Доклады Академии наук СССР
1966. Том 170, № 6

УДК 517.511+519.48

МАТЕМАТИКА

А. Н. ШАРКОВСКИЙ

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ СИСТЕМА ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 20 I 1966)

Рассматривается непрерывное однозначное отображение T отрезка R вещественной прямой в себя. Под притягивающим множеством Ω_x понимается множество ω-предельных точек последовательности $\{T^jx\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in R$.

Пусть A — совокупность притягивающих множеств Ω_x, когда x пробегает все пространство R. Система A естественным образом частично упорядочивается: если $\Omega', \Omega'' \in A$, $\Omega' \subset \Omega''$, то Ω' предшествует Ω'' в A.

В настоящей заметке формулируются свойства частично упорядоченной системы A.

1^0. Всякая максимальная цепь системы A обладает минимальным и максимальным элементом.

Множество Ω является минимальным элементом тогда и только тогда, когда для любого $x \in \Omega$ $\Omega_x = \Omega$. Минимальным элементом может быть либо конечное множество точек, образующих цикл отображения T, либо совершенное нигде не плотное множество.

Максимальный элемент, не являющийся минимальным, назовем: 1) максимальным элементом первого рода, если он не содержит циклов, и 2) максимальным элементом второго рода, если он содержит хотя бы один цикл.

Всякий максимальный элемент второго рода является совершенным множеством; всякий максимальный элемент первого рода содержит совершенную часть и еще счетное множество точек.

Максимальный элемент Ω второго рода обладает следующим важным свойством ([1]): для любой точки x, для которой $\Omega_x \subseteq \Omega$, существует номер j_x: $T^{j_x}x \in \Omega$ и, следовательно, $T^jx \in \Omega$ при $j \geqslant j_x$.

2^0. Максимальных элементов первого и второго рода не более чем счетное число.

Однако может существовать континуум максимальных элементов, являющихся и минимальными.

3^0. Любые две максимальные цепи, содержащие общий элемент, не являющийся минимальным, имеют один и тот же максимальный элемент.

4^0. Если отображение T имеет только циклы порядка 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то любая цепь состоит не более чем из двух элементов; любые две максимальные цепи либо совпадают, либо не имеют общих элементов; всякий максимальный элемент является либо минимальным, либо максимальным элементом первого рода.

5^0. Если отображение T имеет цикл порядка $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то существует хотя бы один максимальный элемент второго рода.

6^0. Максимальный элемент второго рода во всякой максимальной цепи не имеет непосредственно предшествующего элемента.

7^0. Множество минимальных элементов, предшествующих максимальному элементу второго рода, имеет мощность континуума; при этом подмножество минимальных элементов, отличных от циклов, также имеет мощность континуума.

8^0. Множество элементов, непосредственно следующих за каждым элементом, предшествующим максимальному элементу второго рода, имеет мощность континуума.

9^0. Для любого элемента Ω, для которого множество точек x таких, что $\Omega_x = \Omega$, есть множество 3-го класса классификации Бэра — Валле-Пуссена, и только для такого элемента, существует цепь, содержащая Ω, в которой нет элемента, непосредственно следующего за Ω.

Если отображение T имеет цикл порядка $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то такой элемент существует ([1]) и, следовательно, система A не обладает условием обрыва убывающих цепей.

Доказательство утверждений 1^0—9^0 существенно опирается на результаты работы ([1]). Отметим еще ряд фактов (1^{00}—3^{00}), следующих из ([1]), используемых для доказательства 1^0—9^0 и представляющих самостоятельный интерес.

1^{00}. Если Ω', $\Omega'' \in A$, множество $\Omega' \cap \Omega''$ не пусто и по крайней мере одна точка множества $\Omega' \cap \Omega''$ является предельной слева (справа) для множеств Ω' и Ω'', то $\Omega' \cup \Omega'' \in A$.

2^{00}. Если $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_n \subset \ldots$, $\Omega_n \in A$, то замыкание (в R) множества $\bigcup\limits_n \Omega_n$ есть элемент системы A.

3^{00}. Если $\Omega' \subset \Omega$, Ω', $\Omega \in A$ и Ω — максимальный элемент второго рода, то для любой точки $x \in \Omega$, $x \overline{\in} \Omega'$, для которой $\Omega_x \subseteq \Omega'$ и Ω_x отлично от цикла, существует множество $\Omega'' \in A$: $\Omega'' \supset \Omega'$, $\Omega'' \underline{\ni} x$, причем для любой точки $x' \in \Omega'' \setminus \Omega' \setminus \{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ найдется номер m: $T^m x' = x$ и для любого m существует только одна такая точка x'.

В случае, когда T — гладкое отображение (по крайней мере, непрерывно дифференцируемо на R), для любого элемента Ω, не содержащего циклов, существует элемент $\Omega' \supset \Omega$. Следовательно, в этом случае всякий максимальный элемент является либо максимальным элементом второго рода (совершенным множеством), либо минимальным элементом (конечным множеством).

В ([2]) построен пример непрерывного, но недифференцируемого отображения, имеющего максимальный элемент первого рода.

Интересно выяснить, в какой мере частично упорядоченная система A характеризует отображение. Пусть, например, Ω и Ω' — максимальные элементы отображений T и T'. Пусть, далее, A / Ω, A' / Ω' — частично упорядоченные системы, состоящие из притягивающих множеств, содержащихся соответственно в Ω и Ω'. Будут ли изоморфны отображения T и T', рассматриваемые соответственно на множествах Ω и Ω' (т. е. $T' = STS^{-1}$, где S — гомеоморфизм $\Omega \to \Omega'$), если изоморфны частично упорядоченные системы A / Ω и A' / Ω'? Очевидно, следует дополнительно предполагать, что наименьший порядок циклов, содержащихся как в Ω, так и в Ω', один и тот же (если в Ω и Ω' имеются циклы). Возможно, подобный результат имеет место, если рассматривать частично упорядоченную систему, включающую не все притягивающие множества, а только некоторую часть притягивающих множеств, выбранную надлежащим образом.

Представляет также интерес найти полный набор свойств, которым должно удовлетворять произвольное частично упорядоченное множество, чтобы быть изоморфным частично упорядоченной системе притягивающих множеств некоторого непрерывного отображения.

Отметим, что на всяком максимальном элементе Ω второго рода отображение T определяется заданием на множестве $\Omega \subset R$ системы замкнутых множеств, являющихся притягивающими множествами, содержащимися в Ω. При этом если множество Ω содержит цикл порядка k (т. е. множество, состоящее из точек k точек), то существует не более $(2k)!$ отображений, изоморфных друг другу на Ω и имеющих на Ω данную систему притягивающих множеств.

Этот результат является следствием 3^{00} и утверждений:

а) если множество Ω содержит цикл порядка k, то для любой точки $x \in \Omega$ (исключая, быть может, точки циклов порядка $\leqslant 2k$) существуют по крайней мере две различных точки x', $x'' \in \Omega$ такие, что $T^{2k}x' = T^{2k}x'' = x$;

б) для любого множества $\Omega' \subset \Omega$ точки $x \in \Omega$, для которых $\Omega_x = \Omega'$, лежат на Ω всюду плотно.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
16 XII 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Шарковский, Укр. матем. журн., 18, № 2 (1966). [2] Х. К. Кенжегулов, А. Н. Шарковский, Волжский матем. сборн., в. 3 (1965).