Доклады Академии наук СССР
1961. Том 139, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Н. ШАРКОВСКИЙ

О ПРИВОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО И СТРУКТУРЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 1 IV 1961)

Пусть $f(x)$ — вещественная функция, определенная на всей вещественной оси R. Будем говорить, что множество $M \subseteq \mathrm{R}$ приводит функцию $f(x)$, если $f(M) \subseteq M$ и $f(R \setminus M) \cap M = 0$.

Приводимость функции, естественно, тесно связана со структурой итерационного процесса, порождаемого этой функцией, т. е. областями притяжения неподвижных точек и их границами. А эти последние в случае функции одного действительного переменного, как будет видно ниже, полностью определяются неподвижными точками и точками, переходящими в них, т. е. нулями функций $f_{k+m}(x) - f_m(x)$, $k = 1, 2, \ldots$: $m = 0, 1, 2, \ldots$, где $f_i(x) = f_{i-1}(f(x))$; $i = k + m$, m.

Как известно, точку α называют неподвижной точкой порядка k, если $f_k(\alpha) = \alpha$ и $f_j(\alpha) \neq \alpha$ при $1 \leqslant j < k$. Неподвижные точки порядка k итерационного процесса, задаваемого непрерывной функцией, образуют замкнутое множество, которое, как и всякое замкнутое множество, может состоять из совершенной части и еще не более чем счетного числа точек. Точки второго рода совершенного множества обычно не играют существенной роли в структуре итерационного процесса, и в дальнейшем, ради простоты, будем предполагать, что множество неподвижных точек не имеет совершенной части. Тогда множество неподвижных точек всех порядков будет не более чем счетно. Известно далее, что существуют неподвижные точки притягивающие, отталкивающие и так называемые индифферентные. К последним относятся точки, предельные для изолированных неподвижных точек, и неподвижные точки, являющиеся точками второго рода совершенных множеств *, которые, как мы договорились, у нас отсутствуют. Наконец, заметим, что характер неподвижной точки по обе стороны от нее может быть различным, например, по одну сторону она может выступать как притягивающая точка, а по другую — как отталкивающая.

Следующие ниже три теоремы посвящены структуре множества неподвижных точек, под которой, вообще говоря, понимается зависимость между существованием неподвижных точек различных порядков, зависимость между существованием притягивающих и отталкивающих неподвижных точек.

В ([2]) показано, что если инерционный процесс, задаваемый непрерывной функцией, имеет неподвижную точку порядка $k > 2$, то он имеет и неподвижную точку второго порядка. Отсюда сразу вытекает:

Теорема 1. *Если итерационный процесс, задаваемый непрерывной функцией $f(x)$, не имеет неподвижных точек порядка 2^m, то он может иметь только неподвижные точки порядка 2^i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Если же ите-*

* В ([1]) к индифферентным относят каждую неподвижную точку α порядка k, если $|df_k(x)/dx|_{x=\alpha}| = 1$.

рационный процесс имеет неподвижную точку порядка, отличного от 2^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *то существуют неподвижные точки сколь угодно высокого порядка.*

Действительно, если отсутствуют неподвижные точки порядка 2^m, то нет и неподвижных точек порядка $s \cdot 2^{m-1}$, $s = 3, 4, \ldots$, и нули функций $f_{s \cdot 2^{m-1}}(x) - x$, $s = 2, 3, \ldots$, совпадают с нулями функции $f_{2^{m-1}}(x) - x$. Если бы итерационный процесс имел неподвижную точку порядка $l \neq 2^i$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, то функция $f_l(x) - x$, а значит, и функция $f_{l \cdot 2^{m-1}}(x) - x$ имели бы нули, не совпадающие с нулями $f_{2^{m-1}}(x) - x$, что невозможно. Если все же итерационный процесс имеет неподвижную точку порядка, отличного от степени двойки, например 3-го, то он имеет и неподвижные точки порядка 2^j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. точки сколь угодно высокого порядка.

Теорема 2. *Если $f(x)$ непрерывна на R, то между любыми двумя притягивающими неподвижными точками всегда существует отталкивающая неподвижная точка.*

Если $f(x)$ дифференцируема на R, то между любыми двумя отталкивающими неподвижными точками существует по крайней мере либо притягивающая неподвижная точка, либо счетное число отталкивающих неподвижных точек, среди которых имеются и точки сколь угодно высокого порядка.

Эта теорема прямо следует из непрерывности функции и того факта, что если неподвижная точка k-го порядка притягивающая, то слева от нее $f_k(x) > x$ и справа $f_k(x) < x$; если неподвижная точка отталкивающая, то в силу дифференцируемости $f_{2k}(x) < x$ слева и $f_{2k}(x) > x$ справа от неподвижной точки.

Утверждать можно существование неподвижных точек, имеющих лишь с одной стороны требуемый характер.

Требование дифференцируемости существенно. Так, итерационный процесс, задаваемый функцией

$$f(x) = \begin{cases} ax - x^2, & x \leqslant a-1, \\ ax - (a-1)^2, & x \geqslant a-1, \end{cases} \qquad a > 2,$$

имеет только две неподвижные точки и обе отталкивающие.

Остается уяснить структуру отталкивающих неподвижных точек.

Теорема 3. *Замыкание множества отталкивающих неподвижных точек может быть произвольным замкнутым множеством.*

Иными словами, замыкание множества отталкивающих неподвижных точек может содержать некоторое совершенное множество и еще не более чем счетное число точек. Действительно, во-первых, итерационный процесс может иметь изолированные отталкивающие неподвижные точки, которые могут также сгущаться. Примером может служить итерационный процесс, задаваемый функцией $f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x}$. Индифферентная неподвижная точка $x = 0$ является предельной для отталкивающих (и притягивающих) изолированных неподвижных точек.

Далее, замыкание множества отталкивающих неподвижных точек может содержать совершенное нигде не плотное множество. По-видимому, когда итерационный процесс имеет неподвижные точки сколь угодно высокого порядка, последние образуют совершенные, обычно нигде не плотные множества. Это, возможно, нетрудно установить, но нам для доказательства теоремы достаточно привести хотя бы один пример.

Пусть M — замкнутый интервал, $f(M) \supset M$, $f(R \setminus M) \cap M = 0$ и множество M^1 такое, что $f(M^1) = M$, $f(M \setminus M^1) \cap M = 0$, состоит из замкнутых интервалов, притом не менее, чем из двух, и на каждом из них $f(x)$ монотонна. Если не существует множества $\widetilde{M} \subset M$ — такого, что $f(\widetilde{M}) \subseteq \widetilde{M}$ и $\operatorname{mes} \widetilde{M} > 0$, то M содержит совершенное нигде не плотное множество M^0 такое, что $f(M^0) = M^0$, и являющееся замыканием множества отталкивающих неподвижных точек.

Сформулированным условиям удовлетворяют, например, функции $ax - bx^2$ для $M = [0, a/b]$ при $a > 4$, $b > 0$.

Возьмем множества M^i такие, что $f_i(M^i) = M$ и $f_i(M \setminus \bigcup_{j=1}^{i} M^j) \cap M = 0$, $i = 2, 3, \ldots$ Поскольку M^1 является совершенным множеством и содержит по крайней мере два замкнутых интервала, то множества M^i и $M^0 = \lim_{i\to\infty} M^i$ также являются совершенными множествами. Покажем, что M^0 есть искомое множество. Очевидно, $f(M^0) = M^0$ и M^0 нигде не плотно. Далее, каждый замкнутый интервал $M_p^i \subset M^i$, $i, p = 1, 2, \ldots$, содержит по крайней мере одну неподвижную точку (отталкивающую, так как притягивающих на M заведомо нет, и принадлежащую M^0), поскольку $f_i(M_p^i) = M$.

Наконец, покажем, что замыкание отталкивающих неподвижных точек может быть и замкнутым интервалом. Пусть опять M — замкнутый интервал, $f(M) = M$ и не существует множества $\widetilde{M}$ такого, что $f(\widetilde{M}) \subseteq \widetilde{M}$ и $\operatorname{mes} \widetilde{M} > 0$. Тогда неподвижные точки заполняют M всюду плотно. В самом деле, если M' — любой замкнутый интервал, принадлежащий M, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(M') = M$, а значит, существует и такое q, что $\bigcup_{i=1}^{q} f_i(M') = M$. Множество M, очевидно, имеет по крайней мере одну отталкивающую неподвижную точку, которая, предположим, принадлежит множеству $f_r(M')$, $r \leqslant q$. Всегда найдется замкнутое множество $M'' \subseteq f_r(M')$, содержащее указанную неподвижную точку и такое, что $f(M'') \supset M''$. Аналогично ранее сказанному, существует такое p, что $\bigcup_{j=1}^{p} f_j(M'') = M$, и, следовательно, $f_p(M'') = M$. Итак, $f_{rp}(M') = M$, т. е. M' содержит отталкивающую неподвижную точку порядка не выше rp.

Подобная картина получается для $f(x) = 4x - bx^2, b > 0$, на $\left[0, \frac{4}{b}\right]$. Более того, этот случай имеет место для всякой функции $f(x)$ такой, что $f(\varphi(x)) = \varphi(\theta(x))$, где $\varphi(x)$ — непрерывная периодическая функция; $\theta(x)$ — непрерывная функция и такая, что для любого замкнутого интервала $\hat{M}$ найдется такое m, что замкнутый интервал $\theta_m(\hat{M})$ ($\theta_m(x)$ — m-я итерация $\theta(x)$) будет содержать по крайней мере один полный период функции $\varphi(x)$. Например, в качестве $\theta(x)$ можно взять линейную функцию $cx + d$ при $|c| > 1$. Положив, $\theta(x) = nx$, $\varphi(x) = \cos x$, получим полиномы Чебышева $\cos(n \arccos x)$ ($M = [-1, 1]$). Для функции $\frac{x^2-1}{2} = \operatorname{ctg}(2 \operatorname{arcctg} x)$ неподвижные точки лежат всюду плотно на всей действительной оси.

Теперь сформулируем следующую теорему о приводимости непрерывной функции действительного переменного.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на R. Тогда R разбивается на множества M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $f(M_i) \subseteq M_i$. Множество M_0 есть замыкание множества отталкивающих неподвижных точек итерационного процесса, определяемого $f(x)$, и точек, переходящих в них; каждое из множеств $M_1, M_2, \ldots$ есть область притяжения k притягивающих неподвижных точек k-го порядка, переходящих друг в друга, причем границей ее являются неподвижные точки порядка не выше $2k$ и точки, переходящие в них.*

Заметим, что множества $M_1, M_2, \ldots$ не пересекаются. Каждое из них является открытым и не имеет общих точек с M_0, если содержит двусторонние притягивающие точки, и представляется в виде суммы открытого множества и еще некоторого множества точек, принадлежащих M_0, если содержит односторонние притягивающие точки. Все множества M_0, M_1, M_2, ... приводят функцию $f(x)$.

Вопрос о распределении точек R по множествам M_i достаточно ясен, и на доказательстве теоремы останавливаться не будем. То, что границе области притяжения точек k-го порядка принадлежат отталкивающие неподвижные точки порядка не выше $2k$, доказано в ([2]).

Приводимость функции действительного переменного можно использовать при решении различных уравнений, содержащих в качестве аргумента искомой функции не только x, но и некоторую известную функцию $f(x)$, например, при решении функциональных уравнений $\Phi(x, \varphi(x), \varphi(f(x))) = 0$, где $\varphi(x)$ — неизвестная функция.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
28 III 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, М. — Л., 1936.
[2] А. Н. Шарковский, Укр. матем. журн., 12, № 4 (1960).