{2^{-n}})}{-\lg 2^{-n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \left(2^n \cdot \left(\sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{n+k}|}{2^k} + 1 \right) \right)}{\lg 2^n} \leq \\ &\leq 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \left(c_i n q_i^n + c_i q_i^n \cdot \frac{q_i}{2^{-q_i}} + 1 \right)}{\lg 2^n} = \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg c_i}{\lg 2^n} + \log_2 q_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки послідовність (q_i) спадна, а (c_i) , очевидно, зростаюча, то продовжимо ланцюжок оцінок перейшовши до границі при $q_i \rightarrow 1$, врахувавши разом з тим (10):

$$\alpha^K(\Gamma_f) \leq \lim_{q_i \rightarrow 1} \left(1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg c_i}{\lg 2^n} + \log_2 q_i \right) = 1. \quad (12)$$

Отже, маємо $\alpha^K(\Gamma_f) \leq 1$, а оскільки Γ_f — графік неперервної функції, то $\alpha^K(\Gamma_f) = \alpha_0(\Gamma_f) = 1$. $\square$

4. ДЕЯКІ АРИФМЕТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ

Із симетрії графіків функцій Радемахера відносно прямої $x = \frac{1}{2}$ слідує і симетричність графіка функції типу Такагі-Ван дер Вардена відносно цієї прямої, тому $f(x) = f(1-x)$. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}$. Тоді якщо $\bar{x} = \Delta_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_n \dots}$, де $\bar{\alpha}_k = 1 - \alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, то $f(x) = f(\bar{x})$.

Лема 2. *Якщо (a_n) — послідовність раціональних чисел, то функція типу Такагі-Ван дер Вардена (3) відображає двійково-раціональні точки в раціональні.*

Доведення. Скористаємось методом математичної індукції. База індукції: $f(0) = f(1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{a_1}{2}$ — раціональні числа.

Нехай твердження леми справедливе для всіх двійково-раціональних чисел виду $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}(0)}$. Доведемо, що значення функції $f(x)$ в точці $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}$ є також раціональним числом.

Маємо:

$$\begin{aligned} f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}) &= \frac{1}{2} f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}(0)}) + \frac{1}{2} f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}(1)}) + \frac{a_n}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2} f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}(0)}) + \frac{1}{2} f(\Delta_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_{n-1}(0)}) + \frac{a_n}{2^n}. \end{aligned}$$

Число в правій частині є раціональним, отже таким є і $f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)})$. Таким чином, образом двійково-раціонального числа є число раціональне. $\square$

Попередню лему в загальному випадку не можна посилити замінивши слово „двійково-раціональне“ на „раціональне“. Проте, наклавши додаткові умови на послідовність (a_n) , це можна досягнути.

Теорема 5. *Нехай (a_n) — періодична з періодом k послідовність раціональних чисел, тобто $a_{n+k} = a_n$ для всіх n . Тоді функція (3) відображає раціональні точки в раціональні.*

Доведення. Якщо x — двійково-раціональне число, то те, що $f(x)$ також раціональне, є наслідком леми 2. Нехай x — раціональне число, що не є двійково-раціональним. Тоді x має періодичне двійкове представлення $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_l (\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})}$, $p > 1$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} \cdot \varphi(2^n x)}{2^n} = \sum_{n=0}^{l-1} \frac{a_{n+1} \cdot \varphi(2^n x)}{2^n} + \sum_{n=l}^{\infty} \frac{a_{n+1} \cdot \varphi(2^n x)}{2^n}.$$

Перший доданок правої частини останньої рівності є число раціональне, оскільки $\frac{a_{n+1}}{2^n} \in \mathbb{Q}$ і функція $\varphi(x)$ відображає раціональні точки в раціональні. Розглянемо другий доданок.

$$\begin{aligned} \sum_{n=l}^{\infty} \frac{a_{n+1} \cdot \varphi(2^n x)}{2^n} &= \frac{a_{l+1} \varphi(\Delta_{(\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})})}{2^l} + \frac{a_{l+2} \varphi(\Delta_{\alpha_{l+2} \dots \alpha_{l+p} (\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})})}{2^{l+1}} + \dots = \\ &= \varphi(\Delta_{(\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})}) \left(\frac{a_{l+1}}{2^l} + \frac{a_{l+p+1}}{2^{l+p}} + \dots \right) + \varphi(\Delta_{\alpha_{l+2} \dots \alpha_{l+p} (\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})}) \left(\frac{a_{l+2}}{2^{l+1}} + \frac{a_{l+p+2}}{2^{l+p+1}} + \dots \right) + \dots + \\ &+ \varphi(\Delta_{\alpha_{l+p} (\alpha_{l+1} \dots \alpha_{l+p})}) \left(\frac{a_{l+p}}{2^{l+p-1}} + \frac{a_{l+2p}}{2^{l+2p-1}} + \dots \right). \end{aligned}$$

З того, що послідовність (a_n) є періодичною, слідує, що кожен із p нескінченних сум у дужках можна представити у вигляді суми скінченного числа нескінченно спадних геометричних прогресій з раціональними знаменниками. Сума кожної такої прогресії раціональна, отже і вся сума є раціональним числом. $\square$

Теорема 6. Якщо $f(x)$ — функція (3), що визначається послідовністю (a_n) , то

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^{k+1}}.$$

Доведення. Маємо $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 T_k(x) dx \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_k 2^{-k}$, оскільки

$\int_0^1 T_k(x) dx$ дорівнює сумі площ 2^{k-1} трикутників з основою $2^{-(k-1)}$ і висотою $\frac{a_k}{2^k}$. $\square$

5. ГЛОБАЛЬНІ МАКСИМУМИ ТА МІНІМУМИ

В цьому розділі ми передусім розглядатимемо функції типу Такагі–Ван дер Вардена, що відповідають періодичним послідовностям.

Нехай послідовність (a_n) стала ($a_1 \neq 0$). Тоді, очевидно, функція, що відповідає цій послідовності є $a_1 \cdot F_T(x)$, де $F_T(x)$ — функція (2). Глобальний екстремум функції $F_T(x)$ досліджувався в роботі [10], тому без доведення сформулюємо таку теорему:

Теорема 7. Найбільше значення функції $f(x)$ дорівнює $\frac{2}{3}a_1$. Її функція набуває на множині точок виду $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$, де $\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i} = 1$, $i \in \mathbb{N}$, причому розмірність Хаусдорфа–Безиковича цієї множини дорівнює $\frac{1}{2}$.

Розглянемо тепер функції, що відповідають послідовностям виду

$$a_1, a_2, a_1, a_2, \dots, \quad a_1 > a_2 > 0, \quad a_{k+2} = a_k. \quad (13)$$

Теорема 8. Найбільше значення функції $f(x)$ дорівнює $\frac{8a_1+2a_2}{15}$, причому її функція набуває на множині точок розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\frac{1}{4}$, кожна з яких має вигляд $x = \Delta_{L_1 L_2 \dots L_n \dots}^2$, де L_i — група цифр виду 0110 або 1001 для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Доведення. Спочатку доведемо, що $f(x) \leq \frac{8a_1+2a_2}{15}$ для всіх $x \in [0, 1]$. Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)$. Розглянемо графік функції $T_{4k+1}(x) + T_{4k+2}(x) + T_{4k+3}(x) + T_{4k+4}(x)$, який періодичний з періодом 2^{-4k} (рис. 2), врахувавши (13). Маємо:

$$T_{4k+1}(x) + T_{4k+2}(x) + T_{4k+3}(x) + T_{4k+4}(x) \leq \frac{a_1}{2^{4k+1}} + \frac{a_2}{2^{4k+3}}, \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\text{Тоді } f(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a_1}{2^{4k+1}} + \frac{a_2}{2^{4k+3}} \right) = \frac{8a_1+2a_2}{15}.$$

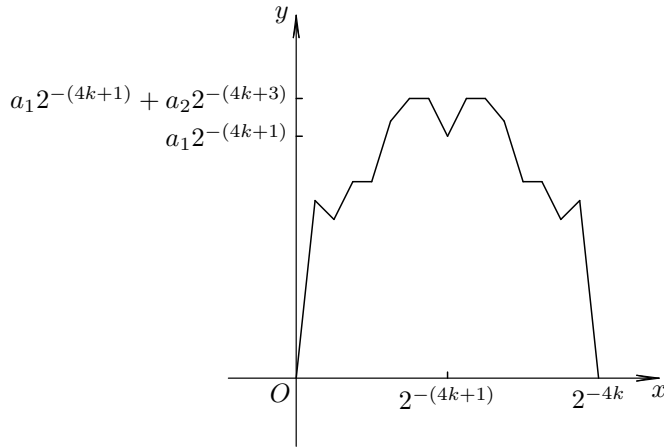


Рис. 2. Графік функції $\sum_{i=1}^4 T_{4k+i}$ на відрізку $[0, 2^{-4k}]$

Покажемо, що якщо $x = \Delta_{(0110)}^2 = \frac{2}{5}$, то $f(x) = \frac{8a_1+2a_2}{15}$. Скористаємось формулою (4) для обчислення значення функції:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1 \varphi(\Delta_{(0110)}) + \frac{a_2}{2} \varphi(\Delta_{(1100)}) + \frac{a_1}{2^2} \varphi(\Delta_{(1001)}) + \frac{a_2}{2^3} \varphi(\Delta_{(0011)}) + \dots = \\ &= \Delta_{(0110)} \left(a_1 + \frac{a_1}{2^2} + \dots \right) + \Delta_{(0011)} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2^3} + \dots \right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4a_1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2a_2}{3} = \frac{8a_1 + 2a_2}{15} \end{aligned}$$

(ми використали той факт, що $\varphi(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}) = \varphi(\Delta_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots}) = \min\{\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}, \Delta_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots}\}$).

Як і раніше суму $\sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)$ „розіб’ємо“ по чотири доданки. З графіків функцій $T_{4k+1}(x) + T_{4k+2}(x) + T_{4k+3}(x) + T_{4k+4}(x)$ (рис. 2) видно, що максимального значення сума досягає для $k = 1$ при всіх $x \in \Delta_{0110} \cup \Delta_{1001}$; для $k = 2$ якщо x належить одному з циліндричних відрізків виду $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 0110}$ або $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 1001}$ і т. д. Таким чином, сума $\sum_{k=1}^8 T_k(x)$ приймає максимального значення для всіх $x \in \Delta_{L_1 L_2}$, де L_i — одна з груп цифр 0110 або 1001. Продовжуючи міркування далі знаходимо, що свого максимального значення функція $f(x)$ досягає в точках виду $x = \Delta_{L_1 L_2 \dots L_N \dots}$.

Нехай $E = \{x = \Delta_{L_1 L_2 \dots} : L_i = \overline{0110} \text{ або } \overline{1001}\}$. Ця множина є самоподібною множиною канторівського типу. Вона складається з двох частин, кожна з яких подібна до E з коефіцієнтом $\frac{1}{16}$. Тоді її розмірність Хаусдорфа–Безиковича є розв’язком рівняння $\left(\frac{1}{16}\right)^s + \left(\frac{1}{16}\right)^s = 1$, звідки $\alpha_0(E) = \frac{1}{4}$. $\square$

Розглянемо тепер функції, що відповідають послідовностям виду

$$a_1, a_2, a_1 - a_2, a_1, a_2, a_1 - a_2, \dots, \quad a_1 > a_2 \geq 0, \quad a_{k+3} = a_k.$$

Теорема 9. *Найбільше значення функції $f(x)$ дорівнює $\frac{4}{7}a_1$. Її функція набуває на множині точок виду $x = \Delta_{L_1 L_2 \dots L_n}^2$, де L_i — група цифр 011 або 100, причому розмірність Хаусдорфа–Безикевича цієї множини дорівнює $\frac{1}{3}$.*

Доведення. Ідея доведення аналогічна до доведення попередньої теореми. Перепишемо суму $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (T_{3k+1}(x) + T_{3k+2}(x) + T_{3k+3}(x)) \quad (14)$$

і дослідимо поведінку функцій виду $f_k(x) = T_{3k+1}(x) + T_{3k+2}(x) + T_{3k+3}(x)$. Аналіз їх графіків показує, що $f_k(x) \leq \frac{a_1}{2^{3k+1}}$. Повернувшись до (14), знаходимо, що $f(x) \leq \frac{4}{7}a_1$. Подальші міркування цілком аналогічні як і при доведенні теореми 8. $\square$

Подібним чином можна досліджувати інші функції типу Такагі–Ван дер Вардена, що відповідають періодичним послідовностям. Доведемо таку більш загальну теорему.

Теорема 10. *Нехай послідовність (a_n) періодична з періодом t . Якщо існує таке число k , що функція $\sum_{i=1}^{kt} T_i(x)$ досягає свого максимуму (мінімуму) на континуальній множині точок, а для всіх менших k це не виконується, то функція $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x)$ досягає свого максимуму (мінімуму) на множині точок канторівського типу, розмірності Хаусдорфа–Безикевича $\frac{1}{kt}$. Якщо ж такого k не існує, то функція досягає свого максимуму (мінімуму) лише в двох точках, симетричних відносно прямої $x = \frac{1}{2}$ (або тільки в точці $x = \frac{1}{2}$).*

Доведення. Перепишемо суму $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x)$ у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (T_{kti+1}(x) + T_{kti+2}(x) + \dots + T_{kti+kt}(x)). \quad (15)$$

З умови теореми слідує, що, по-перше, графіки функцій $\sum_{j=1}^{kt} T_{kti+j}$, $i \geq 0$ геометрично подібні між собою, і, по-друге, вони досягають свого максимуму (мінімуму) на континуальній множині точок. В силу цього розглянемо лише функцію $\sum_{j=1}^{kt} T_j$. Оскільки її графіком є ламана, що симетрична відносно прямої $x = \frac{1}{2}$, то тоді максимум (мінімум) досягається рівно на двох відрізках довжиною 2^{-kt} (більше не може бути в силу специфіки цієї ламаної — для кожної функції виду $\sum_{j=1}^n T_j$ рівно два відрізки „вищі“ за інші).

Таким чином, маємо алгоритм побудови чисел, в яких функція досягає свого максимуму (мінімуму). Ділимо відрізок на 2^{-kt} рівних частин, вилучаємо усі відрізки, крім

двох, над якими виконуємо ті ж самі дії і т.д. до нескінченності. Залишкова множина є множиною канторівського типу, і на ній функція досягає свого максимального (мінімального) значення. Її розмірність Хаусдорфа–Безиковича співпадає з самоподібною розмірністю і дорівнює кореню рівняння $2^{-ktx} + 2^{-ktx} = 1$, тобто $\frac{1}{kt}$.

Якщо ж не існує такого числа k , то це означає, що кожна функція виду $\sum_{i=1}^n T_i$ досягає свого максимуму (мінімуму) в двох точках, симетричних відносно прямої $x = \frac{1}{2}$ (або тільки в точці $x = \frac{1}{2}$), а значить аналогічний висновок стосується і функції $\sum_{i=1}^{\infty} T_i$. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Van der Waerden B. L.* Ein einfaches Beispiel einer nicht differenzierbaren stetigen Funktion // *Math. Z.*— 1930, № 32.— P. 474–475.
- [2] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальный множества, функции, распределения. — К.: Наук. думка, 1992.— 208 с.
- [3] *Takagi T.* A simple example of the continuous function without derivative // *The Collected Papers of Teiji Takagi.*— Springer Verlag, New York.— 1990.— P. 4–5.
- [4] *Knopp K.* Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Functionen // *Math. Z.*— 1918, № 2. — P. 1–26.
- [5] *Baouche A., Dubuc S.* A unified approach for nondifferentiable functions // *J. Math. Anal. Appl.*— 1994, № 182.— P. 134–142.
- [6] *Mauldin R., Williams S.* On the Hausdorff dimension of some graphs // *Trans. Amer. Math. Soc.*— 1986, № 298.— P. 793–803.
- [7] *Kono N.* On generalized Takagi functions // *Acta Math. Hungar.* — 1987, № 49.— P. 315–324.
- [8] *Рябинин А. А., Яроуцук М. В.* Мартингалы и дифференциальные свойства функций // *Вестник ННГУ, сер. Математика.* — 2003, вып. 1. — С. 69–82.
- [9] *Falconer K. J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.
- [10] *Kahane J-P.* Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // *Enseignement Math.*— 1959, № 5.— P. 53–57.

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБІНСЬКОГО

E-mail address: panasenko_alex@bigmir.net