

ОДНОПАРАМЕТРИЧНИЙ КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ, БЛИЗЬКИХ ДО КАНТОРІВСЬКИХ ПРОЕКТОРІВ

ПАНАСЕНКО О.Б.

1. ВСТУП

Дослідження фрактальних об'єктів на предмет обчислення їх фрактальної розмірності (клітинкової, Хаусдорфа–Безиковича, Хаусдорфа–Білінгслі та ін.) сьогодні є актуальною проблемою фрактального аналізу. Особливої уваги завжди заслуговували в цьому питанні самоподібні та самоафінні множини, оскільки вони є зручними для вивчення. Проте, незважаючи на значний прогрес у вивченні фрактальних властивостей таких об'єктів, говорити про те, що задача обчислення розмірності таких множин є розв'язаною, поки що не доводиться. Це ж стосується і фрактальних неперервних функцій. Більше того, клас добре вивчених самоафінних множин в базових роботах [1, 4, 5] не містить неперервних функцій. Найбільш продуктивною в цьому плані є робота [3], де досліджуються фрактальні властивості так званих афінно-інваріантних множин, які серед іншого містять і досить широкий клас неперервних функцій.

2. КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В роботах [7, 10] досліджується один клас функцій, який формально просто задається за допомогою перетворень цифр аргументу. Такі функції названо канторівськими проекторами. В цих роботах більша увага приділяється неперервним функціям з цього класу, а в роботі [8] окрім іншого досліджуються і фрактальні властивості однієї функції з цього класу. Вона означається наступним чином:

$$y = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}^2,$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0 \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x) \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \end{cases} \quad k > 1,$$

$\alpha_k(x)$ — k -та трійкова цифра x . Фрактальні властивості цієї функції, як і всього класу неперервних канторівських проекторів, відносно добре вивчені [8, 6]. Доведено, що вищезначена функція є неперервною та ніде не диференційовною, графік якої є фрактальною множиною з клітинковою розмірністю $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_3 2$ і розмірністю Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2(1 + 2^{\log_3 2})$. Ми ж розглянемо інший клас функцій $f_i^{(q)}(x): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, який, однак, містить дану ніде не диференційовну функцію.

Нехай $s \geq 2$ і дано „вектор“ $Q = \|q_i\|$, $i = \overline{0, s-1}$, елементи якої задовольняють умови $q_i > 0$, $\sum_{i=0}^{s-1} q_i = 1$. Нагадаємо [9], що Q -представленням дійсного числа $x \in [0; 1]$ називається його розклад у вигляді

$$x = \gamma_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^Q,$$

де $\gamma_m = \sum_{i=0}^{m-1} q_i$, $\alpha_k \in N_{s-1}^0$. Деякі точки мають по два різних представлення (з періодом 0 та $s-1$) і називаються Q -раціональними, решта — єдине, і називаються Q -ірраціональними.

Нехай $Q = \{q, 1-q\}$, $q \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ і для трійкового представлення аргумента $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^3$ значення функції має наступний Q -розклад:

$$y = f_i^{(q)}(x) = \gamma_{\beta_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\beta_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\beta_j} \right] \equiv \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \dots}^Q, \quad (1)$$

де $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = q$, $q_0 = q$, $q_1 = 1-q$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, причому

$$\beta_1 = \begin{cases} \left[\frac{i}{3} \right], & \text{якщо } \alpha_1(x) = i \\ 1 - \left[\frac{i}{3} \right], & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq i, \end{cases}$$

(тут під $[x]$ розуміється найбільше ціле число, яке не перевищує x),

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x) \\ 1 - \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1. \end{cases}$$

Спочатку обґрунтуємо коректність так означених функцій. Для цього покажемо, що різні трійкові зображення одного і того ж трійково-раціонального аргумента дають одне і те ж значення функції. Нехай

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}^3, \quad x^* = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_{k-1})(2)}^3, \quad \alpha_k \neq 0.$$

Доведемо, що $y = f_i^{(q)}(x) = f_i^{(q)}(x^*) = y^*$.

Оскільки $\alpha_k \neq 0$, то $\alpha_{k-1} \in \{0; 1\}$. З означення функцій видно, що Q -зображення чисел y та y^* такі, що мають місце рівності:

$$\begin{cases} \beta_i(y) = \beta_i(y^*), & i = \overline{1, k-1}, \\ \beta_{k+j}(y) = 1 - \beta_k(y), & j \in \mathbb{N}, \\ \beta_{k+j}(y^*) = 1 - \beta_k(y^*), & j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Можливі наступні випадки

$$1. \begin{cases} \alpha_{k-1} = \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} \neq \alpha_k - 1; \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \alpha_{k-1} \neq \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} = \alpha_k - 1; \end{cases} \quad 3. \begin{cases} \alpha_{k-1} \neq \alpha_k, \\ \alpha_{k-1} \neq \alpha_k - 1, \end{cases}$$

і для кожного з них міркування проведемо окремо.

У випадку 1:

$$\begin{cases} \beta_k(y) = \beta_{k-1}(y) & \Rightarrow \beta_{k+j}(y) = 1 - \beta_{k-1}(y), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ \beta_k(y^*) = 1 - \beta_{k-1}(y^*) & \Rightarrow \beta_{k+j}(y^*) = \beta_{k-1}(y), & \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
y - y^* &= \sum_{i=k}^{\infty} \left[\gamma_{\beta_i(y)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y)} - \gamma_{\beta_i(y^*)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y^*)} \right] = \\
&= \prod_{j=1}^{k-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \left(\gamma_{\beta_k(y)} - \gamma_{\beta_k(y^*)} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\gamma_{\beta_{k+i}(y)} \prod_{j=0}^{i-1} q_{\beta_{k+j}(y)} - \gamma_{\beta_{k+i}(y^*)} \prod_{j=0}^{i-1} q_{\beta_{k+j}(y^*)} \right) \right) = \\
&= \prod_{j=1}^{k-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \left(\gamma_{\beta_{k-1}(y)} - \gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} + \gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} \sum_{i=1}^{\infty} q_{\beta_{k-1}(y)} q_{1-\beta_{k-1}(y)}^{i-1} - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{\beta_{k-1}(y)} \sum_{i=1}^{\infty} q_{1-\beta_{k-1}(y)} q_{\beta_{k-1}(y)}^{i-1} \right) = \\
&= \prod_{j=1}^{k-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \left(\gamma_{\beta_{k-1}(y)} - \gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} + \frac{\gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} q_{\beta_{k-1}(y)}}{1 - q_{1-\beta_{k-1}(y)}} - \frac{\gamma_{\beta_{k-1}(y)} q_{1-\beta_{k-1}(y)}}{1 - q_{\beta_{k-1}(y)}} \right) = \\
&= \prod_{j=1}^{k-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \left(\gamma_{\beta_{k-1}(y)} - \gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} + \frac{\gamma_{1-\beta_{k-1}(y)} q_{\beta_{k-1}(y)}}{q_{\beta_{k-1}(y)}} - \frac{\gamma_{\beta_{k-1}(y)} q_{1-\beta_{k-1}(y)}}{q_{1-\beta_{k-1}(y)}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Випадок 2 розглядається аналогічно і, очевидно, також приводить до рівності $y = y^*$. Якщо має місце випадок 3, то

$$\begin{cases} \beta_k(y) = 1 - \beta_{k-1}(y) & \Rightarrow \beta_{k+j}(y) = \beta_{k-1}(y), & \forall j \in \mathbb{N}, \\ \beta_k(y^*) = 1 - \beta_{k-1}(y^*) & \Rightarrow \beta_{k+j}(y^*) = \beta_{k-1}(y), & \forall j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

звідки досить очевидно, що $y = y^*$. Таким чином, функції означені коректно.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ФУНКЦІЙ

Теорема 1. Функції $f_i^{(q)}(x)$ неперервні в кожній точці відрізка $[0; 1]$.

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[0; 1]$. Для доведення неперервності функції $f_i^{(q)}(x)$ в точці x_0 досить показати, що $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$.

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — трійково-іраціональна точка. Для довільного $x \in [0; 1]$ існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), & i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0); \end{cases}$$

причому умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна умові $m \rightarrow \infty$. Тоді

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &= \left| \sum_{i=m}^{\infty} \left[\gamma_{\beta_i(y)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y)} - \gamma_{\beta_i(y_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y_0)} \right] \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=m}^{\infty} \left| \gamma_{\beta_i(y)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y)} - \gamma_{\beta_i(y_0)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y_0)} \right| \leq \sum_{i=m}^{\infty} \left| \gamma_{\beta_i(y)} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j(y)} \right| \leq \\
&\leq q \prod_{j=1}^{m-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\max\{q, 1-q\})^j = q \prod_{j=1}^{m-1} q_{\beta_j(y)} \cdot \frac{1}{\min\{q, 1-q\}} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty),
\end{aligned}$$

де $y = f(x)$, $y_0 = f_0(x)$. Отже, $f(x)$ неперервна в трійково-іраціональних точках.

Нехай тепер x_0 — трійково-раціональне число, тобто

$$x_0 \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(0)}, \quad \alpha_k \neq 0.$$

Доведемо, що $f(x)$ неперервна зліва і неперервна справа в точці x_0 . Для доведення неперервності зліва досить використати трійкове представлення x_0 , що містить період (2), а неперервності справа — трійкове представлення x_0 , яке містить період (0), і повторити міркування, які проводились для трійково-іраціональної точки. $\square$

Теорема 2. Функції $f_i^{(q)}(x)$ при $q \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ ніде не диференційовні.

Доведення. Нехай i та q фіксовані і $f(x) = f_i^{(q)}(x)$. Спочатку покажемо, що $f'(x_0)$ не існує, якщо трійкове представлення точки x_0 має простий період (τ), тобто

$$x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(\tau)}, \quad \alpha_k \neq \tau.$$

Розглянемо послідовність (x_m) , для якої

$$x_m = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \underbrace{\tau \dots \tau}_m c \tau}, \quad c \in \{0; 1; 2\} \setminus \{\tau\}.$$

Очевидно, що $x_m \rightarrow x_0$ ($m \rightarrow \infty$) і

$$\begin{aligned} x_0 - x_m &= (\tau - c) \cdot 3^{-(k+m+1)}, \\ f(x_0) &= \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k (1-\beta_k) (1-\beta_k) \dots}^Q, \\ f(x_m) &= \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \underbrace{(1-\beta_k) \dots (1-\beta_k)}_m \beta_k (1-\beta_k) \dots}^Q. \end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_m) &= \sum_{i=k+m+1}^{\infty} \left[\gamma_{1-\beta_k} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j} \right] - \left(\gamma_{\beta_k} \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j} + \sum_{i=k+m+2}^{\infty} \left[\gamma_{1-\beta_k} \prod_{j=1}^{i-1} q_{\beta_j} \cdot \frac{q_{\beta_k}}{q_{1-\beta_k}} \right] \right) = \\ &= \gamma_{1-\beta_k} \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j} \sum_{i=0}^{\infty} q_{1-\beta_k}^i - \gamma_{\beta_k} \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j} - \gamma_{1-\beta_k} \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j} \frac{q_{\beta_k}}{q_{1-\beta_k}} \sum_{i=1}^{\infty} q_{1-\beta_k}^i = \\ &= \frac{\gamma_{1-\beta_k} q_{1-\beta_k} - \gamma_{\beta_k}}{q_{\beta_k}} \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j} = C \cdot \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j}, \end{aligned}$$

де

$$C = \begin{cases} (1-q), & \text{якщо } \beta_k = 0, \\ \frac{q}{q-1}, & \text{якщо } \beta_k = 1. \end{cases}$$

Тоді для $q \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m} &= \frac{C \cdot \prod_{j=1}^{k+m} q_{\beta_j}}{(\tau - c) \cdot 3^{-(k+m+1)}} > \frac{3C}{(\tau - c)} \cdot \min\{q, 1-q\}^{k+m} 3^{k+m} = \\ &= \frac{3C}{(\tau - c)} \cdot \min\{3q, 3(1-q)\}^{k+m} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{якщо } \beta_k = 0 \\ -\infty, & \text{якщо } \beta_k = 1, \end{cases} \end{aligned}$$

якщо $\tau > c$ і навпаки, якщо $\tau < c$ (при $m \rightarrow \infty$), оскільки $\min\{3q, 3(1-q)\} > 1$.

У випадку, коли $q = \frac{1}{3}$ одержуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(x_0) - f(x_m)}{x_0 - x_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C \cdot \prod_{j=1}^k q_{\beta_j} \cdot q_{1-\beta_k}^m}{(\tau - c) \cdot 3^{-(k+m+1)}} = \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{якщо } \beta_k = 0 \\ \frac{3q \cdot \prod_{j=1}^k 3q_{\beta_j}}{(\tau - c)(q - 1)}, & \text{якщо } \beta_k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Рівність границі нескінченності у випадку, коли $\beta_k = 0$ свідчить про недиференційовність функції в точці, трійкове зображення якої містить період (1). Умова $\beta_k = 1$ відповідає трійково-раціональній точці x_0 . Взявши спочатку $c = 1$, а потім $c = 2$ дістаємо різні значення останньої границі, що свідчить про недиференційовність функції в точці x_0 . Доведення для $q = \frac{2}{3}$ проводиться аналогічно.

Нехай $x_0 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^3$ — довільне трійково-іраціональне число. Тоді існує нескінченна послідовність (m_k) така, що $\alpha_{m_k-1} \neq \alpha_{m_k}$. Розглянемо наступну послідовність (x_k) , яка задовольняє рівності:

$$\alpha_i(x_k) = \alpha_i(x_0), \quad \text{для } i = \overline{1, m_k - 1},$$

а для $i \geq m_k$:

$$\begin{cases} \alpha_i(x_k) = \alpha_{i-1}(x_k), & \text{якщо } \alpha_i(x_0) = \alpha_{i-1}(x_0), \\ \alpha_i(x_k) = |1 - \alpha_i(x_k)|, & \text{якщо } \alpha_i(x_0) \neq \alpha_{i-1}(x_0) \end{cases}$$

(під $\alpha_i(x_k)$ розуміється i -а цифра трійкового представлення числа x_k). Очевидно, що $x_k \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ і $f(x_k) = f(x_0)$ для кожного k . Таким чином, якщо похідна функції в точці x_0 існує, то вона дорівнює нулю.

Далі скористаємось такою лемою, яку легко довести:

Лема 1. *Нехай $g(x)$ — деяка функція дійсної змінної визначена на $[0, 1]$. Нехай $x_0 \in [0, 1]$ і (x'_k) і (x''_k) — дві послідовності дійсних чисел такі, що $x'_k \leq x_0 \leq x''_k$ для кожного k і $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_k = x_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x''_k = x_0$. Якщо $g(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in [0, 1]$, то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(x''_k) - g(x'_k)}{x''_k - x'_k} = g'(x_0).$$

Для кожного k розглянемо три числа: $x_{k,0} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k(0)}$, $x_{k,1} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k(1)}$, $x_{k,2} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k(2)}$. Легко бачити, виходячи з означення (1), що значення функції $f(x)$ в цих точках, по-перше, є $\mathbb{Q}$ -раціональними числами, і, по-друге, в деяких двох з цих точок (залежно від того, якими є цифри $\alpha_1 \dots \alpha_k$) співпадають. Тоді якими б не були числа $x_{k,0}$, $x_{k,1}$, $x_{k,2}$ завжди існує відрізок з кінцями в цих точках, якому, з одного боку, належить точка x_0 , а з іншого — досліджувана функція на кінцях відрізка набуває різних значень. Позначимо такий відрізок через $[x_{k,p}; x_{k,q}]$, $p \in \{0; 1\}$, $q \in \{1; 2\}$. Нехай (x'_k) — послідовність лівих кінців таких відрізків, (x''_k) — послідовність їх правих кінців, $k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що послідовності (x'_k)

та (x''_k) задовольняють умову леми 1. Складемо границю:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f(x''_k) - f(x'_k)|}{x''_k - x'_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{\beta_1 \dots \beta_k(\beta_k)} - \Delta_{\beta_1 \dots \beta_k(1-\beta_k)}|}{x''_k - x'_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^k q_{\beta_k}}{x''_k - x'_k} \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^k q_{\beta_k}}{3^{-k}} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \min\{3q, 3(1-q)\}^k \geq 1, \end{aligned}$$

що суперечить доведеному попередю, що значення похідної може бути лише нулем. Таким чином, функція $f(x)$ в трійково-ірраціональних точках не має ні скінченної, ні нескінченної похідної. $\square$

4. САМОАФІННІСТЬ ДОСЛІДЖУВАНИХ ФУНКЦІЙ

Позначимо графіки функцій $f_i^{(q)}(x)$ через X_i . Аналіз зв'язку між трійковими зображеннями аргументу і Q -зображеннями значень функцій приводить до наступної структури множин X_i (рис. 1). Вони конструюються за допомогою афінних відображень одиничного квадрата у прямокутники шириною $\frac{1}{3}$ і висотою q або $1-q$, з кожним з яких робляться перетворення так, як показано на рисунку 1.

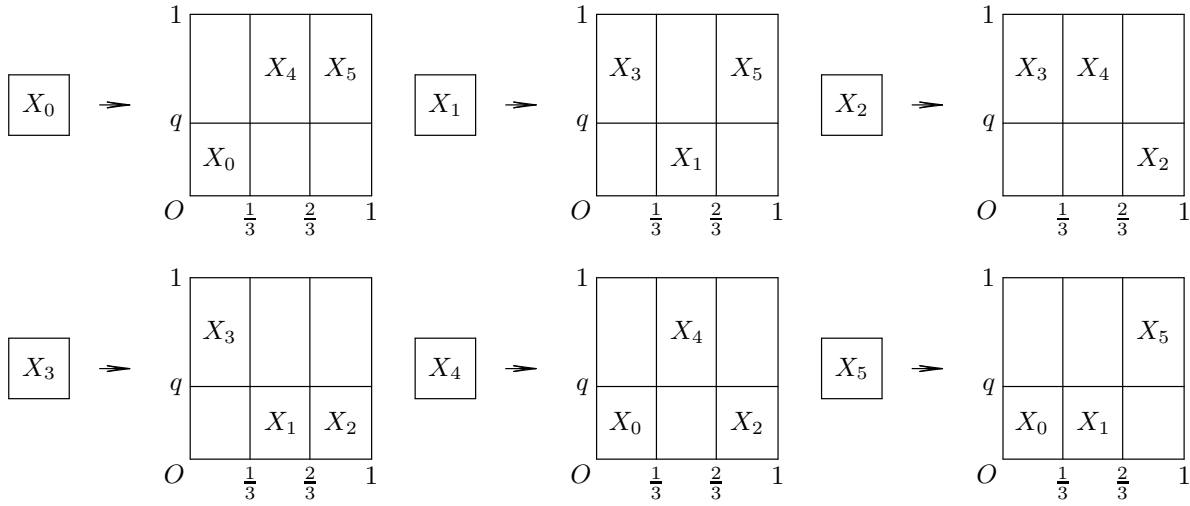


Рис. 1. Структура графіків функцій $f_i^{(q)}(x)$.

5. ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ДОСЛІДЖУВАНИХ ФУНКЦІЙ

Слідуючи [2], сформулюємо означення клітинкової розмірності множини.

Нижньою та верхньою клітинковою розмірністю множини F простору $\mathbb{R}^n$ називаються відповідно

$$\underline{\alpha^K} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta}, \quad \overline{\alpha^K} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta},$$

а клітинковою розмірністю (розмірністю Мінковського) називається число

$$\alpha^K = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta},$$

(якщо остання границя існує), де $N_\delta(F)$ — число n -мірних кубів зі стороною δ виду $[m_1\delta, (m_1 + 1)\delta] \times \dots \times [m_n\delta, (m_n + 1)\delta]$, де $m_1, m_2, \dots, m_n$ — цілі, які перетинають F .

Теорема 3. 1) Якщо y_0 — Q -раціональне число відрізка $[0; 1]$, то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною, а отже, $\alpha_0(f^{-1}(y_0)) = 0$.

2) Фрактальна розмірність множини прообразів Q -ірраціонального значення y_0 обчислюється за формулою

$$\alpha_0(f^{-1}(y_0)) = B \log_3 2,$$

де $B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{k}$, d_k — кількість пар послідовних цифр Q -зображення числа y_0 (до k -го місця включно), в яких компоненти різні.

Доведення проводиться аналогічно як і в роботі [8] (теорема 5).

Теорема 4. Фрактальна клітинкова розмірність графіків функцій $f_i^{(q)}(x)$ дорівнює

$$\alpha^K(\Gamma_{f_q}) = 1 + \log_3 \frac{1 + \sqrt{1 + 12q(1 - q)}}{2}. \quad (2)$$

Доведення. Казатимемо, що множини X_0, X_1, X_2 належать класу K_1 , а множини X_3, X_4, X_5 — класу K_2 . Очевидно, що усі множини класів K_i мають однакову фрактальну клітинкову розмірність α_i^K , оскільки для їх покриття необхідна однакова кількість квадратів зі стороною 3^{-k} .

Для доведення твердження теореми слід побудувати клас покриттів графіка функції квадратами, визначити найменшу кількість квадратів, необхідних для цього, і скористатись формулою розмірності Мінковського. Розглянемо покриття графіка функції квадратами зі стороною 3^{-k} , $k \in \mathbb{N}$.

Доведемо спочатку таку допоміжну лему:

Лема 2. Нехай найменша кількість квадратів зі стороною 3^{-k} , необхідних для покриття множини X_i , дорівнює N_k , а найменша кількість квадратів зі стороною $3^{-(k+1)}$, необхідних для покриття множини $X_i^* = \{(\frac{x}{3}, ay) : (x, y) \in X_i\}$, $a \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, дорівнює N_{k+1}^* . Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} N_{k+1}^* = 3a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} N_k$.

Доведення. Спочатку припустимо, що $a \in (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

Розглянемо одиничний квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ і множину X_i . Проведемо $3^k - 1$ вертикальні прямі, які розіб'ють одиничний квадрат на 3^k однакових прямокутників зі сторонами 3^{-k} і 1. Очевидно, що множина X_i з кожним таким прямокутником має непорожній переріз. Занумеруємо прямокутники зліва направо числами від 0 до $3^k - 1$ і позначимо через n_l — найменшу кількість квадратів зі стороною 3^{-k} , необхідних для покриття X_i , і які належать l -му прямокутнику R_l . Оскільки кожна з множин X_i є графіком неперервної функції, то в кожному прямокутнику R_l квадрати, якими здійснюється покриття, мають спільну сторону. Нехай $V_{R_l} = \sup_{x_1, x_2 \in [\frac{l}{3^k}, \frac{l+1}{3^k}]} \{f_i^{(q)}(x_1) - f_i^{(q)}(x_2)\}$ — розмах функції $f_i^{(q)}$ в прямокутнику

R_l . Очевидно, що $n_l = \left\lceil \frac{V_{R_l}}{3^{-k}} \right\rceil = \lceil V_{R_l} 3^k \rceil$ (тут під $\lceil x \rceil$ розуміється „округлення зверху“, тобто найменше число, яке не менше за x). Зауважимо, що при збільшенні k прямокутники зі сторонами V_{R_l} і 3^{-k} , які покривають множину X_i , стають „вузькими“, тобто відношення висоти до ширини кожного такого прямокутника прямує до нескінченності, і тому кожне $n_l \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Справді, це слідує з того, що $V_{R_l} = a^p(1-a)^{k-p} > (\min\{a, 1-a\})^k > (\frac{1}{3})^k$. Таким чином, $n_l = V_{R_l} 3^k + \varepsilon_l$, де $\varepsilon_l \in [0; 1)$. Тоді $N_k = \sum_{l=0}^{3^k-1} n_l = \sum_{l=0}^{3^k-1} (V_{R_l} 3^k + \varepsilon_l)$. Але

оскільки $\sum_{l=0}^{3^k-1} \varepsilon_l$ прямує до нескінченності значно повільніше, ніж $\sum_{l=0}^{3^k-1} V_{R_l} 3^k$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{3^k-1} V_{R_l} 3^k$.

Розглянемо тепер множину X_i^* , яка одержується з X_i стиском в 3 рази по горизонталі і в a^{-1} по вертикалі. Аналогічним чином розіб'ємо прямокутник $[0, \frac{1}{3}] \times [0, a]$ на 3^k однакових прямокутника зі сторонами $\frac{1}{3^{k+1}}$ і a . Кожному прямокутнику R_l множини X_i відповідає прямокутник R_l^* множини X_i^* . Розмах функції в прямокутнику R_l^* дорівнює $a \cdot V_{R_l}$. Тоді найменша кількість квадратів зі стороною $3^{-(k+1)}$, необхідних для покриття множини $X_i^* \cap R_l^*$, дорівнює

$$n_l^* = \left\lceil \frac{a \cdot V_{R_l}}{3^{-(k+1)}} \right\rceil = \lceil 3a \cdot V_{R_l} 3^k \rceil = 3a \cdot V_{R_l} 3^k + \varepsilon_l^*,$$

де $\varepsilon_l^* \in [0; 1)$. Тоді: $N_{k+1}^* = \sum_{l=0}^{3^k-1} n_l^* = 3a \cdot \sum_{l=0}^{3^k-1} n_l + \sum_{l=0}^{3^k-1} \varepsilon_l^* \rightarrow 3a \cdot N_k$ при $k \rightarrow \infty$ оскільки $\sum_{l=0}^{3^k-1} \varepsilon_l^*$ прямує до нескінченності значно повільніше, ніж $3a \cdot \sum_{l=0}^{3^k-1} n_l$, що і доводить твердження леми.

У випадку, коли $a = \frac{1}{3}$ та $a = \frac{2}{3}$, твердження леми стає очевидним з урахуванням попередніх міркувань та зауваживши, що в цьому випадку усі ε_l та ε_l^* рівні 0 для кожного $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Позначимо через N_k та M_k найменшу кількість квадратів зі стороною 3^{-k} , необхідних для покриття множин класів K_1 і K_2 відповідно. Тоді із структури цих множин (рис. 1) та з леми 2 слідує, що при $k \rightarrow \infty$ виконуються рівності:

$$\begin{cases} N_k = 3q \cdot N_{k-1} + 3(1-q)M_{k-1} + 3(1-q)M_{k-1}, \\ M_k = 3(1-q)M_{k-1} + 3q \cdot N_{k-1} + 3q \cdot N_{k-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_k = 3q \cdot N_{k-1} + 6(1-q)M_{k-1}, \\ M_k = 3(1-q)M_{k-1} + 6q \cdot N_{k-1}. \end{cases}$$

Маємо систему різницьових рівнянь. З її першого рівняння слідує, що $M_k = \frac{N_{k+1} - 3q \cdot N_k}{6(1-q)}$. З іншого боку, помноживши друге рівняння системи на -2 і додавши до першого знаходимо, що $M_k = \frac{N_k + 9q \cdot N_{k-1}}{2}$. Прирівнявши одержані вирази дістаємо:

$$N_{k+1} - 3q \cdot N_k - 27q(1-q)N_{k-1} = 0. \quad (3)$$

Характеристичне рівняння цього різницевого рівняння:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 27q(1 - q) = 0$$

має два дійсних корені $\lambda_1 = \frac{3+3\sqrt{1+12q(1-q)}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-3\sqrt{1+12q(1-q)}}{2}$. Таким чином, загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд:

$$N_k = C_1 \left(\frac{3 + 3\sqrt{1 + 12q(1 - q)}}{2} \right)^k + C_2 \left(\frac{3 - 3\sqrt{1 + 12q(1 - q)}}{2} \right)^k.$$

Оскільки $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ незалежно від q , то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k}{C_1 \lambda_1^k} = 1$. Тоді

$$\alpha^K(K_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg N_k}{-\lg 3^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lg(C_1 \lambda_1^k)}{\lg 3^k} = \log_3 \frac{3 + 3\sqrt{1 + 12q(1 - q)}}{2}.$$

Аналогічно знаходимо, що послідовність M_k повинна задовольняти наступне різницеве рівняння:

$$M_{k+1} - 3q \cdot M_k - 27q(1 - q)M_{k-1} = 0,$$

що і приводить до такого ж результату клітинкової розмірності графіків функцій класу K_2 . $\square$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Barański K.* Hausdorff dimension of the limit sets of some planar geometric constructions // *Adv. Math.* — 2007. — 210. — P. 215–245.
- [2] *Falconer K.J.* Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition.— Chichester, Wiley, 2003.— 338 p.
- [3] *Kenyon R., Peres Y.* Hausdorff dimensions of sofic affine-invariant sets // *Israel J. Math.* — 1996. — 94. — P. 157–178.
- [4] *Lalley S., Gatzouras D.* Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals // *Indiana Univ. Math. J.* — 1992. — 41. — P. 533–568.
- [5] *McMullen C.* The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets // *Nagoya Math. J.* — 1984. — 96. — P. 1–9.
- [6] *Панасенко О. Б.* Розмірність Хаусдорфа–Безиковича ніде не диференційовної функції Працьовитого (готується до публікації).
- [7] *Працевитый Н. В.* Непрерывные канторовские проекторы // *Методы исследования алгебраических и топологических структур.* — К.: КГПИ, 1989. — С. 78–90.
- [8] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної, ніде не диференційовної функції // *Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки.* — № 3, 2002. — С. 327–338.
- [9] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [10] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — К.: Наукова думка, 1992. — 208 с.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

E-mail address: panasenko_alex@bigmir.net