

Система покривних прямокутників як спосіб дослідження функцій

1. Означення покривного прямокутника

Нехай маємо дійсну функцію f дійсної змінної x . Нехай ця функція задовольняє такі умови:

1. Визначена у всіх точках деякого відрізка $[a; b]$
2. Обмежена на $[a; b]$.

Введемо позначення: $m = \inf \{ f(x) \mid x \in [a; b] \}$, $M = \sup \{ f(x) \mid x \in [a; b] \}$

Означення. Прямокутник $P = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, m \leq y \leq M\}$ будемо називати покривним для функції f на відрізку $[a; b]$ і позначати $P(f, a, b)$. Відрізок $[a; b]$ будемо називати відрізком побудови для прямокутника $P(f, a, b)$

Означення. Величину $M - m$ будемо називати висотою покривного прямокутника P і позначати через $h(P)$; величину $b - a$ будемо називати шириною покривного прямокутника P і позначати через $l(P)$.

2. Означення системи покривних прямокутників

Означення. Нехай маємо деяку функцію f , визначену у всіх точках деякого відрізка. Нехай $S = \{ P(f, a_1, b_1), P(f, a_2, b_2), \dots, P(f, a_n, b_n) \}$ - множина покривних прямокутників для функції f . Будемо називати цю множину системою покривних прямокутників для функції f на відрізку $[a; b]$, якщо виконуються такі умови:

1. $a_1 = a, b_1 = a_2, b_2 = a_3, \dots, b_{n-1} = a_n, b_n = b$
2. $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$

Відрізок $[a; b]$ будемо називати відрізком побудови для системи S .

3. Найпростіші наслідки з цих означень

Наслідок 1. Якщо функція f задовольняє вищевказані умови (тобто визначена у всіх точках відрізка $[a; b]$ і обмежена на цьому відрізку), то покривний прямокутник $P(f, a, b)$ існує і єдиний.

Наслідок 2. Якщо існує покривний прямокутник, побудований на відрізку $[a; b]$, то існує й покривний прямокутник, побудований на довільному відрізку, що повністю міститься в $[a; b]$.

Наслідок 3. Нехай функція f визначена на відрізку $[a; b]$, Γ - множина точок графіка цієї функції, S - система покривних прямокутників для f на $[a; b]$. Тоді множина точок S повністю містить у собі множину точок Γ .

Приклади системи покривних прямокутників:

1. Для функції $f(x) = \text{const}$
2. Для функції $f(x) = x$
3. Для функції Діріхле

4. Умови неперервності та диференційовності функції в термінах системи покривних прямокутників.

Теорема 1 (необхідна умова неперервності у термінах покривних прямокутників). Для того, щоб функція f , визначена на відрізку $[a; b]$, була на цьому відрізку неперервною, необхідно, щоб у будь-якій системі покривних прямокутників $S = \{P(f, a_k, b_k) \mid k = \overline{1, n}\}$ прямокутники $P(f, a_k, b_k)$ та $P(f, a_{k+1}, b_{k+1})$ мали спільну точку $\forall k = \overline{1, n-1}$.

Означення. Нехай S - система покривних прямокутників для функції f на відрізку $[a; b]$. Будемо називати найбільшу з висот покривних прямокутників, що входять до S , висотою системи S і позначати її $h(S)$. Також будемо називати найбільшу з ширин покривних прямокутників, що входять до S , шириною системи S і позначати її $l(S)$.

Означення. Будемо казати, що $\lim_{l(S) \rightarrow 0} h(S) = 0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: l(S) < \delta \Rightarrow h(S) < \varepsilon$.

Теорема 2 (критерій неперервності функції в термінах покривних прямокутників). Для того, щоб функція f , визначена на відрізку $[a; b]$, була неперервною на цьому відрізку, необхідно й достатньо, щоб одночасно виконувалися дві умови:

1. Необхідна умова неперервності у термінах покривних прямокутників
2. $\lim_{l(S) \rightarrow 0} h(S) = 0$

Означення. Нехай маємо послідовність відрізків $v = \{[a; b], [a'; b'], [a''; b''], \dots\}$ таку, що:

1. Кожен відрізок із цієї послідовності містить наступний відрізок, тобто $[a; b] \supset [a'; b'] \supset [a''; b''] \dots$
2. Кожен відрізок із цієї послідовності містить точку x_0 .

Утворимо послідовність прямокутників $P_1 = P(f, a, b)$, $P_2 = P(f, a', b')$, $P_3 = P(f, a'', b'')$, ... та позначимо через $d(x_0, v)$ границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(P_n)}{l(P_n)}$ (зрозуміло, що ця границя може й не існувати).

Теорема 3 (необхідна умова диференційовності в термінах покривних прямокутників). Для того, щоб функція f , визначена у деякому околі точки x_0 , мала у цій точці скінченну похідну $f'(x_0) = \alpha$, необхідно, щоб величина $d(x_0, v)$ існувала, не залежала від v і дорівнювала $|\alpha|$.

Наслідок (достатня умова недиференційовності в термінах покривних прямокутників). Нехай виконується хоча б одна з таких умов:

1. Знайшлася послідовність v така, що $d(x_0, v)$ не існує або дорівнює нескінченності
2. Знайшлися дві послідовності v_1 та v_2 такі, що $d(x_0, v_1) \neq d(x_0, v_2)$

Тоді функція f не має скінченної похідної в точці x_0 .

5. Приклади застосувань покривних прямокутників до дослідження функцій

Приклад 1. Нехай маємо функцію f , відрізок $[a;b]$ та систему S покривних прямокутників, побудовану на цьому відрізку. Візьмемо кінці відрізків побудови для прямокутників системи S за розбиття заданого відрізка. Легко бачити, що в такому разі сума площ прямокутників нашої системи дорівнює різниці сум Дарбу для даної функції. Тепер, якщо ми згадаємо два факти:

Факт 1(критерій інтегровності). Функція інтегровна на $[a;b]$ тоді і тільки тоді, коли із зменшенням дрібності розбиття різниця сум Дарбу прямує до нуля;

Факт 2. Якщо функція неперервна на відрізку $[a;b]$, то висота кожного прямокутника прямує до нуля,

То ми зможемо стверджувати, що неперервна функція завжди інтегровна, тобто ми знайшли ще один спосіб доведення відомої теореми з курсу дійсного аналізу.

Приклад 2. Відомий приклад неперервних ніде не диференційовних функцій – функція Працьовитого.

Ось її задання: аргумент x з відрізка $[0;1]$ представляється у вигляді ряду

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}, \text{ де } a_n \in \{0,1,2\}.$$

Значення функції y представляється також у вигляді ряду $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$, де $b_n \in \{0,1\}$.

Числа b_n обчислюються за числами a_n таким чином:

$$\text{При } n=1 \begin{cases} a_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0; \\ a_1 \neq 0 \Rightarrow b_1 = 1 \end{cases}, \text{ При } n \neq 1 \begin{cases} a_n = a_{n-1} \Rightarrow b_n = b_{n-1} \\ a_n \neq a_{n-1} \Rightarrow b_n = 1 - b_{n-1} \end{cases}.$$

Відоме доведення того факту, що ця функція задана коректно, вона визначена на всьому відрізку $[0;1]$ і на всьому цьому відрізку вона неперервна.

Я зараз покажу, що на всьому відрізку $[0;1]$ ця функція недиференційовна.

Для кожної з точок цієї функції можна вибрати послідовність покривних прямокутників P_n так, що $l(P_n) = \frac{1}{3^n}$ і $h(P_n) = \frac{1}{2^n}$. Очевидно, що відношення

$$\frac{h(P_n)}{l(P_n)} = \frac{3^n}{2^n} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, за достатньою умовою недиференційовності ця функція недиференційовна у будь-якій точці, що й вимагалось довести.

Приклад 3.

Задача. Функція $f : [0;1] \rightarrow [0;1]$ задається таким чином: береться аргумент $x \in [0;1]$ і розкладається у десятковий дріб $0, a_1 a_2 \dots$ (якщо можливо два розклади в десятковий дріб, то береться той, у якого нулі в періоді). Значення функції також задається десятковим дробом $f(x) = 0, b_1 b_2 \dots$, де $b_k = g(a_k)$. Знайти всі можливі функції g , при яких f неперервна.

Відповідь: є 12 можливих функцій: $g(a_k) = a_k$, $g(a_k) = 9 - a_k$, $g(a_k) = \text{const}$.