Проект Наукова Книга

А. Н. ШАРКОВСКИЙ

АТТРАКТОРЫ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ БАССЕЙНЫ

Моим родителям
Полищук Домне Порфирьевне
(1906–1980)
и Шарковскому Николаю Ивановичу
(1906–1941)
посвящается

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А.Н. ШАРКОВСКИЙ

АТТРАКТОРЫ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ БАССЕЙНЫ

ПРОЕКТ
≪ НАУКОВА КНИГА ≫

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 2013

УДК 519.14

Монография содержит основы топологической теории одномерных динамических систем и состоит из двух частей. Основная, первая часть представляет собой диссертационную работу автора, защищенную еще в 1967 г. Математические результаты этой работы составили существенную часть современной топологической динамики и привели к созданию нового направления в теории динамических систем — комбинаторной динамики. Исследования в теории хаоса, проведенные автором еще в 60-х годах прошлого столетия, значительно опередили аналогичные исследования американских математиков. Поэтому издание оригинального текста диссертационной работы целесообразно и с исторической точки зрения. Вторая часть монографии содержит результаты более поздних исследований автора и его учеников, которые дополняют результаты первой части. Для специалистов в области математики, преподавателей, аспирантов и студентов высшей школы соответствующих специальностей.

Монографія містить основи топологічної теорії одновимірних динамічних систем і складається з двох частин. Основна, перша частина — це дисертаційна праця автора, захищена ще у 1967 р. Математичні результати цієї праці стали суттєвою частиною сучасної топологічної динаміки та обумовили створення нового напрямку в теорії динамічних систем — комбінаторної динаміки. Дослідження з теорії хаосу, проведені автором у 60-х роках минулого століття, значно випередили аналогічні дослідження американських математиків. Тому видання оригінального тексту дисертаційної праці є доцільним також з історичної точки зору. Друга частина містить результати більш пізніх досліджень, виконаних автором та його учнями, які доповнюють результати першої частини. Для фахівців у галузі математики, викладачів, аспірантів і студентів вищої школи відповідних спеціальностей.

Видання здійснено за державним замовленням
на випуск виробничої продукції

Научно-издательский отдел физико-математической литературы

Редактор *В. В. Вероцкая*

ISBN 978-966-00-1292-9

Оглавление

Предисловие

“…явления во всей их сложности легко и поразительно получаются из простых уравнений, которые описывают их. Не подозревая о возможностях простых уравнений, люди часто заключают, что для объяснения всей сложности мира требуется нечто данное от Бога, а не просто уравнения.”

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс
Фейнмановские лекции по физике, т. 7, 1966, с. 271, 272.

Сложившиеся к настоящему времени представления о возникновении и становлении хаотической динамики в 60-70-х годах прошлого века побудили автора вспомнить о своих исследованиях 60-х годов по одномерным динамическим системам и взглянуть на них уже с позиций нынешней “теории хаоса”. За последние 30 – 35 лет появилось немало статей и даже книг, так или иначе затрагивающих различные аспекты её истории. Однако такие исторические экскурсы оказываются не всегда достаточно полными, а иногда и не вполне точными (здесь сразу же вспоминается американский бестселлер “Хаос” (J. Gleick, “Chaos: making a new science”, Penguin Books, 1988), где на стр. 76 приводится несколько искаженный рассказ о встрече, инициатором и участником которой был автор этой книги).

У автора, как непосредственного участника событий того времени, возникло естественное желание внести свою лепту в воссоздание более-менее адекватной картины развития хаотической динамики. И первый шаг на этом пути — настоящее издание, представляющее в целостной форме исследования автора первой половины 60-х годов, оформленные тогда же в виде докторской диссертации. Хотя почти все результаты, вошедшие в эту диссертацию, были опубликованы и, более того, в течение 60-х годов переведены на английский язык, они остались в то время почти незамеченными или, скорее, невостребованными, ибо появились, возможно, несколько преждевременно.

Выполненная в Киеве в те годы работа, по мнению автора, не только заложила основы одномерной топологической динамики и предоставила в распоряжение хаотической динамики весьма эффективные инструменты для исследования сложных нелинейных процессов, но и, продемонстрировав наличие крайне сложных, квазислучайных траекторий в, казалось бы, совсем простых системах с одномерным фазовым пространством, показала, что хаотичное, часто практически неотличимое от случайного поведение детерминированных систем является неотъемлемым атрибутом окружающего нас мира!

Издательство "Наукова думка" положительно отнеслось к идее опубликовать докторскую диссертацию автора, дополнив издание некоторой информацией исторического плана. В результате и появилась настоящая книга. Ее первую часть и составляет полный текст написанной еще в 1966 году диссертационной работы "Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем".

* * *

Основное внимание в книге уделено одномерным динамическим системам с дискретным временем. Рассматриваются системы, у которых фазовое пространство самое простое — вещественная прямая или замкнутый интервал. Такие системы обладают рядом свойств, благодаря которым они занимают теперь одно из ведущих, приоритетных мест как в различных теоретических и прикладных исследованиях, так и в учебных курсах, формирующих "нелинейное" мышление, которое столь необходимо теперь для понимания всей сложности реального мира.

В настоящее время теория одномерных динамических систем составляет существенную часть не только теории динамических систем, но и всей нелинейной динамики, является весьма эффективным и полезным инструментом при исследовании самых разнообразных нелинейных процессов. Простота фазового пространства позволила сравнительно быстро выяснить закономерности, характеризующие поведение траекторий. Поэтому сейчас одномерная динамика представляет собой хорошо развитую теорию, которая содержит глубокие результаты и эффективные критерии и может сопровождаться, что также немаловажно, простым и наглядным компьютерным экспериментом.

Как теперь хорошо известно, одномерные системы имеют широкий диапазон динамического поведения вплоть до режимов, когда поведение траекторий детерминированной системы практически неотличимо от поведения случайных процессов. Это оказалось весьма неожиданным. Факт, что сложная динамика может возникать в таких системах, несмотря на простоту фазового пространства, принципиально важен как для самого протекания реальных процессов, так и для понимания их динамики!

В динамических систем с непрерывным временем (например, порождаемых дифференциальными уравнениями) сложное поведение траекторий возможно начиная только с размерности 3. Аналогичное по сложности поведение траекторий возможно и в одномерных системах, но с дискретным временем, задаваемых, например, совсем простыми разностными уравнениями $x_{n+1} = f(x_n)$ с непрерывным или даже сколь угодно гладким отображением f прямой в себя. Более того, с точки зрения дескриптивной теории множеств одномерные динамические системы могут быть сложны настолько же, насколько могут быть сложны бесконечномерные системы: верхние оценки сложности множеств, которые обычно используются при изучении динамических систем, достигаются уже одномерными системами.

Еще одно важное преимущество одномерных динамических систем — легкость их общения ("взаимодействия") с компьютером, благодаря чему каждый может "в живую" увидеть и оценить поведение траекторий системы и даже ее эволюцию в зависимости от изменения параметров системы. Появление персональных компьютеров, давшее мощный импульс для ускоренного развития нелинейной динамики в целом, способствовало также широкому использованию одномерных динамических систем в научных исследованиях.

Начиная с работ по одномерной динамике, в научный обиход стали входить термины "хаос", "хаотическая система" (после того, как в 1975 году Ли и Йорк использовали слово *хаос* в статье "Период 3 влечет хаос" как раз применительно к таким системам). Уже затем начали обращать внимание на то, что "хаотическая динамика" неоднократно наблюдалась и ранее и в экспериментах, и в теории.

Для всех, кто знакомится с законами окружающего мира, одномерная динамика представляет немалый феноменологический интерес. Она дает уникальную возможность для детального и глубокого анализа систем, особенно со сложным поведением, помогает понять общие механизмы возникновения и развития реальных динамических процессов.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — докторская диссертация автора "Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем", защита которой состоялась в далеком 1967 году. Вторую часть составляют более поздние исследования автора и его учеников, которыми показалось разумным, сообразно названию книги, дополнить ее основную часть.

Большая часть результатов, приведенных в диссертации, как и полагалось, была опубликована еще в первой половине 60-х, да и вскоре переведена на английский. Некоторые из них теперь хорошо известны и широко используются. В первую очередь это относится к теореме о сосуществовании циклов различных периодов, которая вводит специальное упорядочение натуральных чисел:

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec \\ \prec \cdots \prec 7 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec 3 \cdot 2^2 \prec \\ \prec \cdots \prec 7 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \\ \prec \cdots \prec 11 \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \end{aligned} \qquad (*)$$

Это упорядочение характеризует и последовательность бифуркаций в динамических системах, и сценарии перехода в системах от простой динамики ко все более сложной.

В то же время многие результаты диссертации, отражающие разнообразие сложного поведения траекторий, пока не столь известны, хотя и весьма важны для более полного понимания динамики систем. Некоторые, а это преимущественно доказательства утверждений, ранее не были опубликованы.

В диссертации можно найти много “прообразов” алгоритмов и понятий, популярных сейчас в нелинейной динамике. Так Λ-схема (стр. 60–61) — это одномерный вариант “подковы Смейла”, а ограничение отображения T_0 (стр. 78–79) на канторово минимальное множество — двоичный одометр.

Для исследования траекторий в окрестности их аттракторов — ω-предельных множеств — и исследования бассейнов притяжения таких аттракторов, в частности, для доказательства достижимости верхних дескриптивных оценок топологической сложности бассейнов, понадобилось разработать достаточно сложное техническое средство — метод выделения специальных расширяющихся “окрестностей” аттракторов (§§ 3.1, 3.2). Эти расширяющиеся множества, имеющиеся в окрестности аттрактора траектории, играют в динамике систем примерно ту же роль, что и локальные расширяющиеся многообразия в гиперболической теории.

Цель издания полного текста диссертации не столько предоставить полезную и, быть может, новую информацию об одномерных динамических системах, сколько удостоверить создание основ одномерной топологической и хаотической динамики в Киеве в Институте математики еще в первой половине 60-х годов, т. е. задолго до появления слова *хаос* в математических исследованиях детерминированных систем.

К сожалению, сегодняшние представления об этапах развития хаотической динамики, как уже отмечалось, не вполне отражают истинную картину ее развития. И не только потому, что не все полученные ранее и заслуживающие внимания результаты достаточно хорошо известны. Часто авторы, пишущие и об истории, не дают себе труда внимательно ознакомиться с работами, на которые они собираются ссылаться. Вот несколько примеров, имеющих отношение к автору.

В книге А.Б. Катка и Б. Хасселблата “Введение в современную теорию динамических систем” (Москва, “Факториал”, 1999) на с. 733 можно прочитать, что так называемый метод квадратного корня, позволяющий удваивать периоды всех циклов отображения, восходит к работе Штефана 1977 года, в то время как этот метод неоднократно использовался еще в моих работах *“Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя”* (Укр. матем. журнал, 1964, №1) и *“О циклах и структуре непрерывного отображения”* (Укр. матем. журнал, 1965, №3). В книге тех же авторов “Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений” (Москва, МЦНМО, 2005) на с. 338 приведено утверждение, принадлежащее, как пишут авторы, Бартону и Бернсу, хотя это всего-то теорема 1 из указанной выше работы 1964 года. Циклы специальной структуры, которые динамическая система обязана иметь прежде всех других циклов того же периода и которые были введены опять же в работе 1964 года, принято теперь называть циклами Штефана.

Название книги требует определенных пояснений.

Основная задача теории динамических систем — исследование поведения траекторий со временем, главным образом, асимптотического поведения, когда время неограниченно возрастает. Для этого традиционно используется понятие ω-предельного множества; ω-предельное множество траектории — это наименьшее замкнутое множество в фазовом пространстве, обладающее свойством: какую бы его окрестность мы не выбрали, начиная с некоторого момента времени все точки траектории будут лежать в этой окрестности.

Слово “аттрактор” (буквально: “притягиватель”) получило распространение как математический термин с начала 70-х годов. Под этим термином понимают множество в фазовом пространстве, притягивающее к себе траектории системы (все траектории или их часть). Были обнаружены так называемые странные аттракторы, у которых странной (крайне сложной) была топологическая структура, например, аттрактор имел дробную размерность Хаусдорфа. Термины глобальный аттрактор и локальный аттрактор указывают на то, идет ли речь о всем фазовом пространстве или же о какой-то его части. Аттрактор по Милнору означает притяжение не всех, а почти всех траекторий системы, т. е. траекторий, начальные точки которых образуют в фазовом пространстве либо множество полной меры (если в пространстве введена мера), либо так называемое резидуальное множество (или множество второй категории).

Автор этой книги посчитал целесообразным еще больше расширить спектр использования термина *аттрактор*, применяя его к отдельной, индивидуальной траектории. Так что слова *"аттрактор траектории"* фактически всего лишь заменяют более длинную и, как кажется, менее информативную последовательность слов *"ω-предельное множество траектории"*.

Под термином *бассейн* (или *бассейн притяжения*) некоторого множества в теории динамических систем обычно понимают подмножество фазового пространства, порождающее траектории, притягиваемые этим множеством. Так, бассейном глобального аттрактора, очевидно, является все фазовое пространство; бассейном притягивающего цикла (как и любого другого множества, которое притягивает к себе какую-либо свою окрестность), будет некоторое открытое подмножество фазового пространства. Однако далеко не всегда топологическая структура бассейна настолько проста с топологической точки зрения (изучением этого вопроса занимается, в частности, дескриптивная теория множеств).

Существенная часть диссертации автора как раз и была посвящена изучению того, насколько сложным может быть бассейн аттрактора траектории, который в силу определения состоит из точек этой траектории, а также точек всех других траекторий, имеющих тот же самый аттрактор (т. е. то же ω-предельное множество). Из результатов диссертации, в частности, следует: если аттрактор траектории — счетное множество, то его бассейн — всегда очень сложное множество, а именно, множество третьего класса по классификации Бэра–Валле-Пуссена (оно представимо в виде пересечения счетного числа объединений счетного числа замкнутых множеств, но не может быть представлено в виде объединения счетного числа пересечений счетного числа открытых множеств).

Следует отметить еще одну немаловажную деталь, касающуюся используемой в книге терминологии. Автор узнал о существовании такого понятия как динамическая система только в начале 60-х годов XX века, уже после написания кандидатской диссертации “Некоторые вопросы теории одномерных итерационных процессов”. Юрий Макарович Березанский, один из официальных оппонентов по этой диссертации, обратил внимание автора на то, что итерационные процессы имеют немало общего с динамическими системами. И только с этого момента автор начал штудировать теорию динамических систем, используя книгу В.В. Немыцкого и В.В. Степанова “Качественная теория дифференциальных уравнений” и их статьи. Так что в работах, ставших основой докторской диссертации, и в самой диссертации терминология теории динамических систем используется не всегда; в частности, вместо *ω-предельное множество* или *аттрактор* обычно используются слова *притягивающее множество*, а вместо *бассейн (притяжения) — притягивающееся множество.*

В заключение хотелось бы вспомнить или, быть может, напомнить об отношении к одномерным динамическим системам 40–50 лет назад, когда теория одномерных динамических систем только начинала развиваться.

Я.Г. Синай в книге “Современные проблемы эргодической теории” (Физматлит, Москва, 1995), а именно, в лекции 11 “Порядок Шарковского и универсальность Фейгенбаума” пишет: “Около двадцати лет назад у меня было общее ощущение, что структура одномерных динамических систем относительно проста и может быть понята до конца, и в то же время результаты, справедливые для одномерного случая, не имеют естественных многомерных аналогов. Последующие годы показали, что оба этих ощущения неправильны. Во-первых, здесь были обнаружены новые удивительные и неожиданные закономерности, и, во-вторых, некоторые из них естественно переносятся на случай любого числа измерений.”

И еще пример из собственного опыта. В 1967 году я впервые поехал за границу, в Прагу, на конференцию по нелинейным колебаниям (International Conference on Nonlinear Oscillations, Prague, September, 5-9, 1967), где выступал с докладом “On the periodic solutions of a class of finite differences equations”. В этом докладе, в частности, шла речь о сосуществовании периодических решений различных периодов, и было приведено упорядочение чисел (∗), входящее теперь почти во все учебники по динамическим системам. Однако в трудах конференции вместо текста доклада были напечатаны только его тезисы (см. “Proceed. 4th Conf. on Nonlinear Oscillations”, Academia Publ. House, Prague, 1968, с. 249) : какое, мол, отношение к (очень серьезной!) теории нелинейных колебаний может иметь странное, по мнению оргкомитета, упорядочение натуральных чисел, да к тому же написанное для простейшего разностного уравнения? Однако, как видим, многое может изменяться, и история с одномерными системами — еще одно тому подтверждение.

Автор выражает глубокую благодарность своим коллегам Елене Юрьевне Романенко и Владимиру Васильевичу Федоренко за помощь в подготовке рукописи монографии.

А. Н. Шарковский
Киев, июнь 2013

Часть I

ШЕСТИДЕСЯТЫЕ

Г л а в а 1
ПРИТЯГИВАЮЩИЕ И ПРИТЯГИВАЮЩИЕСЯ МНОЖЕСТВА

Г л а в а 2
ОТОБРАЖЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

Г л а в а 3
КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ

Г л а в а 4
ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННАЯ СИСТЕМА ПРИТЯГИВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ

Г л а в а 5
НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Немного истории

Первая часть книги, как уже сказано в предисловии, — это полный текст диссертационной работы автора на соискание ученой степени доктора наук, написанной в 1966 г. Исследования динамических систем, которые легли в основу этой работы, проводились в 1961–1965 гг., их результаты были опубликованы в Украинском математическом журнале, “Докладах Академии наук СССР” и “Доповідях Академії наук УРСР” в 1964–1966 гг.

Представление диссертации к защите состоялось в Институте математики Академии наук Украины 3 января 1967 г. В этот день исполнялось 50 лет директору института Юрию Алексеевичу Митропольскому, и на торжественное заседание, посвященное его юбилею, прибыло много гостей, в том числе из Москвы приехал его учитель, директор Объединенного института ядерных исследований Николай Николаевич Боголюбов. После торжественной части Ю. А. Митропольский передал ему экземпляр моей диссертации, так что именно Боголюбов был первым, кто, по крайней мере, пролистал сей труд и от кого я услышал первый отзыв: “Нормальная диссертация, введение лучше было бы иметь более пространное”.

Защита диссертации состоялась в мае того же года. Официальными оппонентами были Владимир Игоревич Арнольд, двумя годами раньше ставший одним из самых молодых докторов наук, и один из немногих, кто сталкивался с одномерными отображениями (рассматривая проблему малых знаменателей), Юрий Исаакович Неймарк, имевший значительный опыт исследования (преимущественно локального) многомерных отображений, а также Степан Павлович Пулькин, который еще в конце 30-х годов (будучи аспирантом И. Г. Петровского) начал изучать сложную динамику, порождаемую непрерывными отображениями вещественной прямой.

Защита прошла успешно, каких-либо замечаний или возражений на защите не прозвучало. Не обошлось, правда, без "курьезов": кто-то проголосовал против, и один из членов ученого совета возмущался — как такое возможно, если не было никаких замечаний. Позднее случайно выяснилось, что именно он и был тем единственным, кто голосовал против. Высшая аттестационная комиссия (ВАК СССР), в компетенцию которой входило утверждение диссертаций, почти два года рассматривала диссертацию, что, впрочем, можно было ожидать, учитывая тогдашнюю "нетрадиционность" ее тематики.

Что касается истории исследований, завершившихся написанием диссертационной работы, о которой идет речь, то ее можно охарактеризовать и весьма кратко. Началась она в 1958 г. с подготовки дипломной работы, посвященной итерационным процессам. Затем исследования в этом направлении были продолжены в Институте математики Академии наук Украины: сначала в аспирантуре, а затем уже в должности научного сотрудника. Итогом стало, как можно теперь констатировать, создание основ важного раздела современной теории динамических систем — топологической теории одномерных динамических систем. Более того, исследования, посвященные сосуществованию циклов различных периодов, привели к зарождению (появлению) нового направления в теории динамических систем — комбинаторной динамики.

Хотелось бы затронуть здесь еще и тему, относящуюся даже не к истории, а уже к предыстории появления диссертационной работы. Через много лет после защиты, когда одномерная динамика стала очень популярной, мне не раз задавали вопрос: как это молодого человека “угораздило” заинтересоваться столь неожиданной на то время тематикой, а потом и прийти к весьма необычному упорядочению натуральных чисел, которое оказалось самым тесным образом связанным с динамикой нелинейных процессов? Поэтому имеет смысл остановиться на этом аспекте и как на примере того, как могут формироваться будущий исследователь и его профессиональные интересы, как влияет на его становление окружение, преподаватели, учителя и разного рода обстоятельства.

К моменту завершения учебы в университете, когда пришло время готовить дипломную работу, особых предпочтений относительно тематики у меня не было. Попытки преподавателей увлечь студента теорией вероятностей, функциональным анализом или функциями комплексного переменного были не очень успешными. На пятом курсе мы проходили практику в Феофании на известной вычислительной машине МЭСМ, для которой составляли программы или улучшали уже существующие. У меня появились некоторые соображения относительно архитектуры подобных машин. Однако мое предложение подготовить об этом дипломную работу не встретило особого энтузиазма у Владимира Семеновича Королюка, который читал спецкурс по адресному программированию (его интересы, как я понял позднее, тогда уже сместились в сторону теории вероятностей). А вопрос с темой дипломной работы нужно было решать срочно (такая “проблема” может показаться несколько странной теперь, когда у каждого дипломника есть научный руководитель, который обязан позаботиться о теме дипломной работы). Сейчас уже трудно точно сказать, когда выбор был сделан, а вот почему предпочтение было отдано исследованию итераций непрерывных функций, постараюсь объяснить.

Это не был случайный выбор. Если искать ответ на вопрос, что конкретно способствовало тому, что предметом исследования стали одномерные итерационной процессы, то вспоминаются следующие обстоятельства. Во-первых, это математический кружок для студентов первого курса механико-математического факультета Киевского университета имени Т. Г. Шевченко, куда я поступил в 1953 г. Одним из руководителей кружка был профессор Георгий Евгеньевич Шилов, читавший нам лекции по высшей алгебре. Именно на темы, предложенные им, я несколько раз выступал на этом кружке и один из моих докладов касался как раз условий сходимости к неподвижной точке итерационной последовательности $f_n(x)$, где $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f_0(x) = f(x)$. К сожалению, Шилов вскоре переехал в Москву преподавать математику в МГУ.

Второе обстоятельство, показавшее, что в теории итераций могут встречаться весьма интересные факты, опять-таки связано с математическим кружком, но уже для второго курса, организованным в следующем году Иосифом Ильичем Гихманом. На одном из заседаний он предложил доказать, что так называемый итерированный синус $\sin_n(x) = \sin(\sin_{n-1}(x))$ при $n \to \infty$ стремится к нулю как $\sqrt{3/n}$. Тогда для доказательства мной были использованы дифференциальные уравнения, а уже позднее стало понятно, что при исследовании асимтотических свойств разностных уравнений $x(n+1) = f(x(n))$ естественно использовать асимтотические разложения инвариантов отображений $n \mapsto n+1$, $x \mapsto f(x)$ (аналогов первых интегралов дифференциальных уравнений), что позволяло "элегантно" получать многие известные формулы.

В-третьих, на лекциях по теории функций действительной переменной, которые читали студентам на третьем или четвертом курсах, детально разбирались свойства "плохих", крайне сложно устроенных функций, их сумм, последовательностей. И у меня иногда возникало чувство некоторой неудовлетворенности такой ситуацией, когда скрупулезно анализируются разные патологические случаи и притом, так сказать, "в статике", в то время как совсем без внимания оставлены самые естественные вопросы, возникающие при рассмотрении итераций даже "хороших" функций, т.е. в куда более важной, на мой взгляд, "динамике".

Этот опыт “общения” с одномерными итерационными процесами сформировал у меня ощущение, что они заслуживают внимания, что за ними скрываются интересные факты, которые можно обнаружить даже без привлечения сложных математических методов, а также породил уверенность в том, что кое-что в данном направлении может быть достигнуто собственными силами. Выбор был сделан и к окончанию учебы дипломная работа, посвященная итерациям, была написана. Уже после окончания мной университета она была отмечена премией на конкурсе студенческих работ.

При поступлении в аспирантуру эта работа, как обычно, была представлена в качестве реферата. Из-за моего намерения продолжать исследование итерационных процессов возникла проблема с научным руководителем: естественно, что в институте подобной тематикой никто не занимался, а каждый потенциальный руководитель полагал, что аспиранту следует заниматься тем, чем в настоящий момент занимается руководитель или, по крайней мере, тем, что кажется ему интересным. В результате по предложению Ю. А. Митропольского моим руководителем был утвержден Н. Н. Боголюбов, в то время уже работавший в Москве. В конце 30-х годов, будучи еще в Киеве, Боголюбов исследовал свойства траекторий динамических систем, в частности, ему принадлежат широко известные результаты по инвариантным мерам. Так что предлагаемая мной тематика была хоть в какой-то степени близкой к той, которой в свое время интересовался Боголюбов. Однако Боголюбов находился далеко от Киева и за время аспирантуры мне так и не довелось с ним побеседовать. А вот с Митропольским мы много раз обсуждали рабочие вопросы и не только организационные, так что на диссертационной работе было написано, что научным руководителем является Ю. А. Митропольский.

Кандидатская диссертация “Некоторые вопросы теории одномерных итерационных процессов” была представлена к защите в июне 1961 г., за полгода до окончания срока аспирантуры (и с 1-го июля я стал сотрудником института математики, где и работаю по сей день). Защита состоялась в октябре того же года. Официальными оппонентами были Ю. М. Березанский и И. И. Гихман, с которыми пришлось неоднократно беседовать и которые высказали немало замечаний, большей частью относящихся и к тексту, и к оформлению доказательств.

Некоторые из результатов, содержащихся в этой диссертации, нашли продолжение в докторской диссертации. К ним, в первую очередь, относятся утверждения, характеризующие сосуществование циклов различных периодов, и которые, следовательно, можно рассматривать как первые факты, "первые камни", заложенные в фундамент комбинаторной динамики. Было показано, что если у непрерывного отображения вещественной прямой есть цикл периода 2^m, то есть и циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, ..., m-1$, а если у отображения есть цикл периода $\neq 2^i$, $i \geq 0$, то есть и циклы сколь угодно большого периода. Таким образом, уже тогда была найдена часть хорошо известного сейчас упорядочения всех натуральных чисел, а именно, $1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec \forall \neq 2^i$, $i \geq 0$. Эти результаты были включены в статью "О приводимости непрерывной функции действительной переменной и структуре неподвижных точек соответствующего итерационного процесса", представленную Н. Н. Боголюбовым в "Доклады Академии наук СССР" и опубликованную там в 1961 г. Американское математическое общество тогда уже переводило "Доклады" на английский язык, так что вопреки звучащим иногда утверждениям о недоступности в то время математической литературы, математических результатов, опубликованных на русском языке, следует констатировать, что еще с начала 60-х годов с этими результатами имели возможность ознакомиться все желающие.

Часть результатов кандидатской диссертации содержала необходимые и достаточные условия сходимости итераций отображения к притягивающим циклам и, следовательно, позволяла указывать границы бассейна притяжения каждого такого цикла. Еще одну группу составляли исследования быстро сходящихся итерационных процессов, простейшим из которых является известный метод Ньютона. Здесь были приведены общие формулы как для таких процессов, так и для границ их сходимости.

После защиты кандидатской диссертации исследования итерационных процессов продолжались. В частности, в марте 1962 г. в Украинский математический журнал была направлена статья “О сосуществовании циклов непрерывного преобразования прямой в себя”, содержащая известную теорему об упорядочении всех натуральных чисел и ее полное доказательство.

Вместе с тем, первое же знакомство с теорией динамических систем по книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова “Качественная теория дифференциальных уравнений” показало, что целесообразно выяснить, как трансформируются основные понятия этой теории при переходе от непрерывного времени к дискретному и, особенно, в случае необратимости времени, а также как при этом могут изменяться свойства самих систем. Именно такие динамические системы и имело смысл рассматривать в одномерном случае.

Все, что удалось выяснить в этом направлении, составило содержание докторской диссертации, полный текст которой приведен в данной книге.

Знакомство с ее текстом предварим некоторой информацией о содержащихся там результатах, а также пояснениями, касающимися используемой терминологии.

В первой главе, в отличие от всех последующих, рассматриваются динамические системы, задаваемые на произвольном компакте E непрерывным отображением $T : E \to E$. Изучаются свойства отображения T на произвольном множестве, являющемся аттрактором для некоторой траектории (т.е. ее ω-предельным множеством, или, по терминологии, использованной в диссертации, ее притягивающим множеством). В частности, доказывается: если $\mathcal{A}$ — такой аттрактор и $U \neq \mathcal{A}$ — подмножество $\mathcal{A}$, открытое в $\mathcal{A}$, то замыкание множества TU не содержится в U. Это свойство, которое можно назвать слабой несжимаемостью областей в аттракторах траекторий, является не только необходимым “атрибутом” аттракторов траекторий, но и достаточным (в том смысле, что с любого множества, обладающего таким свойством, динамическую систему всегда можно продолжить на его окрестность так, что это множество станет аттрактором некоторой траектории). Из “слабой несжимаемости” сразу вытекает, если $\mathcal{A}$ — конечное множество, то это цикл; если $\mathcal{A}$ — бесконечное множество и содержит цикл, то этот цикл не изолирован в $\mathcal{A}$.

Далее исследуется топологическая структура бассейнов притяжения аттракторов траекторий, т. е. множеств

$$\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \{x \in E \mid \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\},$$

где $\mathcal{A}(x)$ — аттрактор траектории, проходящей через точку x. Находятся верхние оценки топологической сложности бассейнов, в частности, доказывается, что $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — всегда множество типа $F_{\sigma\delta}$, т.е. представимо в виде пересечения счетного числа объединений счетного числа замкнутых множеств; если же аттрактор $\mathcal{A}$ максимальный, т.е. не является частью аттрактора другой траектории, то его бассейн устроен в общем-то проще: это множество типа G_δ, т.е. представимо в виде пересечения счетного числа открытых множеств.

В третьей главе показано, что верхние оценки топологической сложности бассейнов достигаются уже в одномерных системах, в частности, доказывается, что если аттрактор $\mathcal{A}$ содержит цикл и не изолирован, т.е. в любой его окрестности имеется аттрактор другой траектории $\widetilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — множество третьего класса по классификации Бэра–Валле-Пуссена, оно не может быть представлено в виде объединения счетного числа пересечений счетного числа открытых множеств.

В четвертой главе рассматривается множество, составленное из аттракторов всех траекторий, которые имеет динамическая система, частично упорядоченное по теоретико-множественному включению, а также его подмножество, состоящее из локально максимальных аттракторов траекторий (т.е. максимальных в некоторой своей окрестности и называемых иногда базисными).

Изучаются свойства этих множеств в предположении, что отображение имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. в случае, когда динамическая система действительно устроена очень сложно (в частности, в этом и только этом случае, как теперь известно, топологическая энтропия системы положительна; в то время само понятие "топологическая энтропия" только зарождалось). Доказывается, например, что при этом отображение имеет континуум минимальных множеств, отличных от циклов (каждое из которых, следовательно, есть канторово множество, на котором плотна любая траектория).

В этом случае существует также по крайней мере один максимальный аттрактор траекторий (т.е. не содержащийся в большем), содержащий циклы (и это будет либо канторово множество, либо несколько интервалов, циклически переходящих друг в друга). Множество, состоящее из всех локально максимальных аттракторов траекторий, содержащихся в таком максимальном аттракторе (обозначим его, например, $\mathbb{A}$), имеет мощность континуума; каждый аттрактор из $\mathbb{A}$ — это канторово множество или же конечное множество, т.е. цикл. Если рассматривать $\mathbb{A}$ как частично упорядоченное множество в соответствии с теоретико-множественном включением составляющих его аттракторов, то тогда всякая максимальная цепь (не содержащаяся в большей) этого частично упорядоченного множества будет подобна множеству рациональных чисел: для произвольных $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$, принадлежащих $\mathbb{A}$, существует $\mathcal{A}''' \in \mathbb{A}$ такое, что $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}''$ (точнее, такая цепь подобна множеству правосторонних точек канторового множества: каждый локально максимальный аттрактор является топологическим пределом последовательностей содержащихся в нем других локально максимальных аттракторов, но он изолирован, по определению, от содержащих его локально максимальных аттракторов).

Важное место при исследовании динамических систем занимают периодические траектории. Во второй главе, в частности, доказывается, что каждая неизолированная точка аттрактора траектории является предельной для периодических точек.

Строится пример аттрактора, изолированные точки которого не являются предельными для точек циклов. Доказывается также, что и центр динамической системы, и минимальный центр притяжения являются замыканием множества периодических точек, следовательно, они совпадают, а глубина центра не превышает 2. А начинается глава с исследования вопроса о сосуществовании циклов в зависимости от их периодов.

ОБ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А.Н. ШАРКОВСКИЙ

ОБ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев – 1966

Копия титульной страницы диссертации.

Введение

Общая теория динамических систем обязана своим зарождением классическим работам А. Пуанкаре и Дж. Биркгофа. Пуанкаре первым сформулировал основные проблемы теории динамических систем. Биркгоф ввел основные понятия и первым предпринял попытку систематического изучения динамических систем. Ему, в частности, принадлежит понятие ω-предельного множества, которое является основным объектом исследования в данной работе.

Пусть E — некоторое топологическое пространство. Говорят, что на E задана динамическая система, если указана некоторая группа отображений пространства E в себя.

Настоящая работа относится к теории дискретных динамических систем, когда группа отображений является свободной группой с одной образующей. Дискретная динамическая система задается на E одно-однозначным отображением $T : E \to E$.

Мы будем предполагать, что T является только однозначным отображением и, таким образом, динамическая система являются только полугруппой отображений. Если параметр группы — время, то замена группы полугруппой означает, что время в динамической системе необратимо.

Точка $y \in E$ называется ω-предельной точкой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$, если для всякой окрестности U точки y и любого n существует $m > n$ такое, что $T^m x \in U$. Множество ω-предельных точек траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ обозначается $\mathcal{A}_x$.

Первый параграф работы является развитием некоторых результатов Дж. Биркгофа. В монографии [23] Биркгоф, в частности, исследовал свойства отображения на ω-предельном множестве $\mathcal{A}$ в том случае, когда динамическая система на $\mathcal{A}$ транзитивна (т. е. существует точка $x \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$). Эти же вопросы рассматривались Г. Ф. Хильми [50, 51]. Он называет такое ω-предельное множество квазиминимальным.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное ω-предельное множество. Отображение T на множестве $\mathcal{A}$ обладает следующим свойством: если U — подмножество $\mathcal{A}$, открытое в $\mathcal{A}$ и $\neq \mathcal{A}$, то замыкание множества TU не содержится в U. Таким образом, на всяком ω-предельном множестве имеет место “несжимаемость” (несколько отличная от той, которую рассматривал Хильми в [52]). Это условие является не только необходимым, но и достаточным: если на некотором замкнутом множестве $M \subset E$ задано отображение, обладающее указанным выше свойством “несжимаемости”, то это отображение можно продолжить на замкнутое множество $E' \subseteq E$ так, что для динамической системы на E' множество M будет ω-предельным.

Из свойства “несжимаемости” вытекает ряд других свойств. Отметим, например, такое. Всякое нульмерное подмножество ω-предельного множества $\mathcal{A}$, открытое в $\mathcal{A}$, содержит точки, не принадлежащие циклам. Поэтому, если E — n-мерное пространство, то ω-предельное множество, сплошь состоящее из циклов и отличное от цикла, может иметь размерность $1, 2, \ldots, n-1$.

Во втором параграфе изучается топологическая структура множества, состоящего из точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, т. е. притягиваемых множеством $\mathcal{A}$. Доказывается, что это множество является $F_{\sigma\delta}$-множеством.

Вторая глава и последующие посвящены систематическому изучению динамических систем, когда фазовое пространство E — замкнутый интервал вещественной прямой. Эти исследования можно рассматривать как продолжение исследований по теории итераций непрерывной функции действительного переменного.

Если общая теория динамических систем излагается в ряде монографий [8, 23, 44], ей посвящен ряд обширных статей и обзоров (часть из них указана в списке литературы), то, что касается теории итераций, здесь, по-видимому, можно отметить только обзор И.И. Аристова [20] 1900 г. Поэтому мы позволим себе отметить несколько моментов, связанных с развитием теории итераций.

Первые результаты по теории итераций принадлежат Эйлеру (см. [20]). В [5] он изучал отображение $x \to a^x$ и на основе этих исследований написал разложение функции

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}}$$

в ряд (предложенный тогда же Кондорсе без доказательства).

Дальнейшее развитие теории итераций проходило параллельно развитию теории дифференциальных уравнений. Примерно на протяжении ста лет после первых работ все усилия направлялись на решение так называемой основной задачи теории итераций: по данной функции $f(x)$ выразить ее n-ю итерацию $f^n(x)$ как функцию n. Здесь следует упомянуть Лапласа, Монжа, Арбогаста, Гершеля, Бэббэджа.

Когда выяснилось, что эта задача для большинства функций $f(x)$ не может быть решена, возникла необходимость качественного исследования итераций. Большинство работ этого периода относилось к исследованию итераций функций в комплексной плоскости, что казалось более привлекательным в теоретическом отношении. Здесь в первую очередь следует назвать Кёнигса [10, 11], затем Жулиа [9], Фату [6], получившим уже в нашем столетии наиболее значительные результаты в этом направлении.

Интерес к качественному исследованию итераций функций действительного переменного, непрерывных и разрывных, возрос в 30-х годах. Появился ряд прикладных задач, решение которых сводилось к изучению таких функций (например, [24, 25]). В работах С.П. Пулькина [45, 46], предпринимается попытка классифицировать итерационные последовательности в зависимости от строения множества их предельных точек. К этим же вопросам относятся исследования его ученика Х.К. Кенжегулова [27, 28].

Целый ряд работ по исследованию и применению точечных преобразований принадлежит математикам Горьковской школы теории нелинейных колебаний [17, 32, 40].

Возвратимся теперь к содержанию нашей работы.

В первом параграфе второй главы устанавливается связь между существованием циклов различных периодов. Оказывается, если отображение имеет цикл периода k, то оно имеет и цикл любого периода k', следующего за k в последовательности

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \ldots, 2\cdot 3,\ 2\cdot 5, \ldots, 2^2\cdot 3,\ 2^2\cdot 5, \ldots, 2^3,\ 2^2,\ 2,\ 1.$$

Если $\mathcal{A}$ — произвольное ω-предельное множество, то всякая неизолированная точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов; если к тому же $\mathcal{A}$ содержит цикл, то любая точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов (параграф 2.2). В этом же параграфе строится пример ω-предельного множества, изолированные точки которого не являются предельными для точек циклов.

Впоследствии (параграфы 3.2, 3.3) эти результаты уточняются. Если существует ω-предельное множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, содержащее цикл, то множество $\mathcal{A}$ равномерно аппроксимируется циклами: для любой системы $\{\sigma_i\}_{i=1}^r$ открытых множеств такой, что $\bigcup\limits_{i=1}^r \sigma_i \supset \mathcal{A}$, $\sigma_i \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, r$, существует цикл, содержащийся в $\bigcup\limits_{i=1}^r \sigma_i$, и при этом всякое множество σ_i, $1 \le i \le r$, содержит хотя бы одну точку этого цикла. Если всякое ω-предельное множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ не содержит циклов, то любая изолированная точка множества $\mathcal{A}$ не является предельной для точек циклов.

Параграф 2.3 представляет собой в некотором смысле исключение: в нем помимо ω-предельных множеств значительное место занимают и другие понятия динамических систем.

Дж. Биркгофу принадлежит следующая теорема [23]: время пребывания всякой траектории вне произвольной окрестности U множества неблуждающих точек не превосходит некоторой константы, зависящей только от окрестности U. Оказывается, что для динамических систем на вещественной прямой этот результат остается справедливым для произвольной окрестности множества $\bigcup\limits_{x\in E}\mathcal{A}_x$. Следовательно, для таких динамических систем в известном смысле достигается верхний предел, ибо для любой точки $x'\in\bigcup\limits_{x\in E}\mathcal{A}_x$ существует траектория, пребывающая во всякой окрестности x' бесконечно долго.

Здесь же доказывается, что центр динамической системы и минимальный центр притяжения являются замыканием множества точек циклов и, следовательно, совпадают.

Достаточно большую информацию о динамической системе дает строение множества точек циклов. Всякая траектория асимптотически приближается к циклу, если (и только если) множество точек циклов замкнуто (параграф 2.5). Можно указать условия, при которых это множество является незамкнутым. Например, если динамическая система содержит цикл периода $\neq 2^i$, $i=0,1,2,\ldots,$ то множество точек циклов, будучи F_σ-множеством, не является G_δ-множеством.

В первой части параграфа 3.1 предлагается некоторая классификация неподвижных точек и даются критерии принадлежности неподвижных точек к тому или иному типу. В дальнейшем показывается, что так называемые смешанные неподвижные точки обладают тем свойством, что притягиваемые ими множества являются множествами 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена [34] (будучи $F_{\sigma\delta}$-множествами, не являются $G_{\delta\sigma}$-множествами). Для этих неподвижных точек имеются простые критерии и, таким образом, мы, в частности, получаем возможность весьма просто указывать помимо известного примера Бэра и другие множества 3-го класса. Например, для отображения $T: x\to x(1-\sin\frac{1}{x})$ множество точек $x\in[0,1]$, для которых $T^jx\to 0$ при $j\to\infty$, является множеством 3-го класса.

В последующих двух параграфах изучается динамическая система в окрестности произвольного ω-предельного множества, отличного от цикла. Основной результат в параграфе 3.2 можно сформулировать, если опустить несущественные детали, таким образом. Пусть $\mathcal{A}$ — ω-предельное множество, содержащее цикл, и H — окрестность множества $\mathcal{A}$. Существует множество $U \subset H$ такое, что всякая траектория, притягиваемая множеством $\mathcal{A}$, начиная с некоторого момента времени, принадлежит U. При этом отображение T на множестве U обладает следующим свойством. Если траектория $\{T^j x'\}_{j=0}^{\infty}$ принадлежит U и притягивается множеством $\mathcal{A}$, то каково бы ни было замкнутое множество $V \subset U$, для любой окрестности H' точки x' найдется замкнутое множество $V' \subset H'$ и число m : $T^j V' \subset U$ при $j < m$, $T^m V' \supset V$.

Все дальнейшие результаты так или иначе опираются на эту теорему. Доказательство существенно использует понятие ω-окрестности ω-предельного множества, тесно связанное с так называемой тонкой топологией границ Мартина (Е. Б. Дынкин. Границы Мартина. Лекции в летней математической школе, Кацивели, 1966).

Отметим некоторые следствия этой теоремы, содержащиеся в том же параграфе. Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл (но отлично от цикла) и существует точка x', для которой $\mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}$, $T^j x' \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то точки $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, образуют множество 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена; такая точка x' существует тогда и только тогда, когда во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует ω-предельное множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$.

В четвертой главе рассматривается совокупность $\mathbb{M}$ всех ω-предельных множеств динамической системы, частично упорядоченная по теоретико-множественному включению. Вот некоторые свойства частично упорядоченной системы $\mathbb{M}$. Всякая максимальная цепь $\mathbb{L}$ системы $\mathbb{M}$ содержит максимальный и минимальный элемент, счетная или имеет мощность континуума. Если отображение имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то существует максимальный элемент, содержащий цикл. Максимальный элемент, содержащий цикл, во всякой максимальной цепи не имеет непосредственно предшествующего элемента (и поэтому называемый в работе максимальным элементом второго рода в отличие от максимального элемента первого рода, не содержащего циклов, который может иметь в максимальной цепи непосредственно предшествующий элемент). Множество минимальных элементов, предшествующих максимальному элементу второго рода, имеет мощность континуума. Система $\mathbb{M}$ не обладает условием обрыва убывающих (и возрастающих) цепей, если существует максимальный элемент второго рода.

Пусть $\mathbb{M}'$ — частично упорядоченная система, определенная следующим образом. $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$, если $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$ и существует окрестность (в E) множества $\mathcal{A}$, не содержащая ω-предельных множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. Всякое $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ является квазиминимальным (по Хильми) множеством. $\mathbb{M}'$ имеет мощность континуума, всякая максимальная цепь системы $\mathbb{M}'$ плотна в себе и счетная, т. е. подобна множеству рациональных чисел.

На частично упорядоченной системе $\mathbb{M}$ можно ввести топологию, в которой $\mathbb{M}$ — хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности; на $\mathbb{M}$ всюду плотно лежит множество $\mathbb{M}'$.

В теории групп уже достаточно давно, с конца 20-х годов, изучается проблема, как много "информации" о строении группы содержит структура (частично упорядоченная система) ее подгрупп. Имеется небольшая монография М. Судзуки [48], посвященная этому вопросу. Оказывается, существуют группы, которые полностью определяются структурой своих подгрупп. Вместе с тем имеются группы, структура подгрупп которых не содержит всю информацию о группе.

Аналогичный вопрос: связь между строением отображения и строением частично упорядоченной системы $\mathbb{M}$ естественно рассмотреть для динамических систем.

Пусть, например, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — максимальные элементы второго рода отображений T_1 и T_2. Пусть далее $\mathbb{M}_1/\mathcal{A}_1$, $\mathbb{M}_2/\mathcal{A}_2$ — частично упорядоченные системы, элементы которых — ω-предельные множества, содержащиеся соответственно в $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Будут ли изоморфны отображения T_1 и T_2, рассматриваемые соответственно на множествах $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (т. е. $T_2 = ST_1S^{-1}$, где S — гомеоморфизм $\mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$), если изоморфны частично упорядоченные системы $\mathbb{M}_1/\mathcal{A}_1$ и $\mathbb{M}_2/\mathcal{A}_2$? По-видимому, ответ на этот вопрос будет утвердительным. В таком случае появится некоторый подход к так называемой проблеме изоморфизма: при каких условиях два отображения T_1 и T_2 изоморфны?

В параграфе 4.2 доказывается, что на множестве $\mathcal{A}$, являющемся максимальным элементом второго рода системы $\mathbb{M}$, отображение можно восстановить, если вместо частично упорядоченной системы $\mathbb{M}/\mathcal{A}$ задать сами ω-предельные множества, являющиеся подмножествами множества $\mathcal{A}$.

В пятой главе рассматриваются некоторые приложения полученных ранее результатов.

Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... — последовательность непрерывных функций действительного переменного, то множество сходимости этой последовательности, состоящее из точек $x \in E$, для которых существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, как известно [49], является $F_{\sigma\delta}$-множеством. В параграфе 5.1 даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество сходимости последовательности итераций непрерывной функции было множеством 3-го класса, т. е. не было бы $G_{\delta\sigma}$-множеством.

Последний параграф пятой главы посвящен функциональным уравнениям вида

$$y(f(x)) = F(x, y(x)), \qquad (*)$$

где $y(x)$ — искомая, $f(x)$, $F(x,y)$ — заданные функции, значения x, $y(x)$, $f(x)$, $F(x,y)$ принадлежат вещественной прямой. Предполагается, что $f(x)$, $F(x,y)$ — непрерывные функции и решение уравнения рассматривается в классе непрерывных функций.

Появление подобных уравнений относится к первой половине XVIII века и связано с теорией уравнений в частных производных, а именно с потребностью определять произвольные функции, входящие в интегралы этих уравнений. В настоящее время уравнению $(*)$ посвящена весьма обширная литература (см., например, [7, 13]).

Можно отметить определенную аналогию уравнения $(*)$ с уравнениями в частных производных. При достаточно общих условиях общее решение уравнения $(*)$ зависит от произвольной функции [12]. Вместе с тем нетрудно указать такие функции $f(x)$, когда решение $(*)$ единственно (задается неявной функцией).

В параграфе 5.2 идет речь о множестве решений уравнения $(*)$ на произвольном ω-предельном множестве отображения $x \mapsto f(x)$. Доказывается, что множество решений на максимальном ω-предельном множестве второго рода зависит от одного параметра, принадлежащего некоторому интервалу $[a, b]$, однако при этом параметр может принимать не любые значения из $[a, b]$, а только принадлежащие некоторому F_σ-множеству первой категории на $[a, b]$.

В заключение следует отметить, что автор, может быть, не всегда достаточно полно использует имеющуюся терминологию.

В дальнейшем на протяжении всей работы ω-предельное множество, следуя опубликованным работам автора, называется притягивающим множеством.

Глава 1

Притягивающие и притягивающиеся множества

Пусть T — непрерывное однозначное отображение топологического пространства E в себя.

Относительно пространства E всегда (во всяком случае всюду в главе 1) предполагается, что E — компакт.

Напомним необходимые определения.

Всякая точка $x \in E$ порождает траекторию (итерационную последовательность) x, Tx, $T^2x, \ldots$. Если $Tx = x$, то x — неподвижная точка отображения T. Если точки x, Tx, $\ldots$, $T^{k-1}x$ попарно различны и $T^kx = x$, то эти точки образуют цикл периода k.

Под окрестностью множества $M \subset E$ понимают, как обычно, всякое множество, содержащее открытое $M' \supset M$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное притягивающее (т. е. ω-предельное) множество отображения T. Очевидно, множество $\mathcal{A}$ замкнуто и $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Будем считать, что точка x притягивается множеством $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$. Обозначим $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ множество, состоящее из точек E, которые притягиваются множеством $\mathcal{A}$. Итак, притягивающееся множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ состоит из точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$.

Дальнейшие определения и обозначения, использованные в данной работе, будем вводить по мере надобности.

1.1. Притягивающее множество и свойства отображения на нем

Если притягивающее множество $\mathcal{A}$ не более, чем счетно, то $\mathcal{A}$ содержит хотя бы один цикл отображения T.

Построим последовательность замкнутых множеств $F_1 \supseteq \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots$ следующим образом.

$F_1 = \mathcal{A}$, $F_\alpha = \mathcal{A}_x$, где x — произвольная точка множества $F_{\alpha'}$ и $\alpha' + 1 = \alpha$, или, если α — предельное порядковое число, то $F_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} F_\beta$. Множества F_α при любом α содержат изолированные в F_α точки. $F_\alpha = F_{\alpha+1}$ тогда и только тогда, когда точки множества F_α образуют цикл. По теореме Бэра–Хаусдорфа такое порядковое число α первого или второго класса всегда существует.

Если множество $\mathcal{A}$ несчетно, то, как известно, оно может и не содержать циклов.

Теорема 1.1.1. *Если U — открытое в $\mathcal{A}$ множество, причем $U \neq \mathcal{A}$, то замыкание множества TU не содержится в U.*

Допустим противное: $\overline{TU} \subset U$.[1] В этом случае найдется открытое в E множество G такое, что $\overline{TU} \subseteq G$, $\mathcal{A}\setminus U \subseteq E\setminus\overline{G}$. Так как $U \supset \overline{G} \cap \mathcal{A}$, то согласно предположению $Tx \in G$, как только $x \in \overline{G} \cap \mathcal{A}$. Но это невозможно. В самом деле, так как множества $\overline{TU}$ и $\mathcal{A} \setminus U$ не пусты и $\overline{TU} \subseteq G$ $\mathcal{A} \setminus U \subseteq E \setminus \overline{G}$, для любого $n > 0$ найдутся $j', j'' > n$ такие, что $T^{j'}y \in G$, $T^{j''}y \in E \setminus \overline{G}$, если $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}$. Следовательно, существует бесконечная последовательность целых положительных чисел $j_1 <$

[1] Черта сверху всегда будет означать операцию замыкания соответствующего множества (в E).

$< j_2 < \ldots$ таких, что $T^{j_k}y \in \overline{G}$, $T^{j_k+1}y \in E \setminus \overline{G}$. Найдется точка $x' \in \mathcal{A}$, во всякой окрестности которой (в E) есть точки последовательности $\{T^{j_k}y\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, $x' \in \mathcal{A} \cap \overline{G}$, а Tx' принадлежит замыканию $\overline{E \setminus \overline{G}}$, т.е. $E \setminus G$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Условия, даваемые теоремой 1.1.1, являются не только необходимыми, но и достаточными в следующем смысле.

Если на замкнутом множестве $M \subset E$, не содержащем никакого открытого в E подмножества, задано непрерывное отображение T так, что $TM = M$ и для любого открытого в M множества U $\overline{TU} \not\subset U$, то отображение T можно продолжить на замкнутое множество E', $M \subset E' \subseteq E$, так, что отображение T на E' будет непрерывно и найдется точка $x \in E'$, для которой $\mathcal{A}_x = M$.

Продолжить отображение T с E' на весь компакт E, если $E' \neq E$, можно далеко не всегда. Некоторые условия, при которых это все же выполнимо, можно указать. Например, если существует множество $E'' \subseteq E$, содержащее E' и гомеоморфное некоторому параллелепипеду в гильбертовом кирпиче, то такое продолжение можно осуществить, используя лемму Урысона о продолжении непрерывной функции.

Покажем, как строится множество E' и отображение T на нем.

Предположим, $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{k}$ — конечное покрытие множества M открытыми в E множествами σ_i, причем $\sigma_i \cap M \neq \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Множество $T(M \cap \sigma_j)$, $1 \leq j \leq k$, пересекается по крайней мере с одним из множеств σ_i, $i \neq j$, так как множество $M \cap (E \setminus \bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \sigma_i)$ замкнуто и содержится в $M \cap \sigma_j$. Пусть $T(M \cap \sigma_j)$ пересекается с $\sigma_{j'}$. Множество $T(M \cap \sigma_{j'})$ пересекается либо по крайней мере с одним из множеств σ_i, $i \neq j, j'$, либо с множеством σ_j. В последнем случае $T(M \cap \sigma_j)$ пересекается с одним из σ_i, $i \neq j, j'$, поскольку с одним из σ_i, $i \neq j, j'$, пересекается множество $T(M \cap (\sigma_j \cup \sigma_{j'}))$. Таким образом, если $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2} \in \Sigma$, найдется цепочка $\sigma^{(0)} = \sigma_{j_1}, \sigma^{(1)}, \ldots,$

$\sigma^{(m-1)}, \sigma^{(m)} = \sigma_{j_2}, \quad \sigma^{(i)} \in \Sigma, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$ такая, что множества $T(M \cap \sigma^{(i)}) \cap \sigma^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1,$ не пусты. В частности, можно построить цепочку, назовем ее $\mathbb{K}$-цепочкой, содержащую все множества $\sigma_i, \ i = 1, 2, \ldots, k,$ причем так, что каждое σ_i входит в $\mathbb{K}$ не более $k-1$ раз. $\mathbb{K}$-цепочка определена неоднозначно. Число элементов σ_i, входящих в любую $\mathbb{K}$-цепочку, не превосходит, например, k^2.

Возьмем систему открытых множеств $\Sigma^0 = \{\sigma_i^s\}, \ i=1,2,\ldots,$ $k_s < \infty, \quad s = 1, 2, \ldots,$ обладающую следующими свойствами.

1) $\bigcup_{i=1}^{k_s} \sigma_i^s \supset M, \ s = 1, 2, \ldots \,;$

2) $\sigma_i^s \cap M \neq \varnothing$ при любых i и s;

3) для любого замкнутого множества $F \subseteq M$ имеют место включения $B_1(F) \supset B_2(F) \supset \ldots$ и $\bigcap_{s=1}^{\infty} B_s(F) = F$, где $B_s(F) = \bigcup\limits_{\substack{\sigma \in \Sigma^s \\ \sigma \cap F \neq \varnothing}} \sigma, \quad \Sigma^s = \{\sigma_i^s\}_{i=1}^{k_s}\,;$

4) каждое из множеств $\sigma_i^s \setminus B_{s+1}(M)$ содержит не менее k_s^2 точек компакта E.

Система Σ^0, удовлетворяющая условиям 1)–4) всегда существует; “допустимость” условия 4) следует из того, что множество M нигде не плотно в E.

Для всякой окрестности U произвольной точки $x \in M$, как вытекает из 3), найдется окрестность $\sigma \subset U, \quad \sigma \in \Sigma^0$.

Построим цепочку $\mathbb{K}_1$ для системы Σ^1, начиная с произвольного $\sigma_{i_1'} \in \Sigma^1$. Пусть $\sigma_{i_1''}$ — последний элемент цепочки $\mathbb{K}_1$ и $T(M \cap \sigma_{i_1''})$ пересекается с $\sigma_{i_2'} \in \Sigma^2$. Построим цепочку $\mathbb{K}_2$ для системы Σ^2, начиная с элемента $\sigma_{i_2'}$ и т. д. Получим последовательность $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3, \ldots,$ составленную из цепочек. Заменив каждую цепочку последовательностью множеств, из которых она состоит, и переобозначив множества в порядке расположения их в составленной таким образом последовательности, получим последовательность множеств $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \ldots$ (среди них могут быть и совпадающие) такую, что $\sigma_i' \in \Sigma^0, \quad T(M \cap \sigma_i') \cap$ $\cap\, \sigma_{i+1}' \neq \varnothing, \quad \sigma_j^s \in \{\sigma_i'\}_{i=1}^{\infty}, \quad j = 1, 2, \ldots, k_s, \ s = 1, 2, \ldots .$ В каждом множестве $\sigma_i', \ i = 1, 2, \ldots,$ отметим точку x_i так, что $x_i \neq x_m, \quad i > m,$ и, если $\sigma_i' \in \Sigma^r$, то $x_i \notin \sigma_j^s, \ j = 1, 2, \ldots, k_s,$

$s > r$. Полагаем, $E' = M \cup \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $Tx_i = x_{i+1}$. Множество ω-предельных точек последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть M и $Tx_i = x_{i+1}$. Остается показать, что на E' отображение непрерывно.

В точках x_i, $i = 1, 2, \ldots,$ T непрерывно. Пусть $x \in M$ и $Tx = y$. Покажем, что для любой окрестности U' точки y (в пространстве E') найдется окрестность V' точки x такая, что $TV' \subseteq U'$.

Если $V = \bigcup\limits_{\substack{\sigma\in\Sigma^s \\ \sigma\cap B_s(x)\neq\varnothing}} \sigma$, $U = \bigcup\limits_{\substack{\sigma\in\Sigma^s \\ \sigma\cap T(M\cap B_s(x))\neq\varnothing}} \sigma$, то согласно построению $T(E' \cap B_s(x)) \subset E' \cap U$.

Пусть открытые в E множества G_1, G_2, G_3 и их замыкания F_1, F_2, F_3 таковы, что $x \in G_1$, $F_1 \subset G_2$, $F_2 \subset G_3$, $T(M \cap F_3) \subset U'$. Найдутся 1) номер s_1 такой, что $B_{s_1}(x) \subseteq G_1$, 2) номер s_2 такой, что $B_{s_2}(F_1) \subseteq G_2$, 3) номер s_3 такой, что $B_{s_3}(T(M\cap F_3)) \cap E' \subseteq U'$. Если положить $V' = E' \cap B_{s_0}(x)$, где $s_0 = \max\{s_1, s_2, s_3\}$, то $TV' \subseteq U'$. Итак, отображение T на E' непрерывно.

Если притягивающее множество $\mathcal{A}$ содержит открытое в E подмножество, то для любой точки x, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, существует номер j_x : при $j > j_x$, $T^j x \in \mathcal{A}$. В этом случае существует точка $x' \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}$.

Теорема 1.1.2. *Если существует точка $x \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, то для любых открытых в $\mathcal{A}$ множеств U, U' найдется номер k такой, что $T^k U \cap U' \neq \varnothing$.*

Действительно, существует номер j_1 : $T^{j_1} x \in U$ и номер $j_2 > j_1$: $T^{j_2} x \in U'$; $T^{j_2 - j_1} U \cap U' \neq \varnothing$.

Теорема 1.1.2 допускает обращение. Именно, если на замкнутом множестве M задано непрерывное отображение T так, что $TM = M$ и для любых двух открытых в M множеств U, U' найдется номер k : $T^k U \cap U' \neq \varnothing$, то существует точка $x \in M$, для которой $\mathcal{A}_x = M$.

Предположим $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — открытая база пространства M. Построим последовательность замкнутых множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \supseteq \ldots$ следующим образом. Пусть $F_1 \subseteq M$ — произвольное замкнутое множество, содержащее открытое в M подмножество. Если множество F_{k-1}, $k > 1$, содержащее открытое в M подмножество, построено, множество F_k строится так. Берем открытое в M множество $U_k \subset F_{k-1}$. Найдется такое j_k, что $\sigma_k \cap T^{j_k} U_k \neq \varnothing$. Существует замкнутое множество $F_k \subset U_k$, содержащее открытое в M подмножество и такое, что $T^{j_k} F_k \subset \sigma_k \cap T^{j_k} U_k$; это множество и есть требуемое.

Если $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, то $\mathcal{A}_x = M$.

Таким образом, теоремы 1.1.1 и 1.1.2 полностью характеризуют отображение на притягивающем множестве.

Следует отметить, что теорема 1.1.2 и ее обращение имеются у Дж. Биркгофа [23].[2] Эти утверждения приведены нами для полноты изложения.

Рассмотрим ряд следствий доказанных теорем.

Из теоремы 1.1.1 непосредственно вытекает.

Следствие 1. *Если множество $U \subset \mathcal{A}$ таково, что $TU = U$, то U не может быть одновременно открытым и замкнутым в $\mathcal{A}$.*

Следствие 2. *Если $\mathcal{A}$ конечно, точки множества $\mathcal{A}$ образуют цикл.*

Действительно, так как $\mathcal{A}$ конечно и $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$, то в $\mathcal{A}$ имеется хотя бы один цикл (неподвижная точка). Точки этого цикла образуют в $\mathcal{A}$ открыто-замкнутое множество и, следовательно, цикл содержит все точки множества $\mathcal{A}$.

Следствие 3. *Если $\mathcal{A}$ бесконечно, каждая точка цикла, принадлежащего $\mathcal{A}$ (если такой существует), является предельной для точек множества $\mathcal{A}$.*

Это прямо вытекает из следствия 1. Если идет речь о точках циклах периода k, то нужно перейти к отображению $S = T^k$.

Еще несколько менее тривиальных следствий.

Теорема 1.1.3. *Если $\mathcal{A}$ отлично от цикла, всякое открытое в $\mathcal{A}$ нульмерное множество, если такое существует, содержит хотя бы одну точку, не принадлежащую циклу.*

---

[2]Это же относится к следствию теоремы 1.1.6.

Нульмерность множества существенна: если E — например, квадрат в евклидовой плоскости, то $\mathcal{A}$ может быть отрезком прямой, состоящим из неподвижных точек.

Доказывать теорему будем от противного: допустим, существует открытое нульмерное множество $U \subseteq \mathcal{A}$, состоящее только из точек циклов. Будем считать, что множество U замкнуто (поскольку U нульмерно, всегда существует открыто-замкнутое в $\mathcal{A}$ множество $U' \subseteq U$). Можно считать, что $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^j U \neq \mathcal{A}$. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in U$, принадлежащую циклу. Последовательность $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ состоит из конечного числа отличных друг от друга точек, образующих цикл. Так как множество $\mathcal{A}$ отлично от цикла, замкнутое множество $U \cap \cap \{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ согласно следствию 3 не является открытым. Следовательно, открытое множество $U \setminus \{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ не пусто. Для произвольного открыто-замкнутого множества $U' \subseteq U \setminus \{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ множество $\bigcup_{j=0}^{\infty} T^j U'$ содержится в $\mathcal{A} \setminus \{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$.

Положим, $M^j = TM^{j-1} \setminus U$, $j = 1, 2, \ldots$, $M^0 = U$. Множества M^j замкнуты. Допустим, множества M^j, $j = 1, 2, \ldots$, не пусты. Обозначим N^j, $j \geq 1$, замкнутое множество, состоящее из точек $x \in U$, для которых $T^j x \in M^j$. Очевидно, $N^1 \supseteq N^2 \supseteq \ldots$. Множество $N = \bigcap_{j=0}^{\infty} N^j$ не пусто и если $x \in N$, то $x \in U$, $T^j x \notin U$ при $j > 0$. Это противоречит допущению, что U состоит только из точек циклов.

Итак, должен существовать номер j_0 такой, что множество M^{j_0} пусто. Положим $V = \bigcup_{j=0}^{j_0-1} M^j$. Множество V замкнуто, состоит из циклов и $TV = V$.

Множества $T^{-1}U, T^{-2}U, \ldots, T^{-j}U, \ldots$, где $T^{-j}U$ — множество точек $x \in \mathcal{A}$, для которых $T^j x \in U$, как прообразы открыто-замкнутых множеств, являются открыто-замкнутыми. Эти множества покрывают V. Из этого покрытия множества V можно выделить покрытие, состоящее из конечного числа множеств. Пусть это будут множества $T^{-j_1}U, T^{-j_2}U, \ldots, T^{-j_r}U$, $j_1, j_2, \ldots, j_r > 0$, и пусть $n = \max\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$. Множество $W = \bigcup_{j=1}^{n} T^{-j}U$ покрывает V и, следовательно, $TW \subseteq W$. Множество $W \neq \mathcal{A}$, поскольку $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $T^n W = V \neq \mathcal{A}$.

Множество W является открыто-замкнутым, что противоречит теореме 1.1.1. Теорема доказана.

Следствие. *Если E — отрезок прямой, то на множестве $\mathcal{A}$, отличном от цикла, всюду плотно лежат точки, не принадлежащие циклам.*

Действительно, если $\mathcal{A}$ — нигде не плотное на отрезке E множество, то утверждение вытекает из теоремы 1.1.3. Если $\mathcal{A}$ содержит некоторый интервал, т.е. открытое в E подмножество, то существует точка $x \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$; точки $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \dots$, лежат на множестве $\mathcal{A}$ всюду плотно.

Теорема 1.1.4. *Если множество $F \subset \mathcal{A}$ замкнуто и $TF = F$, то для любого открытого в $\mathcal{A}$ множества $U \supset F$ существует точка $x \in \mathcal{A} \setminus F$, для которой $T^j x \in U$ при $j > 0$.*

В дальнейшем нам понадобится более точное утверждение, чем то, которое содержит теорема 1.1.4. Его дает

Теорема 1.1.5. *Пусть G_1, G_2 — открытые в E множества, а F — замкнутое множество такие, что $F \subset \mathcal{A} \cap G_1$, $F \cap G_2 \neq \varnothing$, $TF = F$, F не изолировано во множестве $F \cup (\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \overline{G_2}))$ и $T\overline{G_2} \subset \overline{G_2} \cup (E \setminus \overline{G_1})$. Тогда существует точка $x \in \mathcal{A} \setminus F:$ $x \notin G_2$, $T^j x \in \overline{G_1} \setminus G_2$ при $j > 0$.*

Теорема 1.1.4 вытекает из теоремы 1.1.5, если взять $G_2 = \varnothing$, $\overline{G_1} \cap \mathcal{A} \subset U$. Условие "$F$ *не изолировано во множестве* $F \cup (\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \overline{G_2}))$" превращается при этом в "F *не изолировано в* $\mathcal{A}$", которое всегда имеет место (следствие 1 теоремы 1.1.1).

Перейдем к доказательству теоремы 1.1.5. Если теорема 1.1.4 является следствием теоремы 1.1.1, то теорема 1.1.5 опирается на более точный результат, учитывающий свойства отображения в окрестности множества $\mathcal{A}$, который однако мы не станем специально формулировать.

Положим $M^j = TM^{j-1} \setminus U$, $j = 1, 2, \dots$, где $M^0 = \mathcal{A} \cap (E \setminus G_1)$, $U = \mathcal{A} \cap ((E \setminus \overline{G_1}) \cup G_2)$. Множества M^j замкнуты. Допустим, множества M^j, $j = 1, 2, \dots$, не пусты. Обозначим N^j, $j \geq 1$, замкнутое множество, состоящее из точек $x \in M^0$, для которых $T^j x \in M^j$. Очевидно, $N^1 \supseteq N^2 \supseteq \dots$.

Множество $N = \bigcap_{j=0}^{\infty} N^j$ не пусто; если $x \in N$, то $x \notin G_2$ и $T^j x \in \overline{G_1} \setminus G_2$ при $j > 0$.

Предположим, существует номер j' такой, что множество $M^{j'}$ пусто. Это означает, что для любой точки $x \in M^0$ найдется номер $j'' \leq j'$ такой, что $T^{j''} x \in U$. Множество $P = \bigcup_{j=0}^{j'-1} M^j$ замкнуто и $P \cap F = \varnothing$.

$$TP = \bigcup_{j=0}^{j'-1} TM^j \subseteq \bigcup_{j=1}^{j'} (M^j \cup U) \subseteq \bigcup_{j=0}^{j'-1} M^j \cup (\mathcal{A} \cap G_2) = P \cup (\mathcal{A} \cap G_2).$$

Множество $V = \mathcal{A} \setminus F \setminus P \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$ не пусто. Действительно, так как множество F не изолировано во множестве $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$, то $(\mathcal{A} \setminus F) \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$ не является замкнутым множеством. В то же время множество $P \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$ замкнуто и содержится в $(\mathcal{A} \setminus F) \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$.

Возможны два случая. Либо существует точка $x \in V$, для которой $Tx \in F$ или $T^j x \in V, j = 1, 2, \ldots,$ и тогда $T^j x \in \overline{G_1} \setminus G_2$ при $j \geq 0$, либо такой точки $x \in V$ не существует. Последнее означает, что $TV \subseteq \mathcal{A} \setminus F$ и для любой точки $x \in V$ существует номер j_x такой, что $T^{j_x} x \in P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$. Но это невозможно.

Возьмем открытое множество G : $P \subset G$, $E \setminus \overline{G_1} \subset G$, $F \cap \overline{G} = \varnothing$. Так как $P \cup (\mathcal{A} \cap G_2) \subset \mathcal{A} \setminus F$, то $\mathcal{A} \setminus F = V \cup P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$ и, следовательно, $\mathcal{A} \cap \overline{G} \subseteq V \cup P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$. Для каждой точки $x \in \mathcal{A} \cap \overline{G}$ существует номер j_x : $T^{j_x} x \in P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$ и, следовательно, $T^{j_x} x \in G \cup G_2$. Так как отображение T непрерывно, для любой точки $x \in \mathcal{A} \cap \overline{G}$ найдется открытое множество $G_x \ni x$ такое, что $T^{j_x} G_x \subset G \cup G_2$. Множества G_x, $x \in \mathcal{A} \cap \overline{G}$, образуют покрытие замкнутого множества $\mathcal{A} \cap \overline{G}$. Выделим из этого покрытия покрытие, состоящее из конечного числа множеств, например, $G_{x_1}, G_{x_2}, \ldots, G_{x_m}$. Пусть $k = \max\{j_{x_1}, j_{x_2}, \ldots, j_{x_m}\}$. Для любой точки $x \in \bigcup_{i=1}^{m} G_{x_i}$ существует номер $j \leq k$ такой, что $T^j x \in G \cup G_2$.

Положим $L^j = TL^{j-1} \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$, $j = 1, 2, \ldots,$ $L^0 = (\mathcal{A} \cap \overline{G}) \setminus (\mathcal{A} \cap G_2)$. Множества L^j замкнуты. Так как $TV \subseteq$

$\subseteq V \cup P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$, то $T(V \cup P) \subseteq V \cup P \cup (\mathcal{A} \cap G_2)$. Поскольку $L^0 \subseteq V \cup P$, то и $L^j \subseteq V \cup P$, $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, $L^j \subset \mathcal{A} \setminus F$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Для любого открытого множества G' можно построить замкнутые множества $Q^j = TQ^{j-1} \setminus G_2$, $j = 1, 2, \dots$, $Q^0 = \overline{G'} \setminus G_2$. Выберем множество G' так, чтобы $G' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_{x_i}$, $\mathcal{A} \cap \overline{G} \subset G'$ и $Q^j \subseteq E \setminus F$, $j = 0, 1, \dots, k$. Это всегда можно сделать, так как $L^j \subset \mathcal{A} \setminus F$, $j = 0, 1, \dots$, и отображение T непрерывно. Возьмем, наконец, открытое множество G'' : $F \subset G''$, $\bigcup\limits_{j=0}^{k} Q^j \subset E \setminus G''$.

Пусть $y \in E$, $\mathcal{A}_y = \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{A} \cap (\overline{G} \setminus G')$ пусто. Поэтому найдется номер $n > 0$ такой, что $T^j y \notin \overline{G} \setminus G'$ при $j \geq n$. Так как множество $\mathcal{A} \cap G'$ не пусто, найдется $n' > n$: $T^{n'} y \in G'$. Так как множество $(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \overline{G_2})) \cap G''$ не пусто, найдется $n'' > n'$: $T^{n''} y \in G'' \setminus \overline{G_2}$. Пусть $n''' = \max\limits_{j < n'', T^j y \in G'} j$. Очевидно, $n''' > n'$. При $n''' < j \leq n''$ $T^j y \notin G'$ и, следовательно, $T^j y \notin G$.

Кроме того, $T^j y \notin G_2$ при $n''' \leq j \leq n''$. Действительно, если $T^{j'} y \in G_2$, $n''' \leq j' \leq n''$, то, поскольку $T\overline{G_2} \subset \overline{G_2} \cup G$, должен был бы существовать номер j'' : $j' < j'' < n''$, для которого $T^{j''} y \in G$, но тогда $T^{j''} y \in G'$, что невозможно.

Итак, $T^{n'''} y \in G'$, $T^{n'''} y \notin G_2$ и $T^j y \notin G \cup G_2$, $j = n''' + 1, \dots, n''$. В таком случае $T^{j+n'''} y \in Q^j$, $j = 0, 1, \dots, n'' - n'''$. Так как $\bigcup_{j=0}^{k} Q^j \subset E \setminus G''$ и $T^{n''} y \in G''$, то $n'' - n''' > k$. Это противоречит тому, что для всякой точки $x \in G'$ существует номер $j \leq k$: $T^j x \in G \cup G_2$. Теорема доказана.

Теорема 1.1.6. *Если существует точка $x' \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}$, и замкнутое множество $F \subset \mathcal{A}$ такое, что $TF = F$, то для любого открытого в $\mathcal{A}$ множества $U \subset \mathcal{A} \setminus F$ найдется точка $x \in \overline{U}$, для которой $T^j x \in \mathcal{A} \setminus U$ при $j > 0$.*

Если существует точка $y \in \overline{U}$ и номер $j' > 0$ такие, что $T^{j'}y \in F$, то утверждение теоремы выполняется: достаточно положить $x = T^{j''}y$, где $j'' = \max\limits_{j<j'} j$, для которых $T^j y \in \overline{U}$.

Рассмотрим случай, когда для всякой точки $y \in \overline{U}$ $T^j y \notin F$, $j = 1, 2, \dots$. Построим замкнутые множества $M^j = TM^{j-1} \setminus U$, $j = 1, 2, \dots,$ $M^0 = \overline{U}$. Так как множество $\bigcup\limits_{j=0}^{j_0} M^j = \bigcup\limits_{j=0}^{j_0} T^j\overline{U}$ при любом $j_0 < \infty$ замкнуто, не имеет общих с F точек (и, следовательно, $\mathcal{A} \setminus \bigcup\limits_{j=0}^{j_0} M^j$ — непустое открытое множество) и содержит точку x'', для которой $\mathcal{A}_{x''} = \mathcal{A}$, то множества M^j, $j = 1, 2, \dots,$ не пусты. Если N^j, $j \geq 1$, — замкнутое множество, состоящее из точек $y \in \overline{U}$, для которых $T^j y \in M^j$, то множество $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} N^j$ не пусто и для всякой точки $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} N^j$ $T^i x \in \mathcal{A} \setminus U$ при $i > 0$.

Следствие. *При выполнении условий теоремы 1.1.6 на множестве* $\mathcal{A}$ *всюду плотно лежат точки* x, *для которых* $\mathcal{A}_x \neq \neq \mathcal{A}$.

Теорему 1.1.6 можно рассматривать как уточнение теоремы 1.1.4 в случае, когда существует точка $x' \in \mathcal{A}, \mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}$. Утверждение теоремы 1.1.4 вытекает из утверждения теоремы 1.1.6, если взять $U_{(1.1.6)} \supset \mathcal{A} \setminus U_{(1.1.4)}$, $\overline{U_{(1.1.6)}} \subset \mathcal{A} \setminus F$.

Вопрос о строении притягивающего множества сводится к следующему: каково строение замкнутого множества $\mathcal{A} \subseteq E$, если на множестве $\mathcal{A}$ можно задать непрерывное отображение T так, что $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$ и на $\mathcal{A}$ справедливо утверждение теоремы 1.1.1 или 1.1.2.

Можно отметить такой результат: если компакт E — локально связен и притягивающее множество $\mathcal{A}$ содержит открытое в E подмножество, то $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}^j$, где $\mathcal{A}^1, \dots, \mathcal{A}^k$ — связные замкнутые множества, не имеющие общих точек, и $T\mathcal{A}^j = \mathcal{A}^{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, k-1$, $T\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^1$.

Действительно, пусть x — произвольная точка, принадлежащая множеству $\mathcal{A}$ вместе с некоторым открытым в E множеством, содержащим x. Рассмотрим компоненту множества $\mathcal{A}$, содержащую точку x. Обозначим ее $\mathcal{A}^1$. Множества $T^j\mathcal{A}^1$, $j = 1, 2, \dots,$ связны и принадлежат $\mathcal{A}$. Каждое из них либо не имеет общих точек с $\mathcal{A}^1$, либо содержится в $\mathcal{A}^1$. Поскольку E локально связно, $\mathcal{A}^1$ содержит открытое в E подмножество и, следовательно, множеству $\mathcal{A}^1$ принадлежит по крайней мере две точки (любой) траектории, притягиваемой множеством $\mathcal{A}$. Итак, существует такое k, что $T^k\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^1$. Предположим, k — наименьший номер j, при котором $T^j\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}^1$. Множества $\mathcal{A}^1$, $\mathcal{A}^2 = T\mathcal{A}^1$, $\dots$, $\mathcal{A}^k = T\mathcal{A}^{k-1}$ не имеют попарно общих точек. Все точки траектории, притягиваемой $\mathcal{A}$, начиная с некоторого номера, принадлежат замкнутому множеству $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}^j$ и, следовательно, $T\mathcal{A}^k = \mathcal{A}^1$, $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}^j = \mathcal{A}$.

Можно было бы привести еще ряд достаточно очевидных ограничений на строение притягивающего множества, вытекающих, например, из общих свойств непрерывных однозначных или (если необходимо) одно-однозначных отображений.

Ограничимся примером. Если M_1, M_2 — замкнутые множества, причем $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, M_1 счетно, M_2 — связное множество, отличное от точки, то множество $M = M_1 \cup M_2$ не может быть притягивающим множеством. Действительно, если бы M было притягивающим множеством, то $TM_2 \not\subset M_2$ (теорема 1.1.1) и, следовательно, $TM_2 \subset M_1$, так как TM_2 — связное множество. Поскольку $TM = M$, то $TM_1 \supseteq M_2$. Последнее невозможно, так как M_1 — счетное множество.

Обсуждение вопроса о строении притягивающего множества закончим указанием двух проблем.

Проблема 1. Найти условия (необходимые и достаточные), которым должно удовлетворять замкнутое множество, чтобы оно могло быть притягивающим множеством.

Проблема 2. Доказать (или опровергнуть), что всякое нульмерное замкнутое множество может быть притягивающим множеством (точнее: на множестве можно задать отображение так, что будет справедливо утверждение теоремы 1.1.1).

Что касается проблемы 1, то непонятно, существует ли удовлетворительное ее решение. Проблему 2, по-видимому, решить нетрудно.

1.2. Топологическая структура притягивающегося множества

Условимся в дальнейшем обозначать $\mathcal{A}$ (с индексами или без них) только притягивающие множества, т. е. те, для которых множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не пусто.

Теорема 1.2.1. $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\supseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ *есть множество типа* G_δ.

Пусть $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система открытых (в E) множеств таких, что

1) $\sigma_i \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots$,

2) для всякой окрестности U точки из множества $\mathcal{A}$ найдется $\sigma \in \Sigma$, содержащееся в U.

Для каждого $\sigma_i \in \Sigma$ построим последовательность открытых множеств $\sigma_i^0, \sigma_i^1, \sigma_i^2, \ldots$, где σ_i^k состоит из точек $x \in E$, для которых $T^k x \in \sigma_i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Множество $Q_i = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \sigma_i^k$ открыто.

Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, где $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, то $x \in Q_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ и $\mathcal{A}''$ не содержит $\mathcal{A}$, т. е. существует точка $y \in \mathcal{A}$, не принадлежащая $\mathcal{A}''$, то найдется $\sigma_{i'} \ni y$, не содержащее ни одной точки последовательности $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$. Следовательно, $x \notin Q_{i'}$ и $x \notin \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$.

Итак, $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\supseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}') = \bigcap\limits_{i} Q_i$ и является множеством типа G_δ.

Теорема 1.2.2. $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ *есть множество типа* $F_{\sigma\delta}$.

Если F — произвольное замкнутое множество, то множество $p_0(F)$, состоящее из точек $x \in F$, для которых $T^j x \in F$,

$j = 1, 2, \ldots,$ также замкнуто. Множества $p_j(F)$, $j = 1, 2, \ldots,$ состоящие из точек $x \in E$, для которых $T^j x \in p_0(F)$, также замкнуты. Следовательно, $p(F) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} p_j(F)$ — множество типа F_σ. Точка $x \in E$ принадлежит $p(F)$ тогда и только тогда, когда существует номер $j_x:$ $T^j x \in F$ при $j \geq j_x$.

Рассмотрим последовательность открытых множеств $U_1 \supset \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ таких, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \mathcal{A}$. Пусть F_i — замыкание множества U_i. Построим множества $p(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Утверждается, что $\bigcup\limits_{\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}') = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} p(F_i)$.

Действительно, если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, то $x \in p(F_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ и существует точка $y \in \mathcal{A}''$, не принадлежащая $\mathcal{A}$, то найдется номер i' такой, что $y \notin F_{i'}$, и тогда $x \notin p(F_{i'})$.

Следствие 1. $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *— множество типа* $F_{\sigma\delta}$.

Сразу же возникает вопрос: существуют ли отображения, для которых достигается найденная здесь верхняя оценка для структуры притягивающихся множеств. Ниже (глава 3) будет указан весьма широкий класс таких отображений. Например, если T — непрерывное отображение отрезка прямой, имеющее цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ то семейство притягивающих множеств $\mathcal{A}$, для которых $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ есть в точности $F_{\sigma\delta}$ (т. е. не является $G_{\delta\sigma}$-множеством), имеет мощность континуума. Притягивающие множества $\mathcal{A}$, для которых $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — $G_{\delta\sigma}$-множество, играют роль некоторого базиса в пространстве всех притягивающих множеств.

Укажем ряд условий, при которых притягивающиеся множества имеют более простую структуру.

Из теоремы 1.2.1 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Если не существует множеств* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *— множество типа* G_δ.

Следствие 3. *Если существует окрестность множества* $\mathcal{A}$, *не содержащая множеств* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *— множество типа* $G_{\delta\sigma}$.

В самом деле, рассмотрим открытое в E множество $U \supset \mathcal{A}$ такое, что для любого множества $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \not\subset \overline{U}$. Обозначим E' множество точек $x \in \overline{U}$, для которых $T^j x \in \overline{U}$, $j = 1, 2, \ldots$. Множество E' замкнуто и $TE' \subseteq E'$. Множество $Q = E' \cap \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ является множеством типа G_δ. Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то $x \notin Q$. Следовательно, $Q = E' \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Для любой точки $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ существует номер j_x : $T^j x \in \overline{U}$ при $j \geq j_x$. Это означает, что $T^{j_x} x \in Q$. Таким образом, $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} Q$, где $T^{-j}Q$ — множество точек $x \in E$, для которых $T^j x \in Q$, и является множеством типа $G_{\delta\sigma}$.

Если множество $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не пусто, то множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$, как вытекает из теоремы 1.2.1, является множеством типа G_δ.

Следствие 4. *Если* $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \neq \varnothing$ *и существует замкнутое множество* $F \subset \mathcal{A}$: $F \neq \mathcal{A}$, $TF = F$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *не является* F_σ*-множеством.*

Действительно, множество $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ лежит всюду плотно на $\mathcal{A}$ и является G_δ-множеством. Множество $\mathcal{A} \cap (E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ также всюду плотно на $\mathcal{A}$ (теорема 1.1.6). Следовательно, $\mathcal{A} \cap \cap (E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}))$ не является G_δ-множеством (ибо любые два G_δ-множества, замыкания которых совпадают, имеют непустое пересечение). Так как $\mathcal{A}$ — замкнутое множество, то $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не является G_δ, а $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — F_σ-множеством.

Необходимо отметить, что траектории, порождаемые различными точками множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, в окрестности множества $\mathcal{A}$ могут вести себя различным образом. Впрочем, это вполне естественно.

Пусть, например, $\mathcal{A} = M_0 \cup M_1$, где M_0, M_1 — замкнутые множества, отличные от $\mathcal{A}$ и $TM_0 = M_0$, $TM_1 = M_1$ (можно предположить дополнительно, что на M_0 и M_1, рассматриваемых как пространства, выполняется утверждение теоремы 1.1.1). Пусть U_0, U_1 — открытые в E множества, причем $M_0 \subset U_0$, $M_1 \subset U_1$, $M_0 \not\subset \overline{U_1}$, $M_1 \not\subset \overline{U_0}$, и $U = U_0 \cap U_1$, $F_0 = \overline{U_0} \setminus U$, $F_1 = \overline{U_1} \setminus U$, $F = \overline{U_0 \cup U}$ (рис. 1.1).

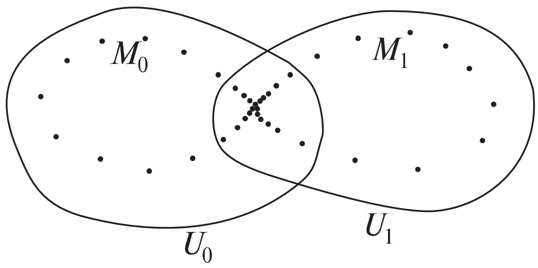

Рис. 1.1

Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, то существует номер j_F : $T^j x \in F$ при $j \geq j_F$. Если точка x в момент $j = j_F$ (т. е. точка $T^{j_F} x$) принадлежит множеству U, то из множества U точка x может затем попасть либо в F_0, либо в F_1. Если точка x при этом попала в F_0, то из F_0 точка x через некоторое время должна возвратиться в U и затем снова может попасть либо в F_0, либо в F_1 и т.д. Например, траектория, порождаемая точкой x, может последовательно проходить множества $\underbrace{U, F_0, U, F_0, U, F_1}, \underbrace{U, F_0, U, F_0, U, F_1}, U, \ldots,$ так что всякий раз траектория попадает во множество F_1, побывав перед этим дважды во множестве F_0.

Обозначим J множество вещественных чисел отрезка $[0, 1]$, не являющихся двоично-рациональными. Всякое $\beta \in J$ представимо в виде $0, i_1 i_2 \ldots i_k \ldots$, где $i_k = 0$ или 1 и среди чисел i_k бесконечно много как нулей, так и единиц.

Множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ разбивается на континуум множеств $\mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}_\beta(\mathcal{A}, U_0, U_1)$, $\beta \in J$. Именно, если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и j_F — наименьший номер такой, что $T^{j_F} x \in U, T^j x \in F$ при $j \geq j_F$, то $x \in \mathfrak{B}_\beta$, где $\beta = 0, i_1 i_2 \ldots i_k \ldots$, если траектория, порождаемая точкой x, при $j \geq j_F$ последовательно проходит множества

$$U, F_{i_1}, U, F_{i_2}, U, F_{i_3}, \ldots.$$

Этим разбиение множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ на множества $\mathfrak{B}_\beta(\mathcal{A}, U_0, U_1)$ определено однозначно. Можно указать отображения, когда множество $\mathfrak{B}_\beta$ при любом $\beta \in J$ будет непустым. Впоследствии мы сможем убедиться, что это всегда так, если E — отрезок прямой.

Не очень сложный подсчет показывает, что $\mathfrak{B}_\beta$ — множество типа $F_{\sigma\delta}$ при любом $\beta \in J$.

В общем случае множество $\mathcal{A}$ может содержать и континуум замкнутых множеств M_α, на каждом из которых $TM_\alpha = M_\alpha$ и справедливо утверждение теоремы 1.1.1. Тогда можно рассмотреть систему $\mathbb{U}$, состоящую из открытых множеств U_{rs}, $r = 1, 2, \ldots, k_s$, $s = 1, 2, \ldots,$: $\bigcap\limits_{s=1}^{\infty} \bigcup\limits_{r=1}^{k_s} U_{rs} = \mathcal{A}$, и отнести ко множеству $\mathfrak{B}(\mathcal{A}), \mathbb{U})$ точки $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, которые последовательно проходят множества

$$U_{11}, U_{12}, \ldots, U_{1k_1}, U_{21}, \ldots, U_{2k_2}, U_{31}, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{B}(\mathcal{A}), \mathbb{U})$ также является множеством типа $F_{\sigma\delta}$.

Итак, все рассматриваемые до сих пор множества являются по крайней мере $F_{\sigma\delta}$-множествами. Следовательно, даже достаточно тонкий анализ отображения не выводит нас за пределы множества 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена, каковыми являются $F_{\sigma\delta}$-множества.

Тем не менее, очевидно, можно указать алгоритмы построения подмножеств множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$, принадлежащие классам выше третьего. В подтверждение этого рассмотрим пример Бэра множества 3-го класса [2] и примеры Л.В. Келдыш множеств классов > 3 [26].

Пусть E состоит из иррациональных точек интервала $(0, 1)$. При этом E не является компактом (в обычной топологии), а только абсолютным G_δ. Всякой точке из E соответствует единственная цепная дробь:

$$\frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \ldots}}}.$$

Бэровское множество 3-го класса состоит из точек E, для которых $n_j \to \infty$.

Определим на E отображение T: $Tx = \{1/x\}$ (дробная часть $1/x$). Отображение T на E непрерывно и $TE = E$. Если $x = \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$, то $Tx = \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}$. Таким образом, бэровское множество состоит из точек $x \in E$, для которых $T^j x \to 0$ при $j \to \infty$, чему в наших обозначениях соответствует множество $\mathfrak{B}(\{0\})$.

Множества Л. В. Келдыш классов выше третьего являются подмножествами множества Бэра, т. е. множества $\mathfrak{B}(\{0\})$, и, следовательно, точки этих подмножеств должны различаться тем или иным способом стремления траектории $\{T^j x\}$ к точке $x = 0$. Например, множество 4-го класса состоит из точек бэровского множества, для которых каково бы ни было i, найдется такое $n(i)$, что для всех $n > n(i)$ количество чисел n_j, равных n, кратно 2^i [26]. Другими словами, оно состоит из точек $x \in E$: $T^j x \to 0$ и для любого i существует такое $n(i)$, что число попаданий точки x в интервал $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ при $n > n(i)$ кратно 2^i.

1.3. Еще о некоторых понятиях динамических систем

В настоящей работе в основном используется одно понятие теории динамических систем — понятие ω-предельного множества. В теории динамических систем (например, [44]) наряду с понятием ω-предельного множества много места занимают и другие понятия. Большинство из них без труда переносится и на полугруппу непрерывных отображений. Рассмотрим некоторые из них. Далее в параграфе 2.3 будет получен ряд результатов, использующих эти понятия.

Точка $x \in E$ называется блуждающей, если существует окрестность U точки x такая, что $T^j U \cap U = \varnothing$ при $j > 0$. Если такой окрестности точки x не существует, назовем ее неблуждающей.

Множество блуждающих точек компакта E открыто. Поэтому его дополнение C_1, состоящее из неблуждающих точек, замкнуто. Если $x \in C_1$, то и $Tx \in C_1$. Следовательно, $TC_1 \subseteq \subseteq C_1$. Существуют отображения, для которых $TC_1 \neq C_1$. Например, если E — отрезок числовой прямой $[0, a]$, $a > 1$ и

$$Tx = \begin{cases} 3x & \text{при} \quad 0 \le x < \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x & \text{при} \quad \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3}, \\ 0 & \text{при} \quad \frac{2}{3} \le x < 1, \\ x - 1 & \text{при} \quad 1 \le x \le a, \end{cases} \tag{$*$}$$

то точка $x = 1$ неблуждающая, однако не существует точки $x' \in C_1$, для которой $Tx' = 1$.

Поскольку каждая ω-предельная точка — неблуждающая, то $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x \subseteq C_1$. Для отображения $(*)$ точка $x = 1$ не является ω-предельной и, следовательно, $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x \neq C_1$.

Пусть M — произвольное множество пространства E и $t(m, M, x)$ — количество значений j, $0 \le j \le m$, для которых $T^j \in M$. Если существует $\lim_{m \to \infty} \frac{t(m,M,x)}{m}$, то этот предел обозначим $p\,(x \in M)$ и назовем вероятностью нахождения точек траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ во множестве M.

Если U — произвольная окрестность множества C_1, то $p\,(x \in U) = 1$ для всякой точки $x \in E$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения в [44].

Построим замкнутые множества C_α, $\alpha > 1$, следующим образом. C_α является множеством неблуждающих точек пространства $C_{\alpha'}$, где $\alpha = \alpha' + 1$, или, если α — предельное порядковое число, то $C_\alpha = \bigcap\limits_{\beta < \alpha} C_\beta$.

Согласно теореме Бэра–Хаусдорфа для некоторого $r < \omega_1$ $C_r = C_{r+1} = \ldots$. Замкнутое множество $C = C_r$ называется центром отображения (или полугруппы отображений) пространства E.

Если при всех $\alpha < r$ $C_\alpha \neq C$, то число r называется порядковым числом центра. Легко видеть, что r может быть любым порядковым числом, меньшим ω_1.

Каждая точка $x \in C$ является неблуждающей в пространстве C. Нетрудно убедиться, что $TC = C$.

Точка x называется устойчивой по Пуассону, если $x \in \mathcal{A}_x$.

Центр является замыканием множества точек, устойчивых по Пуассону. Устойчивые по Пуассону точки образуют в центре множество типа G_δ второй категории.

Доказательство этих утверждений повторяет соответствующие доказательства в [44].

Если U — произвольная окрестность центра, то $p\,(x \in U) = 1$ для любой точки $x \in E$. Доказательство аналогично доказательству в [23].

Пусть M — произвольное множество компакта E. Замкнутое множество V_M, инвариантное относительно T (т. е. $TV_M = V_M$), называется центром притяжения множества M, если $p\,(x \in U) = 1$ для всякой окрестности U множества V_M и любой точки $x \in M$.

Если ни одно истинное подмножество множества V_M не является центром притяжения для M, то V_M называется минимальным центром притяжения.

Минимальный центр притяжения существует для произвольного множества $V \subseteq E$ и притом единственный.

Ограничимся этими понятиями, хотя на полугруппу непрерывных отображений легко перенести и другие понятия, а также большинство результатов топологической части теории динамических систем.

Глава 2

Отображение вещественной прямой

Этой главой начинается систематическое изучение непрерывного отображения вещественной прямой или, что то же самое, произвольного (замкнутого) линейного континуума. Для удобства мы всегда будем рассматривать только вещественную прямую (с обычной топологией).

В этой главе устанавливается зависимость между существованием циклов различных периодов; находится топологическая структура множества точек циклов; изучается поведение траекторий для простейших отображений. Между существованием циклов тех или иных периодов, структурой множества точек циклов и поведением траекторий, как показано, имеется тесная связь.

2.1. Сосуществование циклов

Здесь будет идти речь о конечных множествах и потому компактность E не существенна. Будем предполагать, что E — вся вещественная прямая (чтобы не иметь дело с концами отрезка прямой), и рассматривать непрерывные однозначные отображения вещественной прямой.

Основной результат этого параграфа может быть сформулирован в следующей форме. Обозначим $\mathbb{B}(n)$ множество отображений прямой, имеющих цикл периода n, и рассмотрим множество натуральных чисел, в котором введено отношение: n_1 предшествует n_2 $(n_1 \prec n_2)$, если $\mathbb{B}(n_1) \subset \mathbb{B}(n_2)$. Такое отношение, очевидно, обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, и, следовательно, множество натуральных чисел с этим отношением есть квазиупорядоченное множество. Ниже доказывается теорема:

Введенное отношение превращает множество натуральных чисел в упорядоченное множество и притом упорядоченное следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \cdots \prec \\ \prec \cdots \prec 7 \cdot 2^2 \prec 5 \cdot 2^2 \prec 3 \cdot 2^2 \prec \\ \prec \cdots \prec 7 \cdot 2 \prec 5 \cdot 2 \prec 3 \cdot 2 \prec \\ \prec \cdots \prec 11 \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3. \end{aligned} \qquad (*)$$

Таким образом, если некоторое отображение имеет цикл периода n, *то оно имеет и циклы любого периода, следующего в* $(*)$ *за* n; *если отображение не имеет циклов периода* n, *то оно не имеет и циклов любого периода, предшествующего* n *в* $(*)$. *Для всякого* $n > 0$ *существует отображение, имеющее цикл периода* n *и не имеющее циклов любого периода, предшествующего* n *в* $(*)$.

Терминологией упорядоченных множеств более пользоваться не будем. Это, конечно, не относится к вещественной прямой E, линейная упорядоченность которой играет решающую роль. Все доказательства по существу опираются только на теорему Больцано–Коши о промежуточном значении.

Из непрерывности отображения сразу вытекает: *если у отображения* T *существует цикл периода* $k > 1$, *то отображение имеет и неподвижную точку (цикл периода 1).*

Теорема 2.1.1. *Если отображение* T *имеет цикл периода* $k > 2$, *то оно имеет и цикл периода 2.*

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — точки цикла, причем $T\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $T\alpha_k = \alpha_1$. Пусть $\alpha_1 < \alpha_i$ при $i \neq 1$, $\alpha_r > \alpha_i$ при $i \neq r$. Рассмотрим интервал (α_1, α_{r-1}) (считая, что $r > 2$; если $r = 2$, то следует рассмотреть, рассуждая аналогично, интервал (α_k, α_r)).

Допустим, что на интервале (α_1, α_{r-1}) нет неподвижных точек. Поскольку $T\alpha_1 = \alpha_2 > \alpha_1$, то $Tx > x$ для $x \in (\alpha_1, \alpha_{r-1})$; $T^{k-r+2}\alpha_1 = \alpha_{k-r+3} > \alpha_1$, $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. Следовательно, на интервале (α_1, α_{r-1}) в силу непрерывности отображения T найдется точка γ такая, что $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$. Так как $T\gamma = \gamma$, то γ принадлежит циклу периода l, где $1 < l \leq$ $\leq k - r + 2 < k$.

Если на интервале (α_1, α_{r-1}) есть неподвижные точки, то обозначим через β ближайшую к α_{r-1} (ближайшая к α_{r-1} неподвижная точка существует в силу непрерывности T). Для $x \in (\beta, \alpha_{r-1})$ $Tx > x$, так как $T\alpha_{r-1} = \alpha_r > \alpha_{r-1}$. Ввиду того, что $T\beta = \beta$, для любого целого $j > 0$ найдется такая окрестность точки β, что для всякого $x > \beta$ из этой окрестности $T^j x > x$. Поэтому $T^{k-r+2}x > x$ для $x \in (\beta, \alpha_{r-1})$ и достаточно близких к точке β; $T^{k-r+2}\alpha_{r-1} = \alpha_1 < \alpha_{r-1}$. Следовательно, на интервале (β, α_{r-1}) найдется точка γ такая, что $T^{k-r+2}\gamma = \gamma$; γ принадлежит циклу периода l, $1 < l \leq$ $\leq k - r + 2 < k$.

Таким образом, существование цикла периода $k > 2$ влечет за собой существование цикла периода l, где $1 < l < k$. Это означает, что всегда существует и цикл периода 2.

Для формулировки и доказательства последующих утверждений приведем тривиальные леммы, относящиеся к элементарной теории групп.

Л е м м а 1. *Если* $T^p\alpha = \alpha$ *и точка* α *принадлежит циклу периода* k, *то* p *кратно* k.

Л е м м а 2. *Если для отображения* T *точка* α *принадлежит циклу периода* $k = 2^n l$, *где* l *нечетно, то для отображения* $S = T^{2^m}$ *точка* α *принадлежит циклу периода* $2^{n-m}l$, *если* $n \geq m$, *и* l, *если* $n < m$.

Следствие 1. *Если отображение* T *имеет цикл периода* 2^m, *то отображение* $S = T^{2^{m-1}}$ *при* $m < 2$ *имеет цикл периода* > 2.

Следствие 2. *Если отображение* T *имеет цикл периода* $2^n l$, *где* $l > 1$ *и нечетно, то отображение* $S = T^{2^{m-1}}$ *при любом* $m \geq 1$ *имеет цикл периода* > 2.

Л е м м а 3. *Точка* α *принадлежит циклу периода* 2^m *отображения* T *тогда и только тогда, когда* $T^{2^m}\alpha = \alpha$, $T^{2^{m-1}}\alpha \neq \alpha$.

Следствие 3. *Если отображение* $S = T^{2^{m-1}}$ *имеет цикл периода 2, то отображение имеет* T *цикл периода* 2^m.

Теорема 2.1.2. *Если у отображения* T *есть цикл периода* 2^n, $n > 1$, *то отображение* T *имеет и циклы периода* 2^i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Покажем, что T имеет цикл периода 2^m, $1 \leq m < n$. Положим $T^{2^{m-1}} = S$. Согласно следствию 1 отображение S имеет цикл периода > 2. Согласно теореме 2.1.1 у S найдется цикл периода 2, откуда вытекает (следствие 3), что отображение T имеет цикл периода 2^m.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1.3. *Если у отображения* T *есть цикл периода* k, *причем* k *отлично от степени двойки, то отображение имеет циклы периода* 2^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

Покажем, что у T имеется цикл периода 2^m, где $m \geq 1$. Положим $T^{2^{m-1}} = S$. Согласно следствию 2 отображение S имеет цикл периода > 2; из теоремы 2.1.1 вытекает, что S имеет и цикл периода 2. Это свидетельствует о том, что T имеет цикл периода 2^m.

Из теоремы 2.1.3 следует, что существуют отображения, имеющие циклы сколь угодно большого периода, поскольку отображение, имеющее цикл заданного периода, в частности, отличного от степени двойки, всегда легко построить.

Теорема 2.1.3 показывает также, что достаточно зафиксировать отображение T в конечном числе точек (образующих цикл), например, в трех, и будет существовать бесконечно много циклов независимо от того, как мы будем изменять (непрерывным образом) значения Tx в остальных точках прямой.

Рассмотрим множество точек, образующих один цикл. Пусть точки α_1, $\alpha_2 = T\alpha_1, \ldots,$ $\alpha_k = T\alpha_{k-1}$ образуют цикл периода k. Разобьем точки цикла на два множества M_- и M_+ : $\alpha_i \in M_-$, если $\alpha_i < T\alpha_i$, и $\alpha_i \in M_+$, если $\alpha_i > T\alpha_i$. Пусть $\alpha_- = \max\limits_{\alpha_i \in M_-} \alpha_i$, $\alpha_+ = \max\limits_{\alpha_i \in M_+} \alpha_i$. Возможны два случая: либо $\alpha_- < \alpha_+$, либо $\alpha_- > \alpha_+$.

Л е м м а 4. *Если $\alpha_- > \alpha_+$, то отображение T имеет цикл любого периода.*

Выберем из всех точек $\alpha \in M_-$, больших α_+, ту, для которой $T\alpha$ является наибольшим. Обозначим эту точку через β. Поскольку $T\alpha_+ < \alpha_+$, $T\beta > \beta$, множество неподвижных точек на интервале (α_+, β) не пусто и замкнуто (в силу непрерывности отображения T). Пусть γ — наибольшая на интервале (α_+, β) неподвижная точка. Тогда $T\gamma = \gamma$ и $Tx > x$ на (γ, β). Интервал $(\gamma, T\beta]$ выбран так, чтобы он содержал точки данного цикла (например, $\beta, T\beta$). Вместе с тем имеются точки этого цикла, которые интервалу $(\gamma, T\beta]$ не принадлежат (например, α_+). Поэтому на $(\gamma, T\beta]$ должна существовать по крайней мере одна точка δ, принадлежащая циклу, для которой либо $T\delta > T\beta$, либо $T\delta < \gamma$. Первое из неравенств невозможно. Действительно, если $\delta \in M_+$, то $T\delta < \delta < T\beta$, если $\delta \in M_-$, то $T\delta < T\beta$, согласно выбору точки β. Итак, на $(\gamma, T\beta]$ существует точка δ, принадлежащая циклу, для которой $T\delta < \gamma$ (возможно $\delta = T\beta$). Так как на $(\gamma, \beta]$ $Tx > x$, то $\delta \in (\beta, T\beta]$. Полученная схема (рис. 2.1), где $T\gamma = \gamma$, $Tx > x$ на $(\gamma, \beta]$, $\delta \in (\beta, T\beta]$ и $T\delta < \gamma$ (назовем ее Λ -схемой), обеспечивает существование циклов всех периодов.

Действительно, $T(\gamma, \beta] \supseteq (\gamma, T\beta]$ и, следовательно, множество точек $x \in (\gamma, \beta]$, для которых $Tx = \delta$ не пусто (и замкнуто). Наименьшую из них обозначим δ_1; $\delta_1 < \delta$. Аналогично, так как $T(\gamma, \delta_1] = (\gamma, \delta]$, множество точек $x \in (\gamma, \delta_1]$, для которых $Tx = \delta_1$ не пусто и замкнуто. Наименьшую из

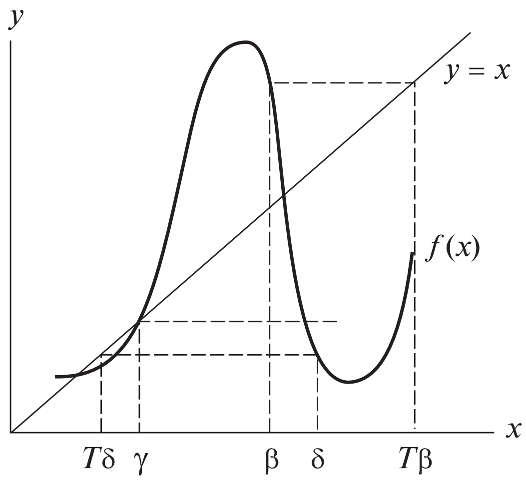

Рис. 2.1

них обозначим δ_2. Очевидно, $\gamma < \delta_2 < \delta_1$ и $T(\gamma, \delta_2] = (\gamma, \delta_1]$. Продолжая процесс построения точек δ_i, получаем последовательность $\delta > \delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_{i-1} > \delta_i > \ldots > \gamma$, причем $T\delta_i = \delta_{i-1}$. Очевидно, $T^i\delta_{i-1} = T\delta$, $T^i\delta_i = \delta$. Итак, $T^i\delta_i > \delta_i$, $T^i\delta_{i-1} < \delta_{i-1}$ и в силу непрерывности отображения T^i существует по крайней мере одна точка $\rho_i \in (\delta_i, \delta_{i-1})$ такая, что $T^i\rho_i = \rho_i$. Поскольку $T^i(\gamma, \delta_{i-1}] = (\gamma, \delta_{i-j-1}] \subseteq (\gamma, \delta_1]$ при $j < i - 1$ и на $(\gamma, \delta_1]$ $Tx > x$, то $T^j x > x$ на $(\gamma, \delta_{i-1}]$ при $1 \le j < i$. Следовательно, $T^j\rho_i \ne \rho_i$, когда $1 \le j < i$, т. е. точка ρ_i принадлежит циклу периода i.

Лемма доказана.

Замечание. Если существует неподвижная точка, которая меньше α_- (но больше $\min\limits_{i=1,2,\ldots,k} \alpha_i$), то у отображения T можно выделить, как и выше, Λ -схему и, следовательно, отображение имеет циклы любого периода.

Если существует неподвижная точка, которая больше α_+ (но меньше $\max\limits_{i=1,2,\ldots,k} \alpha_i$), то у отображения T можно выделить схему, которую получают из Λ -схемы преобразованием последней относительно точки γ как центра. Аналогично тому, как и при доказательстве леммы 4, можно показать, что такая схема гарантирует существование циклов всех периодов.

Перейдем к случаю, когда $\alpha_- < \alpha_+$. Имеет место

Л е м м а 5. *Если* $\alpha_- < \alpha_+$ *и существует точка* $\alpha \in M_-$ *такая, что* $T\alpha \in M_-$ *(или точка* $\alpha' \in M_+$ *такая, что* $T\alpha' \in$ $\in M_+$*), то отображение* T *имеет циклы нечетных периодов, больших* k, *и всех четных периодов.*

Начнем с выделения схемы, которая и приведет нас к доказательству леммы. Пусть $n = \min\limits_{\substack{T^j\xi\le\alpha\\ \xi\in M_-,\xi\ge T\alpha}} j$ и β — та из точек ξ, для которых достигается $\min$ (или, если таких точек несколько, одна из них). Итак, $T^n\beta = \gamma \le \alpha$, $T^j\beta > \alpha$ при $j < n$. Если бы на интервале (α,β) были неподвижные точки, то как утверждается в сделанном выше замечании, отображение T имело бы циклы любого периода. Поэтому остается предположить, что на интервале (α,β) нет неподвижных точек. В таком случае $Tx > x$ при $x \in [\alpha,\beta]$. Рассмотрим последовательность $T\beta, T^2\beta, T^3\beta, \ldots$. Пусть $T^l\beta$ — первая точка этой последовательности, принадлежащая M_-. Легко видеть, что $T^l\beta < T\alpha$. Действительно, если бы было $T^l\beta \ge T\alpha$, то тогда указанный выше $\min j$ достигался бы для точки $\xi' = T^l\beta$ (и был бы меньше n). Так как $T\beta > \beta > T\alpha$, то $T\beta \in M_+$ (если бы $T\beta \in M_-$, то $\min j$ достигался бы для точки $\xi'' = T\beta$) и, следовательно, $l \ge 2$. Обозначим точку $T^{l-1}\beta$ через δ; $\delta \le T\beta$, так как $T\beta, \ldots, T^{l-1}\beta \in M_+$; $\delta > \beta$, так как $\delta > \alpha$, $T\delta < \delta$ и $Tx > x$ при $x \in (\alpha,\beta]$. Следовательно, $\delta \in (\beta, T\beta]$, $T\delta = T^l\beta < T\alpha$. Приведенные рассуждения свелись к построению графика, представленного на рис. 2.2, *а*. Полученную схему назовем M-схемой.

Рассмотрим интервал $[\beta,\delta]$ (рис. 2.2, *б*). Пусть точка η — наибольшая из тех точек $x \in [\beta,\delta]$, для которых $Tx = T\beta$ (возможно $\eta = \beta$). На интервале (η,δ) $Tx < T\beta$. Поскольку $T\eta = T\beta \ge \delta$, $T\delta < T\alpha \le \eta$, то множество точек $x \in (\eta,\delta]$ таких, что $Tx = \eta$, не пусто и замкнуто. Пусть ζ — наименьшая из них. Таким образом, $T\eta = T\beta$, $T\zeta = \eta$ и для всех

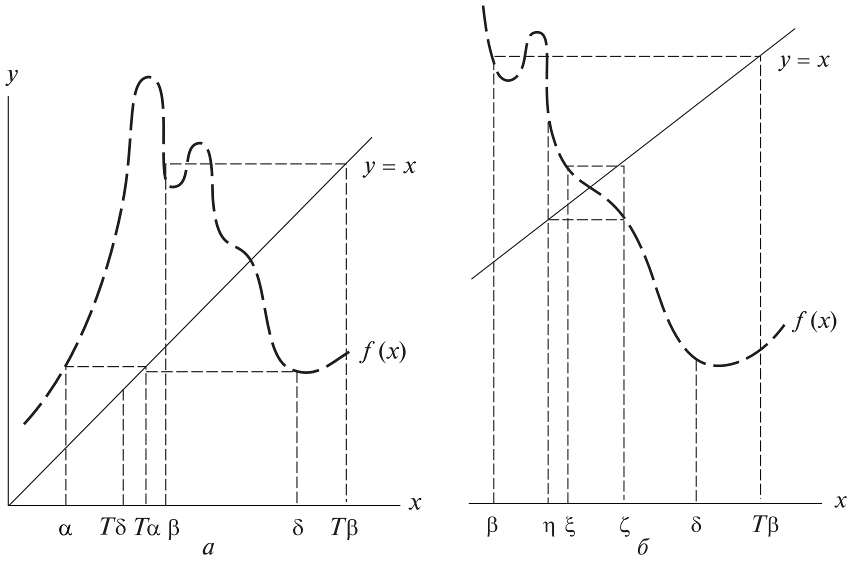

Рис. 2.2

$x \in (\eta, \zeta)$ $\quad \eta < Tx < T\beta$. Далее на интервале $[\eta, \zeta]$ возьмем точку ξ, наибольшую из тех точек x, для которых $Tx = \zeta$. Для всех $x \in (\xi, \zeta)$ $\quad \eta < Tx < \zeta$.

Для большей наглядности дальнейших рассуждений построим примерный график отображения T^2 на интервале $[\xi, \zeta]$ (рис. 2.3). Имеем: $T^2\xi = \eta < \xi$, $\quad T^2\zeta = T\beta > \zeta$, $\quad \eta < T^2x < T\beta$ на (ξ, ζ). Пусть ω_1, ω_2 — соответственно наименьшая и наибольшая из точек $x \in [\xi, \zeta]$, в которых $T^2x = x$. Очевидно, $T\omega_1 = \omega_2$, $\quad T\omega_2 = \omega_1$, т. е. ω_1, ω_2 образуют цикл периода 2, или если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то ω — неподвижная точка.[1] Более того, $T(\xi, \omega_1) = (\omega_2, \zeta)$, $\quad T(\omega_2, \xi) = (\eta, \omega_1)$.

Аналогично тому, как сделано выше для Λ -схемы, построим последовательность $\zeta = \theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \ldots > \omega_2$ та-

[1]Действительно, $T\omega_2 \geq \omega_1$, так как $T^2(T\omega_2) = T\omega_2$ и, следовательно, $T\omega_2 \notin (\xi, \omega_1)$. Аналогично, $T\omega_1 \leq \omega_2$. Поэтому $T[\xi, \omega_1] \supseteq [\omega_2, \zeta]$ и на $[\xi, \omega_1]$ найдется точка χ такая, что $T\chi = \omega_2$. Для любого $x \in [\xi, \omega_1]$ $T^2x \leq x$. Таким образом, $\chi \geq T^2\chi = T\omega_2 \geq \chi$, откуда $T^2\chi = \chi$, т. е., $\chi = \omega_1$.

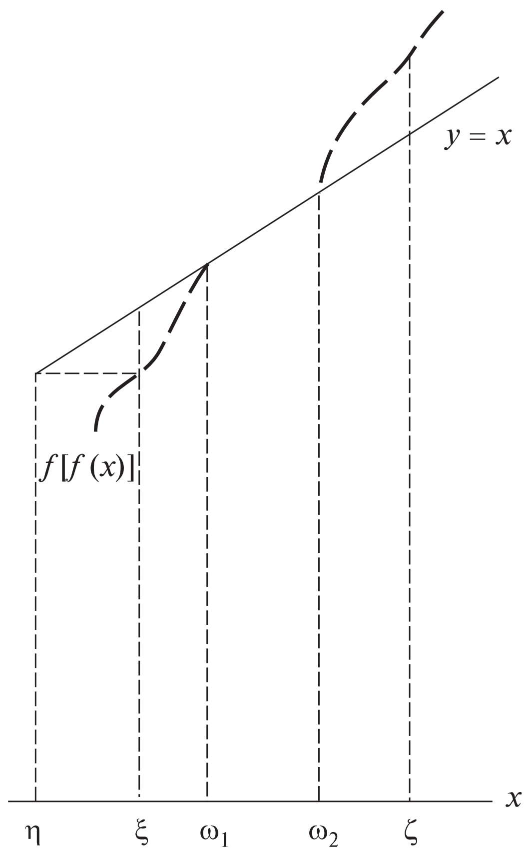

Рис. 2.3

кую, что $T^2\theta_i = \theta_{i-1}$, $T^2(\omega_2, \theta_i) = (\omega_2, \theta_{i-1})$, и последовательность $\xi = \kappa_0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \omega_1$ такую, что $T^2\kappa_i = \kappa_{i-1}$, $T^2(\kappa_i, \omega_1) = (\kappa_{i-1}, \omega_1)$. Следовательно, $T^{2i+1}(\omega_2, \theta_i) = (\eta, \omega_1)$ и $T^{2i+2}(\kappa_i, \omega_1) = (\eta, \omega_1)$.

Поскольку $T\alpha < \eta$, $T\eta = T\beta > \zeta$, существуют точки $x \in \in (\alpha, \eta)$, для которых Tx равно $\omega_1, \omega_2, \eta, \theta_i, \kappa_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 2.4). Действительно, найдутся такие точки $\lambda_1, \lambda_2, \mu_0, \nu_{-1} \in \in (\alpha, \eta)$, что $T\lambda_1 = \omega_1$, $T\lambda_2 = \omega_2$, $T\mu_0 = \theta_0 = \zeta$, $T\nu_{-1} = \eta$ и $T(\nu_{-1}, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$, $T(\lambda_2, \mu_0) = (\omega_2, \zeta)$. Далее можно найти точки μ_i, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что $T\mu_i = \theta_i$, $T(\lambda_2, \mu_i) =$

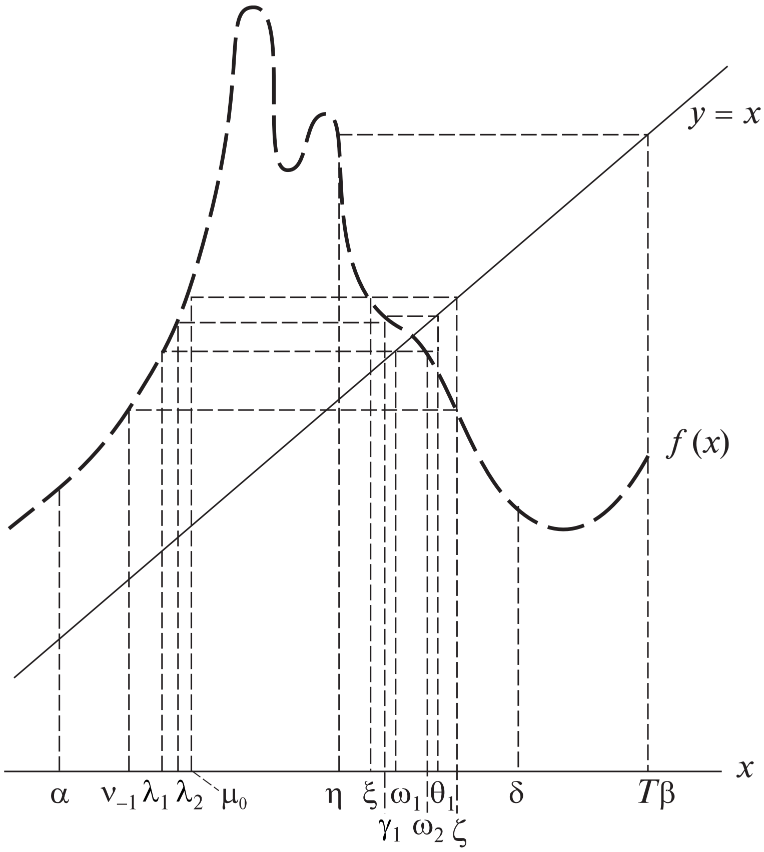

Рис. 2.4

$= (\omega_2, \theta_i)$, и точки ν_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, такие, что $T\nu_i = \kappa_i$, $T(\nu_i, \lambda_1) = (\kappa_i, \omega_1)$. Очевидно, $T^{2i+2}\mu_i = \eta$, $T^{2i+2}(\lambda_2, \mu_i) =$ $= (\eta, \omega_1)$ и $T^{2i+3}\nu_i = \eta$, $T^{2i+3}(\nu_i, \lambda_1) = (\eta, \omega_1)$.

Так как $T\eta = T\beta$, то $T^n\eta = \gamma$ (n — наименьшее положительное число такое, что $T^n\beta \leq \alpha$). Для того, чтобы перейти от одной точки цикла к другой, нужно не более $k-1$ шагов и поэтому $n \leq k-1$. Нетрудно видеть, если $\gamma = \alpha$, $\beta = T\alpha$, то $n = k-1$.

Покажем, что отображение T имеет циклы нечетного периода, большего k. Пусть n четно. Тогда $n+2i+3$, $i \geq 0$, нечетно. Утверждается, что существует цикл периода $s = n + 2i + 3$. Действительно, $T^s\lambda_1 = \omega_1 > \lambda_1$, $T^s\nu_i = \gamma < \nu_i$, и, следовательно, на интервале (ν_i, λ_1) существуют точки x такие, что $T^s x = x$. Пусть ρ_s — наибольшая из них. Так как s нечетно, то ρ_s принадлежит циклу нечетного периода (лемма 1). Допустим, ρ_s принадлежит циклу периода r, где $r < s$ и нечетно. Точка $T\rho_s \in (\kappa_i, \omega_1)$ и найдется такая точка $\pi' \in (\kappa_{i+\frac{s-r}{2}}, \omega_1)$, что $T^{s-r}\pi' = T\rho_s$. Поскольку $T^2 x < x$ на (κ_j, ω_1), $j = 0, 1, 2, \ldots$, и $T^{s-r} = \underbrace{T^2(T^2(\ldots T^2)}_{(s-r)/2}\ldots)$, то $T\rho_s < \pi' < \omega_1$. Существует точка π'' такая, что $\rho_s < \pi'' < \lambda_1$ и $T\pi'' = \pi'$. Итак, $\rho_s < \pi'' < \lambda_1$ и $T^s\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}T\pi'' = T^{r-1}T^{s-r}\pi' = T^{r-1}T\rho_s = \rho_s < \pi''$ и, следовательно, на интервале (π'', λ_1) существует точка ρ'_s, в которой $T^s\rho'_s = \rho'_s$; $\rho_s < \rho'_s$, а это противоречит тому, что ρ_s — наибольшая из всех точек $x \in (\nu_i, \lambda_1)$ таких, что $T^s x = x$. Поэтому ρ_s принадлежит циклу периода s. Нечетное число $s' = n + 3$ $(i = 0)$ всегда не превосходит наименьшее нечетное число, большее k. Следовательно, при четном n существование циклов нечетного периода, большего k, доказано.

Если бы n было нечетным, нужно было бы вместо последовательности $\{\nu_i\}$ воспользоваться последовательностью точек μ_i.

Покажем теперь, что отображение T имеет циклы любого четного периода. Пусть n четно. В этом случае следует использовать последовательность $\{\mu_i\}$. Положим $s = n + 2i + 2$; $T^s\lambda_2 = \omega_1 > \lambda_2$, $T^s\mu_i = \gamma < \mu_i$ и, следовательно, существуют точки $x \in (\lambda_2, \mu_i)$ такие, что $T^s x = x$. Пусть σ_s — одна из этих точек. Утверждается, что при $s \geq 2k - 2\sigma_s$ принадлежит циклу периода s. Так как $T^s\sigma_s = \sigma_s$, то σ_s принадлежит либо циклу периода s, либо циклу меньшего периода r, которому кратно s (лемма 1). Очевидно, $r \leq s/2$, и поэтому если $T^j\sigma_s \neq \sigma_s$ при $1 \leq j \leq s/2$, то σ_s — точка цикла периода s. На интервале (λ_2, μ_i) $T^j x > \eta > x$ при любом $1 \leq j \leq s - n$, так как $T^j(\lambda_2, \mu_i) \subset (\eta, \zeta)$, когда $j < s - n$. Таким образом, при $s-n \geq s/2$ точка σ_s принадлежит циклу периода s. А последнее неравенство всегда выполняется при $s \geq 2k-2$.

Аналогично доказывается существование циклов четного периода $s \geq 2k-2$ при нечетном n, но уже с помощью точек ν_i.

Остается показать, что T имеет циклы четного периода, меньшего $2k-2$. Прежде чем завершить доказательство леммы 5, докажем следующую лемму.

Л е м м а 6. *Если отображение T имеет цикл нечетного периода, то оно имеет и циклы любого четного периода.*

Рассмотрим множества M_- и M_+. Если $\alpha_- > \alpha_+$, то существуют циклы всех периодов (лемма 4). Пусть $\alpha_- < \alpha_+$. Точки цикла нечетного периода k для отображения $S = T^2$ также образуют цикл периода k (лемма 2). Для отображения S можно составить аналогично множествам M_- и M_+ множества M'_- и M'_+, считая, что $\alpha_i \in M'_-$, если $\alpha_i < T^2\alpha_i$, и $\alpha_i \in M'_+$, если $\alpha_i > T^2\alpha_i$. Пусть α'_- — наибольшая точка из M'_-, α'_+ — наибольшая точка из M'_+. Покажем, что отображение S имеет циклы всех периодов.

Поскольку $\alpha_- < \alpha_+$, то у отображения T есть неподвижная точка γ такая, что $\alpha_- < \gamma < \alpha_+$. Точка γ является неподвижной точкой и отображения $S = T^2$. Если $\alpha'_- \neq \alpha_-$ (а, следовательно, и $\alpha'_+ \neq \alpha_+$), то либо $\gamma < \alpha'_-$, либо $\gamma > \alpha'_+$. Остается воспользоваться замечанием к лемме 4.

Пусть $\alpha'_- = \alpha_-$ и, следовательно, $\alpha'_+ = \alpha_+$, $M'_- = M_-$, $M'_+ = M_+$. Пусть точка α_1 — наименьшая из точек α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ (рис. 2.5). Тогда $\alpha_k \in M_+$. Так как $\alpha_{k-1} > \alpha_1$, то $\alpha_{k-1} \in M'_+$, и потому $\alpha_{k-1} \in M_+$. Таким образом, $\alpha_{k-1} > \alpha_k$. Пусть точка α_r — наибольшая из точек α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Точка $\alpha_{r-1} \in M_-$ и, следовательно, $\alpha_1 < \alpha_{r-1} < \alpha_k$. Поскольку $T(\alpha_k, \alpha_{k-1}) \supset (\alpha_1, \alpha_k)$, найдется точка $x \in (\alpha_k, \alpha_{k-1})$ такая, что $T\delta = \alpha_{r-1}$. Наконец, пусть ω — наибольшая из точек $x \in [\gamma, \delta]$, для которых $Sx = x$ (по крайней мере одна такая точка существует, поскольку $S\gamma = \gamma$).

Итак, имеем: $S\omega = \omega$, $S\delta = \alpha_r > \delta$, $Sx > x$ на $(\omega, \delta]$, $\alpha_{k-1} \in (\delta, \alpha_2)$ и $S\alpha_{k-1} = \alpha_1 < \omega$ (рис. 2.5, *а*). Нам удалось

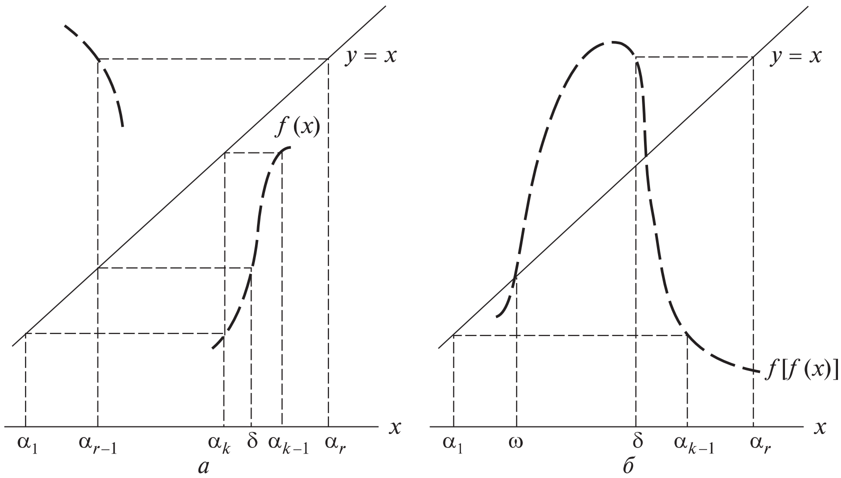

Рис. 2.5

у отображения S выделить Λ -схему (см. лемму 4), которая и обеспечивает существование у S циклов всех периодов.

Из того, что S имеет циклы всех периодов, сразу вытекает существование циклов четного периода у отображения T. Покажем, например, что T имеет цикл периода $l = 2l_1$.

Пусть точка α принадлежит циклу периода l_1 отображения S. Это означает, что $S^{l_1}\alpha = \alpha$ и $S^{j_1}\alpha \neq \alpha$ при $1 \leq j_1 < l_1$, т.е. $T^l\alpha = \alpha$ и $T^j\alpha \neq \alpha$, где j — любое четное число, меньшее l. Так как $S\alpha \neq \alpha$, то и $T\alpha \neq \alpha$. Следовательно, либо α принадлежит циклу периода l отображения T, либо циклу нечетного периода $l_2 > 1$, причем $l_2 < l_1$. Но для цикла нечетного периода всегда выполняются условия либо леммы 4, либо леммы 5. Действительно, так как цикл содержит нечетное число точек, то либо в M_- их больше, либо в M_+. Пусть для определенности в M_- больше точек, чем в M_+. Тогда обязательно найдется точка $\mu \in M_-$ такая, что $T\mu \in M_-$. Итак, если отображение T имеет цикл нечетного периода l_2, то выполняются условия либо леммы 4, либо леммы 5 и T должно иметь циклы любого четного периода $\geq 2l_2 - 2$; но $l > 2l_2 - 2$. Лемма 6 доказана.

Этим завершается и доказательство леммы 5. Поскольку при ее доказательстве уже установлено существование циклов нечетного периода (большего k), то существуют циклы и всех четных периодов.

В силу всего выше сказанного имеет место

Теорема 2.1.4. *Если отображение T имеет цикл нечетного периода $k > 1$, то оно имеет и циклы нечетных периодов, больших k, а также циклы всех четных периодов.*

Теорему 4 нельзя усилить. Построим пример отображения T, имеющего цикл периода $2m+1$, но не имеющего циклов периода $2j+1$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Пусть точки α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, образуют цикл периода $2m+1$, причем $\alpha_{i+1} = T\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, $\alpha_1 = T\alpha_{2m+1}$ и $\alpha_1 < \alpha_{2m} < \alpha_{2m-2} < \ldots < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_{2m+1}$. Предполагаем, что T — кусочно-линейное отображение, линейное на всяком интервале, не содержащем точек α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$, причем $Tx = \alpha_2$ при $x \leq \alpha_1$, $Tx = \alpha_1$ при $x \geq \alpha_{2m+1}$ (рис. 2.6).

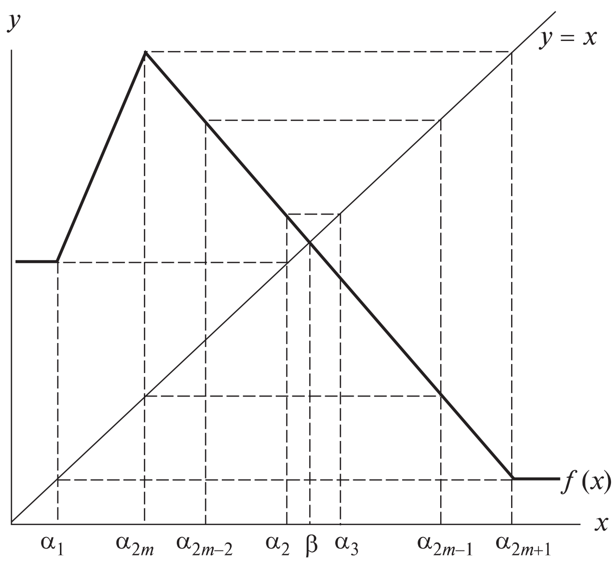

Рис. 2.6

Нетрудно убедиться, что

$$T^{2j-1}(\alpha_1, \alpha_{2m+1}] = (\alpha_{2j}, \alpha_{2m+1}],$$

$$T^{2j-1}(\alpha_{2i+2}, \alpha_{2i}] =$$

$$= \begin{cases} [\alpha_{2(i+j)-1}, \alpha_{2(i+j)+1}), & \text{если} \quad 2 \le i+j \le m, \\ (\alpha_{2(i+j-m)}, \alpha_{2m+1}], & \text{если} \quad m+1 \le i+j \le 2m-1, \end{cases}$$

$$T^{2j-1}(\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+3}] =$$

$$= \begin{cases} (\alpha_{2(i+j)+2}, \alpha_{2(i+j)}], & \text{если} \quad 2 \le i+j \le m-1, \\ (\alpha_1, \alpha_{2m+1}], & \text{если} \quad i+j = m, \\ [\alpha_1, \alpha_{2(i+j-m)+1}), & \text{если} \quad m+1 \le i+j \le 2m-1, \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Если $T\beta = \beta$, то

$$T^{2j-1}(\alpha_2, \beta) = (\beta, \alpha_{2j+1}], \ 1 \le j \le m,$$

$$T^{2j-1}(\beta, \alpha_3) = \begin{cases} (\alpha_{2j+2}, \beta), & \text{если} \quad 1 \le j < m, \\ (\alpha_1, \beta), & \text{если} \quad j = m. \end{cases}$$

Наконец, заметим, что при $x \le \alpha_1$ $T^{2j-1}x = \alpha_{2j}$ и при $x \ge \alpha_{2m+1}$ $T^{2j-1}x = \alpha_{2j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Таким образом, $T^{2j-1}x > x$, когда $x < \beta$, $T^{2j-1}x < x$, если $x > \beta$, при любом $1 \le j \le m$ и, следовательно, у отображения T нет циклов периода $3, 5, \ldots, 2m-1$.

Теорему 4 можно обобщить на случай, когда у отображения существует цикл любого периода, отличного от степени двойки.

Теорема 2.1.5. *Если у отображения T есть цикл периода $k = 2^n l$, где $l > 1$ — нечетное число, то отображение T имеет циклы периода $2^n r$, где $r > l$ — любое нечетное число, и циклы периода $2^n s$, где s — любое натуральное число.*

Доказательство. Если $n = 0$, то получаем теорему 2.1.4, которая уже доказана. Предположим, утверждения теоремы верны при $n = m - 1$, и покажем, что тогда они верны и при $n = m$.

Пусть α — точка цикла периода $2^m l$ отображения T. Покажем, например, что T имеет цикл периода $2^m r$, $r > l$ и нечетно. Точка α принадлежит циклу периода $2^{m-1}l$ отображения $S = T^2$ (лемма 2) и, согласно сделанному предположению, отображение S должно иметь цикл периода $2^m r$. Если β — точка этого цикла, то $S^{2^{m-1}r}\beta = \beta$, $S^j\beta \neq \beta$, $j = 1, 2, 3, \ldots, 2^{m-1}r - 1$, т. е. $T^{2^m r}\beta = \beta$, $T^j\beta \neq \beta$ при любом четном j, меньшем $2^m r$; $T\beta \neq \beta$, ибо $S\beta \neq \beta$. Итак, для отображения T β — точка цикла либо периода $2^m r$, либо нечетного периода > 1. В последнем случае согласно теореме 2.1.3 у отображения T существуют циклы любого четного периода, в том числе и периода $2^m r$.

Совершенно аналогично показывается, что у T есть и циклы периода $2^m s$, где s — любое натуральное число.

Таким образом, утверждения теоремы 2.1.5 справедливы при любом n.

Теоремы 2, 3, 5 и тот факт, что неподвижная точка всегда существует, если есть цикл периода > 1, можно объединить в одну теорему.

Теорема 2.1.6. *Если у отображения T есть цикл периода 2^n, $n > 0$, то отображение T имеет и циклы периода 2^i, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Если у отображения T есть цикл периода $2^n(2m + 1)$, $n \geq 0$, $m > 0$, то отображение имеет и циклы периода 2^i, $i = 0, 1, \ldots, n$, $2^n(2r + 1)$, $r = m + 1, m + 2, \ldots, 2^{n+1}s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$.*

Замечание. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — точки данного цикла периода k и пусть $a = \min\limits_i \alpha_i$, $b = \max\limits_i \alpha_i$. Утверждения теоремы 2.1.6 касаются лишь точек интервала $[a, b]$. Вне $[a, b]$ у отображения, возможно, нет ни одной точки ни одного цикла. Так точки циклов отображения $\overline{T} : \overline{T}x = Ta$, когда $x \leq a$, $\overline{T}x = Tx$ при $a \leq x \leq b$, $\overline{T}x = Tb$, когда $x \geq b$, принадлежат $[a, b]$.

Построим примеры, показывающие, что теорема 2.1.6 полностью решает вопрос о существовании циклов одних периодов в зависимости от существования циклов других периодов: кроме циклов, которые указываются теоремой 2.1.6, отображение может не иметь циклов других периодов.

Прежде всего укажем алгоритм построения по заданному отображению $T_1 : E_1 \to E_1$ нового отображения $T_2 : E_2 \to E_2$, который мы будем неоднократно использовать. Компактность E_1, E_2 существенна и поэтому будем предполагать, что E_1, E_2 — отрезки вещественной прямой (рис. 2.7).

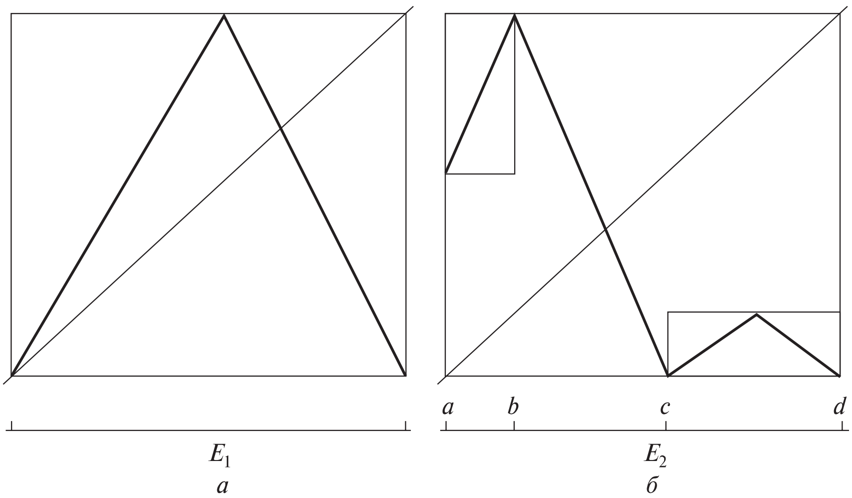

Рис. 2.7

Отображение T_2 определяется T_1 однозначно в следующем смысле. Если по отображению T_1, используя этот алгоритм, построено два отображения $T_2 : E_2 \to E_2$ и $T_2' : E_2' \to E_2'$, то существует гомеоморфизм $S : E_2' \to E_2$ такой, что $T_2' = S^{-1} T_2 S$. (Любые два отображения T и T' такие, что $T' = S^{-1} T S$, где S — гомеоморфизм, будем называть изоморфными.)

Итак, пусть T_1 — произвольное непрерывное отображение E_1 в себя и $E_2 = [a, d]$. Возьмем две точки $b, c \in (a, d)$, $b < c$. Пусть R_1 — произвольный гомеоморфизм $[c, d] \to E_1$. Чтобы имела место однозначность, указанная выше, будем предполагать, что гомеоморфизм R_1, так же как гомеоморфизмы, рассматриваемые ниже, сохраняют порядок: если, например, $x', x'' \in \in [c,d]$, $x' < x''$, то $R_1x' < R_1x''$. Положим $T_1' = R_1^{-1}T_1R_1$. Пусть R_2 — произвольный гомеоморфизм $[a,b] \to [c,d]$. Полагаем, что

$$T_2 = \begin{cases} R_2 & \text{на } [a,b], \\ R_2^{-1}T_1' & \text{на } [c,d], \\ \text{линейное} & \text{на } [b,c], \text{ определяемое значениями } T_2b,\ T_2c. \end{cases}$$

Отображение T_2 определено однозначно, так как R_1, R_2 — гомеоморфизмы, сохраняющие порядок, и точки b, c с помощью гомеоморфизма $[a,d] \to [a,d]$ можно перевести в любые две точки $b', c' \in (a,d)$, $b' < c'$.

Отображение T_2 на интервале (b,c) имеет одну неподвижную точку, так как $T_2b = d > c$, $T_2c \le b$ и T_2 — линейное отображение; на (b,c) нет точек циклов (периода > 1), так как для любой точки $x \in (b,c)$, исключая неподвижную точку, найдется номер j_x : $T_2^{j_x}x \in [a,b] \cup [c,d]$ и $T_2[a,b] = [c,d]$, $T_2[c,d] \subseteq [a,b]$. Из последних соотношений вытекает также, что отображение T_2 имеет циклы только четных периодов.

Если некоторые отображения T и T' изоморфны: $T' = = S^{-1}TS$, то гомеоморфизм S устанавливает взаимно однозначное соответствие между циклами отображений T и T'. Это, в частности, относится к отображениям T_1 и T_1'. Так как

$$T_2^2 = \begin{cases} R_2^{-1}T_1'R_2 & \text{на } [a,b], \\ T_1' & \text{на } [c,d], \end{cases}$$

то между циклами отображения T_2 (исключая неподвижную точку) и циклами и неподвижными точками отображения T_1 существует взаимно однозначное соответствие: каждому циклу периода $2k$ отображения T_2 соответствует цикл периода k отображения T_1.

Последний факт позволяет без труда построить требуемые примеры.

Если $T_1 = \mathrm{const}$ на E_1, то T_1 имеет единственную неподвижную точку и не имеет циклов периода ≥ 2. Следовательно, отображение T_2 имеет один цикл периода 2 и одну неподвижную точку. Если теперь взять за исходное отображение T_2, то отображение T_3, построенное с помощью указанного алгоритма, будет иметь циклы периода 4,2,1. Продолжая таким образом процесс построения отображений, строим отображение T_{n+1}, имеющее только циклы периода $2^n, 2^{n-1}, \ldots, 2, 1$.

Если в качестве T_1 взять отображение, имеющее цикл периода $2m+1$, но не имеющее циклов периода $2i+1$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, то итерируя n раз алгоритм построения отображений, мы получим отображение T_{n+1}, имеющее цикл периода $2^n(2m+1)$ и циклы, которые указываются теоремой 2.1.6 и только их.

Теорема 2.1.6 и построенные примеры (рис. 2.7, *а*, *б*) доказывают теорему, сформулированную в начале параграфа.

Отметим, что в качестве примеров можно взять и сколь угодно гладкие отображения. Поэтому основная теорема в приведенной формулировке имеет место и для гладких отображений.

К теоремам 2.1.1—2.1.6 примыкает следующая теорема.

Теорема 2.1.7. *Между любыми двумя точками цикла периода* $k > 1$ *лежит хотя бы одна точка цикла периода* $l < k$.

Пусть $\alpha > \beta$ — точки цикла периода k; n_α, n_β – количество точек этого цикла, меньших соответственно точек α и β. Очевидно, $k > n_\alpha > n_\beta \geq 0$. Существует n_α различных целых положительных чисел s_i, $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$, меньших k и таких, что $T^{s_i}\alpha < \alpha$. Так как $n_\alpha > n_\beta$, найдется s_{i_0}, $1 \leq i_0 \leq n_\alpha$, такое, что $T^{s_{i_0}}\alpha < \alpha$, $T^{s_{i_0}}\beta > \beta$. А это означает, что существует точка $\gamma \in (\beta, \alpha)$, для которой $T^{s_{i_0}}\gamma = \gamma$; γ принадлежит циклу периода $l \leq s_{i_0} < k$.

2.2. Существование циклов в окрестности притягивающего множества

Настоящий параграф носит скорее вспомогательный характер. Далее будут сформулированы более точные результаты. Наибольший интерес, по-видимому, представляет одно специальное отображение, которое здесь строится и к которому впоследствии мы будем часто обращаться.

Будем предполагать, что E — замкнутый интервал. В этом параграфе предполагается также, что притягивающее множество $\mathcal{A}$ отлично от цикла и потому является бесконечным множеством.

Теорема 2.2.1. *Всякая неизолированная точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов.*

Предварительно докажем лемму. Пусть $x_0 \in \mathcal{A}$. Для удобства положим $x_i = T^i x_0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

Л е м м а 1. *Если $x_{n_1} < x_m < x_{n_2}$ и $n_1, n_2 < m$, то на интервале (x_{n_1}, x_{n_2}) имеется по крайней мере одна точка цикла.*

Рассмотрим последовательность точек $T^{i(m-n_1)}x_m, \quad i = 1, 2, \ldots$. Если среди этих точек есть точки, лежащие слева от x_m, то на интервале (x_{n_1}, x_m) имеется хотя бы одна точка цикла. Пусть $T^{i_0(m-n_1)}x_m$ — первая из точек таких, что $T^{i(m-n_1)}x_m < x_m$; $T^{i_0(m-n_1)}x_{n_1} = T^{(i_0-1)(m-n_1)}x_m \geq x_m > x_{n_1}$. Следовательно, существует точка $x \in (x_{n_1}, x_m)$ такая, что $T^{i_0(m-n_1)}x = x$. Аналогично, если среди точек $T^{j(m-n_2)}x_m$, $j = 1, 2, \ldots$, есть точки, лежащие справа от x_m, то на интервале (x_m, x_{n_2}) имеется хотя бы одна точка цикла. Таким образом, на интервале (x_{n_1}, x_{n_2}) может не быть циклов лишь при условии, что $T^{i(m-n_1)}x_m > x_m, \quad T^{j(m-n_2)}x_m < x_m, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots$ Но это невозможно, когда $i(m - n_1) = j(m - n_2)$. Лемма доказана.

Пусть точка $x \in \mathcal{A}$ является предельной для точек множества $\mathcal{A}$ и U — произвольная окрестность точки x. Покажем, что в U содержится точка цикла (отличная от точки x). В U найдутся точки $x', x'', x''' \in \mathcal{A}$, лежащие по одну сторону от точки x. Для определенности будем считать, что $x' < x'' < x''' < x$. Так как $x' \in \mathcal{A}$, найдется точка $x_{i_1} \in U$: $x_{i_1} < x''$. Так как $x''' \in \mathcal{A}$, найдется точка x_{i_2} : $x'' < x_{i_2} < x$. Наконец, так как $x'' \in \mathcal{A}$, найдется точка x_{i_3} : $x_{i_1} < x_{i_3} < x_{i_2}$ и $i_3 > i_1, i_2$. Остается применить лемму.

Заметим, что из проведенных рассуждений следует более точный результат: если точка $x \in \mathcal{A}$ является предельной слева (справа) для точек множества $\mathcal{A}$, то точка x является предельной слева (соответственно, справа) и для точек циклов.

Теорема 2.2.2. *Если $\mathcal{A}$ содержит хотя бы один цикл, то каждая точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов.*

Доказательство опирается на

Л е м м у 2. *Пусть a и b — левый и правый концы множества $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ содержит неподвижную точку, то между любыми двумя точками $x_{i_1}, x_{i_2} \in (a, b)$ имеется хотя бы одна точка цикла.*

Пусть $\alpha \in \mathcal{A}$ — неподвижная точка и пусть для определенности $i_1 < i_2$, $x_{i_1} < x_{i_2}$. Если $x_{i_1} < \alpha < x_{i_2}$, то лемма справедлива. Пусть $x_{i_2} < \alpha$. Допустим, на интервале (x_{i_1}, x_{i_2}) нет точек циклов. Так как $x_{i_1} > a$ и $a \in \mathcal{A}$, найдется точка $x_{i_3} < x_{i_1}$, $i_3 > i_1$. Поскольку $T^{i_3-i_1}x_{i_1} = x_{i_3} < x_{i_1}$ и на (x_{i_1}, x_{i_2}) нет точек циклов, то $T^{i_3-i_1}x_{i_2} < x_{i_2}$; принимая во внимание лемму 1, получаем $T^{i_3-i_1}x_{i_2} < x_{i_1}$. Поскольку $T^{i_3-i_1+i_2-i_1}x_{i_1} = T^{i_3-i_1}x_{i_2} < x_{i_1}$, то и $T^{i_3-i_1+i_2-i_1}x_{i_2} < x_{i_2}$, и, более того, $T^{i_3-i_1+2(i_2-i_1)}x_{i_1} = T^{i_3-i_1+i_2-i_1}x_{i_2} < x_{i_1}$, и т. д. Таким образом, $T^{i_3-i_1+j(i_2-i_1)}x_{i_1} < x_{i_1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. $T^{j(i_2-i_1)}x_{i_3} < x_{i_1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Но последнее невозможно. Пусть U — окрестность точки α, лежащая целиком правее точки x_{i_2}. Поскольку $\alpha \in \mathcal{A}$, $T\alpha = \alpha$ и отображение T непрерывно, для любого целого $m > 0$ можно указать такое $x_i \in U$, что и $T^s x_i \in U$, $s = 1, 2, \ldots, m$. В частности, можно взять $i > i_3$ и $m > i_2 - i_1$, что и приводит к противоречию с тем, что $T^{j(i_2-i_1)}x_{i_3} < x_{i_1}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. При иных расположениях точек x_{i_1}, x_{i_2}, α доказательство почти ничем не отличается от проведенного выше.

Замечание. Легко видеть, что лемма 2 остается справедливой, если множество $\mathcal{A}$ содержит не неподвижную точку, а замкнутое множество F такое, что $TF = F$ и F лежит целиком слева (справа) от точек x_{i_1}, x_{i_2}.

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что множество $\mathcal{A}$ содержит цикл периода k. Для отображения $S = T^k$ этот цикл распадается на k неподвижных точек. Исходная траектория распадается на k траекторий отображения S, имеющих своими притягивающими множествами множества $\mathcal{A}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, причем $T\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, $\ldots$, $T\mathcal{A}_{k-1} = \mathcal{A}_k$, $T\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_1$, $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathcal{A}_j = \mathcal{A}$; каждое из множеств $\mathcal{A}_j$ отлично от цикла и содержит хотя бы одну неподвижную точку. Всякая точка цикла отображения T принадлежит циклу отображения S и наоборот. Поэтому достаточно показать, что всякая точка множества $\mathcal{A}_j$, $1 \le j \le k$, является предельной для точек циклов отображения S.

Пусть a_j и b_j — левый и правый концы множества $\mathcal{A}_j$. Всякая точка множества $\mathcal{A}_j \cap (a_j, b_j)$ является предельной для точек циклов согласно лемме 2. Если a_j — точка цикла периода ≥ 1, то она является предельной для точек множества $\mathcal{A}_j$, а, следовательно, и для точек циклов. Если точка a_j не принадлежит циклу, то поскольку $S\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_j$, найдется точка $a' \in \mathcal{A}_j$ такая, что $a_j < a' < b_j$ и $S^l a' = a_j$, $l \ge 1$. Так как a' согласно доказанному является предельной для точек циклов, то таковой является и точка a_j. Аналогично доказывается, что и точка b_j является предельной для точек циклов. Теорема 2.2.2 доказана.

Следствие. *Если $\mathcal{A}$ счетно, то всякая точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов.*

Отметим еще следующее. Всякая точка, предельная для точек циклов, период которых ограничен сверху некоторым числом, в силу непрерывности отображения сама является точкой цикла. Согласно следствию теоремы 1.1.3 на множестве $\mathcal{A}$ всюду плотно лежат точки, не принадлежащие циклам. Таким образом, если точка $x \in \mathcal{A}$ является предельной для точек циклов, то среди циклов, точки которых попадают в некоторую окрестность точки x, есть циклы сколь угодно большого периода.

Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 оставляют невыясненным лишь один вопрос: всегда ли и изолированная точка множества $\mathcal{A}$, не содержащего циклов, является предельной для точек циклов? Отрицательный ответ на этот вопрос дает пример, построением которого мы сейчас и займемся.

Пример достаточно сложный. Его можно было бы построить, используя данный в параграфе 2.1 алгоритм. Мы поступим более прямолинейно. Стремясь максимально упростить изложение, воспользуемся также тем, что вещественную прямую можно рассматривать как линейно упорядоченное метрическое пространство.

Построим предварительно непрерывное отображение T_0 некоторого интервала $[\alpha, \beta]$. Пусть $a_1 = \alpha < b_1 < a_2 < b_2 < < \ldots < a_i < b_i < \ldots < \beta$ — последовательность точек, причем $b_i - a_i = \beta - a_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Полагаем $T_0\alpha = a_2$, $T_0 b_1 = \beta$, $T_0 a_i = \alpha + \beta - b_i$, $T_0 b_i = \alpha + \beta - a_i$, $i = 2, 3, \ldots$, $T_0\beta = \alpha$ и на каждом из интервалов $[a_i, b_i], [b_i, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$, T_0 — линейное отображение (рис. 2.8).

Очевидно,

$$T_0^2 b_1 = a_1, \quad T_0^{2^{i-1}} b_{i+1} = b_i, \quad T_0^{2^{i-1}} a_i = a_i, \quad T_0^{2^i}[a_i, b_i] = [a_i, b_i],$$

$i = 1, 2, \ldots$, и интервалы $[a_i, b_i]$, $T_0[a_i, b_i]$, $\ldots$, $T_0^{2^i-1}[a_i, b_i]$ попарно не пересекаются. Следовательно, отображение T_0 имеет циклы только периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (и притом по одному для каждого i). Положим $M_i = \bigcup\limits_{j=0}^{2^i-1} T_0^j[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$

Траектория $\{T_0^j\alpha\}_{j=0}^{\infty}$ притягивается множеством $\mathcal{A}_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$, причем $\alpha \in \mathcal{A}_0$. Множество $M_i, i > 0$, не содержит циклов периода $< 2^i$, так как отрезки $T_0^j[a_i, b_i]$, $j = 0, 1, \ldots, 2^i - 1$, попарно не пересекаются. Следовательно, множество $\mathcal{A}_0$ не содержит циклов.

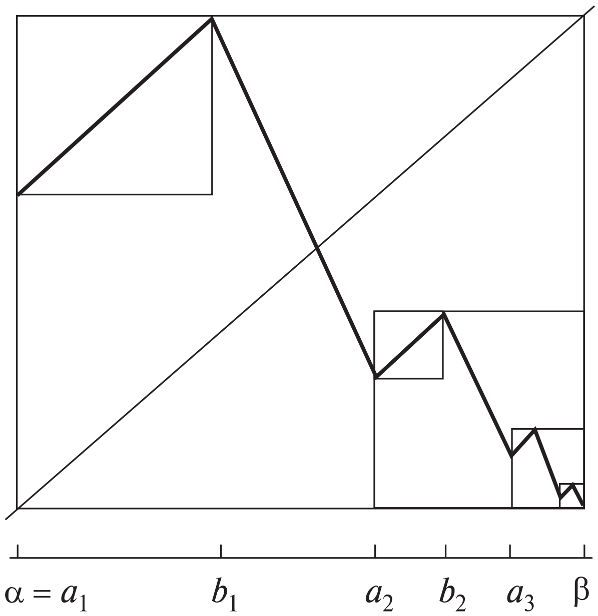

Рис. 2.8

Отображение T_0 характеризуется тем, что на $[a_i, \beta]$, $i = 1, 2, \ldots$, $T_0^{2^{i-1}}$ изоморфно T_0 на $[\alpha, \beta]$.

Построим теперь непрерывное отображение T, определенное на замкнутом интервале, содержащем $[\alpha, \beta]$ (или на всей прямой), видоизменив несколько отображение T_0.

Отображение T задается следующими условиями 1)–8) (см. рис. 2.9):

1) *На* $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, $T = T_0$.

Таким образом, $\mathcal{A}_0$ является притягивающим множеством и для отображения T.

2) *При* $x \geq \beta$ $Tx = \alpha - (x - \beta)$.

Выберем точки $d_i, c_{i+1} \in (b_i, a_{i+1}), i = 1, 2, \ldots$, и $c_1 < a_1$ так, что $d_i < c_{i+1}, a_i - c_i = 2(d_i - b_i) = 2(a_{i+1} - c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$.

3) *На* $[c_i, a_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, T *— линейное отображение, причем тангенс угла наклона графика отображения к оси* x *равен* $1/2$.

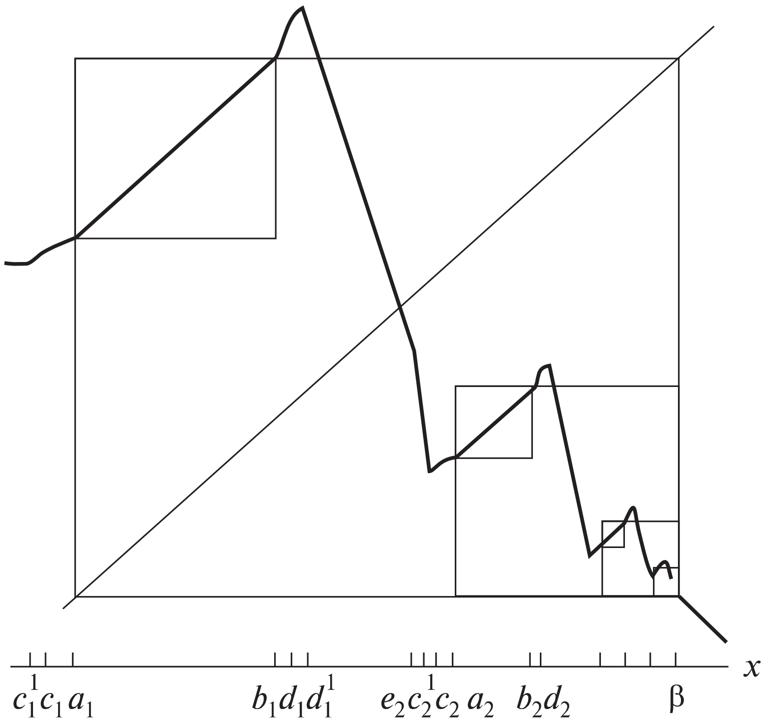

Рис. 2.9

4) *На* $[b_i, d_i]$, $i = 1, 2, \ldots,$ T *— линейное отображение, причем тангенс угла наклона графика равен 2.*

Таким образом, $T^2 d_1 = c_1$, $T^{2^{i-1}} d_{i+1} = d_i$, $T^{2^{i-1}} c_i = c_{i+1}$ и $T^2[b_1, d_1] = [c_1, a_1]$, $T^{2^{i-1}}[b_{i+1}, d_{i+1}] = [b_i, d_i]$, $T^{2^{i-1}}[c_i, a_i] = [c_{i+1}, a_{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots$ Точки c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots,$ притягиваются множеством $\mathcal{A}_0$ (как, впрочем, и любая точка из $[c_i, a_i]$ или $[b_i, d_i]$).

Выберем точки $d_i^1, c_{i+1}^1 \in (d_i, c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots,$ и $c_1^1 < c_1$ так, что $d_i^1 < c_{i+1}^1$, $c_i - c_i^1 = d_i^1 - d_i = 2(c_{i+1} - c_{i+1}^1) < \frac{1}{2}(c_{i+1} - d_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

5) *На* $[c_i^1, c_i]$ *и* $[d_i, d_i^1]$, $i = 1, 2, \ldots,$ T *— линейное отображение, причем тангенс угла наклона графика равен* 1.

Пусть c_i^2 — середина интервала (c_i^1, c_i), d_i^2 — середина интервала (d_i, d_i^1), $i = 1, 2, \dots$. Таким образом, $T^{2^{i-1}} c_i^2 = c_{i+1}^1$, $T^{2^{i-1}} d_{i+1}^1 = d_i^2$, $i = 1, 2, \dots$, $T^2 d_1^1 = c_1^1$.

Точка $e_{i+1} = T^{2^{i-1}} c_i^1$ принадлежит интервалу (d_i^1, c_{i+1}^1) для всякого $i \geq 1$, причем точка c_{i+1}^1 является серединой интервала (e_{i+1}, c_{i+1}).

6) $Te_i = Td_i^1 (= d_{i-1}^2)$, $i = 2, 3, \dots$.

В таком случае множество

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} T^j d_i$$

замкнуто и притягивает каждую из точек $c_i^1, c_i^2, d_i^1, d_i^2, e_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$.

Множество $\mathcal{A}$, кроме совершенной части — множества $\mathcal{A}_0$, содержит счетное множество изолированных в $\mathcal{A}$ точек, замыкание которого есть в точности $\mathcal{A}$. Рассмотрим, например, траекторию $\{T^j d_1^1\}_{j=0}^{\infty}$. Несложный подсчет дает: точка $d_1^2 = T^{2^2} d_1^1$ является серединой интервала (d_1, d_1^1), точка $d_1^3 = T^{2^3} d_1^2$ — серединой интервала (d_1, d_1^2), и вообще точка $d_1^n = T^{2^n} d_1^{n-1}$ — серединой интервала (d_1, d_1^{n-1}). Следовательно, $d_1^n \to d_1$ при $n \to \infty$, т. е. d_1 — ω-предельная точка траектории $\{T^j d_1^1\}_{j=0}^{\infty}$. Аналогично доказывается, что и точки d_i, $i = 2, 3, \dots$, являются ω-предельными. Из непрерывности T следует, что точки $T^j d_i$, $i, j = 1, 2, \dots$, также являются ω-предельными, и, таким образом, всякая точка множества $\mathcal{A}$ является ω-предельной для траектории $\{T^j d_1^1\}_{j=0}^{\infty}$. Легко видеть, что других ω-предельных точек траектория $\{T^j d_1^1\}$ не имеет. Следовательно, $\mathcal{A}$ — притягивающее множество отображения T.

7) *На* $[d_i^1, e_{i+1}]$ *и* $[e_{i+1}, c_{i+1}^1]$, $i = 1, 2, \dots$, T — *линейное отображение.*

8) *При* $x \leq c_1^1$ $Tx = Tc_1^1$.

Итак, непрерывное отображение T определено на всей вещественной прямой. Если необходимо, можно предполагать, что T определено на некотором замкнутом интервале, содержащем $[c_1^1, Td_1^1]$.

Утверждается, что всякая изолированная точка множества $\mathcal{A}$ не является предельной для точек циклов. Достаточно привести доказательство для точек d_i, $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим, например, точку d_1. Любая точка из $[b_1, d_1]$ притягивается множеством $\mathcal{A}_0$ и потому не принадлежит циклу. Остается доказать, что справа от d_1 в некоторой окрестности d_1 нет точек циклов.

Из построения T следует, что $T^{2^n}[\gamma_n, d_1^n] = [\gamma_n, d_1^{n+1}]$, где $\gamma_n = T^{2^{n-1}-1}c_n^1 < d_1$, и множества $T^{2^n}[\gamma_n, d_1^n]$, $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, попарно не пересекаются. Поэтому $(d_1^{n+1}, d_1^n) \cap T^j(d_1^{n+1}, d_1^n) = \varnothing$ при $j > 0$ и на интервале (d_1^{n+1}, d_1^n) нет точек циклов. Итак, интервал (d_1, d_1^1) не содержит точек циклов.

Можно показать (это уже нетрудно сделать), что отображение T имеет лишь циклы периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (и притом, как и T_0, по одному для каждого i).

В дальнейшем нам неоднократно придется ссылаться на отображение T. Имея это в виду, снабдим букву T каким-либо индексом; например, будем впредь обозначать наше отображение через T_∞.

2.3. Центр и минимальный центр притяжения. Усиление одной теоремы Дж. Биркгофа

Настоящий параграф является продолжением параграфа 1.3 и содержит ряд более точных результатов, имеющих место, когда E — замкнутый интервал.

Теорема 2.3.1. *Центр произвольного отображения T пространства E является замыканием множества точек циклов. Порядковое число центра ≤ 2.*

Пусть, как и в параграфе 1.3, C_1 — множество неблуждающих точек E, C_2 — множество неблуждающих точек C_1. Теорема вытекает из

Л е м м ы 1. *Если* $x_1, x_2 \in C_1$, *причем* $x_2 = T^k x_1$, $k > 0$, *и* U *— произвольный открытый (в* E *) интервал, содержащий точки* x_1, x_2, *то в* U *имеется хотя бы одна точка цикла.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в любом открытом интервале U, содержащем точку $x \in C_2$, есть точка цикла. Поскольку $x \in C_2$, найдется номер $k > 0$ такой, что множество $(U \cap C_1) \cap T^k(U \cap C_1)$ не пусто. Следовательно, существует точка $x_1 \in U \cap C_1$ такая, что $T^k x_1 \in U \cap C_1$, и согласно лемме 1 в U есть точка цикла.

Докажем лемму. Пусть, для определенности, $x_1 < x_2$, а отрезок $[x_1, x_2]$ не содержит периодических точек. Покажем вначале, что $T^{km} x_2 > x_2$ при $m \geq 1$. Действительно, если номер $m_0 = \min\{m \geq 1 : T^{km} x_2 < x_2\}$ существует, то тогда $T^{km_0} x_1 = T^{k(m_0-1)} x_2 > x_2 > x_1$, а $T^{km_0} x_2 < x_2$. Это означает, что в таком случае на интервале (x_1, x_2) существовала бы неподвижная точка отображения T^{km_0} .

Докажем теперь, что для каждого i, $0 \leq i < k$,

либо (а) $T^{km+i} x_2 < x_1$ для всех $m \geq 0$,

либо (б) $T^{km+i} x_2 > x_2$ для всех $m \geq M$, где $M > 0$ — фиксированное число, не зависящее от i.

Для этого достаточно показать, что из $T^{km+i} x_2 > x_1$ следует $T^{k(m+1)+i} x_2 > x_2$ при любых k, m, i. В самом деле, если бы существовали такие k, m, i, что $T^{km+i} x_2 > x_1$ и $T^{k(m+1)+i} x_2 <$ $< x_2$, то для $S = T^{k(m+1)+i}$ было бы $S x_1 > x_1$, $S x_2 < x_2$ и, следовательно, на (x_1, x_2) имелась бы периодическая точка.

Обозначим A множество тех i, $0 \leq i < k$, для которых имеет место (а). Заметим, что при любых $i \in A$ и $m \geq 1$ интервал $[T^{km+i} x_2, x_1]$ содержит неподвижную относительно T^k точку. Действительно, если случится так, что последовательность $\{T^{km'+i} x_2,\quad m' \geq m\}$ монотонно растёт, то её предел и будет искомой неподвижной точкой. В противном случае возьмём наименьшее $m' \geq m$, при котором $T^{k(m'+1)+i} x_2 <$ $< T^{km'+i} x_2$. Для $y = T^{km'+i} x_2$ имеем $T^k y < y$, в то время как $T^k x_1 > x_1$. Итак, существует T^k-неподвижная точка в $[y, x_1] \subseteq [T^{km+i} x_2, x_1]$.

Мы также можем предполагать, что точки x_1 и x_2 изолированы от множества $\{T^n x_2, n \geq 1\}$, ибо иначе мы имели бы $x_1 \in \mathcal{A}_{x_1}$ (или, соответственно, $x_2 \in \mathcal{A}_{x_2}$) и, следовательно, точка x_1 (соответственно, x_2) была бы предельной для точек циклов, как неизолированная точка ω-предельного множества.

Возьмем достаточно малый открытый интервал $U \ni x_1$, для которого интервалы $U, TU, \ldots, T^k U$ попарно не пересекаются, а $T^k U$ не содержит ни одной из точек $\{T^n x_2,\ n \geq 1\}$. Существует $n \geq M(k+2)$, при котором $T^n U \cap U \neq \varnothing$. Пусть $n = mk + i$, $\ 0 \leq i < k$. Возможны два случая:

1) $i \in A$. Тогда $T^n U \ni T^n x_1 < x_1$. Отрезок $[T^n x_1, x_1]$ содержит некоторую T^k-неподвижную точку z. Поскольку $[T^n x_1, x_1] \subset U\ \cup T^n U$ и U не содержит T^k-неподвижных точек, то $T^n U \ni z$. Поэтому интервал $T^{n+k} U$ содержит точку $z < \inf U$ и пересекается с $T^k U \ni x_2$, а $\inf T^k U > \sup U$. Следовательно, $T^{n+k} U \subset U$ и U содержит периодическую точку.

2) $i \notin A$. Поскольку $n \geq M(k+2)$, то $T^n x_1 > x_2$. Поэтому $T^n U \supset T^k U$ и интервал $T^k U$ содержит периодическую точку.

Лемма 1 доказана.

Отметим, что для отображения T_∞ (параграф 2.2) порядковое число центра $= 2$.

Теорема 2.3.2. *Минимальный центр притяжения отображения пространства E является замыканием множества точек циклов.*

Теорема вытекает из теоремы 2.3.1 и того факта, что минимальный центр притяжения расположен в центре и содержит все точки циклов.

Итак, центр и минимальный центр притяжения для отображений вещественной прямой совпадают.

Определим множества $C_1^{\pm}$. Точка $x \in C_1^-$ $\ (x \in C_1^+)$ тогда и только тогда, когда для любого открытого интервала U, правым (соответственно, левым) концом которого является точка x, $U \cap T^j U \neq \varnothing$ при некотором $j > 0$.

Очевидно, $C_1^- \cup C_1^+ \subseteq C_1$.

Всякая точка, принадлежащая циклу, входит хотя бы в одно из множеств $C_1^{\pm}$.

Л е м м а 2. *Следующие три предложения равносильны:*

1) $\alpha \in C_1^- \cup C_1^+$;

2) для любой окрестности U *точки* α *найдутся точка* $\alpha' \in E$ *и числа* j_1, j_2, j_3 *такие, что* $T^{j_s}\alpha' \in U$, $s = 1, 2, 3$;

3) точка α *является* ω*-предельной точкой.*

Лемма будет доказана, если мы покажем, что $3) \Rightarrow 2) \Rightarrow$ $\Rightarrow 1) \Rightarrow 3)$, где стрелка $\Rightarrow$ означает логическое следование одного предложения из другого.

а) $3) \Rightarrow 2)$.

Это немедленно вытекает из определения ω-предельной точки.

б) $2) \Rightarrow 1)$.

Для любой блуждающей точки существует окрестность, содержащая не более одной точки всякой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$ (согласно определению). Следовательно, $\alpha \in C_1$ и доказательство п. б) сразу вытекает из утверждения $(*)$:

Для любой точки $x' \in C_1 \setminus (C_1^- \cup C_1^+)$ *существует окрестность, содержащая не более двух точек всякой траектории* $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$.

Докажем $(*)$. Пусть U — произвольная окрестность точки x' и $U^- = \{x \in U, x < x'\}$, $U^+ = \{x \in U, x > x'\}$; $U =$ $= U^- \cup \{x\} \cup U^+$. Так как $x' \notin C_1^- \cup C_1^+$, можно предполагать, что $T^j U^- \cap U^- = \varnothing$, $T^j U^+ \cap U^+ = \varnothing$, $T^j x' \notin U$, $j = 1, 2, \ldots$ Утверждается, что или $T^j U^- \cap U^+ = \varnothing$, или $T^j U^+ \cap U^- = \varnothing$ при всех $j \geq 1$ и, таким образом, $(*)$ справедливо.

Докажем от противного. Допустим, для любых U^-, U^+ существуют j', j'' такие, что $T^{j'} U^- \cap U^+ \neq \varnothing$, $T^{j''} U^+ \cap U^- \neq \varnothing$. Пусть $T^{j_0} U_0^- \cap U_0^+ \neq \varnothing$ и “полуокрестность” U_1^+ такова, что $U_0^+ \setminus U_1^+ \neq \varnothing$. Так как $T^{j_0} x' > x'$ и не принадлежит U_0^+, множество $T^{j_0} U_0^- \cap (U_0^+ \setminus U_1^+)$ не пусто. Найдется непустое замкнутое множество $V \subset U_0^-$ такое, что $T^{j_0} V \subset T^{j_0} U_0^- \cap (U_0^+ \setminus U_1^+)$; $x' \notin V$, поскольку $T^{j_0} x' \notin U_0^+$. Возьмем “полуокрестность” $U_1^- \subset U_0^- \setminus V$. Найдется j_1 : $T^{j_1} U_1^+ \cap U_1^- \neq \varnothing$. $T^{j_1} U_1^+ \supset V$, так как $T^{j_1}x' < x'$ и не принадлежит U_0^-. Следовательно, $T^{j_0+j_1}U_0^+ \cap U_0^+ \neq \varnothing$, что и приводит к противоречию.

в) 1) $\Rightarrow$ 3).

Если $\alpha \in \mathcal{A}_\alpha$, α — ω-предельная точка. Предположим, $\alpha \notin \mathcal{A}_\alpha$ и U_0 — окрестность точки α, не содержащая точек $T^j\alpha$, $j > 0$. Пусть, для определенности, $\alpha \in C_1^+$. Условимся при доказательстве п. в) обозначать буквой G (и с индексами) открытые интервалы, содержащиеся в U_0, левыми концами которых является точка α. Итак, для всякого G существует $j > 0$ такое, что $T^jG \cap G \neq \varnothing$.

1°. Предположим, что для всякого G существует $n > 0$ такое, что $T^nG \cap G \neq \varnothing$, $T^nG \ni \alpha$.

Построим последовательность интервалов $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ следующим образом. Пусть $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ — последовательность окрестностей точки α и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i = \alpha$. G_1 выберем произвольным образом, лишь бы $G_1 \subset U_1$. Если $T^{n_i}G_i$, $i \geq 1$, содержит точку α и $T^{n_i}G_i \cap G_i \neq \varnothing$, то в качестве G_{i+1} возьмем интервал $\subseteq U_{i+1} \cap T^{n_i}G_i$.

Найдутся замкнутое множество $V_1 \subset G_1$ такое, что $T^{n_1}V_1 = \overline{G_2}$, замкнутое множество $V_2 \subseteq V_1$ такое, что $T^{n_1+n_2}V_2 = \overline{G_3}$, замкнутое множество $V_3 \subseteq V_2$ такое, что $T^{n_1+n_2+n_3}V_3 = \overline{G_4}$, и т.д. Так как $\bigcap\limits_i \overline{G_i} = \alpha$, то для любого $x \in \bigcap\limits_i V_i$ $\mathcal{A}_x \ni \alpha$.

2°. Предположим, что существует G_0 такое, что T^jG_0 не содержит точку x при всяком j, когда $T^jG_0 \cap G_0 \neq \varnothing$. Утверждается, что в этом случае для всякого $G \subseteq G_0$ существуют $n, m > 0$ такие, что T^nG содержит точку $T^m\alpha$ вместе с некоторой окрестностью.

Из сделанного предположения вытекает, что $T^j\alpha > \alpha$, когда $T^jG \cap G \neq \varnothing$. Если при некотором $j' > 0$ точка $T^{j'}\alpha$ не является концом интервала $T^{j'}G$, а при $j < j'$ точка $T^j\alpha$ — один из концов интервала T^jG, то $T^{j'}\alpha$ принадлежит T^jG вместе с некоторой окрестностью.

Рассмотрим случай, когда точка $T^j\alpha$ при любом $j \geq 0$ является концом интервала $T^{j'}G$. Пусть $T^{j'}G \cap G \neq \varnothing$ и

$T^{j''}G \cap G \neq \varnothing$, $j' \neq j''$. Тогда либо $T^{j'}G \subset G \cup T^{j''}G$, либо $T^{j''}G \subset G \cup T^{j'}G$. Пусть, для определенности, $T^{j'}G \subset G \cup T^{j''}G$. Если $T^{j'}\alpha \neq T^{j''}\alpha$, то $T^{j'}\alpha$ принадлежит $T^{j''}G$ вместе с некоторой окрестностью.

Допустим, что $T^{j'}\alpha = T^{j''}\alpha$. Пусть $j' < j''$. Можно считать, что $T^jG \cap G = \varnothing$ при $j' < j < j''$. Множество $V = \bigcup\limits_{j=0}^{j''-j'-1} T^j(T^{j'}G)$ не содержит некоторый интервал G'. Если $T^{j'}G \supseteq T^{j''}G$, то $TV \subset V$, а это невозможно, так как при некотором j $T^jV \cap G' \neq \varnothing$.

Итак, $T^{j'}G \subset T^{j''}G$, и если $j_0 < j_1 < \ldots < j_s < \ldots$ — последовательность, содержащая все j, для которых $T^jG \cap G \neq \varnothing$, то $T^{j_0}\alpha = T^{j_1}\alpha = \ldots = T^{j_s}\alpha = \ldots$ и $T^{j_0}G \subset T^{j_1}G \subset \ldots \subset T^{j_s}G \subset \ldots$ (это единственная возможность, которая еще не рассмотрена). Очевидно, $j_1 - j_0 = j_2 - j_1 = \ldots = j_{s+1} - j_s = \ldots$. Пусть $j_1 - j_0 = k$. Тогда $T^{j_0+ik}G \supset T^{j_0}G$, $i = 1, 2, \ldots$. Для всякого $i' \geq 1$ найдется G' такое, что $\bigcup\limits_{j=0}^{k-1} T^j(T^{j_0+i'k}G) \cap G' \neq \varnothing$. Поэтому $\overline{\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{j_0+ik}G} = [\alpha, T^{j_0}\alpha]$. Отсюда следует, что $T^k[\alpha, T\alpha] = [\alpha, T^{j_0}\alpha]$, существует точка $x \in (\alpha, T^{j_0}\alpha)$, для которой $T^k x = \alpha$. Это противоречит тому, что $T^jG \not\ni \alpha$, когда $T^jG \cap G \neq \varnothing$.

Таким образом, существование целых чисел $n, m > 0$ таких, что T^nG содержит точку $T^m\alpha$ вместе с некоторой окрестностью U, доказано.

Рассмотрим произвольный замкнутый интервал $V \subset G$, содержащий множество U' такое, что $T^nU' = U$. Для любого замкнутого интервала $W \subset G$ найдется j' : $T^{j'}V \supset W$. Если $G' \subset G \setminus W$, $T^mG' \subset U$, то $T^nV \supset T^mG'$; для всякого $j > m$, для которого $T^jG' \cap G' \neq \varnothing$, $T^jV \supset W$.

Возьмем последовательность $G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_i \supset \ldots$, $\bigcap\limits_i G_i = \varnothing$ $(\bigcap\limits_i \overline{G_i} = \alpha)$. Для каждого G_i выберем замкнутый интервал $V_i \subset G_i$ указанным выше образом. Для всякого $i \geq 1$ найдется n_i : $T^{n_i}V_i \supseteq V_{i+1}$. Так как $T^{n_1}V_1 \supseteq V_2$, найдется замкнутое множество $V_1' \subset V_1$, для которого $T^{n_1}V_1' = V_2$. Так как $T^{n_2}V_2 \supseteq V_3$, найдется замкнутое множество $V_2' \subset V_1'$, для которого $T^{n_1+n_2}V_2' = V_3$, и т. д. Для всякого $x \in \bigcap\limits_i V_i'$ $\mathcal{A}_x \ni \alpha$.

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Если точка x не является ω-предельной, существует окрестность точки x, содержащая не более двух точек всякой траектории $\{T^j x'\}_{j=0}^{\infty}$, $x' \in E$.*

Следствие 2. *Всякая неизолированная точка множества C_1 является ω-предельной точкой.*

Действительно, если точка x является предельной для точек C_1 слева, то $x \in C_1^-$, если предельной справа, то $x \in C_1^+$.

Следствие 3. $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x \supseteq C_2$.

Это вытекает из того, что всякая точка $x \in C_2$ либо принадлежит циклу, либо является неизолированной в C_1.

Для отображений произвольного компакта центр и множество $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x$ не содержатся одно в другом.

Теорема 2.3.3. $\bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x$ *— замкнутое множество.*

Действительно, множество C_1 замкнуто, множество $C_1 \setminus \setminus \bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{A}_x$ состоит из изолированных в C_1 точек (следствие 2) и потому открыто в C_1.

Для произвольного компакта теорема 2.3.3 не верна.

В случае, когда E — произвольный компакт, имеется следующая теорема, принадлежащая Дж.Биркгофу ([23], с. 162).

Для любой окрестности U множества неблуждающих точек существует $n > 0$ такое, что время пребывания любой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$, вне множества U, т.е. количество значений j, для которых $T^j x \notin U$, не превосходит n.

Если E — замкнутый интервал, повторяя рассуждения Биркгофа, можно получить более сильный результат.

Теорема 2.3.4. *Для любой окрестности U множества $\bigcup\limits_{x\in E} \mathcal{A}_x$ существует n такое, что время пребывания каждой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}, x \in E,$ вне U не превосходит n.*

Другими словами, вне U содержится не более n точек любой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$.

Действительно, для каждой точки $x' \in E \backslash U$ существует окрестность $U_{x'}$, содержащая не более двух точек любой траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$ (следствие 1). Множества $U_{x'}$, $x' \in E \setminus U$, образуют покрытие замкнутого множества $E \setminus U$. Из этого покрытия можно выделить покрытие, состоящее из конечного числа множеств. Пусть это будут множества $U_1, \ldots, U_m$. В каждом из множеств U_i, $1 \leq i \leq m$, любая траектория $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ может побывать не более двух раз. Следовательно, время пребывания траектории $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E$, вне U не превосходит $2m$.

2.4. Траектории простейших отображений

Наиболее просто устроены отображения, имеющие циклы, период которых ограничен сверху некоторым числом. Всякое такое отображение имеет циклы периода 2^i и только их (см. параграф 2.1).

Рассмотрим траектории такого отображения. Если $x_0 \in E$, положим $x_i = T^i x_0$, $i = 1, 2, \ldots$

Если T не имеет неподвижных точек, то либо $Tx > x$ для $x \in E$ и тогда $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, либо $Tx > x$ и тогда $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$. Конечно, это возможно лишь тогда, когда E не является компактом.

Далее предполагаем, что E — замкнутый интервал.

Теорема 2.4.1. *Если T не имеет циклов периода 2, то для любого $n > 0$ $x_i > x_n$ при $i > n$, если $x_{n+1} > x_n$, и $x_i < x_n$ при $i > n$, если $x_{n+1} < x_n$.*

Л е м м а. *Если $\alpha \in E$ и $T\alpha > \alpha$, то $Tx > \alpha$ на интервале $[\alpha, T\alpha]$.*

Допустим противное: на $[\alpha, T\alpha]$ есть точка β такая, что $T\beta \leq \alpha$ (рис. 2.10). Тогда существуют точки $x \in [\alpha, \beta]$, для которых $Tx = \beta$. Пусть γ — наименьшая из них; $T^2\gamma = T\beta \leq \leq \alpha \leq \gamma$. Так как γ не является неподвижной точкой и у отображения нет циклов периода 2, то $T^2\gamma = \gamma$. Предположим, при $x < \alpha$ (если α не является левым концом E) имеются неподвижные точки. Тогда существуют и точки $x < \alpha$ такие, что $Tx = \alpha$. Пусть δ — наибольшая из них; $T^2\delta = T\alpha > \delta$. Найдется точка $\xi \in (\delta, \gamma)$, для которой $T^2\xi = \xi$. Но это невозможно, так как на интервале (δ, γ) нет неподвижных точек и отображение не имеет циклов периода 2.

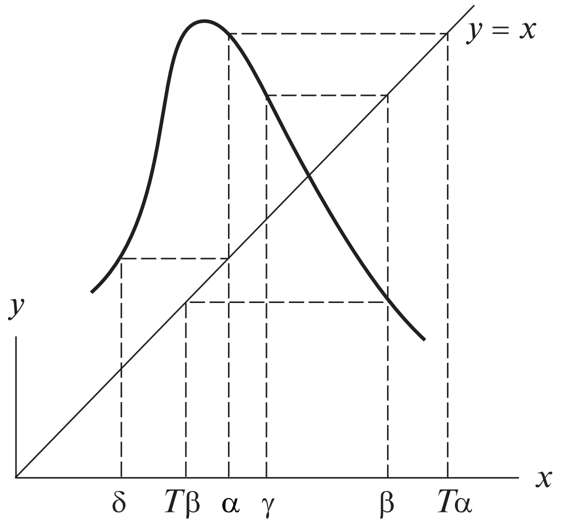

Рис. 2.10

Отбросим последнее допущение и будем считать, что при $x \leq \alpha$ нет неподвижных точек. Тогда их нет и при $x < \gamma$. Из того, что $T^2\gamma < \gamma$, следует, что $T^2\alpha < \alpha$; из того, что $T^2\alpha < \alpha$, следует, что $T^4\alpha < T^2\alpha$, и т. д., так как в противном случае отображение имело бы цикл периода 2. Получаем $\alpha > T^2\alpha > T^4\alpha > T^6\alpha > \ldots$, т. е. последовательность

$\{T^{2j}\alpha\}_{j=0}^{\infty}$ сходится. Пусть $\lim_{j\to\infty} T^{2j}\alpha = \eta$. Тогда $T^2\eta = \eta$, что невозможно.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается: *если* $T\alpha < \alpha$, *то* $Tx < \alpha$ *на интервале* $[T\alpha, \alpha]$.

Возвратимся к теореме. Пусть $x_n < x_{n+1}$. Для любой точки $x \in [x_n, x_{n+1}]$ $Tx > x_n$. Поэтому либо точки x_i при $i > n$ принадлежат $(x_n, x_{n+1}]$, либо существует номер $n_1 > n$ такой, что $x_i \in (x_n, x_{n+1}]$, когда $n < i < n_1$, и $x_{n_1+1} > x_{n+1}$. Для $x \in [x_{n_1}, x_{n_1+1}]$, как утверждает лемма, $Tx > x_{n_1}$. Поэтому либо точки x_i при $i > n_1$ принадлежат $(x_{n_1}, x_{n_1+1}]$, либо существует номер $n_2 > n_1$: $x_i \in (x_{n_1}, x_{n_1+1}]$, когда $n_1 < i \le n_2$, и $x_{n_2+1} > x_{n_1+1}$, и т. д. Таким образом, либо существует номер $n' > n$: $x_{n'} > x_n$ и $x_i \in (x_n, x_{n'}]$ при $i > n$, либо существует последовательность $n_0 = n < n_1 < n_2 < \ldots$ такая, что $x_{n_0} < x_{n_1} < x_{n_2} < \ldots$ и при $i > n$ $x_i \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (x_{n_k}, x_{n_k+1}]$. В обоих случаях утверждение теоремы выполнено.

При $x_n > x_{n+1}$ рассуждения аналогичны. Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. *Если отображение T не имеет циклов периода 2, то всякая траектория имеет одну ω-предельную точку.*

Допустим, траектория $\{x_i\}$ имеет более двух ω-предельных точек. Возьмем какие-либо три из них $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$. Поскольку α_2 — ω-предельная точка, найдется точка x_{i_1} такая, что $\alpha_1 < x_{i_1} < \alpha_3$. Поскольку α_1 — ω-предельная точка, найдется точка x_{i_2} такая, что $x_{i_2} < x_{i_1}$, $i_2 > i_1$. Согласно теореме 2.4.1, все точки x_i, когда $i > i_1$, должны лежать слева от x_{i_1}, т. е. α_3 не может быть ω-предельной точкой. Две ω-предельные точки траектория $\{x_i\}$ также не может иметь, так как они составили бы цикл периода 2.[2]

Если отображение T имеет циклы периода $1, 2, \ldots, 2^m$ и не имеет циклов периода 2^{m+1}, удобно перейти к отображению

[2]Из теоремы 2.1.1 и не привлекая теорему 2.4.1, мы немедленно получаем, что любая траектория не может иметь конечное число $k > 1$ ω-предельных точек. То, что траектория не может иметь бесконечно много ω-предельных точек, можно извлечь из теорем 2.2.1 и 2.2.2.

$S = T^{2^m}$. Для отображения S справедливы утверждения теорем 2.4.1 и 2.4.2. Поэтому, в частности, всякое притягивающее множество для отображения T представляет собой цикл периода 2^i, $i \le m$.

Теорема 2.4.1 приводит к следующему.

Теорема 2.4.1$'$. *Если* T *не имеет циклов периода* 2^{m+1} *и* $x_{2^m+n} > x_n$, *то и* $x_{2^m j+n} > x_n$ *при* $j > 0$, *а если* $x_{2^m+n} < x_n$, *то и* $x_{2^m j+n} < x_n$ *при* $j > 0$.

Как следствие этой теоремы получаем:

Отображение T не имеет циклов периода 2^{m+1} тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ либо $T^{2^m}x = x$, либо $T^{2^m}x > x$, $T^{2^{m+1}}x > x$, либо $T^{2^m}x < x$, $T^{2^{m+1}}x < x$.

Действительно, из теоремы 2.4.1$'$ вытекает: если отображение T не имеет циклов периода 2^{m+1}, то для любой точки $x \in E$ либо $T^{2^m}x = x$, либо $T^{2^m}x > x$, $T^{2^{m+1}}x > x$, либо $T^{2^m}x < x$, $T^{2^{m+1}}x < x$. Обратное утверждение очевидно: если $T^{2^m}x \ne x$, то предполагается, что и $T^{2^{m+1}}x \ne x$.

2.5. Множество точек циклов

Ввиду непрерывности отображения T точки $x \in E$, для которых $T^k x = x$, $1 \le k < \infty$, образуют замкнутое множество. Обозначим это множество B_k. B_k состоит из точек циклов, период которых делит k. Обозначим B множество точек циклов отображения T. $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ и является, таким образом, множеством типа F_σ.

Как мы далее увидим, существуют отображения, для которых эта верхняя оценка структуры множества точек циклов достигается: будучи F_σ-множеством, множество B может не быть G_δ-множеством. Вместе с тем, очевидно, имеются отображения с более простой структурой множества точек циклов. Пример тому — отображения, о которых шла речь в предыдущем параграфе. У отображений, имеющих только циклы, период которых ограничен сверху некоторым числом, множество точек циклов замкнуто.

А что будет, если отображение имеет циклы сколь угодно большого периода? Оказывается, и в этом случае множество B может быть замкнутым. Приведем пример такого отображения. Для его построения воспользуемся приемом, который уже был применен в параграфе 2.1.

Пусть $E = [a,b]$, $a_0, b_0 \in (a,b)$, $a_0 < b_0$ и $a_0 > c_1 > > a_1 > c_2 > \ldots > c_i > a_i > \ldots \to a$, $b_0 > d_1 > b_1 > d_2 > \ldots > > d_i > b_i > \ldots \to b$. Если на интервале $[a_i, b_i]$, $i \geq 0$, отображение T построено и $T[a_i, b_i] \subseteq [a_i, b_i]$, на интервал $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ отображение T продолжаем следующим образом.

Берем произвольным образом гомеоморфизм $S : [a_i, b_i] \to \to [d_{i+1}, b_{i+1}]$ и гомеоморфизм $R : [a_{i+1}, c_{i+1}] \to [d_{i+1}, b_{i+1}]$. Полагаем (рис. 2.11)

$$T = \begin{cases} R & \text{на} \quad [a_{i+1}, c_{i+1}], \\ R^{-1}STS^{-1} & \text{на} \quad [d_{i+1}, b_{i+1}], \\ \text{линейное} & \text{на} \quad [c_{i+1}, a_i] \text{ и } [b_i, d_{i+1}]. \end{cases}$$

Очевидно, $T[a_{i+1}, b_{i+1}] \subseteq [a_{i+1}, b_{i+1}]$.

Таким образом, если T первоначально было задано на $[a_0, b_0]$, то с помощью указанного алгоритма T продолжается на $(a,b) = \bigcup\limits_i [a_i, b_i]$. Полагаем $Ta = b$, $Tb = a$. Отображение T, определенное на $[a,b]$, непрерывно (если, конечно, оно было непрерывно на $[a_0, b_0]$).

Построенное отображение имеет циклы сколь угодно большого периода. Если на $[a_0, b_0]$ у отображения T есть циклы только периода 2^i, $i \leq i_0$, то на $[a,b]$ T имеет циклы периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и только их. При этом множество точек циклов — замкнутое множество; любая траектория $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, имеет конечное число ω-предельных точек.[3]

[3]Более того, если, например, $Tx = \text{const}$ при $x \in [a_0, b_0]$, то всякая траектория $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in [a,b]$, состоит из конечного числа попарно различных точек.

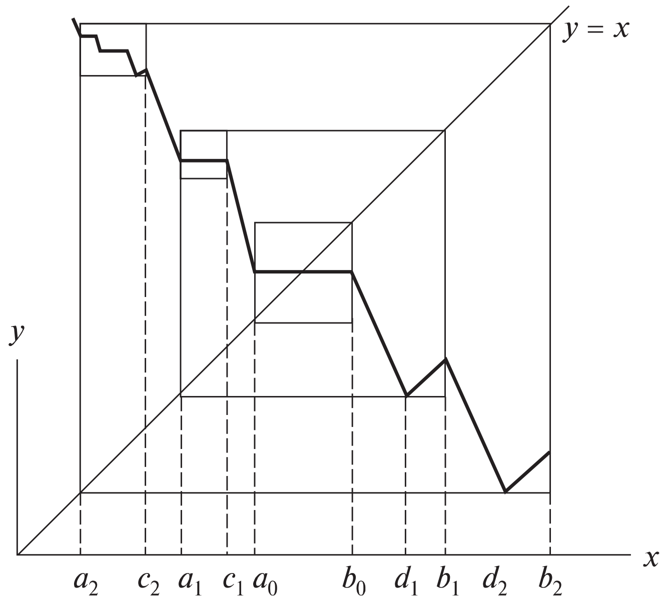

Рис. 2.11

Эти два свойства, объединяющие наше отображение с отображениями, имеющими только циклы, период которых ограничен сверху некоторым m, оказываются неслучайно стоящими рядом.

Теорема 2.5.1. *Множество точек циклов является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда всякая траектория имеет конечное число ω-предельных точек (образующих цикл).*

Пусть любая траектория имеет конечное число ω-предельных точек. Если бы множество точек циклов было незамкнутым, то нашлась бы точка, например, x', не принадлежащая циклу и предельная для точек циклов. Точка x' — ω-предельная точка (см. параграф 2.3, лемма 2). Притягивающее множество, содержащее точку x', не может быть конечным, ибо конечное притягивающее множество — цикл, а точка x' циклу не принадлежит. Итак, множество B должно быть замкнутым.

Предположим, что множество точек циклов — замкнутое множество, и покажем, что при этом любая траектория имеет конечное число ω-предельных точек. Допустим противное: существует точка $x' \in E$, для которой $\mathcal{A}_{x'}$ является бесконечным множеством.

Если множество $\mathcal{A}_{x'}$ не содержит циклов, найдется точка $x'' \in \mathcal{A}_{x'}$, не принадлежащая циклу и не изолированная во множестве $\mathcal{A}_{x'}$. Согласно теореме 2.2.1 точка x'' является предельной для точек циклов. Это противоречит тому, что множество B замкнуто.

Если множество $\mathcal{A}_{x'}$ содержит хотя бы один цикл, каждая точка множества $\mathcal{A}_{x'}$ является предельной для точек циклов (теорема 2.2.2). Множество $\mathcal{A}_{x'}$ содержит, по крайней мере, одну точку, не принадлежащую циклу (следствие теоремы 1.1.3). Итак, существует точка, не принадлежащая циклу и предельная для точек циклов, а это противоречит тому, что множество B замкнуто.

Теорема доказана.

Построенные в параграфе 2.2 отображения T_0, T_∞ также, как и построенное здесь отображение, имеют только циклы периода 2^i, $i = 0, 1, 2 \ldots$. Однако у отображений T_0, T_∞ имеются не только конечные притягивающие множества (циклы), но и притягивающие множества мощности континуума. Следовательно, множество точек циклов для каждого из этих отображений — незамкнутое множество. Нетрудно убедиться, что это множество, будучи F_σ-множеством, является вместе с тем и G_δ-множеством.

Теорема 2.5.2. *Если отображение T имеет цикл периода $k \neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то множество точек циклов не является множеством типа G_δ.*

Если B — множество точек циклов отображения T, то множество точек циклов отображения T^r при любом $r > 1$ также есть B. Поэтому, не ограничивая общности, можно предполагать, что T имеет цикл нечетного периода.

Л е м м а 1. *Если отображение T имеет цикл нечетного периода >1, существуют замкнутые интервалы F_0, F_1, F_2 : $F_0 \supset F_1$, $F_0 \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ и целые числа $n_1, n_2 > 0$ такие, что $T^{n_1}F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$.*

Пусть точки α_1, $\alpha_2 = T\alpha_1, \ldots, \alpha_k = T\alpha_{k-1}$ образуют цикл A периода k, где k — некоторое нечетное число >1. Пусть $\alpha_1 = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} = a$, $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} = b$. Количество точек α_i, $1 \le i \le k$, таких, что $\alpha_i < T\alpha_i$, и таких, что $\alpha_i > T\alpha_i$, различно, так как k нечетно. Предположим, для определенности, что первых больше. Тогда найдется по крайней мере одна точка α_s такая, что $\alpha_s < T\alpha_s = \alpha_{s+1} < T\alpha_{s+1} = \alpha_{s+2}$. Пусть α_{r+1} — первая из точек последовательности $\alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_k$, для которых $\alpha_i > T\alpha_i$. Такие точки в последовательности есть, поскольку $T\alpha_k = a < \alpha_k$. Получаем $\alpha_{r-1} < \alpha_r < \alpha_{r+1} > T\alpha_{r+1}$.

Предположим, что α' — наибольшая из точек α_i цикла A, лежащих на интервале $[\alpha_r, \alpha_{r+1}]$ и таких, что $\alpha_i < T\alpha_i$ (возможно, $\alpha' = \alpha_r$). Так как $T\alpha' > \alpha'$, $T\alpha_{r+1} < \alpha_{r+1}$ и T непрерывно, на интервале (α', α_{r+1}) существуют точки x, для которых $Tx = x$. Множество этих точек замкнуто. Пусть β — наименьшая из них. На интервале (α', β) $Tx > x$ и, следовательно, нет точек цикла A. Пусть α'' — ближайшая к β справа точка цикла A. Очевидно, $\alpha'' \le \alpha_{r+1}$, $T\alpha' \ge \alpha''$, $T\alpha'' \le \alpha'$. Следовательно,

$$[\alpha', \alpha''] \subseteq T[\alpha', \alpha''] \subseteq T^2[\alpha', \alpha''] \subseteq \ldots .$$

Интервал $[\alpha', \alpha'']$ содержит две точки цикла A. Интервал $T^j[\alpha', \alpha'']$, $0 \le j \le k-2$, содержит по крайней мере $j+2$ точки цикла A. Действительно, интервалу $T^j[\alpha', \alpha'']$ принадлежат точки $T^i\alpha', T^i\alpha''$, $i = 0, 1, \ldots, j$, $0 \le j \le k-2$. Точки $\alpha', T\alpha', \ldots, T^j\alpha'$ (всего $j+1$) различны и 1) либо $\alpha'' \ne T^i\alpha'$, $i = 0, 1, \ldots j$; 2) либо $\alpha'' = T^{i'}\alpha'$, $0 < i \le j$, но тогда $T^{j-i'+1}\alpha'' \ne T^i\alpha'$, $i = 0, 1, \ldots j$. Таким образом, замкнутый интервал $T^{k-2}[\alpha', \alpha'']$ содержит все точки цикла A. Отсюда следует, что $T^{k-2}[\alpha', \alpha''] \supseteq [a, b]$. Так как $T[\alpha_{r-1}, \alpha_r] \supseteq [\alpha_r, \alpha_{r+1}] \supseteq [\alpha', \alpha'']$, то $T^{k-1}[\alpha_{r-1}, \alpha_r] \supseteq [a, b]$. Наконец, $T[a, b] \supseteq [a, b]$.

Однако, возможно, $\alpha' = \alpha_r$ и тогда интервалы $[\alpha_{r-1}, \alpha_r]$ и $[\alpha', \alpha'']$ имеют общую точку. Так как $[\alpha', \alpha''] \subseteq T[\alpha', \alpha'']$, найдутся точки $\gamma', \gamma'' \in [\alpha', \alpha'']$ такие, что $T\gamma' = \alpha'$, $T\gamma'' = \alpha''$ и точки $\delta', \delta'' \in [\alpha', \alpha'']$ такие, что $T\delta' = \gamma'$, $T\delta'' = \gamma''$. Точка $\delta' \neq \alpha'$, поскольку $\alpha' \neq T\alpha'$; $\delta'' \neq \alpha'$, ибо, если $\delta' = \alpha'$, то $T\alpha', T^2\alpha' \in [\alpha', \alpha'']$, т.е. либо $T\alpha' = \alpha'$, либо $T^2\alpha' = \alpha'$, что невозможно. Пусть для определенности $\delta' < \delta''$. Тогда $[\delta', \delta''] \subset \subset [\alpha', \alpha'']$, $\delta' \neq \alpha'$, $T^2[\delta', \delta''] \supseteq [\alpha', \alpha'']$ и $T^k[\delta', \delta''] \supseteq [a, b]$.

Итак, можно положить $F_0 = [a, b]$, $F_1 = [\delta', \delta'']$, $F_2 = = [\alpha_{r-1}, \alpha_r]$, $n_1 = k$, $n_2 = k - 1$.

Отметим, что лемма 1 допускает обращение. Именно, *если существуют замкнутые интервалы* F_0, F_1, F_2 : $F_0 \supset F_1$, $F_0 \supset \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ *и целые числа* $n_1, n_2 > 0$ *такие, что* $T^{n_1}F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$, *то отображение* T *имеет цикл нечетного периода* > 1.

Возьмем произвольное простое число $p \geq n_1 + n_2$. Пусть $p = n_1 + n_2'$, где $n_2' \geq n_2$. $T^{n_2'}F_2 = T^{n_2'-n_2}(T^{n_2}F_2) \supseteq T^{n_2'-n_2}F_0 \supseteq \supseteq F_0$. Найдется замкнутый интервал F_1' : $F_1' \subset F_1$, $T^{n_1}F_1' = = F_2$. $T^pF_1' = T^{n_2'+n_1}F_1' = T^{n_2'+n_1}F_2 \supseteq F_0 \supset F_1'$. Следовательно, существует точка $\alpha \in F_1'$, для которой $T^p\alpha = \alpha$. Так как $T^{n_1}\alpha \notin F_1'$, то α — точка цикла периода p.

Л е м м а 2. *Если* $[c, d] \subset [a, b]$, $c \neq a$, *и* $T^n[c, d] \supseteq [a, b]$, *найдутся неподвижная точка* $\alpha \in [c, d]$ *отображения* $S = = T^{2n}$ *и последовательность точек* $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$, $\gamma_i \in \in [c, d]$, $i = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $S^i[\gamma_i, \alpha] \supseteq [a, \alpha]$, $i = 1, 2, \ldots$, *причем для любого* $m > 0$ *можно указать такой номер* i_m, *что интервал* $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ *не содержит точек циклов отображения* T, *период которых* $\leq m$.

Так как $T^n[c, d] \supseteq [a, b]$, существуют точки $\xi_1, \xi_2 \in [c, d]$: $T^n\xi_1 = a$, $T^n\xi_2 = b$. Найдется точка η, лежащая между ξ_1 и ξ_2, для которой $T^n\eta = \eta$; возможно, $\eta = \xi_2$, но $\eta \neq \xi_1$, так как $T^n\xi_1 = a \neq \xi_1$. Если $\xi_1 \in [c, \eta]$, то $T^n[c, \eta] \supseteq [c, \eta]$ и найдется точка $\gamma_1 \in [c, \eta]$, для которой $T^n\gamma_1 = \xi_1$. Если $\xi_1 \in [\eta, d]$, то $\xi_2 \in [c, \eta]$, и $T^n[c, \eta] \supseteq [\eta, d]$; и в этом случае найдется точка $\gamma_1 \in [c, \eta]$, для которой $T^n\gamma_1 = \xi_1$. Имеем:

$\gamma_1, \eta \in [c,d]$, $\gamma_1 < \eta$, $S\gamma_1 = a$, $S\eta = \eta$. Положим $\alpha = \min\limits_{\substack{Sx=x\\ x\in[\gamma,\eta]}} x$; $Sx < x$ для $x \in [\gamma_1, \alpha)$. Так как $S[\gamma_1,\alpha] \supseteq [\gamma_1,\alpha]$, найдется точка $\gamma_2 \in [\gamma_1,\alpha]$, для которой $S\gamma_2 = \gamma_1$. Поскольку $\gamma_1 \neq \alpha$, то и $\gamma_2 \neq \gamma_1$. Так как $S[\gamma_2,\alpha] \supseteq [\gamma_2,\alpha]$, найдется точка $\gamma_3 \in [\gamma_2,\alpha]$, для которой $S\gamma_3 = \gamma_2$ и т.д. Получаем последовательность $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \ldots < \alpha$; $S^i\gamma_i = a$ и, следовательно, $S^i[\gamma_i,\alpha] \supseteq [a,\alpha]$. Последовательность $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится; если $\gamma_i \to \gamma_0$, то $S\gamma_0 = \gamma_0$; поскольку $\gamma_0 \in [\gamma_1,\alpha]$ и $Sx < x$ на $[\gamma_1,\alpha]$, то $\gamma_0 = \alpha$.

Возьмем произвольное целое число $m > 0$. Предположим, что точка α принадлежит циклу периода k отображения T ($2n = kr$, где r — целое число). Точки $\alpha, T\alpha, \ldots, T^{k-1}\alpha$ попарно различны и в силу непрерывности T найдется номер i' такой, что интервалы $[\gamma_{i'},\alpha], T[\gamma_{i'},\alpha], \ldots, T^{k-1}[\gamma_{i'},\alpha]$ попарно не имеют общих точек. Так как $S\alpha = \alpha$ и $Sx < \alpha$ на $[\gamma_1,\alpha)$, то найдется номер i_m такой, что $S^{m-1}[\gamma_{i_m},\alpha] \subseteq [\gamma_{i'},\alpha]$. Интервал $[\gamma_{i_m},\alpha]$ имеет общие точки с интервалом $T^p[\gamma_{i_m},\alpha]$ при $p \leq 2nm$ лишь тогда, когда p кратно k. Это означает, что при $p \leq 2nm$ на $[\gamma_{i_m},\alpha]$ могут быть лишь точки циклов периода $p = kq$, где $q = 1, 2, \ldots, 2nm/k\,(= mr)$. Предположим $\beta \in [\gamma_{i_m},\alpha]$ и $T^p\beta = \beta$, $p = kq$. Так как $S^q = (T^{kr})^q = (T^p)^r$, то $S^q\beta = \beta$. При $0 \leq i \leq m-1$ $S^i\beta \in [\gamma_{i'},\alpha) \subseteq [\gamma_{i_1},\alpha)$. Следовательно, $S^i\beta < \beta$ при $1 \leq i \leq m$; $q > m$ и $p = kq > m$.

Аналогично доказывается

Л е м м а 2$'$. *Если* $[c,d] \subset [a,b]$, $d \neq b$ *и* $T^n[c,d] \supseteq [a,b]$, *найдутся неподвижная точка* $\beta \in [c,d]$ *отображения* $S = T^{2n}$ *и последовательность точек* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$, $\delta_i \in [c,d]$, $i = 1, 2, \ldots$, *такие, что* $S^i[\beta,\delta_i] \supseteq [\beta,b]$, $i = 1, 2, \ldots$, *и для любого* $m > 0$ *можно указать такой номер* i_m, *что интервал* $(\beta,\delta_{i_m}]$ *не содержит точек циклов отображения* T, *период которых* $\leq m$.

Как следствие лемм 2 и 2$'$ получаем следующую лемму.

Л е м м а 3. *Если существуют замкнутые интервалы* F_0, F_1, F_2 : $F_0 \supset F_1, F_0 \supset F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, $TF_0 \supseteq F_0$ *и* *целые числа* $n_1, n_2 > 0$ *такие, что* $T^{n_1} F_1 \supseteq F_0$, $T^{n_2} F_2 \supseteq F_0$, *причем* F_1 *лежит правее* F_2, *то существуют:*

1) *точка* $\alpha \in F_1$, *принадлежащая циклу, и последовательность точек* $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$ *такие, что* $T^{r_i}\alpha = \alpha$, $T^{r_i}[\gamma_i, \alpha] \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* r_i *— некоторые целые положительные числа;*

2) *точка* $\beta \in F_2$, *принадлежащая циклу, и последовательность точек* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$ *такие, что* $T^{s_i}\beta = \beta$, $T^{s_i}[\beta, \delta_i] \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *где* s_i *— некоторые целые положительные числа,*

причем для любого $m > 0$ *можно указать номер* i_m *такой, что интервалы* $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ *и* $(\beta, \delta_i]$ *не содержат точек циклов, период которых* $\leq m$.

Действительно, если $F_0 = [a, b]$, $F_1 = [c, d]$, то $c \neq a$ и согласно лемме 2 найдутся точка $\alpha \in F_1$, принадлежащая циклу периода $k \leq 2n_1$, и последовательность точек $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \alpha$, $\gamma_i \in F_1$, такие, что $T^{2in_1}[\gamma_i, \alpha] \supseteq T^{n_2} F_2 \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $F_2 \subset [a, c] \subset [a, \alpha]$, то $T^{n_2 + 2in_1}[\gamma_i, \alpha] \supseteq T^{n_2} F_2 \supseteq F_0$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $TF_0 \supseteq F_0$, то в качестве r_i можно взять любое целое число $\geq n_2 + 2in_1$, кратное k.

Аналогично доказывается существование точки $\beta \in F_2$ и последовательности $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \beta$. При этом для любого $m > 0$, как вытекает из лемм 2 и $2'$, можно указать номер i_m такой, что интервалы $[\gamma_{i_m}, \alpha)$ и $(\beta, \delta_i]$ не содержат точек циклов, период которых $\leq m$.

Л е м м а 4. *Если выполнены условия леммы 3, существует совершенное нигде не плотное множество* F *такое, что* $B \cap F$ *— счетное плотное на* F *множество.*

Множество строится следующим образом.

1-й шаг. На основании леммы 3 выберем точки $\alpha \in F_1$, $\beta \in F_2$, принадлежащие циклам, и последовательности точек $\gamma_1^{(1)} < \gamma_2^{(1)} < \ldots \to \alpha_1$, $\delta_1^{(1)} > \delta_2^{(1)} > \ldots \to \beta_1$, $\gamma_i^{(1)} \in F_1$, $\delta_i^{(1)} \in F_2$, $T^{r_i^{(1)}}[\gamma_i^{(1)}, \alpha_1] \supseteq F_0$, $T^{s_i^{(1)}}[\beta_1, \delta_i^{(1)}] \supseteq F_0$, где $r_i^{(1)}, s_i^{(1)}$ — целые положительные числа, причем $T^{r_i^{(1)}}\alpha_1 = \alpha_1$, $T^{s_i^{(1)}}\beta_1 = \beta_1$. Выберем номер i_1 так, чтобы интервалы $[\gamma_i^{(1)}, \alpha_1)$ и $(\beta_1, \delta_i^{(1)}]$ не содержали неподвижных точек.

Предположим, что проделано n шагов, в результате которых найдены:

1) точки $\alpha_\eta, \beta_\eta,$ принадлежащие циклам, где индекс η пробегает множество $H_n,$ состоящее из элементов:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
12 & & & & & \\
13 & 123 & & & & \\
14 & 124 & 134 & 1234 & & \\
. & . & . & . & . & \\
. & . & . & . & . & . \\
1n & 12n & . & . & . & 12\ldots n,
\end{array}$$

т. е. $H_n = H_{n-1} \cup \Theta_n$ и каждый элемент множества Θ_n получается из элемента множества H_{n-1} приписыванием n;

2) последовательности точек

$$\gamma_1^{(\eta)} < \gamma_2^{(\eta)} < \ldots \to \alpha_\eta,$$

$$\delta_1^{(\eta)} > \delta_2^{(\eta)} > \ldots \to \beta_\eta,$$

где η пробегает $H_n,$ и такие, что

$$T^{r_i^{(\eta)}}[\gamma_i^{(\eta)}, \alpha_\eta] \supseteq F_0, \quad T^{s_i^{(\eta)}}[\beta_\eta, \delta_i^{(\eta)}] \supseteq F_0,$$

где $r_i^{(\eta)}, s_i^{(\eta)}$ — целые положительные числа, причем $T^{r_i^{(\eta)}}\alpha_\eta = \alpha_\eta, \quad T^{s_i^{(\eta)}}\beta_\eta = \beta_\eta, \quad i = 1, 2, \ldots$;

3) номера $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ такие, что интервалы $[\gamma_{i_m}^{(\eta)}, \alpha_\eta),$ $(\beta_\eta, \delta_{i_m}^{(\eta)}],$ $\eta \in H_m,$ $1 \leq m \leq n,$ содержат лишь точки циклов, периоды которых $\geq m,$ и любые два интервала из совокупности

$$\left\{[\gamma_{i_m}^{(\eta)}, \alpha_\eta], [\beta_\eta, \delta_{i_m}^{(\eta)}], \eta \in H_m\right\}, \ 1 \leq m \leq n,$$

не имеют общих точек; $F^{(1)} \supset F^{(2)} \supset \ldots \supset F^{(n)},$ где

$$F^{(m)} = \bigcup_{\eta \in H_m} ([\gamma_{i_m}^{(\eta)}, \alpha_\eta] \cup [\beta_\eta, \delta_{i_m}^{(\eta)}]), \ 1 \leq m \leq n.$$

<u>$(n+1)$-й шаг</u>. Поскольку $T^{r_{i_n}^{(\eta)}}[\gamma_{i_n}^{(\eta)}, \alpha_\eta] \supseteq F_0 \supset F_2, \quad \eta \in H_n$, найдется замкнутый интервал $I_{\eta,n+1} \subset [\gamma_{i_n}^{(\eta)}, \alpha_\eta]$ такой, что $T^{r_{i_n}^{(\eta)}} I_{\eta,n+1} = F_2$.

Точка $\alpha_\eta \notin I_{\eta,n+1}$. Так как $T^{n_2}F_2 \supseteq F_0$, то $T^{r_{i_n}^{(\eta)}+n_2} I_{\eta,n+1} \supseteq$ $\supseteq F_0$. Пара η, $n+1$ соответствует некоторому индексу $\eta' \in$ $\in H_{n+1}$.

Согласно лемме 3 найдутся точка $\alpha_{\eta'} \in I_{\eta,n+1}$, принадлежащая циклу периода $\le 2(r_{i_n}^{(\eta)} + n_2)$, и последовательность точек

$$\gamma_1^{(\eta')} < \gamma_2^{(\eta')} < \ldots \to \alpha_{\eta'}, \gamma_i^{(\eta')} \in I_{\eta,n+1},$$

такие, что $T^{r_i^{(\eta')}}[\gamma_i^{(\eta')}, \alpha_{\eta'}] \supseteq F_0$, где $r_i^{(\eta')}$ — некоторые целые числа, причем $T^{r_i^{(\eta')}} \alpha_{\eta'} = \alpha_{\eta'}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Аналогично найдутся точка $\beta_{\eta'}$, принадлежащая циклу периода $\le 2(s_{i_n}^{(\eta)} + n_1)$, и последовательность точек

$$\delta_1^{(\eta')} > \delta_2^{(\eta')} > \ldots \to \beta_{\eta'},$$

такие, что $T^{s_i^{(\eta')}}[\beta_{\eta'}, \delta_i^{(\eta')}] \supseteq F_0$, где $s_i^{(\eta')}$ — некоторые целые числа, причем $T^{s_i^{(\eta')}} \beta_{\eta'} = \beta_{\eta'}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Выберем номер i_{n+1} так, чтобы интервалы

$$[\gamma_{i_{n+1}}^{(\eta')}, \alpha_\eta), (\beta_\eta, \delta_{i_{n+1}}^{(\eta')}],\ \eta' \in H_{n+1},$$

содержали лишь точки циклов, период которых $> n+1$, и интервалы

$$[\gamma_{i_{n+1}}^{(\eta)}, \alpha_\eta] \text{ и } [\gamma_{i_{n+1}}^{(\eta,n+1)}, \alpha_{\eta,n+1}],$$

$$[\beta_\eta, \delta_{i_{n+1}}^{(\eta)}] \text{ и } [\beta_{\eta,n+1}, \delta_{i_{n+1}}^{(\eta,n+1)}],\ \eta \in H_n,$$

не имели попарно общих точек. Любые два интервала из совокупности

$$\left\{[\gamma_{i_{n+1}}^{(\eta)}, \alpha_\eta], [\beta_\eta, \delta_{i_{n+1}}^{(\eta)}],\ \eta \in H_{n+1}\right\}$$

при этом не имеют общих точек.

Таким образом, после $(n+1)$-го шага построена совокупность точек $\{\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H_{n+1}\}$, обладающая теми же свойствами, что и совокупность $\{\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H_n\}$.

Строим множества

$$F^{(n)} = \bigcup_{\eta \in H_n} ([\gamma_{i_n}^{(\eta)}, \alpha_\eta] \cup [\beta_\eta, \delta_{i_n}^{(\eta)}]),\ n = 1, 2, \dots .$$

Множества $F^{(n)},\ n = 1, 2, \dots,$ — замкнутые множества и $F^{(1)} \supset \supset F^{(2)} \supset \dots$. Пусть $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$. Так как $i_1 < i_2 < \dots,$ то

$$\gamma_{i_n}^{(\eta)} \to \alpha_\eta, \delta_{i_n}^{(\eta)} \to \beta_\eta,\ \eta \in H_n,$$

когда $n \to \infty$. Множество $F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{(n)}$ — совершенное нигде не плотное множество и содержит множество $\{\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H\}$. Пусть точка ξ принадлежит F и является точкой цикла периода m. Множество $F_{(m)}$ по построению содержит принадлежащие циклам точки $\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H_m,$ и точки циклов, период которых $> m$. Следовательно, $\xi \in \{\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H_m\}$. Таким образом, $B \cap F = \{\alpha_\eta, \beta_\eta,\ \eta \in H_m\}$; это множество счетное и лежит на F всюду плотно.

Теорема 2.5.2 немедленно следует из доказанных лемм. Действительно, если допустить, что множество B — G_δ-множество, то и $B \cap F$ также должно быть множеством типа G_δ, однако $B \cap F$, как счетное плотное в себе множество, не является множеством типа G_δ.

Из теорем 2.5.1. и 2.5.2. вытекает

Следствие. *Если отображение имеет цикл периода* $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots,$ *то существует бесконечное притягивающее множество.*

Глава 3

Классификация притягивающих множеств

3.1. Классификация неподвижных точек

1. Классификацию, о которой будет идти речь, удобнее ввести для более широкого класса отображений, нежели непрерывные отображения вещественной прямой. Предположим, что T — произвольное (необязательно даже непрерывное) отображение евклидова пространства E^n в себя.

Рассмотрим произвольное замкнутое множество пространства E^n, содержащее вместе с точкой x точки λx, $0 \leq \lambda \leq 1$. Всякий гомеоморфный образ такого множества, при котором точка $x = 0$ отображается в точку $\alpha \in E^n$, назовем конусом с вершиной в точке α или просто конусом в точке α.

Под окрестностью точки α будем понимать всякое множество $U \subset E^n$, содержащее открытое множество $U' \ni \alpha$.[1]

Пусть α — неподвижная точка отображения, т. е. $T\alpha = \alpha$. Конус K в точке α назовем инвариантным или i-конусом, если существует окрестность U точки α такая, что $T(K \cap \cap U) \subseteq K$.

[1]В этом параграфе для нас существенно, что окрестностью являются не только открытые множества.

Обозначим множество всех i-конусов в точке α через $\mathbb{K}_\alpha(T)$. Все пространство E^n и множество, состоящее из одной точки α, являются i-конусами. Если $K_1, K_2 \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, то и $K_1 \cup \cup K_2 \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K_1 \cap K_2 \in \mathbb{K}_\alpha(T)$. Таким образом, множество $\mathbb{K}_\alpha(T)$ образует структуру (в смысле [22]).

Если $K_1, K_2 \in \mathbb{K}_\alpha(T)$ и $K_1 \cap K_2 = \alpha$, $K_1 \neq \alpha$, $K_2 \neq \alpha$, то поведение траекторий $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ в конусе K_1 и поведение траекторий $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$, $x \in E^n$, в конусе K_2 вблизи точки α не зависят друг от друга.

Вопрос о классификации неподвижных точек распадается на два: 1) описание структуры $\mathbb{K}_\alpha(T)$, 2) классификация i-конусов по поведению траекторий в них вблизи точки α.

Ниже рассматривается лишь второй вопрос. Для отображений вещественной прямой, к изучению которых мы впоследствии возвратимся, структура $\mathbb{K}_\alpha(T)$ очевидна.

Пусть α — неподвижная точка и $K \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K \neq \alpha$. Поскольку далее речь будет идти лишь о точках конуса K, под окрестностью точки α удобно понимать "конусную окрестность" $U' \cap K$, где U' — определенная выше окрестность точки α. Далее будем использовать только такие окрестности.

Рассмотрим произвольную (конусную) окрестность U точки α. Разобьем точки из U, отличные от точки α, на три класса.

Всякую точку $x \in U$, для которой $T^j x \in U$, $j = 1, 2, \ldots$, и $\lim_{j\to\infty} T^j x = \alpha$, назовем a-точкой.

Если $x \in U$ и $T^j x \in U$, $j = 1, 2, \ldots$, но $\lim_{j\to\infty} T^j x$ либо не существует, либо $\neq \alpha$, то точку x назовем i-точкой.

Наконец, если для точки $x \in U$ найдется номер $m > 0$ такой, что $T^m x \notin U$, то это r-точка.

Всякая точка $x \in U$ принадлежит к одному и только одному классу.

Если $x \in U$ есть a- или i-точка, то она является таковой и для всякой окрестности $U' \supset U$.

Будем говорить, что неподвижная точка α обладает:

1) свойством a (в конусе K), если всякая окрестность точки α содержит a-точки;

2) свойством i, если всякая окрестность содержит i-точки;

3) свойством r, если всякая окрестность, содержащаяся в некоторой окрестности U_0, содержит r-точки.

Всякая неподвижная точка обладает по крайней мере одним из этих свойств.

Пусть $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ — окрестности точки α и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} U_j = \alpha$. Если существует последовательность $\{U_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что всякая окрестность U_{j_k} содержит a-точки, то любая окрестность U точки α также содержит a-точки и, следовательно, обладает свойством a. Аналогично, если существует последовательность $\{U_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что всякая окрестность U_{j_k} содержит i-точки, то α обладает свойством i.

Предположим, что не существует последовательности $\{U_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}$, каждая окрестность U_{j_k} которой содержит либо a-точки, либо i-точки. Тогда существует окрестность U_{j_0}, состоящая только из r-точек. Всякая окрестность $U \subset U_{j_0}$, как следует из определения r-точек, также состоит из r-точек, и, следовательно, неподвижная точка обладает свойством r.

Если неподвижная точка не обладает каким-либо из свойств a, i или r, считаем, что неподвижная точка обладает свойством $\bar{a}$, $\bar{i}$ или $\bar{r}$, соответственно.

Назовем неподвижную точку, обладающую свойствами

1)	a,	$\bar{i}$,	$\bar{r}$	притягивающей,
2)	$\bar{a}$,	$\bar{i}$,	r	отталкивающей,
3)	$\bar{a}$,	i,	$\bar{r}$	безразличной,
4)	a,	i,	$\bar{r}$	полупритягивающей,
5)	$\bar{a}$,	i,	r	полуотталкивающей,
6_1)	a,	$\bar{i}$,	r	
6_2)	a,	i,	r	смешанной.

Всякая неподвижная точка принадлежит к одному и только одному типу. Как будет видно ниже, существуют неподвижные точки каждого из типов.

Для непрерывных отображений вещественной прямой данная классификация оказывается достаточно хорошей: все типы неподвижных точек определяются простым набором инвариантов (свойств) и при этом классификация обладает достаточной “разрешающей силой”.

В случае необходимости (например, при рассмотрении более широкого класса отображений, чем непрерывные отображения вещественной прямой) построенная нами классификация может быть легко “усилена”. В основу данной классификации взято разбиение точек окрестности неподвижной точки на три класса. Если же использовать разбиение точек окрестности на большее число классов, являющихся подклассами указанных выше трех классов, то в результате получим “более сильную” классификацию.

Примеры иных классификаций неподвижных точек имеются в [3, 39].

2. Пусть T — непрерывное отображение замкнутого интервала E и α — неподвижная точка. Под окрестностями точек, для простоты, будем понимать связные окрестности.

Предположим, что интервал $\{x \geq \alpha,\ x \in E\}$ является i-конусом в точке α, т. е., $Tx \geq \alpha$ для всех $x \geq \alpha$, достаточно близких к α. Рассмотрим введенную классификацию в таком конусе.

Окрестностями точки α являются в этом случае интервалы вида $[\alpha, \beta)$ и $[\alpha, \beta]$. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.1.1. *Неподвижная точка α обладает свойством a тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to \alpha$ такая, что $\alpha \leq Tx_j \leq \leq x_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots$.*

Теорема 3.1.2. *Неподвижная точка α обладает свойством r тогда и только тогда, когда существует последовательность точек $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to \alpha$ такая, что $Tx_{j+1} \geq x_j$, $j = = 1, 2, \ldots$.*

Теорема 3.1.3. *Неподвижная точка α обладает свойством i тогда и только тогда, когда существует последовательность* *точек* $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to \alpha$ *такая, что* $Tx_j = x_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Доказательство теоремы 3.1.1. Необходимость. Предположим, что x есть a-точка некоторой окрестности и точки $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны. Выберем из точек $T^j x$ те, для которых $T^{j+1}x < T^j x$ и для любой точки $T^k x \in (T^{j+1}x, T^j x)$ $T^{k+1}x > T^j x$. Обозначим выбранные точки $T^j x$ через $x_1, x_2, x_3, \ldots$ следующим образом: если $T^{j_1}x = x_{i_1}$, $T^{j_2}x = x_{i_2}$ и $T^{j_1}x > T^{j_2}x$, то $i_1 < i_2$. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ является искомой.

Если для каждой a-точки x всякой окрестности точки α среди точек $T^j x$ лишь конечное число различных, то найдется последовательность $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots \to \alpha$ такая, что $T^j x = \alpha$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Достаточность. Если α не является предельной (справа) для неподвижных точек, то существует окрестность точки α, в которой, в силу непрерывности T, $Tx < x$. В этом случае, как легко видеть, всякая точка окрестности есть a-точка.

Предположим, что α является предельной для неподвижных точек. Пусть β_j — ближайшая справа к x_j, $j \geq 1$, неподвижная точка (не ограничивая общности, можно считать, что точка β_1 существует). Очевидно, $\beta_j \geq \beta_{j+1}$ и $\beta_j \to \alpha$ при $j \to \infty$. $T[x_j, \beta_j] \supseteq [x_{j+1}, \beta_{j+1}]$, $j = 1, 2, \ldots$.

Пусть U — произвольная окрестность точки α. Найдется номер k такой, что $\beta_k \in U$. Рассмотрим интервал $[x_k, \beta_k]$. Найдется интервал $[\gamma_1, \delta_1] \subset [x_k, \beta_k]$ такой, что $T[\gamma_1, \delta_1] = [x_{k+1}, \beta_{k+1}]$. Далее найдется интервал $[\gamma_2, \delta_2] \subset [\gamma_1, \delta_1]$ такой, что $T[\gamma_2, \delta_2] = [x_{k+2}, \beta_{k+2}]$ и т. д. Всякая точка $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} [\gamma_j, \delta_j]$ есть a-точка окрестности U (и притом точки последовательности $\{T^j x\}$ монотонно приближаются к точке α).

Доказательство теоремы 3.1.2. Необходимость. Пусть всякая окрестность $U \subseteq U_0$ содержит r-точки. Можно считать, что для любой точки $x \in U_0$ $Tx \geq \alpha$.

Возьмем произвольную окрестность $[\alpha, x_1] \subset U_0$. Существуют точки $x \in [\alpha, x_1]$, для которых $Tx \geq x_1$. Пусть x_2 — наименьшая из них. Очевидно, $Tx_2 = x_1$ и $x_2 < x_1$. Существуют точки $x \in [\alpha, x_2]$, для которых $Tx \geq x_2$. Пусть x_3 — наименьшая из них. Продолжая этот процесс, получаем последовательность точек $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ таких, что $Tx_{j+1} = x_j$, $j = 1, 2, \ldots$ Утверждается, что $x_j \to \alpha$. Допустим, $x_j \to \beta > \alpha$. Поскольку окрестность $[\alpha, \beta]$ содержит r-точки, найдется точка $x' \in [\alpha, \beta]$ такая, что $Tx' > \beta$. Найдется номер k, для которого $Tx' \geq x_k$, и согласно выбору точек x_j должно быть $x_{k+1} \leq x' \leq \beta'$.

Достаточность. $T[\alpha, x_{j+1}] \supseteq [\alpha, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $T^j[\alpha, x_{j+1}] \supseteq [\alpha, x_1]$ и найдется точка $x \in \in [\alpha, x_{j+1}]$ такая, что $x_2 < T^j \leq x_1$. Таким образом, всякая окрестность $U \subseteq [\alpha, x_2]$ содержит r-точки.

Доказательство теоремы 3.1.3. Необходимость. Пусть U — произвольная замкнутая окрестность точки α. Покажем, что U содержит неподвижную точку, отличную от точки α.

Пусть x — i-точка окрестности U. Если $T^j x = T^{j+1} x$ при каком-либо $j = j'$, то точка $\beta = T^{j'} x$ является неподвижной точкой, отличной от α.

Предположим, что $T^j x \neq T^{j+1} x$ при любом $j \geq 0$, и пусть $x > Tx$. Если $Tx > T^2 x > \ldots$, то последовательность сходится, и, если $T^j x \to \beta$, то $\beta \in U$, $\beta \neq \alpha$ и в силу непрерывности T $T\beta = \beta$. Если же существует номер $k > 0$, при котором $T^k x < T^{k+1} x$, то между точками x и $T^k x$ опять-таки в силу непрерывности T найдется точка β, для которой $T\beta = \beta$. Аналогичная ситуация при $x < Tx$.

Достаточность условий теоремы очевидна.

Доказанные теоремы дают критерии принадлежности неподвижных точек к каждому из типов.

Для изучаемого отображения свойства a, i, r не независимы: если неподвижная точка обладает свойствами a и r, то она обладает и свойством i. Этот результат сразу следует из теорем 1—3 и непрерывности T. Таким образом, смешанных неподвижных точек типа 6_1 не существует.

Неподвижные точки всех остальных типов существуют.

Неподвижная точка α является притягивающей в том и только в том случае, когда $Tx < x$ для $x > \alpha$ из некоторой окрестности U точки α.

Неподвижная точка α является отталкивающей в том и только в том случае, когда $Tx > x$ для $x > \alpha$ из некоторой окрестности U точки α.

Неподвижные точки остальных типов являются предельными для неподвижных точек.

Пусть J^α — последовательность открытых интервалов $\{I_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям:

1) $x' > x''$ для любых $x' \in I_{k'}$, $x'' \in I_{k''}$, как только $k' < k''$,

2) $I_k \to \alpha$ при $k \to \infty$.

Неподвижная точка α, предельная для неподвижных точек, обладает свойством a в том и только в том случае, когда существует последовательность $J^\alpha = \{I_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $Tx < x$ для $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и для любого k найдется точка $x_k \in I_k$, для которой $Tx_k \in I_{k+1}$.

Утверждение следует из теоремы 3.1.1. Достаточно лишь заметить, что для любой точки $x' \in I_{k+1}$ найдется номер $m > 0$ такой, что $T^m x_k < x'$.

Неподвижная точка α обладает свойством r в том и только в том случае, когда существует последовательность $J^\alpha = \{I_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что $Tx > x$ для $x \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, и для любого k найдется точка $x_{k+1} \in I_{k+1}$, для которой $Tx_{k+1} \in I_k$.

Утверждение следует из теоремы 3.1.2.

Теперь не представляет труда получить график отображения T в окрестности неподвижной точки каждого типа.

3. Пусть U — произвольная окрестность неподвижной точки α (в конусе $x \geq \alpha$). Обозначим $\mathbb{A}(U)$ множество всех a-точек окрестности U, $\mathbb{J}(U)$ — множество всех i-точек и $\mathbb{R}(U)$ — множество r-точек.

Естественно ожидать, что структура множеств $\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{R}$ зависит от типа неподвижной точки.

Множество $\mathbb{R}$ — всегда множество типа F_σ. Более того, если U — открытая окрестность (т. е. полуоткрытый интервал), то $\mathbb{R}$ — открытое множество. Если α — притягивающая точка, то для всякой окрестности U, содержащейся в некоторой окрестности U_0, $\mathbb{R} = \varnothing$; если α — полупритягивающая или безразличная точка, то окрестность $U \subset U_0$ можно выбрать так, чтобы $\mathbb{R}$ также было пустым множеством.

Рассмотрим множество $\mathbb{A}$. Если α — отталкивающая, полуотталкивающая или безразличная точка, то для всякой окрестности $U \subset U_0$ $\mathbb{A} = \varnothing$.

Теорема 3.1.4. *Неподвижная точка является притягивающей тогда и только тогда, когда для всякой открытой окрестности точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathbb{A}$ — открытое множество.*

Теорема 3.1.5. *Неподвижная точка является полупритягивающей тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U множество $\mathbb{A}$ есть G_δ-множество и не является F_σ-множеством.*

Теорема 3.1.6. *Неподвижная точка является смешанной тогда и только тогда, когда для всякой окрестности U множество $\mathbb{A}$ есть $F_{\sigma\delta}$-множество и не является $G_{\delta\sigma}$-множеством.*

Сформулированные (и частично доказанные) результаты можно представить в виде табл. 3.1.

Во всякой окрестности неподвижной точки любого типа найдется окрестность U, которая распадается на множества $\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{R}$ указанным в табл. 3.1 образом (G обозначает открытое, F — замкнутое множества). При этом для любой окрестности $U' \subset U$ множества $\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{R}$ не являются множествами более простого типа. Исключение может составить безразличная точка: если во всякой окрестности существует окрестность U, содержащая только i-точки и притом открытая, то множество $\mathbb{J}$ будет открытым.

Т а б л и ц а 3.1

Тип неподвижной точки	$\mathbb{A}$	$\mathbb{J}$	$\mathbb{R}$
Притягивающая	G	$\varnothing$	$\varnothing$
Отталкивающая	$\varnothing$	G	$\varnothing$
Безразличная	$\varnothing$	$\varnothing$	$F \setminus \{\alpha\}(G)$
Полупритягивающая	G_δ	$\varnothing$	F_δ
Полуотталкивающая	$\varnothing$	G	$F \setminus \{\alpha\}$
Смешанная	$F_{\sigma\delta}$	G	$G_{\delta\sigma}$

Доказательство теорем 3.1.4–3.1.6. Если неподвижная точка α является притягивающей, то для всякой открытой окрестности U, содержащейся в некоторой окрестности U_0, состоящей только из a-точек, множество $\mathbb{A}$ — открытое множество.

Пусть α — неподвижная точка произвольного типа, $U = [\alpha, \beta)$ и $\gamma = \max\{\beta, \sup\limits_{x\in U} Tx\}$. Построим отображение $\overline{T}$ интервала $[\alpha, \gamma]$ в себя: $\overline{T}x = Tx$ при $\alpha \leq x < \beta$, $\overline{T}x = T\beta$ при $\beta \leq x < \gamma$. Множества $\mathbb{A}(U'), \mathbb{J}(U'), \mathbb{R}(U')$, $U' \subseteq U$, для отображений T и $\overline{T}$ совпадают.

В дальнейшем рассматривается лишь отображение $\overline{T}$ и поэтому для удобства будем писать T вместо $\overline{T}$. Отображение рассматривается только на $[\alpha, \gamma]$ и поэтому можно предполагать, что $E = [\alpha, \gamma]$. Таким образом, T — непрерывное отображение замкнутого интервала $E = [\alpha, \gamma]$; $TE \subseteq E$ и $T\alpha = \alpha$. Как и прежде (см. параграф 1.2), множество точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, обозначим $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. В частности, $\mathfrak{B}(\alpha)$ есть множество точек $x \in E$, для которых $T^j x \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Если точка $\beta \notin \mathfrak{B}(\alpha)$, то $\mathfrak{B}(\alpha) = \mathbb{A} \cup \alpha$. Если же $\beta \in \mathfrak{B}(\alpha)$, то $[\beta, \gamma] \subset \mathfrak{B}(\alpha)$ и $\mathfrak{B}(\alpha) = \mathbb{A} \cup \alpha \cup \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}[\beta, \gamma]$, где $T^{-j}[\beta, \gamma]$ — множество точек $x \in E$, для которых $T^j x \in [\beta, \gamma]$. Множество $\alpha \cup \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}[\beta, \gamma]$ есть F_σ-множество.

Итак, имеем:

1) если точка α — притягивающая, то для всякой открытой окрестности U точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathbb{A}$ является открытым множеством;

2) множество $\mathbb{A} = \mathfrak{B}(\alpha) \setminus \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ — некоторое множество типа F_σ.

В параграфе 1.2 доказано, что

3) множество $\mathfrak{B}(\alpha)$ есть множество типа $F_{\sigma\delta}$;

4) множество $\bigcup\limits_{\mathcal{A}\supseteq\alpha} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ есть множество типа G_δ.

Ниже доказываются следующие утверждения:

5) если во всякой окрестности точки α есть a- и i-точки, то $\mathfrak{B}(\alpha)$ — множество класса > 1 классификации Бэра–Валле-Пуссена;

6) если во всякой окрестности точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, есть a-, i- и r-точки (т. е. α является смешанной точкой), то $\mathfrak{B}(\alpha)$ — множество 3-го класса.

Необходимость условий теоремы 3.1.4 следует из утверждения 1).

Необходимость условий теоремы 3.1.5 следует из утверждений 2), 4), 5). Если α — полупритягивающая точка, то во всякой окрестности U точки α найдется окрестность U', не содержащая r-точек: для любой точки $x \in U'$ $\quad T^j x \in U'$ при $j > 0$. Следовательно, притягивающих множеств $\mathcal{A} \supset \alpha$ не существует. Из 4) следует, что $\mathfrak{B}(\alpha)$ — G_δ-множество. Поскольку $\mathfrak{B}(\alpha)$ является множеством класса > 1 (утверждение 5)), то являясь G_δ, оно не может быть F_σ-множеством. Из 2) следует, что множество $\mathbb{A}$ есть G_δ- и не является F_σ-множеством.

Необходимость условий теоремы 3.1.6 следует из утверждений 2) и 6).

Для любой окрестности точки α, содержащейся в некоторой окрестности U_0, множество $\mathbb{A}$ не пусто лишь для притягивающей, полупритягивающей и смешанной точек. Поэтому достаточность условий теоремы 3.1.4 вытекает из необходимости условий теорем 3.1.5 и 3.1.6, достаточность условий теоремы 3.1.5 вытекает из необходимости условий теорем 3.1.4 и 3.1.6, достаточность условий теоремы 3.1.6 вытекает из необходимости условий теорем 3.1.4 и 3.1.5.

Итак, перейдем к доказательству утверждений 5) и 6).

Л е м м а 1. *Если во всякой окрестности неподвижной точки* α *есть* a*-точки, то во всякой окрестности любой точки*[2] $x \in \mathfrak{B}(\alpha)$ *существует точка* $x' < x$, $x' \in \mathfrak{B}(\alpha)$ *(если* $x \neq \alpha$*) и точка* $x'' > x$, $x'' \in \mathfrak{B}(\alpha)$ *(если* $x \neq \gamma$*)*.

Действительно, точка α является предельной для точек множества $\mathfrak{B}(\alpha)$; пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to \alpha$ и $\beta_k \in \mathfrak{B}(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть U — произвольная окрестность точки x. Покажем, например, что существует точка $x' \in U$, $x' < x$, $x' \in \mathfrak{B}(\alpha)$. Возьмем открытый интервал $U' \subset U$, правым концом которого является точка x. Так как $x \in \mathfrak{B}(\alpha)$, для каждой точки β_k найдется номер j_k такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta_k)$ при $j \geq j_k$. Если $T^j U' \subset [\alpha, \beta_k)$ при $j \geq j_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то $U' \subset \mathfrak{B}(\alpha)$. Если же существует номер k' такой, что $T^{j'} U' \not\subset [\alpha, \beta_{k'})$ при некотором $j' \geq j_{k'}$, то $T^{j'} U' \notin \beta_{k'}$ и, следовательно, существует точка $x' \in U$, для которой $T^{j'} x' = \beta_{k'}$, т. е. $x' \in \mathfrak{B}(\alpha)$.

Л е м м а 2. *Если во всякой окрестности точки* α *есть* i*-точки и интервал* $(x', x'') \subset \mathfrak{B}(\alpha)$, *то и точки* $x', x'' \in \mathfrak{B}(\alpha)$.

Точка α является предельной (справа) для неподвижных точек; пусть $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to \alpha$, где β_k, $k = 1, 2, \ldots$, — неподвижные точки. Пусть $x \in (x', x'')$. Так как $x \in \mathfrak{B}(\alpha)$, для каждой точки β_k найдется номер j_k такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta_k)$ при $j \geq j_k$. Так как $\beta_k \notin \mathfrak{B}(\alpha)$, то $T^j(x', x'') \subset [\alpha, \beta_k)$ при $j \geq j_k$ и, следовательно, $T^j[x', x''] \subset [\alpha, \beta_k]$ при $j \geq j_k$. Поскольку $\beta_k \to \alpha$ при $k \to \infty$, то $T^j x' \to \alpha$ и $T^j x'' \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Предположим, что во всякой окрестности точки α есть a- и i-точки.

---

[2] Под окрестностью точки понимается обычная окрестность в пространстве E, т. е. открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал, содержащий эту точку вместе с некоторым открытым в E интервалом.

Обозначим $\mathfrak{V}_1(\alpha)$ множество точек, которые принадлежат $\mathfrak{V}(\alpha)$ вместе с некоторой окрестностью (в пространстве E). Множество $\mathfrak{V}_1(\alpha)$ есть открытое в E множество.

Множество $\mathfrak{V}_2(\alpha) = \mathfrak{V}(\alpha) \setminus \mathfrak{V}_1(\alpha)$ состоит из тех и только тех точек множества $\mathfrak{V}(\alpha)$, которые являются предельными для точек множества $E \setminus \mathfrak{V}(\alpha)$.

Множество $\mathfrak{V}_2(\alpha)$ плотно в себе. Действительно, пусть $x \in \in \mathfrak{V}(\alpha)$ и $\beta_1 < \beta_2 < \ldots \to x$ (или $\beta_1 > \beta_2 > \ldots \to x$), где $\beta_k \in E \setminus \mathfrak{V}(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $x' \in \mathfrak{V}(\alpha) \cap (\beta_k, \beta_{k+1})$. Либо $x' \in \mathfrak{V}_2(\alpha)$, либо $x' \notin \mathfrak{V}_2(\alpha)$. Если $x' \notin \mathfrak{V}_2(\alpha)$, найдется интервал $[x'', x'''] \subset \mathfrak{V}(\alpha)$, содержащий точку x', причем $x'', x''' \in \mathfrak{V}_2(\alpha)$ (лемма 2). Так как $\beta_k, \beta_{k+1} \notin \mathfrak{V}(\alpha)$, то $[x'', x'''] \subset (\beta_k, \beta_{k+1})$. Итак, если интервал (β_k, β_{k+1}) содержит точку множества $\mathfrak{V}(\alpha)$, то он содержит и точку множества $\mathfrak{V}_2(\alpha)$. Поскольку точка x является предельной слева (справа) для точек множества $\mathfrak{V}(\alpha)$ (лемма 1), то точка x является предельной слева (или справа) и для точек множества $\mathfrak{V}_2(\alpha)$.

Множество $\mathfrak{V}_2(\alpha)$ согласно определению нигде не плотное на E множество. Обозначим Q замыкание множества $\mathfrak{V}_2(\alpha)$. Q — совершенное нигде не плотное множество.

Утверждается, что на множестве Q всюду плотно лежат точки множества $E \setminus \mathfrak{V}(\alpha)$. Допустим противное: существует открытый интервал $I \subset E$ такой, что $\mathfrak{V}_2(\alpha) \cap I$ есть совершенное множество. Рассмотрим произвольный открытый интервал $I' \subset I$, смежный к множеству $\mathfrak{V}_2(\alpha) \cap I$.

Интервал I' не содержит точек множества $E \setminus \mathfrak{V}(\alpha)$. Предположим, существует точка $x \in I' \cap (E \setminus \mathfrak{V}(\alpha))$. Пусть x' — например, левый конец интервала I'; $x' \in \mathfrak{V}_2(\alpha)$. Как было показано выше, точка x' при этом не является предельной справа для точек множества $E \setminus \mathfrak{V}(\alpha)$. Следовательно (лемма 2), существует интервал $[x', x''] \subset \mathfrak{V}(\alpha)$, $x'' \in \mathfrak{V}_2(\alpha)$, $x'' \neq x'$. Так как $x \notin \mathfrak{V}(\alpha)$, то $x'' < x$, т.е. $x'' \in \mathfrak{V}_2(\alpha) \cap I'$, в то время как $\mathfrak{V}_2(\alpha) \cap I'$ — пустое множество.

Таким образом, $I' \subset \mathfrak{V}(\alpha)$. Следовательно, $I \subset \mathfrak{V}(\alpha)$ и множество $\mathfrak{V}_2(\alpha) \cap I$ должно быть пустым множеством.

Итак, точки множества $E\backslash\mathfrak{B}(\alpha)$ лежат на Q всюду плотно и, следовательно, множество $\mathfrak{B}_2(\alpha)$, а вместе с ним и множество $\mathfrak{B}(\alpha)$ являются множествами класса >1 классификации Бэра–Валле-Пуссена.[3] Этим самым утверждение 5) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 6).

Л е м м а 3. *Если притягивающее множество $\mathcal{A}$ бесконечно, то во всякой окрестности точки $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ есть точка $x' < x$, $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и точка $x'' > x$, $x'' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ (если $x \neq \gamma$).*

Пусть U — произвольная окрестность точки x. Покажем, например, что существует точка $x' \in U$, $x' < x$, $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Возьмем открытый интервал $U' \subset U$, правым концом которого является точка x.

Пусть y — произвольная точка множества $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ — бесконечное множество, точки $T^j x$, $j = 0, 1, 2, \dots$, попарно различны. Найдется последовательность чисел $j_1 < j_2 < \dots < < j_k < \dots$, $j_k = j_k(y)$, такая, что $T^{j_1}x < T^{j_2}x < \dots \to y$ (либо $T^{j_1}x > T^{j_2}x > \dots \to y$). Возможны два случая: либо для любого $k \geq 1$ и любой точки $y \in \mathcal{A}$ $T^{j_{k-1}}x < T^{j_k}\tilde{x} < T^{j_{k+1}}x$ для всех $\tilde{x} \in U'$ и тогда $U' \subset \mathcal{A}$, либо существует точка $y' \in \mathcal{A}$ и номер $k' \geq 1$ такие, что указанное соотношение не выполняется. Последнее означает, что $T^{j_{k'}}U' \ni T^{j_{k'-1}}x$ (либо $\ni T^{j_{k'+1}}x$), т. е. существует точка $x' \in U'$, для которой $T^{j_{k'}}x' = T^{j_{k'-1}}x$ и, следовательно, $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Л е м м а 4. *Если множество $\mathcal{A}$ бесконечно и интервал $(x', x'') \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, то и точки $x', x'' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.*

Обозначим I_k, $k \geq 0$, максимальный интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый), принадлежащий $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и содержащий интервал $T^k(x', x'')$. Интервал I_k может состоять и из одной точки. Нужно доказать, что I_0 — замкнутый интервал.

---

[3]Для того, чтобы множество $M \subset [a,b]$ было множеством класса ≤ 1 необходимо (и достаточно), чтобы каково бы ни было совершенное множество Q, существовало открытое в $[a,b]$ множество G такое, что $Q \cap G$ содержится либо в M, либо в $[a,b] \setminus M$ (Бэр, [34]).

Если какие-либо два интервала I_k и I_{k+m} имеют общие точки, то согласно определению $I_k = I_{k+m}$. Это означает, что $T^m I_k \subseteq I_k$. Если существует точка $x \in I_k$, для которой $T^m x = x$, то $x \notin \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, а это невозможно. Таким образом, либо $T^m x > x$ для $x \in I_k$, либо $T^m x < x$. Предположим, для определенности, что $T^m x > x$ для $x \in I_k$. Обозначим правый конец интервала I_k через y. Так как $T^m I_k \subseteq I_k$, то $T^m y = y$ и для любой точки $x \in I_k$ $x < T^m x < \ldots < T^{sm} x < \ldots \to y$ при $s \to \infty$. Следовательно, для любой точки $x \in I_k$ $\mathcal{A}_x$ состоит из точек $y, Ty, \ldots, T^{m-1}y$, что невозможно, поскольку $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и множество $\mathcal{A}$ бесконечно.

Итак, интервалы I_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, не имеют попарно общих точек. Следовательно, концы интервала I_0 принадлежат $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что для любой точки $x \in I_0$, как только $T^{j_1}x < T^{j_2}x < T^{j_3}x$, то и $T^{j_1}x < T^{j_2}\tilde{x} < T^{j_3}x$ для всех $\tilde{x} \in I_0$.

Всюду в дальнейшем будет предполагаться, что α — смешанная неподвижная точка.

Л е м м а 5. *Множество* $\mathfrak{B}^*(\alpha) = \bigcup\limits_{\mathcal{A} \supseteq \{\alpha\}} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *обладает свойствами:*

1) во всякой окрестности точки $x \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$ *есть точка* $x' < x$, $x' \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$ *(если* $x \neq \alpha$*) и точка* $x'' > x$, $x'' \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$ *(если* $x \neq \gamma$*);*

2) если интервал $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, *то существует такое* $\mathcal{A} \supseteq \{\alpha\}$, *что* $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *и точки* $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Если $\mathcal{A} \supset \{\alpha\}$ $(\mathcal{A} \neq \{\alpha\})$, то $\mathcal{A}$ является бесконечным множеством, так как конечное $\mathcal{A}$ — цикл. Свойство 1) вытекает из лемм 1 и 3.

Допустим, $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$ и не существует множество $\mathcal{A} \supseteq \{\alpha\}$ такое, что $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Утверждается, что в таком случае найдутся множества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2 \nsubseteq \mathcal{A}_1$, обладающие свойством: существует точка $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2) \cap (x^{(1)}, x^{(2)})$, предельная для точек множества $\bigcup\limits_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

В этом случае найдутся интервал $[x_1, x_2] \subset (x^{(1)}, x^{(2)})$ и по крайней мере два множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ и $\mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$, $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}''$, содержащие точки во множестве $[x_1, x_2]$. Всякое множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \cap$ $\cap\ [x_1, x_2]$, если оно не пусто, согласно леммам 1 и 3 является незамкнутым множеством.

Возможны два случая: либо существует множество $\mathcal{A}_1$ такое, что $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \cap [x_1, x_2]$ не пусто, а для всякого $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_1$ множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap [x_1, x_2]$ пусто; либо существует последовательность множеств $\mathcal{A}^{(1)} \supset \mathcal{A}^{(2)} \supset \ldots \supset \mathcal{A}^{(\zeta)} \supset \ldots$ такая, что для всякого $\zeta < \rho$, где ρ — некоторое порядковое число второго рода, множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A}^{(\zeta)}) \cap [x_1, x_2]$ не пусто, а для всякого $\mathcal{A}' \subseteq \bigcap\limits_{\zeta<\rho} \mathcal{A}^{(\zeta)}$ множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap [x_1, x_2]$ пусто. Так как множества $\mathcal{A}^{(\zeta)}$ замкнуты, то $\rho < \omega_1$.

В первом случае, поскольку множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \cap [x_1, x_2]$ не замкнуто, найдется точка $y \in [x_1, x_2]$, $y \notin \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$, предельная для точек множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \cap [x_1, x_2]$; точка y принадлежит некоторому множеству $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_2), \mathcal{A}_2 \supset \{\alpha\}$; очевидно, $\mathcal{A}_2 \not\subseteq \mathcal{A}_1$.

Во втором случае поступим следующим образом. Обозначим Φ_ζ, $\zeta < \rho$, замыкание множества $\bigcup\limits_{\zeta'>\zeta} \left\{\mathfrak{B}(\mathcal{A}^{(\zeta')}) \cap [x_1, x_2]\right\}$. $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots \supset \Phi_\zeta \supset \ldots$. Множество $\Phi = \bigcap\limits_{\zeta<\rho} \Phi_\zeta$ не пусто, так как не пусто каждое из замкнутых множеств Φ_ζ. Всякая точка $y \in \Phi$ принадлежит $[x_1, x_2]$ и, следовательно, существует $\mathcal{A} \supseteq \{\alpha\}$ такое, что $\mathfrak{B}(\mathcal{A}) \ni y$; согласно условию $\mathcal{A} \not\subseteq \bigcap\limits_{\zeta<\rho} \mathcal{A}^{(\zeta)}$. Найдется номер ζ', для которого $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{(\zeta')}$. Точка y является предельной для точек множества $\bigcup\limits_{\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}^{(\zeta')}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$.

Пусть точка $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2) \cap (x^{(1)}, x^{(2)})$ является предельной для точек множества $\bigcup\limits_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, причем $\mathcal{A}_1 \not\supseteq \mathcal{A}_2$. Возьмем точку $x \in \mathcal{A}_2$, $x \notin \mathcal{A}_1$, и интервал $[\delta_1, \delta_2]$, содержащий точку x вместе с некоторой окрестностью, но не содержащий точек множества $\mathcal{A}_1$ (очевидно, $x \neq \alpha$).

Так как множество $\mathcal{A}_2$ бесконечно, точки $T^j y$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, попарно различны. Найдется последовательность $T^{j_1}y > T^{j_2}y > \ldots \to x$ (или $T^{j_1}y < T^{j_2}y < \ldots \to x$). Пусть $T^{j_k}y \in (\delta_1, \delta_2)$. Возьмем замкнутый интервал $U \subset [\delta_1, \delta_2] \cap T^{j_k}(x^{(1)}, x^{(2)})$, не содержащий точку x, содержащий точку $T^{j_k}y$ и какую-либо точку $y' \in \bigcup\limits_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Существует номер j' такой, что при $j > j'$ $T^j y' \notin [\delta_1, \delta_2]$. Найдется номер $j_0 > \max\{j_k, j'\}$ такой, что точка $T^{j_0}y$ лежит между точкой x и интервалом U. Так как $T^{j_0}y' \notin [\delta_1, \delta_2]$, то либо $T^{j_0}U \supset U$, либо $T^{j_0}U$ содержит точку x вместе с некоторой ее окрестностью.

Если $T^{j_0}U \supset U$, найдется точка $x' \in U$, для которой $T^{j_0}x' = x'$. А это невозможно, так как $U \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, а точки циклов, исключая точку α, не принадлежат множеству $\mathfrak{B}^*(\alpha)$.

Если $T^{j_0}U$ содержит точку x вместе с некоторой окрестностью, то поскольку точка x является предельной для точек циклов (теорема 2.2.2), опять получаем противоречие с тем, что $T^{j_0}U \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$.

Итак, существует множество $\mathcal{A} \supseteq \{\alpha\}$ такое, что $(x^{(1)}, x^{(2)}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Из лемм 2 и 4 вытекает, что и точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Лемма 5 полностью доказана.

Множество $\mathfrak{B}^*(\alpha)$ — множество типа G_δ (теорема 1.2.1). Из леммы 5 вытекает, что $\mathfrak{B}^*(\alpha)$ — множество класса > 1 классификации Бэра–Валле-Пуссена. Доказательство этого факта повторяет доказательство аналогичного утверждения для множества $\mathfrak{B}(\alpha)$.

Обозначим $\mathfrak{B}_1^*(\alpha)$ множество, состоящее из точек множества $\mathfrak{B}^*(\alpha)$, которые принадлежат $\mathfrak{B}^*(\alpha)$ вместе с некоторой открытой в E окрестностью. Множество $\mathfrak{B}_1^*(\alpha)$ открыто в E. Обозначим $\mathfrak{B}^{(j)}(\alpha)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, множество точек $x \in E$, для которых $T^j x = \alpha$. Множества $\mathfrak{B}^{(j)}(\alpha)$ замкнуты. Множество $\mathfrak{B}_0(\alpha) = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} \mathfrak{B}^{(j)}(\alpha)$ есть F_σ-множество. Следовательно, множество $\mathfrak{B}_1^*(\alpha) \cup \mathfrak{B}_0(\alpha)$ также является F_σ-множеством.

Возьмем произвольную неподвижную точку β такую, что для любого интервала $[\alpha, x)$ существует $m = m(x)$, для которого $T^m[\alpha, x) \supset [\alpha, \beta]$. Такая точка β существует согласно теореме 3.1.2. Для любой точки $\beta' \in (\alpha, \beta]$ $T[\alpha, \beta'] \supseteq [\alpha, \beta']$.

Множество точек $x \in \mathfrak{B}^*(\alpha) \setminus (\mathfrak{B}_1^*(\alpha) \cup \mathfrak{B}_0(\alpha))$, для которых $T^j x \in [\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, обозначим J. Множество J состоит из тех и только тех точек $x \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$, для которых $T^j x \in (\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и которые являются предельными для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$.

Л е м м а 6. *Множество J не пусто.*

Точка α является предельной (справа) для неподвижных точек и существует последовательность $x_1 > x_2 > \ldots > x_i > > \ldots \to \alpha$ такая, что $Tx_i \leq x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$ (теоремы 3.1.1 и 3.1.3). Найдется точка x_{i_0}, правее которой имеются неподвижные точки. Обозначим β_i, $i \geq i_0$, неподвижную точку, ближайшую к x_i справа; $\beta_i \geq \beta_{i+1}$, $T[x_i, \beta_i] \supseteq [x_{i+1}, \beta_{i+1}]$ для $i \geq i_0$ и $\beta_i \to \alpha$ при $i \to \infty$.

Найдется замкнутое множество $M_1 \supseteq [x_{i_0}, \beta_{i_0}]$, для которого $TM_1 = [x_{i_0+1}, \beta_{i_0+1}]$, замкнутое множество $M_2 \supseteq M_1$, для которого $T^2 M_2 = [x_{i_0+2}, \beta_{i_0+2}]$, замкнутое множество $M_3 \supseteq M_2$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{r=1}^{\infty} M_r$ не пусто и, если $x \in \bigcap\limits_r M_r$, то $T^j x \neq \alpha$ при всех $j \geq 0$ и $T^j x \to \alpha$ при $j \to \infty$.

Точка $x \in \mathfrak{B}^*(\alpha) \setminus \mathfrak{B}_0(\alpha)$. Если $x \in \mathfrak{B}_1^*(\alpha)$, рассмотрим наибольший интервал, содержащий точку x и принадлежащий $\mathfrak{B}^*(\alpha)$. Если точка x' есть, например, левый конец этого интервала, то $x' \in \mathfrak{B}(\alpha)$, $x' \notin \mathfrak{B}_1^*(\alpha)$ (лемма 5). Точка x' не принадлежит $\mathfrak{B}_0(\alpha)$: если допустить, что $T^k x' = \alpha$, то $T^k[x', x] \subseteq \subseteq \mathfrak{B}(\alpha)$, и является интервалом, отличным от точки, левым концом которого служит точка α, что невозможно.

Итак, точка $x \in \mathfrak{B}(\alpha)$, не принадлежащая множествам $\mathfrak{B}_1^*(\alpha)$ и $\mathfrak{B}_0(\alpha)$, всегда существует. Для любой точки $\beta > \alpha$ найдется номер j' такой, что $T^j x \in [\alpha, \beta]$ при $j \geq j'$. Точка $T^{j'} x$ принадлежит множеству J.

Следствие. *Точка α является предельной для точек множества J.*

Л е м м а 7. *J — множество типа G_δ.*

Положим $N(\beta) = \bigcap\limits_{r=0}^{\infty} N^{(r)}$, где $N^{(r)}$ — множество точек $x \in [\alpha, \beta]$, для которых $T^j x \in [\alpha, \beta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Так как каждое $N^{(r)}$, $r \geq 0$, — замкнутое множество, то и множество $N(\beta)$ замкнуто. Множество $\mathfrak{B}^*(\alpha)$ есть G_δ, множество $\mathfrak{B}_1^*(\alpha) \cup \mathfrak{B}_0(\alpha)$ есть F_σ. Так как

$$J = N(\beta) \cap \left\{\mathfrak{B}^*(\alpha) \setminus (\mathfrak{B}_1^*(\alpha) \cup \mathfrak{B}_0(\alpha))\right\},$$

то J — множество типа G_δ.

Л е м м а 8. $TJ = J$.

Множество $\mathfrak{B}_2^*(\alpha) = \mathfrak{B}^*(\alpha) \setminus \mathfrak{B}_1^*(\alpha)$ состоит из тех и только тех точек множества $\mathfrak{B}^*(\alpha)$, которые являются предельными для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Если точка $x \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, то точка $Tx \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Поскольку отображение непрерывно и $T(E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)) \subseteq E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, то точка Tx является предельной для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Следовательно, $Tx \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$. Если $x \in J$, т. е. $x \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$ и $T^j x \in (\alpha, \beta]$ при $j \geq 0$, то и $Tx \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, $T^j(Tx) \in (\alpha, \beta]$ при $j \geq 0$, т. е. $Tx \in J$. Это означает, что $TJ \subseteq J$.

Если $x \in J$, то, поскольку $T(\alpha, \beta] \supseteq (\alpha, \beta]$, существует точка $y_0 \in (\alpha, \beta]$, для которой $Ty_0 = x$. Если точка y_0 является предельной для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, то $y_0 \in J$. Если точка $y_0 \notin \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, то существует интервал $[y_1, y_2] \subset \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, содержащий точку y_0, причем $y_1, y_2 \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$. Так как $T[y_1, y_2] \ni x$ и $x \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, то по крайней мере одна из точек Ty_1, Ty_2 совпадает с x. Так как $\beta \notin \mathfrak{B}^*(\alpha)$, то $[y_1, y_2] \subset (\alpha, \beta]$. Итак, для любой точки $x \in J$ найдется точка $y \in J$ такая, что $Ty = x$, т. е. $TJ \supseteq J$.

Таким образом, $TJ = J$.

Л е м м а А. *Построим отображение* $\overline{T}$:

$$\begin{aligned} \overline{T}x &= Tx, \quad \text{\textit{если} } Tx \leq \beta, \\ \overline{T}x &= \beta, \quad \text{\textit{если} } Tx > \beta. \end{aligned}$$

Если $x \in J$ *и интервал* $V = [x, x')$ *(или* $(x'', x]$*) содержит* *точку* $y \in E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, *то для любой точки* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *найдется номер* j_0 *такой, что* $\overline{T}^j V \supseteq [\xi, \beta]$ *при* $j \geq j_0$.

Положим $y_0 = \inf\limits_{j=0,1,2,\dots} \overline{T}^j y$. Очевидно, $y_0 > \alpha$ и $\overline{T} y_0 \geq y_0$. Пусть δ — неподвижная точка, $\alpha < \delta < y_0$, причем интервал (δ, y_0) содержит хотя бы одну точку y_1, для которой найдется номер j_1 такой, что $\overline{T}^{j_1} y_1 = \beta$, и хотя бы одну точку $y_2 \in J$. Такая точка δ существует, поскольку точка α является предельной для неподвижных точек, точек множества J и точек, которые $\overline{T}$ отображает в точку β за конечное число шагов. Найдутся номер j_2 : $\overline{T}^{j_2} y_2 \in [\alpha, \xi]$ и номер j_3 : $\overline{T}^{j_3} V \supseteq [\delta, y_0]$ (интервал V содержит точку $x \in J$ и точку y). Положим, $j_0 = j_3 + \max\{j_1, j_2\}$. Так как $[\delta, y_0] \subseteq \overline{T}[\delta, y_0] \subseteq \overline{T}^2[\delta, y_0] \subseteq \dots$, то при $j \geq j_0$ $\overline{T}^j V \supseteq [\xi, \beta]$.

Из леммы А, в частности, вытекает, что интервал V содержит хотя бы одну точку множества J, отличную от x.

Будем полагать, что *множество* $U \subset \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$ *обладает* s-*свойством, если всякая точка* $x \in U$, *предельная слева (справа) для точек множества* $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, *является предельной слева (соответственно справа) для точек множества* U.

Так как всякая точка $x \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$ является предельной для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, то любое множество, обладающее s-свойством, плотно в себе.

Множество J, как это вытекает из леммы А, обладает s-свойством.

Л е м м а 9. *Множество* J *гомеоморфно множеству иррациональных чисел.*

Множество J плотно в себе и согласно определению не содержит никакого открытого интервала.

Утверждается, что множество J нигде не компактно. Допустим противное: существует открытый интервал I такой, что $J \cap I$ есть непустое совершенное нигде не плотное множество. Рассмотрим произвольный интервал $I' \subset I$, смежный к множеству $J \cap I$. Интервал I' не содержит точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, ибо в противном случае интервал I' согласно лемме А содержал бы точки множества J. Следовательно, $I \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, и множество J в соответствии с определением может содержать лишь концы интервала I. Это противоречит предположению, что множество $J \cap I$ совершенно.

Таким образом, множество J есть нигде не компактное G_δ и, следовательно (см. [16]), гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

Л е м м а 10. *Для любого открытого в J множества U и любой точки $\xi \in (\alpha, \beta)$ существует номер j_0 такой, что $T^j U \supseteq J \cap [\xi, \beta]$ при $j > j_0$.*

Лемма 10 немедленно вытекает из леммы А.

Л е м м а 11. *Образ всякого открытого в J множества содержит открытое в J множество.*

Пусть U — открытое в J множество, I — открытый интервал, такой, что $U \subseteq J \cap I$, и $x \in J \cap I$. Точка x является предельной для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, например, слева. Возьмем точку $x' < x$, $x' \in I \cap E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Пусть, для определенности, $Tx' < Tx$. Интервал (Tx', Tx) согласно лемме А содержит хотя бы одну точку множества J. Множество $V = J \cap (Tx', Tx)$ есть непустое открытое в J множество. Так как $T(x', x) \supseteq (Tx', Tx)$, то для любой точки $y \in V$ найдется точка $y' \in (x', x)$, для которой $Ty' = y$. Точка $y' \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$ и, если y' является предельной для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, т. е. $y' \in \mathfrak{B}^*_2(\alpha)$, то $y' \in J$. Если $y' \notin \mathfrak{B}^*_2(\alpha)$, то существует интервал $[y'', y'''] \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, содержащий точку y', причем $y'', y''' \in \mathfrak{B}^*_2(\alpha)$. Так как $T[y'', y'''] \ni y$ и $y \in \mathfrak{B}^*_2(\alpha)$, то по крайней мере одна из точек Ty'', Ty''' совпадает с y; $[y'', y'''] \subset \subset (x', x)$, так как $y' \in (x', x)$, $x' \in E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$ и точка x является предельной слева для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Итак, для любой точки $y \in V$ найдется точка $y^* \in \mathfrak{B}^*_2(\alpha) \cap (x', x)$, для которой $Ty^* = y$. Точка y^* принадлежит множеству $J \cap I$. Следовательно, $TU \supseteq V$.

Л е м м а 12. *Если множество* $U \subset J$ *обладает* s*-свойством, то и множество* $T^{-1}U$ [4] *обладает* s*-свойством.*

Пусть точка $x \in T^{-1}U$ и является предельной, например, слева для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Возьмем последовательность $x_1 < x_2 < \ldots \to x$, $x_i \in E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$. Покажем, что интервал (x_i, x) при любом $i \geq 1$ содержит по крайней мере одну точку множества $T^{-1}U$.

Так как отображение T непрерывно и $Tx_i \neq Tx$ при любом $i \geq 1$, то найдется последовательность $Tx_{i_1} < Tx_{i_2} < \ldots < Tx_{i_k} < \ldots \to Tx$ (или $Tx_{i_1} > Tx_{i_2} > \ldots \to Tx$). Это означает, что точка Tx является предельной слева (справа) для точек множества U. Для любого $i' \geq 1$ найдется точка $y \in U$: $y \in (Tx_{i_{k'}}, Tx)$, $i_{k'} \geq i'$. $T(x_{i'}, x) \supseteq (Tx_{i_{k'}}, Tx)$. Существует точка $y' \in (x_{i'}, x)$, для которой $Ty' = y$; $y' \in \mathfrak{B}^*(\alpha)$; если $y' \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, то $y' \in T^{-1}U$. Если $y' \notin \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$, найдется интервал $[y'', y'''] \subset \mathfrak{B}^*(\alpha)$, содержащий точку y', причем $y'', y''' \in \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$. Так как $x_{i'} \in E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$ и точка x является предельной слева для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, то $[y'', y'''] \subset (x_{i'}, x)$. Таким образом, точка $y^* \in (x_{i'}, x)$, для которой $Ty^* = y$, предельная для точек $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$, существует; $y^* \in T^{-1}U$.

Л е м м а 13. *Пусть* δ *— произвольная неподвижная точка, разбивающая* J *на два непустых множества. Тогда*

1) множество F *точек* $x \in J$ *таких, что* $T^j x \in [\alpha, \delta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *есть непустое совершенное нигде не плотное на* J *множество;*

2) множество F *обладает* s*-свойством;*

3) $TF = F$;

4) для любого открытого в F *множества* U *и любой точки* $\xi \in (\alpha, \delta)$ *существует номер* j_0 *такой, что* $T^j U \supseteq F \cap [\xi, \delta]$ *при* $j > j_0$.

[4] Здесь и далее под $T^{-j}U$, $j > 0$, понимается множество точек $x \in J$, для которых $T^j x \in U$.

Если $\beta = \delta$, то $J = F$. Следовательно, множество F не пусто, плотно в себе и имеют место утверждения 2, 3, 4, поскольку аналогичные утверждения справедливы для множества J.

Множество $F = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} F^{(k)}$, где $F^{(k)}$ — множество точек $x \in J$, для которых $T^j x \in [\alpha, \delta]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Так как каждое $F^{(k)}$ замкнуто в J, то F есть замкнутое в J множество.

Если V — открытое в J множество, то найдется номер j' такой, что $T^{j'}V \supseteq J \cap (\delta, \beta)$. Множество $J \cap (\delta, \beta)$ есть непустое открытое в J множество. Открытое в J множество $V' \subset V$, для которого $T^{j'}V' = J \cap (\delta, \beta)$, не содержит точек множества F. Следовательно, множество F нигде не плотно на J.

Л е м м а 14. *Множество* $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}F$ *всюду плотно на* J.

Это следует из того, что 1) для любой точки $x \in J$ множество точек y, для которых $T^j y = x$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, всюду плотно на J (лемма 10); 2) множество F не пусто.

Положим $F^1 = F$, $F^2 = T^{-1}F \setminus F$, $F^j = T^{-1}F^{j-1}$, $j = 3, 4, 5, \ldots$. Так как $TJ = J$, то $TF^J = F^{j-1}$ при $j > 2$; $TF^2 \subseteq F^1$, $TF^1 = F^1$.

Л е м м а 15. *Множества* F^j, $j = 1, 2, \ldots$, *— непустые совершенные и нигде не плотные на* J *множества, обладающие* s*-свойством и не имеющие попарно общих точек.*

Действительно, множество F нигде не плотно на J (лемма 13). Следовательно (лемма 11), нигде не плотны на J множества $T^{-j}F$, $j = 1, 2, \ldots$, а вместе с ними и множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$ Так как множество $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F^j = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j}F$ всюду плотно на J (лемма 14), то множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$, не пусты.

Множества $F^1 = F$, $F^2 = T^{-1}F \setminus F$ не имеют общих точек. Если бы множества F^{j_1} и F^{j_2}, $j_2 > j_1 \geq 1$, имели общие точки, то множества $T^{j_2-2}F^{j_1}$ и $T^{j_2-2}F^{j_2}$ также имели бы общие точки, но $T^{j_2-2}F^{j_2} = F^2$, $T^{j_2-2}F^{j_1} = T^{j_2-j_1}F^2 \subseteq F^1$.

Множество $F^1 = F$ обладает s-свойством и замкнуто в J (лемма 13). Следовательно, $T^{-1}F$ обладает s-свойством (лемма 12) и замкнуто. Так как $F \subset [\alpha, \delta]$, $T^{-1}F \setminus F \subset (\delta, \beta]$ и $\delta \notin J$, то множество $F^2 = T^{-1}F$ также обладает s-свойством и замкнуто. В таком случае и множества F^j, $j > 2$, обладают s-свойством (лемма 12) и замкнуты. Если множество удовлетворяет s-свойству, то оно плотно в себе. Следовательно, множества F^j, $j = 1, 2, \ldots$, суть совершенные множества.

Выберем последовательность неподвижных точек $\delta_1 > \delta_2 > \ldots \to \alpha$ так, чтобы 1) точка δ_1 разбивала множество J на два непустых множества, 2) точка δ_{i+1} разбивала множество F_i, состоящее из точек $x \in J$, для которых $T^j x \in [\alpha, \delta_i]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, на два непустых множества.

Множества F_i, $i = 1, 2, \ldots$, — непустые совершенные и нигде не плотные на J множества (лемма 13), причем $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$.

Множество F_i, $i > 1$, нигде не плотно на F_{i-1}. Это следует из леммы 13. Достаточно заметить, что множество F_i не зависит от выбора точки β и, если $\beta = \delta_{i-1}$, то $J = F_{i-1}$.

Положим $F_i^1 = F_i$, $F_2^2 = T^{-1}F_i \setminus F_i$, $F_i^j = T^{-1}F_i^{j-1}$, $j = 3, 4, \ldots$.

Множества F_i^j, $i, j = 1, 2, \ldots$, — непустые совершенные и нигде не плотные на J множества, не имеющие попарно общих точек (лемма 15).

Л е м м а 16. *Множество* $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ *при любых* $j_1, \ldots, j_k$, $k \geq 1$, *если оно не пусто, обладает* s*-свойством.*

Множество $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ может быть непустым лишь при условии, что $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$. Действительно, если $j_m > j_{m+1}$, то $F_m^{j_m} \cap F_{m+1}^{j_{m+1}}$ — пустое множество, так как

$$T^{j_{m+1}-1} F_{m+1}^{j_{m+1}} \subseteq F_{m+1}^1 \subset F_m^1, \quad T^{j_{m+1}-1} F_m^{j_m} = F_m^{j_m - j_{m+1}+1},$$

$j_m - j_{m+1} + 1 > 1$. Таким образом, лемму достаточно доказать для случая, когда $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_k$.

Доказательство проведем по индукции.

Множество $F_k^{j_k}$ обладает s-свойством (лемма 15).

Предположим, что множество $F_m^{j_m} \cap F_{m+1}^{j_{m+1}} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_m, j_{m+1}, \ldots, j_k$ обладает s-свойством, и покажем, что в таком случае и множество $F_{m-1}^{j_{m-1}} \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_{m-1}, j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством.

1) $j_{m-1} = 1$. Согласно предположению, множество

$$J \cap F_m^{j_m} \cap \ \ldots \cap F_k^{j_k}$$

обладает s-свойством. При определении множества J мы могли с самого начала взять в качестве точки β точку δ_{m-1} и тогда было бы $J = F_{m-1}^1$ и

$$J \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k} = F_{m-1}^1 \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}.$$

Следовательно, множество $F_{m-1}^1 \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством.

2) $j_{m-1} = 2$. Множество

$$F_{m-1}^1 \cap F_m^{j_m-1} \cap \ldots \cap F_k^{j_k-1}$$

обладает s-свойством (пункт 1). Тогда множество

$$T^{-1}(F_{m-1}^1 \cap F_m^{j_m-1} \cap \ldots \ \cap F_k^{j_k-1})$$

также обладает s-свойством (лемма 12).

Для любых множеств $M_1, M_2 \subset J$ имеет место соотношение:

$$T^{-1}(M_1 \cap M_2) = T^{-1}M_1 \cap T^{-1}M_2.$$

Поэтому

$$T^{-1}(F_{m-1}^1 \cap F_m^{j_m-1} \cap \ldots \cap F_k^{j_k-1}) =$$
$$= T^{-1}F_{m-1}^1 \cap T^{-1}F_m^{j_m-1} \cap \ldots \cap T^{-1}F_k^{j_k-1}.$$

Так как $F_{m-1}^2 = (\delta_{m-1}, \beta) \cap T^{-1}F_{m-1}^1$ и $\delta_s < \delta_{m-1}$ при $s > m$, то $F_{m-1}^2 \cap T^{-1}F_s^{j_s-1} = F_{m-1}^2 \cap F_s^{j_s}$ при $s > m$ и

$$T^{-1}F_{m-1}^1 \cap T^{-1}F_m^{j_m-1} \cap \ldots \cap T^{-1}F_k^{j_k-1} \cap (\delta_{m-1}, \beta) =$$
$$= F_{m-1}^2 \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}.$$

Следовательно, множество $F_{m-1}^2 \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$, если оно не пусто, обладает s-свойством.

3) $j_{m-1} > 2$. Множество

$$F_{m-1}^2 \cap F_m^{j_m-(j_{m-1}-2)} \cap \ldots \cap F_k^{j_k-(j_{m-1}-2)}$$

обладает s-свойством (пункт 2). Следовательно (лемма 12), множество

$$T^{-(j_{m-1}-2)}(F_{m-1}^2 \cap F_m^{j_m-(j_{m-1}-2)} \cap \ldots \cap F_k^{j_k-(j_{m-1}-2)})$$

обладает s-свойством.

Для любых множеств $M_1, M_2 \subset J$ и любого $j > 0$

$$T^{-j}(M_1 \cap M_2) = T^{-j}M_1 \cap T^{-j}M_2.$$

Для любых $j > 0$, $s \geq 1$, $r \geq 2$ $\quad T^{-j}F_s^r = F_s^{j+r}$. Поэтому

$$T^{-(j_{m-1}-2)}(F_{m-1}^2 \cap F_m^{j_m-(j_{m-1}-2)} \cap \ldots \cap F_k^{j_k-(j_{m-1}-2)}) =$$

$$= F_{m-1}^{j_{m-1}} \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}.$$

Таким образом, множество $F_{m-1}^{j_{m-1}} \cap F_m^{j_m} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ при любых $j_{m-1}, j_m, \ldots, j_k$ обладает s-свойством. Лемма доказана.

Следствие. *Множество* $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$, *если оно не пусто, есть совершенное множество.*

Л е м м а 17. *Если* U *— открытое в* $F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ *множество, то* TU *содержит подмножество, открытое в* $F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k}$, *где* $j'_s = j_s - 1$, *если* $j_s > 1$, *и* $j'_s = 1$, *если* $j_s = 1$, $\quad s = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть I — открытый интервал, такой, что $U \supseteq I \cap F_1^{j_1} \cap \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$ и $x \in I \cap F_1^{j_1} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$. Точка x является предельной, например, слева для точек множества $E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha)$; существует последовательность $x_1 < x_2 < \ldots \to x$, $\quad x_i \in I \cap (E \setminus \mathfrak{B}^*(\alpha))$. Так как $Tx_i \neq Tx$ при любом $i \geq 1$, найдется последовательность $Tx_{i_1} < Tx_{i_2} < \ldots \to Tx$ (или $Tx_{i_1} > Tx_{i_2} > \ldots \to Tx$). Точка Tx является предельной слева для точек множества $F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k}$ (поскольку $Tx \in F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k}$ и множество $F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k}$ обладает s-свойством). Следовательно, множество $V = F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k} \cap (Tx_{i_1}, Tx)$ есть непустое открытое в $F_1^{j'_1} \cap F_2^{j'_2} \cap \ldots \cap F_k^{j'_k}$ множество. Так как $T(x_1, x) \supseteq (Tx_i, Tx)$, то для любой точки $y \in V$ найдется точка $y' \in (x_1, x) \cap \mathfrak{B}_2^*(\alpha)$ (см., например, доказательство леммы 11). Очевидно, $y' \in F_s^{j_s}$, $s = 1, 2, \ldots, k$, и, следовательно, $TU \supseteq V$.

Следствие. *Множество $F_k^{j_k}$ нигде не плотно на множестве $F_1^{j_1} \cap \ldots \cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ при любых $j_1, \ldots, j_{k-1}, j_k$.*

Это немедленно вытекает из леммы, поскольку множество F_k^1 нигде не плотно на множестве $F_1^1 \cap \ldots \cap F_{k-1}^1 = F_{k-1}^1$.

Л е м м а 18. *Множество $\bigcup\limits_{j_k=1}^{\infty} F_k^{j_k}$ всюду плотно на множестве $F_1^{j_1} \cap \ldots \cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ при любых $j_1, \ldots, j_{k-1}$.*

Действительно, пусть U — открытое в $F_1^{j_1} \cap \ldots \cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ множество и x — произвольная точка множества F_k^1. Множество $F_1^{j_1} \cap \ldots \cap F_{k-1}^{j_{k-1}}$ может быть не пусто лишь при условии $j_{k-1} \geq j_{k-2} \geq \ldots \geq j_1$. Множество $T^{j_{k-1}-1}U$ содержит подмножество, открытое в $F_1^1 \cap F_2^1 \cap \ldots \cap F_{k-1}^1 = F_{k-1}^1$ (лемма 17). Следовательно (лемма 13-4), найдется номер j_0 такой, что $T^{j_0 + j_{k-1} - 1}U \ni x$. Точка $y \in U$, для которой $T^{j_0 + j_{k-1} - 1}y = x$, принадлежит множеству $\bigcup\limits_{j_k=1}^{\infty} F_k^{j_k}$.

Положим $p_{j_1 j_2 \ldots j_k} = F_1^{j_1} \cap F_2^{j_2} \cap \ldots \cap F_k^{j_k}$, $j_1, j_2, \ldots, j_k = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Множества $p_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — совершенные нигде не плотные на J множества (некоторые из них могут быть пустыми), причем

1) $p_{j_1 \ldots j_{k-1} j_k} \subset p_{j_1 \ldots j_{k-1}}$,
2) $p_{j_1 \ldots j_{k-1} j_k}$ нигде не плотно на $p_{j_1 \ldots j_{k-1}}$,
3) $\bigcup\limits_{j_k=1}^{\infty} p_{j_1 \ldots j_{k-1} j_k}$ всюду плотно на $p_{j_1 \ldots j_{k-1}}$.

Положим $J(\alpha)=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty}p_{j_1\ldots j_k}$. $J(\alpha)$ есть множество 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена (см. [5]). Если $x\in J(\alpha)$, то $T^jx\to\alpha$, т. е. $x\in\mathfrak{B}(\alpha)$. Если $x\in J\setminus J(\alpha)$, то существует номер k такой, что $T^jx\notin F_s$ при $s\geq k$, т. е. $x\notin\mathfrak{B}(\alpha)$. Таким образом, $J(\alpha)=\mathfrak{B}(\alpha)\cap J$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{B}(\alpha)$ есть множество 3-го класса.

4. Если T — непрерывное отображение отрезка E вещественной прямой, структуру $\mathbb{K}_\alpha(T)$, $\alpha\in E$, нетрудно описать.

В каждой неподвижной точке α можно выделить следующие конусы: "двусторонний" конус $K=E$, "односторонние" конусы $K^-: x\leq\alpha$ и $K^+: x\geq\alpha$ и конус $K^0: x=\alpha$.

Конусы K,K^0 принадлежат $\mathbb{K}_\alpha(T)$. Для конусов K^-,K^+ возможны три случая:

1) $K^-,K^+\in\mathbb{K}_\alpha(T)$;

2) $K^-\in\mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T)$ (либо $K^-\notin\mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+\in\in\mathbb{K}_\alpha(T)$);

3) $K^-,K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T)$.

Последний случай, как легко видеть, распадается на два:

3а) $K^-,K^+\in\mathbb{K}_\alpha(T^2)$;

3б) $K^-,K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T^2)$ (и тогда $K^-,K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T^m)$ при любом $m\geq 1$).

Из того, что $K^-\notin\mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^-\in\mathbb{K}_\alpha(T^2)$ следует, что $K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+\in\mathbb{K}_\alpha(T^2)$. Поэтому случай $K^-\in\mathbb{K}_\alpha(T^2)$, $K^+\notin\mathbb{K}_\alpha(T^2)$ также, как случай $K^-\notin\mathbb{K}_\alpha(T^2)$, $K^+\in\mathbb{K}_\alpha(T^2)$, не возможен.

В случае 2) (и только в этом случае) могут существовать неподвижные точки всех типов, включая смешанную неподвижную точку типа 6_1.

Для неподвижных точек в конусе K имеют место утверждения, аналогичные теоремам 3.1.1–3.1.3.

Теорема 3.1.1$'$. *Неподвижная точка α обладает свойством а тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

(1$-$) $x_1<x_2<\ldots\to\alpha:\quad x_{j+1}\leq T^2x_j\leq\alpha$

или

(1+) $x'_1 > x'_2 > \ldots \to \alpha: \quad x'_{j+1} \geq T^2 x'_j \geq \alpha,\ j = 1, 2, \ldots.$

Теорема 3.1.2′. *Неподвижная точка* α *обладает свойством* r *тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

(2−) $x_1 < x_2 < \ldots \to \alpha: \quad T^{s_j} x_{j+1} \leq x_j,\ s_j \geq 1,$

или

(2+) $x'_1 > x'_2 > \ldots \to \alpha: \quad T^{s'_j} x'_{j+1} \geq x'_j,\ s'_j \geq 1,\ j = 1, 2, \ldots.$

Теорема 3.1.3′. *Неподвижная точка* α *обладает свойством* i *тогда и только тогда, когда существует последовательность точек*

(3−) $x_1 < x_2 < \ldots \to \alpha: \quad T^2 x_j = x_j$

или

(3+) $x'_1 > x'_2 > \ldots \to \alpha: \quad T^2 x'_j = x'_j,\ j = 1, 2, \ldots.$

Нетрудно установить взаимно-однозначное соответствие между типом неподвижной точки и структурой множеств $\mathbb{A}$, $\mathbb{J}$, $\mathbb{R}$. Соответствующие формулировки приводить не станем. Отметим лишь следующий факт, который используем при изучении множества сходимости последовательности итераций функции.

Множество $\mathfrak{B}(\alpha)$ является множеством 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена тогда и только тогда, когда существуют последовательности

$$\text{(I) типа } 1- \text{ и } 2-$$

или

$$\text{(II) типа } 1+ \text{ и } 2+.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения п. 3.

Можно было бы рассмотреть и соответствующую классификацию циклов. Однако при этом ничего существенно нового мы не обнаружим и поэтому на классификации конечных притягивающих множеств больше останавливаться не будем.

3.2. Поведение отображения в окрестности притягивающего множества

Прежде чем классифицировать бесконечные притягивающие множества, нам придется подробнее изучить, как устроено отображение в окрестности таких притягивающих множеств. В этом параграфе рассматривается случай, когда притягивающее множество $\mathcal{A}$ содержит цикл (и, естественно, отлично от цикла), а в следующем — случай, когда $\mathcal{A}$ не содержит циклов.

Итак, пусть T — непрерывное отображение замкнутого интервала E в себя и бесконечное притягивающее множество $\mathcal{A}$ содержит цикл.

Начнем с определений. Точку $y \in \mathcal{A}$ назовем ω^--предельной точкой, если существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и последовательность чисел $j_1 < j_2 < \ldots$ такие, что $T^{j_1}x < T^{j_2}x < \ldots \to y$. Аналогично, точку $y' \in \mathcal{A}$ назовем ω^+-предельной точкой, если существует точка $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и последовательность чисел $j'_1 < j'_2 < \ldots$ такие, что $T^{j'_1}x' < T^{j'_2}x' < \ldots \to y'$.

Окрестность произвольной точки $\beta \in E$ будем обозначать G_β. Для удобства под окрестностями точек будем понимать только связные открытые окрестности, так что всякая окрестность G_β — открытый (в E) интервал, содержащий точку β.

Положим $G_{-\beta} = G_\beta \cap \{x < \beta\}$, $G_{+\beta} = G_\beta \cap \{x > \beta\}$ и назовем $G_{-\beta}$ и $G_{+\beta}$ соответственно левосторонней и правосторонней окрестностями точки β. Если β-– левый конец E, то всякая окрестность $G_{-\beta} = \varnothing$, если правый, то $G_{+\beta} = \varnothing$.

Положим $K_\beta^- = \{x \leq \beta\}$, $K_\beta^+ = \{x \geq \beta\}$.

Пусть $T^k\beta = \beta$. Обозначим $\mathbb{K}_\beta(T^k)$ множество *инвариантных конусов* в точке β относительно отображения T^k (см. параграф 3.1, п. 1). Так $K_\beta^- \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, если существует окрестность $G_{-\beta}:\ T^kG_{-\beta} \subset K_\beta^-$; $K_\beta^+ \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, если существует окрестность $G_{+\beta}:\ T^kG_{+\beta} \subset K_\beta^+$.

Л е м м а 1. *Пусть* $\beta \in \mathcal{A}$ *и* $T^k\beta = \beta$.

Если β — ω^-*-предельная точка и* $K_\beta^- \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной слева для точек множества* $\mathcal{A}$.

Если β — ω^+*-предельная точка и* $K_\beta^+ \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной справа для точек множества* $\mathcal{A}$.

Докажем, например, первое утверждение. Если β — ω^--предельная точка, найдутся числа $j_0 < k$ и $j_1 < j_2 < \ldots$ такие, что $T^{j_0+kj_1}x < T^{j_0+kj_2}x < \ldots \to \beta$. Пусть $\mathcal{A}'$ — множество ω-предельных точек траектории $\{S^j x'\}_{j=0}^\infty$, где $S = T^k$, $x' = T^{j_0}x$. Множество $\mathcal{A}'$ содержит точку β и бесконечно, так как $\bigcup\limits_{j=0}^{k-1} T^j\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Возьмем произвольную окрестность $G_{-\beta}$ такую, что $SG_{-\beta} \subset K_\beta^-$ и $\mathcal{A}' \not\subset \overline{G_{-\beta}}$. Достаточно показать, что множество $\overline{G_{-\beta}} \setminus \{\beta\}$ содержит хотя бы одну точку множества $\mathcal{A}'$. Возьмем окрестность $G'_{-\beta}$, для которой $SG'_{-\beta} \subset \subset \overline{G_{-\beta}}$. Для любого $n > 0$ найдется $n' > n$: $S^{n'}x' \in G'_{-\beta}$ и $n'' > n$: $S^{n''}x' \in E \setminus \overline{G_{-\beta}}$. Так как $SG'_{-\beta} \subset \overline{G_{-\beta}}$ и $S^j x' \neq \beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то замкнутое множество $\overline{G_{-\beta}} \setminus G'_{-\beta} \setminus \{\beta\}$ содержит бесконечно много точек траектории $\{S^j x'\}_{j=0}^\infty$ и, следовательно, содержит хотя бы одну точку множества $\mathcal{A}'$.

Л е м м а 2. *Пусть* $\beta \in \mathcal{A}$, $T^k\beta = \beta$ *и не существует точек* $\beta' \neq \beta$: $\beta' \in \mathcal{A}$, $T^k\beta' = \beta$.

Если β — ω^-*-предельная точка и* $K_\beta^+ \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной слева для точек множества* $\mathcal{A}$.

Если β — ω^+*-предельная точка и* $K_\beta^- \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$, *то* β *является предельной справа для точек множества* $\mathcal{A}$.

Докажем первое утверждение. Пусть $\mathcal{A}'$ — множество ω-предельных точек траектории $\{S^j x'\}_{j=0}^\infty$, где $S = T^k$, $x' = T^{j_0}x$, причем точка β является ω^--предельной точкой. Точек $\beta' \neq \beta$: $\beta' \in \mathcal{A}'$, $S\beta' = \beta$ нет. Поэтому для любой окрестности G_β найдутся окрестность $G'_\beta \subset G_\beta$ и открытое множество G, содержащее $\mathcal{A}' \setminus (\mathcal{A}' \cap G_\beta)$ такие, что $SG \subset E \setminus G'_\beta$.

Пусть $G_\beta = G_{-\beta} \cup \{\beta\} \cup G_{+\beta}$, $G'_\beta = G'_{-\beta} \cup \{\beta\} \cup G'_{+\beta}$. Покажем, что множество $\overline{G_{-\beta}} \setminus \{\beta\}$ содержит хотя бы одну точку множества $\mathcal{A}'$. Можно считать, что $SG_{+\beta}) \subset K_\beta^+$. В таком случае $S\,(G \cup G_{+\beta}) \subset E \setminus G'_{-\beta}$. Так как $\mathcal{A}' \subset G \cup G_{+\beta}$, найдется номер n_0 : $S^j x' \in G \cup G_\beta$ при $j \geq n_0$. Для любого $n \geq n_0$

найдется $n' > n:\quad S^{n'}x' \in G \cup G_{+\beta}$ и $n'' > n':\quad S^{n''}x' \in G'_{-\beta}$. Так как $S\,(G \cup G_{+\beta}) \subset E \setminus G'_{-\beta}$ и $S^j x' \neq \beta,\ j = 0, 1, 2, \ldots,$ то множество $G_{-\beta} \setminus G'_{-\beta}$ содержит бесконечно много точек траектории $\{S^j x'\}_{j=0}^{\infty}$ и, следовательно, $\overline{G_{-\beta}} \setminus \{\beta\}$ содержит хотя бы одну точку множества $\mathcal{A}'$. Лемма доказана.

Далее будем предполагать, что множество $\mathcal{A}$ содержит неподвижную точку. Пусть это будет точка α.

Возможны следующие случаи (см. параграф 3.1, п. 4):

1) $K^-, K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$;

2) $K^- \in \mathbb{K}_\alpha(T),\quad K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$ или $K^- \notin \mathbb{K}_\alpha(T),\quad K^+ \in \in \mathbb{K}_\alpha(T)$;

3) $K^-, K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$:

а) $K^-, K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T^2)$,

б) $K^-, K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T^2)$.

При переходе к отображению $S = T^2$ случай 3а) переходит в 1) и будем пока предполагать, что случай 3а) для точки α не имеет места.

Л е м м а 3. *Во всякой окрестности H точки α существует открытый интервал W такой, что $TW \supset W,\quad \mathcal{A} \cap W \neq \varnothing$ и существуют*

а) либо точка $\beta \in \mathcal{A},\quad T\beta = \alpha,\quad \beta \neq \alpha$ и тогда в любой окрестности $G_{-\beta}$ (или $G_{+\beta}$) найдется замкнутый интервал V и номер $m:\quad T^jV \subset \overline{W},$ если $2 \leq j < m,$ и $T^jV \supset \overline{W},$ если $j \geq m,$ и при этом β — ω^- (соответственно, ω^+)-предельная точка;

б) либо последовательность $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots \to \alpha$ такая, что для любой окрестности $G_{\beta_i},\quad i \geq 1,$ и любой окрестности $H_{\alpha'}$ точки α найдется замкнутый интервал $V \subset G_{\beta_i}$ и номер $m:\quad T^jV \subset \overline{W},$ если $1 \leq j < m,$ и $T^jV \supset \overline{W} \setminus H_{\alpha'},$ если $j \geq m,$ причем

1) при $K^-, K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$ точка α является предельной слева (справа) для точек $\beta_i,$ если α — ω^- (ω^+)-предельная точка;

2) при $K^- \in \mathbb{K}_\alpha(T),\quad K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$ точка α является предельной справа для точек $\beta_i,$ если α — ω^+-предельная точка, *и предельной слева, если* α *не является* ω^+*-предельной точкой;*

$2'$) при $K^- \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$ *точка* α *является предельной слева для точек* β_i, *если* α *—* ω^-*-предельная точка, и предельной справа, если* α *не является* ω^-*-предельной точкой;*

3) при $K^-, K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$ *точка* α *является предельной и слева, и справа для точек* β_i.

Из того, что $T\beta = \alpha$ и $\beta_i \to \alpha$, следует, что W является окрестностью точки α (по крайней мере, односторонней).

Необходимость рассматривать отдельно различные случаи делает доказательство леммы весьма громоздким.

1) $K^-, K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$.

Пусть α является, например, ω^--предельной точкой. Рассмотрим произвольную окрестность $G_{-\alpha}$, но такую, что $G_{-\alpha} \subset \subset K^-_\alpha$, $\mathcal{A} \not\subset \overline{G}_{-\alpha}$. $TG_{-\alpha} \supset \overline{G}_{-\alpha} \setminus \{\alpha\}$, ибо в противном случае $T\overline{G}_{-\alpha} \subset \overline{G}_{-\alpha}$, и тогда $\mathcal{A} \subset \overline{G}_{-\alpha}$. Положим $W = G_{-\alpha}$. $TW \supset W$ и из леммы 1 вытекает, что $\mathcal{A} \cap W \neq \varnothing$.

Возьмем произвольную окрестность $G_{-\alpha'} \subset W$. По тем же соображениям найдется номер $n:$ $T^j G_{-\alpha'} \supset \overline{W} \setminus \{\alpha\}$ при $j \geq n$; если n — наименьший из таких номеров, то $T^j G_{-\alpha'} \subset W$, $j = = 0, 1, \ldots, n-1$.

Предположим, что существует точка $\beta \in \mathcal{A}$, $T\beta = \alpha$, $\beta \neq \alpha$. Пусть, например, β является ω^--предельной точкой. Если для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется окрестность $G_{-\alpha} \subset TG_{-\beta}$, то тогда найдется и замкнутый интервал $V \subset G_{-\beta}$ и номер m : $T^j V \subset \overline{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $T^j V \supset \overline{W}$ при $j \geq m$. Если же существует окрестность $G'_{-\beta}:$ $TG'_{-\beta} \subset K^+_\alpha$, то точка α является ω^+-предельной точкой. В таком случае, рассуждая как и выше, в качестве W следовало бы взять некоторую окрестность $G_{+\alpha}$.

Допустим, что такой точки $\beta \in \mathcal{A}$ не существует. Это означает, что для любой окрестности G_α найдутся окрестность $G'_{-\alpha} \subset G_\alpha$ и открытое множество G, содержащее множество $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap G_\alpha)$, такие, что $TG \subset E \setminus G'_{-\alpha}$.

Пусть $G_\alpha = W \cup \{\alpha\} \cup G_{+\alpha}$. Можно считать, что $TG_{+\alpha} \subset \subset K_\alpha^+$, и тогда $T(G \cup G_{+\alpha}) \subset E \setminus G'_{-\alpha}$.

Множество $G \cup G_{+\alpha}$ открыто и содержит $\mathcal{A}$. Если $x \in \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, то найдется номер $j_0 :\ T^j x \in G \cup G_\alpha$ при $j \geq j_0$. Найдутся также номер $j_1 \geq j_0 :\ T^{j_1} x \in G \cup G_{+\alpha}$ и номер $j_2 > j_1 :\ T^{j_2} x \in G'_{-\alpha}$. Если номер j_2 — наименьший из возможных, то $T^{j_2-1} x \notin G'_{-\alpha}$. Поскольку $T(G \cup G_{+\alpha}) \subset E \setminus G'_{-\alpha}$, то $T^{j_2-1} x \notin G \cup G_{+\alpha}$. Следовательно, $T^{j_2-1} x \in W \setminus G'_{-\alpha}$.

Если $W = (\gamma, \alpha)$, $G'_{-\alpha} = (\gamma_0, \alpha)$, то $W \setminus G'_{-\alpha} = (\gamma, \gamma_0]$. Нами найдено, что $\max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_0]} Tx > \gamma_0$. Так как приведенные выше рассуждения остаются справедливыми, если заменить $G'_{-\alpha}$ произвольной окрестностью $\tilde{G}'_{-\alpha} \subset G'_{-\alpha}$, то для любой точки $\gamma'_0 \in (\gamma_0, \alpha)$ $\max\limits_{x \in [\gamma, \gamma'_0]} Tx > \gamma'_0$. Поскольку $TW \supset W$, существует точка $\gamma' \in \overline{W}$, для которой $T\gamma' = \gamma$; можно считать, что $\gamma' \in [\gamma, \gamma_0]$. В таком случае $T[\gamma, \gamma_0] \supset [\gamma, \gamma_0]$.

Положим $\gamma_i = \max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_{i-1}]} Tx$, $i = 1, 2, \ldots$; $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$. Утверждается, что $\lim\limits_{i \to \infty} \gamma_i = \alpha$. Допустим $\gamma_\infty = \lim \gamma_i < \alpha$. Пусть $\gamma'_\infty = \max\limits_{x \in [\gamma, \gamma_\infty]} Tx$; $\gamma'_\infty > \gamma_\infty$. Но тогда найдется точка $\gamma''_\infty \in (\gamma, \alpha) :\ \gamma''_\infty < \gamma_\infty$, $T\gamma''_\infty > \gamma_\infty$ и номер $i' :\ \gamma_{i'} > \gamma''_\infty$, что приводит к противоречию.

Итак, $T[\gamma, \gamma_0] \supset [\gamma, \gamma_1]$, $T[\gamma, \gamma_1] \supset [\gamma, \gamma_2], \ldots$, $\gamma_i \to \alpha$. Для любой окрестности H'_α (или $H'_{-\alpha}$) найдутся замкнутый интервал $V' \subset [\gamma, \gamma_0]$ и номер n' такие, что $T^j V' \subset \overline{W}$, $j = = 0, 1, \ldots, n' - 1$, и $T^j V' \supset \overline{W} \setminus H_{\alpha'}$ при $j \geq n'$.

Покажем, что во всякой окрестности $\widetilde{G}_{-\alpha} \subset W$ найдется точка $\xi \in \mathcal{A}$, для которой $T^j \xi \in \widetilde{G}_{-\alpha}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Воспользуемся теоремой 1.5 Положим $G_1 = G''_{-\alpha} \cup \{\alpha\} \cup G_{+\alpha}$, где $\overline{G}''_{-\alpha} \subset \widetilde{G}_{-\alpha}$, и пусть $G_2 = G \cup G_{+\alpha}$. Очевидно, $T\overline{G}_2 \subset \overline{G}_2 \cup \cup\ (E \setminus \overline{G}_1)$; $\alpha \notin G_2$; точка α является предельной слева для точек множества $\mathcal{A}$ и поэтому не изолирована во множестве $\{\alpha\} \cup \big(\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap \overline{G}_2)\big)$. Следовательно (теорема 1.1.5), существует точка $\eta \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\} :\ T^j \eta \notin G_2$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $T^j \eta \in \in \overline{G}_1$, $j = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\eta \in W$, $T^j \eta \in \overline{G}''_{-\alpha}$,

$j = 1, 2, \ldots$. Согласно предположению, W не содержит точек $\beta \in \mathcal{A}$, для которых $T\beta = \alpha$ (ибо для любой окрестности G_y каждой точки $y \in W TG_y \not\subset K^+_\alpha$). Следовательно, $T^j\eta \in \overline{G}''_{-\alpha} \setminus \{\alpha\}$, $j = 1, 2, \ldots$; если положить $\xi = T\eta$, то $T^j\xi \in \widetilde{G}_{-\alpha}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Всякая окрестность G_ξ содержит точки последовательности $\{T^j x\}^\infty_{j=0}$, $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Так как $\mathcal{A} \not\subset \overline{W}$, найдется номер n'' : $T^{n''}G_\xi \not\subset \overline{W}$. Можно считать, что $T^jG_\xi \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n''-1$. Тогда $T^{n''}G_\xi \subset K^-_\alpha$. Если $\widetilde{G}_{-\alpha} \subset (\gamma_0, \alpha)$, то $T^{n''}\xi > \gamma_0$, $T^{n''}G_\xi \subset V'$. Таким образом, окрестность G_ξ содержит замкнутый интервал V : $T^{n''}V = V'$, $T^jV \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n'' - 1$; если $m = n' + n''$, то $T^jV \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, $T^jV \supset \overline{W} \setminus H_{\alpha'}$ при $j \geq m$.

2) $K^-_\alpha \in K_\alpha(T)$, $K^+_\alpha \notin K_\alpha(T)$.

Если α — ω^--предельная точка, то для любой окрестности $G_{-\alpha}$, для которой $TG_{-\alpha} \subset K^-_\alpha$ и $\mathcal{A} \not\subset \overline{G}_{-\alpha}$, $TG_{-\alpha} \supset G_{-\alpha}$. Возьмем в качестве W такую произвольную окрестность. $W \cap \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$ (лемма 1). Для любой окрестности $G_{-\alpha} \subset W$ существует номер n : $T^jG_{-\alpha} \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, $T^jG_{-\alpha} \supset \supset \overline{W} \setminus \alpha$ при $j \geq n$.

Предположим, что α не является ω^--предельной точкой. Пусть $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Найдется окрестность $G_{-\alpha}$, не содержащая точек T^jx, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $G_{+\alpha}$ — произвольная достаточно малая окрестность: $TG_{+\alpha} \subset K^+_\alpha \cup G_{-\alpha}$ и $\mathcal{A} \not\subset \overline{G}_{+\alpha}$. Так как α — ω^+-предельная точка и $\mathcal{A} \not\subset \overline{G_{+\alpha}}$, то найдется номер j' : $T^{j'}x \in G_{+\alpha}$, $T^{j'+1}x \notin G_{+\alpha}$. Поскольку $T^{j'+1}x \notin \notin G_{-\alpha}$, то точка $T^{j'+1}x$ лежит справа от $G_{+\alpha}$. Следовательно, $TG_{+\alpha} \supset G_{+\alpha}$. Полагаем $W = G_{+\alpha}$. Аналогичные рассуждения показывают, что для любой окрестности $G'_{+\alpha} \subset W$ найдется номер n : $\underbrace{T(\cdots T(}_{n} TG'_{+\alpha} \cap \overline{W}) \cap \overline{W} \ldots) \supset \overline{W}$. Следовательно, существует замкнутый интервал $V' \subset G'_{+\alpha}$ такой, что $T^jV' \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $T^jV' \supset \overline{W}$ при $j \geq n$. Поскольку точка α не изолирована во множестве $\mathcal{A}$, то $W \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$.

Итак, множество W является левосторонней окрестностью точки α, если α — ω^--предельная точка, и правосторонней, если α не является ω^--предельной точкой.

а) Предположим, существует точка $\beta \in \mathcal{A}$, для которой $T\beta = \alpha$. Пусть, например, β — ω^--предельная точка.

Рассмотрим произвольную окрестность $G_{-\beta}$. Так как $K_\alpha^+ \notin \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$, всегда найдется окрестность $G_{-\alpha}: \ T^2G_{-\beta} \supset G_{-\alpha}$. Следовательно, если α — ω^--предельная точка, найдутся замкнутый интервал $V_1 \subset G_{-\beta}$ и номер m_1 такие, что $T^jV_1 \subset \subset \overline{W}$, $j = 2, 3, \ldots, m_1 - 1$, $T^jV_1 \supset \overline{W}$ при $j \geq m_1$. Если α не является ω^--предельной точкой, то $TG_{-\beta} \not\subset K_\alpha^-$ и найдется окрестность $G_{+\alpha} \subset TG_{-\beta}$. В этом случае найдется замкнутый интервал $V_2 \subset G_{-\beta}$ и номер $m_2: \ T^jV_2 \subset \overline{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m_2 - 1$, $T^jV_2 \supset \overline{W}$ при $j \geq m_2$.

б) Предположим, что точек $\beta \in \mathcal{A}$, для которых $T\beta = \alpha$, не существует.

1°. Пусть α — ω-предельная точка. Точка α является предельной справа для точек множества $\mathcal{A}$ (лемма 2). Рассмотрим произвольную окрестность $G_\alpha = G_{-\alpha} \cup \{\alpha\} \cup G_{+\alpha}$, но такую, что $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$. Из теоремы 1.1.5 следует: существует точка $\eta \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$, для которой $T^j\eta \in \overline{G}_{+\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots$. Так как $T^j\eta \neq \alpha$, $j = 1, 2, \ldots$, то $T^j\eta \in \overline{G}_{+\alpha} \setminus \{\alpha\}$. Это означает, что во всякой окрестности $G'_{+\alpha}$ существует точка η' : $T^j\eta' \in G'_{+\alpha}$, $j = 1, 2, \ldots$, а потому существует и точка ξ' : $T\xi' > \alpha$. Итак, точка α является предельной справа для точек ξ' : $T\xi' > \alpha$ и точек ξ'' : $T\xi'' < \alpha$ (ибо $K_\alpha^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$). Поэтому точка α является предельной справа и для точек ξ : $T\xi = \alpha$ и для любой окрестности G_ξ существует окрестность $G_\alpha \subset TG_\xi$. Найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m такие, что $T^jV \subset \overline{W}$, $j = 1, 2, \ldots, m - 1$, $T^jV \supset \overline{W}$ при $j \geq m$.

2°. Предположим, что α не является ω^+-предельной точкой. Для любой окрестности G_α найдутся окрестность $G'_\alpha \subset \subset G_\alpha$ и открытое множество G, содержащее $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap G_{+\alpha})$, такие, что $TG \subset E \setminus G'_\alpha$. Пусть $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Если $G_\alpha =$

$= G_{-\alpha} \cup \{\alpha\} \cup G_{+\alpha}$ можно считать, что $G_{-\alpha} \subset W$, $TG_{-\alpha} \subset K_\alpha^-$ и множество $G_{+\alpha}$ не содержит точек $T^j x$, $j = 1, 2, \dots$. Так как $\mathcal{A} \subset G_\alpha \cup G$, найдется номер j_0 такой, что $T^j x \in G_{-\alpha} \cup G$ при $j \geq j_0$. Повторяя далее соответствующие рассуждения пункта 1), получаем: точка α является предельной слева для точек ξ : для любой окрестности G_ξ и всякой окрестности H'_α найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m такие, что $T^j V \subset \overline{W}$ при $0 \leq j \leq m$, $T^j V \supset \overline{W} \setminus H'_\alpha$ при $j \geq m$.

В случае $K_\alpha^- \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K_\alpha^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$ доказательства аналогичны.

3) K_α^-, $K_\alpha^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T^2)$.

Это эквивалентно тому, что точка α является предельной для точек:

1°. $x' < \alpha$, $Tx' > \alpha$ и $x'' > \alpha$, $Tx'' < \alpha$.

2°. $y' < \alpha$, $Ty' < \alpha$ либо/и $y'' > \alpha$, $Ty'' > \alpha$.

Следовательно, для любых окрестностей $G_{-\alpha}$ и $G_{+\alpha}$ найдется окрестность G_α : $T^2 G_{-\alpha} \supset G_\alpha$, $T^2 G_{+\alpha} \supset G_\alpha$.

Пусть $H_\alpha = (\beta, \gamma)$, причем $\mathcal{A} \not\subset \overline{H}_\alpha$. Либо для любой точки $\delta \in (\alpha, \gamma)$ $T[\alpha, \delta] \supset [\alpha, \delta]$, либо существует δ' : $T[\alpha, \delta'] \not\supset$ $\not\supset [\alpha, \delta']$.

В первом случае $T[\alpha, \gamma] \supseteq [\alpha, \gamma]$ и для любого $\delta \in (\alpha, \gamma)$ найдется замкнутый интервал $V' \subset [\alpha, \delta]$ и номер n : $T^n V' =$ $= [\alpha, \gamma]$, $T^j V' \subset [\alpha, \gamma]$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть $\beta' = \min\limits_{x \in [\alpha, \gamma]} Tx$ и $\beta' < \alpha$. Положим $\beta'' = \max\{\beta', \beta\}$ и $W = (\beta'', \alpha)$. Очевидно, $TW \supseteq W$ и, более того, $TW \supset W$, так как $\mathcal{A} \not\subset \overline{W}$. $T^j V' \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $T^j V' \supset \bar{W}$ при $j > n$.

Пусть существует $\delta' \in (\alpha, \gamma)$: $T[\alpha, \delta']$. Положим $\delta'' =$ $= \min\limits_{x \in [\alpha, \delta']} Tx$ и $\gamma' = \max\{\delta'', \beta\}$. Либо для любой точки $\eta \in$ $\in (\gamma', \alpha)$ $T[\eta, \alpha] \supset [\eta, \alpha]$ и тогда для построения W нужно повторить приведенные выше рассуждения, либо существует точка $\eta' \in (\gamma', \alpha)$: $T[\eta', \alpha] \not\supset [\eta', \alpha]$. Положим $\zeta = \max\limits_{x \in [\eta', \alpha]} Tx$; $\zeta > \alpha$.

Если $\zeta > \delta'$, полагаем $W = [\eta', \delta']$. $TW \supset W$. Для любой окрестности $G_\alpha \subset W$ найдется окрестность $G'_\alpha \subset G_\alpha \cap TG_\alpha$. Найдется номер n : $T^j G'_\alpha \subset \bar{W}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $T^n G'_\alpha \not\subset \overline{W}$

(так как $\mathcal{A} \not\subset \overline{W}$). Следовательно, либо $T^n G'_\alpha \supset [\eta', \alpha]$, либо $T^n G'_\alpha \supset [\alpha, \delta']$. Так как $T[\eta', \alpha] \supset [\alpha, \delta']$, $T[\alpha, \delta'] \supset [\eta', \alpha]$, $T^{n+1} G_\alpha \supset T^{n+1} G'_\alpha \cup T^n G'_\alpha$, то $T^{n+1} G_\alpha \supset \overline{W}$ и найдется замкнутый интервал $V' \subset G_\alpha$: $T^j V' \subset \overline{W}$ при $j \le n$, $T^j V' \supset \overline{W}$ при $j > n$.

Пусть $\zeta < \delta'$. Так как

$$\underbrace{T(\ldots T}_{j}(T[\alpha, \zeta] \cap [\alpha, \delta']) \cap [\alpha, \delta'] \cap \ldots) \not\supset [\alpha, \delta'], \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

и $\mathcal{A} \not\subset [\eta', \delta']$, то найдется номер n' : $T^j[\alpha, \zeta] \not\supset [\eta', \alpha]$, $j = 0, 1, \ldots, n' - 1$, $T^{n'}[\alpha, \zeta] \supset [\eta', \alpha]$. Пусть $\zeta' = \max\limits_{x \in T^{n'-1}[\alpha, \zeta]} x$. Полагаем $W = (\eta', \zeta')$. Так как $T[\eta', \alpha] \not\supset [\eta', \alpha]$, то $T[\alpha, \zeta] \supset [\alpha, \zeta]$ и $T^j[\alpha, \zeta] \subset T^{n'-1}[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n' - 2$. Поскольку $T^{n'-1}[\alpha, \zeta] \supset [\eta', \alpha]$ и $T[\eta', \alpha] \supset [\alpha, \zeta]$, то $TW \supset W$.

Для любой окрестности $G_\alpha \subset W$ найдется номер n'' : $T^j G_\alpha \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, n'' - 1$, $T^{n''} G_\alpha \not\subset W$. Следовательно, либо $T^{n''} G_\alpha \supset [\eta', \alpha]$ и тогда во всяком случае $T^{n''} G_\alpha \supset T^j[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n' - 2$, либо $T^{n''} G_\alpha \supset [\alpha, \zeta']$ и тогда $T^{n''} G_\alpha \supset T^j[\alpha, \zeta]$, $j = 0, 1, \ldots, n' - 1$. В обоих случаях $T^{n''} G_\alpha \supset \overline{W}$; найдется замкнутый интервал $V' \subset G_\alpha$: $T^j V' \subset \overline{W}$ при $j \le n$, $T^j V' \supset \overline{W}$ при $j > n$.

Из $1^\circ, 2^\circ$ вытекает, что точка α является предельной и слева, и справа для точек ξ : $T\xi = \alpha$ или $T^2\xi = \alpha$, причем $TG_\xi \ne \alpha$, $T^2 G_\xi \ne \alpha$. Следовательно, точка α является предельной и слева, и справа для точек ξ : для любой окрестности G_ξ найдутся замкнутый интервал $V \subset G_\xi$ и номер m : $T^j V \subset \overline{W}$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, $T^j V \supset \overline{W}$ при $j \ge m$.

Лемма 3 доказана.

Под окрестностью множества $\mathcal{A}$ ради простоты будем понимать любое открытое содержащее $\mathcal{A}$ множество, каждая компонента которого содержит, по крайней мере, одну точку множества $\mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ — множество замкнутое, можно считать, что всякая такая окрестность состоит из конечного числа компонент (открытых в E интервалов).

Пусть H — окрестность множества $\mathcal{A}$ и H_α — компонента, содержащая неподвижную точку α. Согласно лемме 3 найдется открытое множество $W \subset H_\alpha$ такое, что $TW \supset W$, и удовлетворяющее еще ряду условий (см. лемму 3), которые будем предполагать выполненными.

Определим W-окрестность множества $\mathcal{A}$.

Пусть $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, где H_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — открытые в E интервалы. Всякой конечной последовательности целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_s$, $1 \le m_i \le r$, $i = 1, 2, \ldots, s$, поставим в соответствие открытое множество $V_{m_1 m_2 \ldots m_s}$ следующим образом.

Обозначим U_{m_1} множество точек $x \in W$, для которых $Tx \in \in H_{m_1}$, U_{m_1} — открытое множество. Обозначим $U_{m_1 m_2}$ множество точек $x \in U_{m_1}$, для которых $T^2 x \in H_{m_2}$ и т. д.; $U_{m_1 \ldots m_s}$ — множество точек $x \in U_{m_1 \ldots m_{s-1}}$, для которых $T^s x \in H_{m_s}$. Наконец, обозначим $V_{m_1 \ldots m_s}$ множество точек $x \in U_{m_1 \ldots m_s}$, для которых $T^{s+1} x \in W$. Множество $V_{m_1 \ldots m_s}$ открыто и, в частности, может быть пустым. Положим $W_{m_1 \ldots m_s} = \bigcup_{j=1}^{s} T^j V_{m_1 \ldots m_s}$.

Очевидно, $T^j V_{m_1 \ldots m_s} \subset H_{m_j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. $TW_{m_1 \ldots m_s} \subset \subset W_{m_1 \ldots m_s} \cup W$.

Положим $U = \bigcup\limits_{\substack{1 \le m_1, \ldots, m_s \le r \\ s < \infty}} W_{m_1 \ldots m_s} \cup W$. *Множество* $U = = U(H, W)$ *назовем* W*-окрестностью множества* $\mathcal{A}$.

$U \subset TU \subset U \cup TW$. Если $x \in U$, $Tx \notin U$, то $x \in W$.

Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, найдется номер $j_1 : T^j x \in H$ при $j \ge j_1$. Так как $\mathcal{A} \cap W \neq \varnothing$, то найдется номер $j_2 \ge j_1 : T^{j_2} x \in W$, и тогда $T^j x \in U$ при $j \ge j_2$ согласно определению W-окрестности U.

Множество $\mathcal{A}$ содержится в $\overline{U}$.

Точку x *назовем* W*-точкой, если для любой окрестности* G_x *и любой окрестности* G_α *найдутся замкнутый интервал* $V \subset G_x$ *и номер* m *такие, что* $T^j V \subset H$ *при* $0 \le j < m$ *и* $T^j V \supset \overline{W} \setminus G_\alpha$ *при* $j \ge m$.

Лемма 3 утверждает, что существует либо W-точка $\beta_0 \in \mathcal{A}$, $T\beta_0 = \alpha$, либо последовательность W-точек $\beta_1, \beta_2, \ldots \to \alpha$.

Наша цель — доказать, что всякая точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, является W-точкой.

Множество W-точек замкнуто и содержится в $\overline{H}$. Если x — W-точка, то Tx — также W-точка. Поэтому α — W-точка.

W-точки обладают следующим важным свойством, непосредственно вытекающим из определений W-точек и W-окрестности U. *Пусть x — произвольная W-точка. Какова бы ни была окрестность G_x и замкнутое множество $V_1 \subset U$, найдутся замкнутое множество $V_2 \subset G_x$ и номер m такие, что $T^j V_2 \subset H$ при $0 \le j < m$, $T^j V_2 \supset V_1$ при $j \ge m$; если V_1 — замкнутый интервал, то и в качестве V_2 можно взять замкнутый интервал.*

Если x — W-точка, $T^s x' = x$, $T^j x' \in H$, $j = 0, 1, \ldots, s-1$, и для любой окрестности $G_{x'}$ найдется окрестность $G_x \subset T^s G_{x'}$, то x' — W-точка. Поэтому если U содержит хотя бы одну W-точку, отличную от неподвижной точки (утверждать это мы пока не можем), то всякая W-точка является предельной для W-точек; множество W-точек плотно в себе и, следовательно, совершенно.

Полагаем, что x — $W^-(W^+)$-точка, если для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любой окрестности G_α найдутся замкнутый интервал $V \subset G_{-x}(G_{+x})$ и номер m такие, что $T^j V \subset H$ при $0 \le j < m$ и $T^j V \supset \overline{W} \setminus G_\alpha$ при $j \ge m$.

Пусть x — W^- (W^+)-точка, $x' \in H$, $Tx' = x$. Если для любой окрестности $G_{-x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{-x'}$ $(G_{+x} \subset TG_{-x'})$, то x' — W^--точка. Если для любой окрестности $G_{+x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{+x'}$ $(G_{+x} \subset TG_{+x'})$, то x' — W^+-точка.

Это замечание делает следующие утверждения почти очевидными.

Л е м м а 4. *Если точка β является одновременно ω^--предельной и W^--точкой или ω^+-предельной и W^+-точкой, то существует точка β', для которой $T\beta' = \beta$, являющаяся од-*

новременно ω^-*-предельной и* W^-*-точкой или* ω^+*-предельной и* W^+*-точкой.*

Л е м м а 5. *Если* β *является* W^- (W^+)*-точкой, как только* β — ω^- (ω^+)*-предельная точка, и* $T\beta' = \beta$, *то* β' *является* W^- (W^+)*-точкой, как только* β' — $\omega^-(\omega^+)$*-предельная точка.*

Докажем, например, последнее утверждение. Пусть β — ω^+-предельная и W^+-точка, $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и $T^{j_1}x > T^{j_2}x > > \ldots \to \beta'$. Если β не является ω^--предельной точкой, то точки $T^{j_s+1}x$, $s = 1, 2, \ldots$, приближаются к β справа, и для любой окрестности $G_{+\beta'}$ найдется окрестность $G_{+\beta} \subset TG_{+\beta'}$. Если β — ω^--предельная точка, то тогда β и W^--точка и для любой окрестности $G_{+\beta'}$ найдется окрестность либо $G'_{-\beta}$, либо $G'_{+\beta}$, содержащаяся в $TG_{+\beta'}$. Таким образом, β' является W^+-точкой.

Обозначим c и d соответственно левый и правый концы множества $\mathcal{A}$. Если x — $W^-(W^+)$-точка, для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любого замкнутого множества $F \subset (c, d)$ найдется номер $m :$ $T^jG_{\mp x} \supset F$ при $j \geq m$.

Возьмем точку $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \cap W$. Для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ найдется номер $m' :$ $T^jG_{\mp x} \supset \{x'\}$ при $j \geq m'$. Так как $c, d \in \mathcal{A}$, найдутся номера j_1, j_2 такие, что $F \subset \subset [T^{j_1}x', T^{j_2}x']$. Следовательно, $T^jG_{\mp x} \supset F$ при $j \geq m$, где $m = m' + \max\{j_1, j_2\}$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. *Для любой окрестности* $G_{-x}(G_{+x})$, *содержащей хотя бы одну точку множества* $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, *и любого замкнутого множества* $F \subset (c, d)$ *найдется номер* $m :$ $T^jG_{\mp x} \supset F$ *при* $j \geq m$.

Если интервал G содержится в $\bigcup\limits_{\mathcal{A}' \ni \alpha} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, то существует $\mathcal{A}'' \ni \alpha$ такое, что $G \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$. Доказательство этого дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения леммы 5 из параграфа 3.1. Следовательно, найдется точка $x' \in G_{-x}(G_{+x})$ и окрестность $G'_\alpha :$ $T^{j'}x' \notin G'_\alpha$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (в противном случае $T^j G_{\mp x} \supset \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \ni \alpha} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$; найдется $\mathcal{A}'' \ni \alpha$: $T^j G_{\mp x} \supset \supset \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$; $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ и $T^j G_{\mp x} \supset \mathfrak{B}(\mathcal{A})$).

Пусть $G'_\alpha = G'_{-\alpha} \cup \{\alpha\} \cup G'_{+\alpha}$. Если $K^-_\alpha, K^+_\alpha \notin \mathbb{K}_\alpha(T^2)$, то точка α является предельной и слева, и справа для W-точек (лемма 4). Возьмем окрестность $G''_\alpha = G''_{-\alpha} \cup \{\alpha\} \cup G''_{+\alpha}$ так, чтобы каждое из множеств $G'_{-\alpha} \setminus G''_{-\alpha}$ и $G'_{+\alpha} \setminus G''_{+\alpha}$ содержало хотя бы одну W-точку. Так как α — ω-предельная точка, найдется номер m' : $T^{m'} x \in G''_\alpha$. Так как $T^{m'} x' \notin G''_\alpha$, то либо $T^{m'} G_{\mp x} \supset G'_{-\alpha} \setminus G''_{-\alpha}$, либо $T^{m'} G_{\mp x} \supset G'_{+\alpha} \setminus G''_{+\alpha}$. Это означает, что $T^{m'} G_{\mp x}$ содержит вместе с некоторой окрестностью W-точку; следовательно, найдется номер m : $T^j G_{\mp x} \supset F$ при $j \geq m$.

Если исключить из рассмотрения случай $K^-_\alpha, K^+_\alpha \notin \mathbb{K}_\alpha(T^2)$, то тогда найдется интервал $[\gamma, \alpha] \subset G'_\alpha$ (либо $[\alpha, \gamma] \subset G'_\alpha$) такой, что для любого $\gamma' \in [\gamma, \alpha)$ $\min\limits_{x \in [\gamma', \alpha]} Tx < \gamma'$ и $(\gamma', \alpha) \cap \mathcal{A} \notin \varnothing$ (см. доказательство леммы 3). Точка α является предельной слева (справа) для точек циклов (теорема 2.2.2). Пусть β_1 — точка цикла периода k_1, β_2 — точка цикла периода k_2, причем $\beta_1, \beta_2 \in [\gamma, \alpha)$, $\beta_1 < \beta_2$ и $(\beta_1, \beta_2) \cap \mathcal{A} \notin \varnothing$. Пусть

$$\beta' = \min\{\beta_1, T\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, T\beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2\},$$

$$\beta'' = \max\{\beta_1, T\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, T\beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2\}.$$

$T[\beta', \beta''] \supseteq [\beta', \beta'']$, $(\beta', \beta'') \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$; найдется номер n : $T^j[\beta', \beta''] \supset F$ при $j \geq n$. Так как $T[\gamma, \alpha) \supset [\gamma, \alpha)$, существуют точка δ_1 такая, что $T^j \delta_1 \in [\gamma, \alpha)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $T^k \delta_1 = \beta_1$, $k = \max\{k_1 - 1, k_2 - 1\}$, и точка δ_2 такая, что $T^j \delta_2 \in [\gamma, \alpha)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $T^k \delta_2 = \beta_2$. Если $\gamma' = \max\limits_{j=0,1,\ldots,k} \{T^j \delta_1, T^j \delta_2\}$, то интервал $T^k[\gamma, \gamma']$ содержит точки $\beta_1, \ldots, T^{k_1-1}\beta_1, \beta_2, \ldots, T^{k_2-1}\beta_2$. Следовательно, $T^k[\gamma, \gamma'] \supset [\beta', \beta'']$ и $T^k[\gamma, \gamma'] \supset F$ при $j \geq k + n$.

Найдется номер j' : $T^{j'} x \in [\gamma', \alpha)$. Так как $T^{j'} x' \notin [\gamma', \alpha]$, то либо $T^j G_{\mp x} \supset [\gamma, \gamma']$ и тогда $T^j G_{\mp x} \supset F$ при $j \geq j' + k + n$, либо $T^{j'} G_{\mp x} \supset [T^{j'} x, \alpha]$. В последнем случае $T[T^{j'} x, \alpha] \supset [T^{j'} x, \alpha]$,

$(T^{j'}x, \alpha) \cap \mathcal{A} \notin \varnothing$ и поэтому найдется номер j'' : $T^j[T^{j'}x, \alpha] \supset F$ при $j \geq j''$; следовательно, $T^jG_{\mp x} \supset F$ при $j \geq j' + j''$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.2.1 можно немедленно получить следующее. Обозначим $\mathfrak{B}_1(\mathcal{A})$ множество точек x, принадлежащих $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ вместе с некоторой окрестностью G_x; $\mathfrak{B}_1(\mathcal{A})$ — открытое множество. Положим $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}) = \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \setminus \mathfrak{B}_1(\mathcal{A})$.

Следствие1. *Если неподвижная точка* α *является предельной слева (справа) для притягивающих множеств* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$, *то* $\overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_1)} = \overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_2)}$.

Пусть c_i, d_i — левый и правый концы множеств $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$. Найдется замкнутый интервал $F \subset (c_1, d_1) \cap (c_2, d_2)$, содержащий хотя бы одну точку каждого из множеств $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$. Пусть, например, $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1) \cap F$. Если $x'' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2)$, то любая окрестность $G_{x''}$ содержит хотя бы одну точку множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2)$ и согласно теореме найдется номер m : $T^mG_{x''} \supset F$. Существует точка $x''' \in G_{x''}$: $T^mx''' = x'$, т. е. $x''' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$. Пусть, для определенности, $x''' < x''$. Если открытый интервал принадлежит $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$, то концы интервала также принадлежат $\mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$ (лемма 4 из параграфа 3.1). Следовательно, найдется точка $\tilde{x}''' \in \mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_1)$, $x''' \leq \tilde{x}''' < x''$. Итак, в любой окрестности точки множества $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_2)$ содержатся точки множества $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_1)$ и, наоборот, в любой окрестности произвольной точки множества $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_1)$ содержатся точки множества $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_2)$.

Следствие 2. *Если существует множество* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то* $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *не является* G_δ*-множеством.*

Действительно, $\bigcup\limits_{\mathcal{A}'' \supseteq \mathcal{A}'} \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ есть G_δ-множество (см. параграф 1.1) и лежит всюду плотно на $\overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A})}$. Любые два G_δ-множества, замыкания которых совпадают, имеют непустое пересечение. Так как $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}) \cap \bigcup\limits_{\mathcal{A}'' \supseteq \mathcal{A}'} \mathfrak{B}(\mathcal{A}'') = \varnothing$, то $\mathfrak{B}_2(\mathcal{A})$, а следовательно, и $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не являются G_δ-множествами.

Следствие 3. *Отображение T имеет цикл нечетного периода* > 1.

Возьмем открытые интервалы G_1, G_2, каждый из которых содержит по крайней мере одну точку множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и одну точку множества $R \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, причем $\overline{G}_1, \overline{G}_2 \subset (c,d)$, $\overline{G}_1 \cap \cap \overline{G}_2 = \varnothing$. Такие интервалы G_1, G_2 всегда существуют. Возьмем замкнутый интервал E так, чтобы $\overline{G}_1 \subset E$, $\overline{G}_2 \subset E$, $E \subset (c,d)$. Согласно теореме найдутся номер m_1 : $T^j\overline{G}_1 \supset E$ при $j \geq m_1$ и номер m_2 : $T^j\overline{G}_2 \supset E$ при $j \geq m_2$. Найдется замкнутый интервал $E' \subseteq \overline{G}_1$ такой, что $T^{m_1}E' \subseteq \overline{G}_2$. Пусть m — произвольное нечетное число $> m_1 + m_2$. $T^mE' = = T^{m-m_1}\overline{G}_2 \supset E \supset E'$. Следовательно, существует точка $x \in E'$, для которой $T^mx = x$. Так как m — нечетное число, то точка x принадлежит циклу нечетного периода. Так как $x \in \overline{G}_1$, $T^{m_1}x \in \overline{G}_2$, то этот цикл имеет период > 1.

Следствие 3 справедливо в предположении, что множество $\mathcal{A}$ содержит неподвижную точку α и притом не имеет места случай $K_\alpha^-, K_\alpha^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T^2)$, $K_\alpha^-, K_\alpha^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$. Если предполагать только, что множество $\mathcal{A}$ содержит цикл периода k, то отображение $S = T^{2k}$ имеет притягивающее множество $\mathcal{A}'$, содержащее неподвижную точку β, и притом случай $K_\beta^-, K_\beta^+ \in \in \mathbb{K}_\beta(S^2)$, $K_\beta^-, K_\beta^+ \notin \mathbb{K}_\beta(S)$ не имеет места. Следовательно, отображение S имеет цикл нечетного периода > 1, а отображение T имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

В параграфе 2.5 доказано: если отображение имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то существует бесконечное притягивающее множество. Нетрудно показать (опираясь, например, на леммы 1 и 3 из параграфа 2.5), что при этом существует и бесконечное притягивающее множество, содержащее цикл.

Таким образом, *бесконечное притягивающее множество, содержащее цикл, существует тогда и только тогда, когда отображение имеет цикл периода* $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Если отображение имеет лишь циклы периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *то всякое притягивающее множество либо конечно и, следовательно, образует цикл, либо бесконечно и тогда не содержит циклов.*

Если множество $\mathcal{A}$ содержит плотное на R подмножество, то $\mathcal{A}$ должно состоять из конечного числа замкнутых интервалов (см. параграф 1.1). Поскольку $\mathcal{A}$ содержит к тому же неподвижную точку α, то $\mathcal{A} = [c, d]$. $T[c, d] = [c, d]$; W-окрестность $U \subset [c, d]$. Интервал $[c, d]$ согласно лемме 3 содержит либо последовательность W-точек, сходящихся к α, либо W-точки α и β : $T\beta = \alpha$, $\beta \neq \alpha$, причем β является либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой (см. доказательство леммы 3). В последнем случае лемма 4 утверждает, что существует W-точка $\beta' \in \mathcal{A}$: $T\beta' = \beta$; так как $\beta \neq \alpha$, $T\alpha = \alpha$, то $\beta' \neq \beta, \alpha$.

Итак, интервал (c, d) содержит по крайней мере одну W-точку; из теоремы 3.2.1 вытекает, что W-точки лежат на $[c, d]$ всюду плотно.

Таким образом, в дальнейшем можно предполагать, что множество $\mathcal{A}$ нигде не плотно на R. Это позволяет считать, что $[c, d] \not\subset H$. В таком случае, если точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и является предельной для множества $R \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ слева (справа) или точка x — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то какова бы ни была окрестность $G_{-x}(G_{+x})$, найдется номер m : $T^m G_{\mp x} \not\subset H$.

Поскольку пока мы не можем утверждать, что каждая W-точка является предельной для W-точек, введем следующие определения.

Всякую точку, предельную для W-точек, назовем W-предельной точкой. Всякую точку, предельную слева (соответственно, справа) для W-точек, назовем W^- (W^+)-предельной точкой.

Каждая $W\,(W^-, W^+)$-предельная точка является $W\,(W^-, W^+)$-точкой.

Пусть x — $W^-\,(W^+)$-предельная точка, $x' \in H$, $Tx' = x$.

Если для любой окрестности $G_{-x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{-x'}$ $(G_{+x} \subset TG_{-x'})$, то x' — W^--предельная точка.

Если для любой окрестности $G_{+x'}$ найдется окрестность $G_{-x} \subset TG_{+x'}$ $(G_{+x} \subset TG_{+x'})$, то x' — W^+-предельная точка.

Поэтому леммы 4, 5 остаются справедливыми, если в их формулировках W-точки заменить W-предельными точками.

Л е м м а 4$'$. *Если точка β является ω^-- и W^--предельной точкой или ω^+- и W^+-предельной точкой, то существует точка β', для которой $T\beta' = \beta$, являющаяся ω^-- и W^--предельной точкой или ω^+- и W^+-предельной точкой.*

Л е м м а 5$'$. *Если β является $W^-\,(W^+)$-предельной точкой, когда β — $\omega^-\,(\omega^+)$-предельная точка, и $T\beta' = \beta$, то β' является $W^-\,(W^+)$-предельной точкой, если β' — $\omega^-\,(\omega^+)$-предельная точка.*

Теорема 3.2.2. *Всякая $\omega^-\,(\omega^+)$-предельная точка является $W^-\,(W^+)$-предельной точкой.*

Доказательство. Существует замкнутое множество $F \subseteq \mathcal{A}$, обладающее свойствами:

А-1) $TF = F$;

А-2) всякая точка множества F является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Действительно, лемма 3 утверждает: или существует точка $\beta_0 \neq \alpha$, для которой $T\beta_0 = \alpha$ и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой, или α является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Таким образом, если согласно лемме 3 α — W-предельная точка, то множество $F = \{\alpha\}$ удовлетворяет условиям А. Если же существует W-точка $\beta_0 : \ T\beta_0 = \alpha$, то множество F можно построить следующим образом.

Найдется точка β_1, для которой $T\beta_1 = \beta_0$, и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой (лемма 4); найдется точка β_2, для которой $T\beta_2 = \beta_1$, и являющаяся либо ω^--предельной и W^--точкой, либо ω^+-предельной и W^+-точкой и т. д. Точки $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ попарно различны, так как $\beta_0 \neq \alpha$, $T\beta_0 = \alpha$, $T\alpha = \alpha$.

Обозначим F множество, состоящее из предельных точек последовательности $\{\beta_i\}_{i=0}^{\infty}$. Множество F замкнуто и не пусто. Очевидно, $TF = F$ и всякая точка множества F является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой.

Лемма $5'$ позволяет предполагать, что:

А-3) если $\beta \in F$ является $W^-(W^+)$-предельной точкой, когда β — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, и $\beta' \in F$, $T\beta' = \beta$, то β' является $W^-(W^+)$-предельной точкой, если β' — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка.

Из того, что всякая точка множества F является W-предельной, вытекает:

А-4) если $\beta \in F$, точки $T^j\beta$, $j = 0, 1, 2, \dots$, попарно различны и β — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то $\beta \in F$ является $W^-(W^+)$-предельной точкой;

А-5) если точка $\beta \in F$ принадлежит циклу периода k и пока неизвестно[5], является ли β $W^-(W^+)$- предельной точкой, то $K^-_\beta \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$ (соответственно, $K^+_\beta \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$); таких точек β — конечное число.

Докажем это. Обозначим a_i и b_i, соответственно, левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $1 \le i \le r$. Если множество $F \cap H_{i'}$ состоит из одной точки, то $a_{i'} = b_{i'}$; если множество $F \cap H_{i''}$ пусто, то точки a_i, b_i с номером $i = i''$ отсутствуют.

Предположим, существует точка $\beta \in F$, для которой

$$T^j\beta \in \bigcup_{1\le i\le r} (a_i, b_i), \quad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Если β — ω^--предельная точка, для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется номер j':

$$T^jG_{-\beta} \subset \bigcup_{1\le i\le r} [a_i, b_i] \text{ при } j < j', \quad T^{j'}G_{-\beta} \not\subset \bigcup_{1\le i\le r} [a_i, b_i].$$

Так как $T^{j'}\beta \in \bigcup\limits_{1\le i\le r} (a_i, b_i)$, то множество $T^{j'}G_{-\beta}$ содержит вместе с некоторой окрестностью хотя бы одну из W-точек a_i, b_i, $1 \le i \le r$. Следовательно, окрестность $G_{-\beta}$ также содержит

[5] Т.е. не может быть установлено при использовании сформулированных выше свойств W-предельных точек.

хотя бы одну W-точку и β является W^--предельной точкой. Аналогично, если β — ω^+-предельная точка, то β является и W^+-предельной точкой.

Если $\beta' \in F$ и точки $T^j\beta'$, $j = 0, 1, 2, \dots,$ попарно различны, то найдется номер $j'' :$ $T^j\beta' \in \bigcup\limits_{1\le i\le r} (a_i, b_i)$ при $j \ge j'$. Точка $T^{j''}\beta'$ обладает свойством А-4. Следовательно (лемма $5'$), точка β' также обладает свойством А-4.

Пусть точка $\beta' \in F$ принадлежит циклу периода k. Если $T^j\beta' \in \bigcup\limits_{1\le i\le r} (a_i, b_i)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, то, как показано выше, точка β' является $W^-\,(W^+)$-предельной точкой, как только β — $\omega^-\,(\omega^+)$-предельная точка. Циклов, у которых по крайней мере одна точка принадлежит множеству $\{a_i, b_i\}_{i=1}^r$, конечное число. Если точка β' принадлежит такому циклу и пока неизвестно, является ли β', например, W^--предельной точкой, то поскольку β' — W^+-предельная точка, $K_{\beta'}^- \in \mathbb{K}_{\beta'}(T^k)$. Таким образом, можно считать, что множество F обладает и свойством А-5.

Ниже мы докажем: если существует последовательность замкнутых множеств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\zeta \subset \ldots,$ $\zeta < \rho$, где ρ — некоторое порядковое число, удовлетворяющих условиям А, причем $F_\zeta \ne \mathcal{A}$, то можно построить замкнутое множество F_ρ, удовлетворяющее условиям А и такое, что $F_\zeta \subset F_\rho$ при $\zeta < \rho$. Так как всякая последовательность расширяющихся замкнутых множеств стационарна, найдется порядковое число $\rho' < \omega_1$ такое, что $F_{\rho'} = \mathcal{A}$. Таким образом, отсюда будет следовать, что множество $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям А.

Если $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям А, то всякая $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка является $W^-(W^+)$-предельной точкой. Действительно, если $\beta \in \mathcal{A}$ и точки $T^j\beta$, $j = 0, 1, 2, \dots,$ попарно различны, то об этом свидетельствует А-4. Допустим, точка β принадлежит циклу периода k и, используя свойства W-предельных точек, нельзя установить, что β является, например, W^--предельной точкой. В таком случае точка β не является предельной слева для множества $\mathcal{A}$ (ввиду А-2) и $K_\beta^- \in \mathbb{K}_\beta(T^k)$;

из леммы 1 вытекает, что β не является ω^--предельной точкой. Таким образом, утверждение верно и для точек циклов. Из А-3 следует, что тогда утверждение верно и для любой точки $\beta \in \mathcal{A}$, для которой существует номер j' такой, что $T^{j'}\beta$ — точка цикла.

Итак, для доказательства теоремы нужно уметь для любой последовательности замкнутых множеств $F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_\zeta \subset \subset \ldots$, $F_\zeta \neq \mathcal{A}$, $\zeta < \rho$, удовлетворяющих условиям А, построить замкнутое множество F_ρ, удовлетворяющее условиям А и такое, что $F_\zeta \subset F_\rho$ при $\zeta < \rho$. Если ρ — предельное порядковое число, то полагаем $F_\rho = \overline{\bigcup_{\zeta<\rho} F_\zeta}$. Множество F_ρ удовлетворяет условиям А (достаточно проверить лишь А-1 и А-2). Следовательно, остается доказать, что для любого замкнутого множества $F \neq \mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям А, можно построить замкнутое множество $F' \supset F$, также удовлетворяющее условиям А.

Будем считать нашу задачу выполненной всякий раз, когда будет найдена точка $\beta_0 \in \mathcal{A} \setminus F$ такая, что точки $\beta_i = T^i\beta_0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, являются либо ω^-- и W^--предельными точками, либо ω^+- и W^+-предельными точками.[6]

В этом случае найдутся точка β_{-1} : $T\beta_{-1} = \beta_0$, точка β_{-2} : $T\beta_{-2} = \beta_{-1}$, и т. д., каждая из которых является либо ω^-- и W^--предельной точкой, либо ω^+- и W^+-предельной точкой (лемма 4′). Положим $F' = F \cup \overline{\{\beta_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}}$. Множество F' замкнуто и, очевидно, выполняются условия А-1 и А-2.

Отыскание точки $\beta_0 \in \mathcal{A} \setminus F$ существенно опирается на теорему 1.1.5. Как при этом используется теорема 1.1.5 или частный случай этой теоремы — теорема 1.1.4, видно на простейшем случае, который сейчас рассмотрим.

Итак, пусть каждая точка множества F, являющаяся ω^- (ω^+)-предельной, является и $W^-(W^+)$-предельной точкой. Обо-

[6] Если теорема 3.2.2 справедлива, то справедливо и утверждение: если β — ω^-- и W^--предельная точка или ω^+- и W^+-предельная точка, то и $\beta' = T\beta$ также является ω^-- и W^--предельной или ω^+- и W^+-предельной точкой. Однако доказывать это утверждение непосредственно мы пока не умеем.

значим, как и ранее, a_i, b_i левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $1 \le i \le r$ (можно считать, что $F \cap H_i \ne \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, r$). Пусть $a_{i'} \in H_i \cap \{x < a_i\}$ и $a_{i'}$ является W-точкой, если a_i — ω^--предельная точка, или произвольной точкой, но такой, что $(a_{i'}, a_i) \cap \mathcal{A} = \varnothing$, если a_i не является ω^--предельной точкой. Аналогично, пусть $b_{i'} \in H_i \cap \{x > b_i\}$ и является W-точкой, если b_i — ω^+-предельная точка, или произвольной точкой, но такой, что $(b_i, b_{i'}) \cap \mathcal{A} = \varnothing$, если b_i не является ω^+-предельной точкой.

Положим $G_1 = \bigcup\limits_i (a_{i'}, b_{i'})$, $G_2 = \varnothing$. $F \subset G_1$; множество F не изолировано в $\mathcal{A}$ (следствие теоремы 1.1.1). Из теоремы 1.1.4 следует, что существует точка $\beta \in \mathcal{A} \setminus F$, для которой $T^j\beta \in \overline{G}_1$, $j = 1, 2, \ldots$.

Если существует номер j' : $T^{j'}\beta \in F$, то всякая точка $T^j\beta$, $0 \le j < j'$, является W^- (W^+)-предельной точкой, как только $T^j\beta$ — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка (лемма $5'$).

Пусть $T^j\beta \notin F$, $j = 1, 2, \ldots$. Положим

$$c_i = \begin{cases} a_{i'}, & \text{если} \quad a_i \text{ — } \omega^-\text{-предельная точка,} \\ a_i, & \text{если} \quad a_i \text{ не является } \omega^-\text{-предельной точкой;} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} b_{i'}, & \text{если} \quad b_i \text{ — } \omega^+\text{-предельная точка,} \\ b_i, & \text{если} \quad b_i \text{ не является } \omega^+\text{-предельной точкой.} \end{cases}$$

Можно считать, что $T^j\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Если β — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то для любой окрестности $G_{-\beta}$ $(G_{+\beta})$ найдется номер m : $T^jG_{\mp\beta} \subset H$ при $j < m$, $T^mG_{\mp\beta} \not\subset H$. Так как $T^m\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $T^mG_{\mp\beta} \not\subset \bigcup\limits_i [c_i, d_i]$, то множество $T^mG_{\mp\beta}$ содержит хотя бы одну из W-точек c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, вместе с некоторым открытым множеством. Следовательно, окрестность $G_{-\beta}$ $(G_{+\beta})$ содержит хотя бы одну W-точку; точка β является W^- (W^+)-предельной точкой. Аналогично доказывается, что и любая точка $\beta' = T^j\beta$, $j > 0$, является W^- (W^+)-предельной точкой, как только β' — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка.

Перейдем к рассмотрению общего случая, т. е. не будем предполагать, что всякая ω^- (ω^+)-предельная точка множества F является W^- (W^+)-предельной точкой. Последнее означает, что может существовать ω^- и ω^+-предельная точка, являющаяся, например, W^--предельной, о которой неизвестно, является ли она W^+-предельной точкой.

Предположим, что существует точка $\beta \in \mathcal{A} \setminus F$, для которой $T\beta \in F$.

Если $\beta' = T\beta$ — W^- (W^+)-предельная точка, как только β' — ω^- (ω^+)-предельная точка, то и точка β является W^- (W^+)-предельной точкой, если β — ω^- (ω^+)-предельная точка (лемма $5'$).

Предположим, что $\beta' = T\beta$ является ω^-, ω^+ и, например, W^--предельной точкой и еще не установлено, является ли β' W^+-предельной точкой. Если β — ω^--предельная точка и для любой окрестности $G_{-\beta}$ найдется окрестность $G_{-\beta'} \subset TG_{-\beta}$, то β — W^--предельная точка; если β — ω^+-предельная точка и для любой окрестности $G_{+\beta}$ найдется окрестность $G_{-\beta'} \subset \subset TG_{+\beta}$, то β — W^+-предельная точка. Следовательно, точка β является либо ω^- и W^--предельной точкой, либо ω^+ и W^+-предельной точкой.

Остается рассмотреть случай (*): существует окрестность $G_{-\beta}:\ TG_{-\beta} \subset K^*_{\beta'}$, если β — ω^--предельная точка, и окрестность $G_{+\beta}:\ TG_{+\beta} \subset K^*_{\beta'}$, если β — ω^+-предельная точка, где $*$ заменяет знак $-$, если неизвестно, является ли β' W^--предельной точкой, и знак $+$, если неизвестно, является ли β' W^+-предельной точкой. При этом найдется номер j' такой, что $T^{j'}\beta$ — точка цикла (ввиду А-4 и А-3).

Итак, ниже будем предполагать, что для любой точки $\beta \in \in \mathcal{A} \setminus F$ либо $T\beta \in \mathcal{A} \setminus F$, либо, если $T\beta \in F$, то для точек β и $\beta' = T\beta$ имеет место случай (*).

Обозначим $B_1, B_2, \ldots, B_s$ циклы, входящие во множество F и содержащие хотя бы одну ω^- и ω^+-предельную точку, о которой неизвестно, является ли она W^*-предельной точкой

($*$ заменяет либо $-$, либо $+$). Вследствие А-3 любая точка цикла B_i, $1 \le i \le s$, является таковой.

Пусть k_i — период цикла B_i, $1 \le i \le s$. Если $\beta \in B_i$, то согласно А-5 $K^*_\beta \in \mathbb{K}_\beta(T^{k_i})$. Выберем произвольным образом из каждого цикла B_i по одной точке β_i, $1 \le i \le s$. Найдутся окрестности $G_{*T^j\beta_i}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots s$, такие, что $T^j\overline{G_{*\beta_i}} = \overline{G_{*T^j\beta_i}}$, $j = 1, 2, \ldots, k_i - 1$, $T^{k_i}\overline{G_{*\beta_i}} \subset K^*_{\beta_i}$, $F \cap \cap T^{k_i}\overline{G_{*\beta_i}} = \{\beta_i\}$, $\overline{G_{*T^j\beta_i}} \subset H$. Очевидно, $F \cap \overline{G_{*T^j\beta_i}} = \varnothing$ для всех i, j; $T^{k_i}\overline{G_{*\beta_i}} \supset \overline{G_{*\beta_i}}$.

Положим

$$G_1 = H \setminus \bigcup_{i=1}^{s}(T^{k_i}\overline{G_{*\beta_i}} \setminus G_{*\beta_i} \setminus \{\beta_1\}) \ \text{ и } \ G_2 = \bigcup_{i=1}^{s}\bigcup_{j=0}^{k_i-1}\overline{G_{*T^j\beta_i}}.$$

G_1, G_2 — открытые множества, $F \subset G_1$, $F \cap G_2 = \varnothing$;

$$T\overline{G_2} = \overline{G_2} \cup \bigcup_{i=1}^{s}(T^{k_i}\overline{G_{*\beta_i}} \setminus G_{*\beta_i} \setminus \{\beta_1\}) \subset \overline{G_2} \cup (E \setminus G_1).$$

Для любой ω^*-предельной точки $\beta \in F$, о которой неизвестно, является ли она W^*-предельной точкой, существуют номер j' и окрестность $G_{*\beta}$ такие, что $T^j\beta \notin \bigcup_{i=1}^{s} B_i$ при $j < j'$ и $T^{j'}\beta \in \bigcup_{i=1}^{s} B_i$, $T^{j'}\overline{G_{*\beta}} \subset \overline{G_2}$.

При сделанных выше предположениях возможны два случая: либо

Б-1: *множество F не изолировано во множестве*

$$F \cup \{\gamma \in \mathcal{A} : T^j\gamma \notin F \cup G_2,\ j = 0, 1, 2, \ldots\},$$

либо

Б-2: *существует ω^- и W^- (ω^+ и W^+)-предельная точка $\beta \in F$, предельная слева (справа) для точек $\gamma \in \in \mathcal{A} \setminus F$, $T\gamma \notin F$, $\gamma \notin G_2$.*

Докажем это. Обозначим D множество точек $\delta \in \mathcal{A} \cap (E \setminus G_2)$, для которых $T\delta \in F$. Множество D замкнуто и $F \subset D$. Для любой точки $\delta \in D \setminus F$ существует номер $j_\delta :$ $T^{j_\delta}\delta \in \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$ и $T^j\delta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$ при $j < j_\delta$.

Предположим, что $D \setminus F$ — замкнутое множество. В этом случае существует m такое, что $j_\delta \leq m$ для $\delta \in D \setminus F$. Действительно, допустим найдутся $\delta_i \in D \setminus F$, $j = 1, 2, \ldots,$ для которых $j_{\delta_1} < j_{\delta_2} < \ldots$. Точки $T\delta_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ принадлежат F и попарно различны; если, например, $T\delta_{i_1} < T\delta_{i_2} < \ldots \to \delta'$, то $\delta' \in F$ и δ' является ω^- и W^--предельной точкой. Если точка δ'' является предельной для множества $\{\delta_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$ слева (справа), то δ'' — ω^- и W^- (ω^+ и W^+)-предельная точка; $\delta'' \in D \setminus F$, однако согласно предположению может иметь место лишь случай (*).

Положим $B = \bigcup\limits_{j=1}^{m} T^j(D \setminus F)$. $B \subseteq F$. Множество B замкнуто и, в частности, может быть пустым. Любая точка $\delta \in B$ такова, что относительно нее нельзя утверждать: δ является $W^-(W^+)$-предельной точкой, как только δ — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка (ввиду леммы $5'$ и предположения (*)).

Если $B \neq F$, возьмем открытое множество $G_B :$ $B \subset G_B$, $F \not\subset \overline{G_\beta}$. Для любой точки $\delta \in B$ найдется односторонняя окрестность $G_{*\delta}$: $G_{*\delta} \subset G_B$, $G_{*\delta} \cap F = \varnothing$, $T\overline{G_{*\delta}} \subset \overline{G_{*\delta'}}$, если $\delta' = T\delta$, и $T^{j'}\overline{G_{*\delta}} \subset \overline{G_2}$, если $T^{j'}\delta \in \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$, $T^j\delta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_i$ при $j < j'$. $G' = \bigcup\limits_{\delta \in B} G_{*\delta}$ — открытое множество, $F \cap G' = \varnothing$, $T\overline{G'} \subset \overline{G'} \cup \overline{G_2}$. Положим $G'_2 = G_2 \cup G'$; G'_2 — открытое множество, $F \cap G'_2 = \varnothing$, $T\overline{G'_2} \subset \overline{G'_2} \cup (E \setminus G_1)$.

Если $B = F$, полагаем $G'_2 = G_2$.

Пусть $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Для любого открытого множества $G \supset F$ и любого n найдется $n' > n :$ $T^{n'}x \in G \setminus G'_2$.

Для всякой точки $\delta \in D \setminus F$, являющейся $\omega^-(\omega^+)$-предельной точкой, существует окрестность $G_{-\delta}(G_{+\delta})$: $T\overline{G_{\mp\delta}} \subset \overline{G'_2}$. Однако, $\delta \in D \setminus F$ и точка δ не является ω^*-предельной точкой, поэтому не исключено, что для любой окрестности $G_{*\delta}$

$T\overline{G_{*\delta}}\not\subset\overline{G'_2}$ (и тогда δ — W^*-предельная точка). Обозначим $\widetilde{D}$ множество точек, принадлежащих $D\setminus F$ и являющихся либо только ω^--предельными, либо только ω^+-предельными. Если $\delta\in\widetilde{D}$ и не является, например, ω^--предельной точкой, возьмем окрестность $G_{-\delta}$, не содержащую точек T^jx, $j=0,1,2,\dots,$ и точки η_δ, $\eta'_\delta\in G_{-\delta}$, $\eta_\delta<\eta'_\delta$. На интервале $[\eta_\delta,\delta]$ построим непрерывное кусочно-линейное отображение $\widetilde{T}:\widetilde{T}_{\eta_\delta}=T_{\eta_\delta}$, $\widetilde{T}_{\eta'_\delta}=T_\delta$, $\widetilde{T}_\delta=T_\delta$. Найдется окрестность $G'_{-\delta}$: $\widetilde{T}\overline{G'_{-\delta}}\subset\overline{G'_2}$. Аналогично построим отображение T для каждой точки $\delta\in$ $\in\widetilde{D}$; отображение $\widetilde{T}$ определено на совокупности интервалов $[\eta_\delta,\delta]$ (или $[\delta,\eta_\delta]$), $\delta\in\widetilde{D}$. Полагаем, что вне интервалов $[\eta_\delta,\delta]$ отображение $\widetilde{T}$ совпадает с T. Отображение $\widetilde{T}$ определено и непрерывно на E и совпадает с T на множествах $\{T^jx\}_{j=0}^{\infty}$ и $\mathcal{A}$. Для любой точки $\delta\in D\setminus F$ найдется окрестность G_δ : $\widetilde{T}\overline{G_\delta}\subset\overline{G'_2}$. Положим $G''=\bigcup\limits_{\delta\in D\setminus F}G_\delta$. $D\setminus F\subset G''$, $\widetilde{T}\overline{G''}\subset\overline{G'_2}$. Можно считать, что $F\cap\overline{G''}=\varnothing$.

Возьмем произвольное открытое множество G : $F\subset G\subset G_1$ и последовательность чисел $j_1<j_2<\dots$ таких, что $\widetilde{T}^{j_n}x\in$ $\in G\setminus\overline{G'_2}$, $\widetilde{T}^{j_n-1}x\notin G\setminus\overline{G'_2}$, $n=1,2,\dots$. $\widetilde{T}^{j_n-1}x\notin G'_2$, так как $\widetilde{T}\overline{G'_2}\subset E\setminus(G_1\setminus\overline{G'_2})$, $G\subset G_1$. $\widetilde{T}^{j_n-1}x\notin G''$, так как $\widetilde{T}\overline{G''}\subset\overline{G'_2}$. Если точка $\tilde{\gamma}$ является предельной для множества $\{\widetilde{T}^{j_n-1}x\}_{n=1}^{\infty}$, то $\tilde{\gamma}\notin G'_2\cup G''$. Следовательно, точка $\gamma=\widetilde{T}\tilde{\gamma}$ не принадлежит F; $\gamma\in\overline{G}\setminus G'_2$. Множество G можно всегда выбрать так, что $\overline{G}\setminus G'_2\subset F\cup(\overline{G}\setminus\overline{G'_2})$, и тогда $\gamma\in\overline{G}\setminus\overline{G'_2}$, так как $\gamma\notin F$. Итак, F не изолировано во множестве $F\cup(\mathcal{A}\setminus$ $\setminus(\mathcal{A}\cap\overline{G'_2}))$.

Множество $G''_2=G'_2\cup G''$ открыто, $F\cap G''_2=\varnothing$, $\widetilde{T}\overline{G''_2}\subset$ $\subset\overline{G''_2}\cup(E\setminus G_1)$. Множество F не изолировано во множестве $F\cup(\mathcal{A}\setminus(\mathcal{A}\cap\overline{G''_2}))$, так как $F\cap\overline{G''}=\varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $\widetilde{G}$: $F\subset\widetilde{G}$, $\overline{\widetilde{G}}\subset G_1$. Найдется точка $\gamma\in\mathcal{A}\setminus F$: $\gamma\notin G''_2$, $T^j\gamma\in\overline{\widetilde{G}}\setminus G''_2$, $j=1,2,\dots$ (теорема 1.1.5). На множестве $\mathcal{A}$ отображения $\widetilde{T}$ и T совпадают. Следовательно, $T^j\gamma\notin G''_2$, $j=0,1,2,\dots$ Поскольку $D\setminus F\subset G''_2$, то $T^j\gamma\notin F$, $j=1,2,\dots$ Таким образом, всякое открытое множество, содержащее F, содержит точку $\gamma \in \mathcal{A}$, для которой $T^j\gamma \notin F \cup G_2$, $j = 0, 1, 2, \dots$; множество F обладает свойством Б-1.

Пусть $D \setminus F$ — незамкнутое множество, т. е. F не изолировано в D.

Предположим, что существует ω^- и W^- (ω^+ и W^+)-предельная точка $\beta' \in F$ и последовательность точек $\gamma_1' < < \gamma_2' < \dots \to \beta'$ (соответственно, $\gamma_1' > \gamma_2' > \dots \to \beta'$), $\gamma_i' \in \in D \setminus F$, $i = 1, 2, \dots$. Так как $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$, для каждой точки γ_i' найдется точка $\gamma_i :$ $T\gamma_i = \gamma_i'$, $\gamma_i \in \mathcal{A}$. Так как $TF = F$, $T\gamma_i \notin F$, то $\gamma_i \notin F$, $i = 1, 2, \dots$ Можно считать, что $\gamma_i' \in G_1$, $i = 1, 2, \dots$; тогда $\gamma_i \notin G_2$, так как $\gamma_i' \notin G_2$, $T\overline{G_2} \subset \overline{G_2} \cup \cup (E \setminus G_1)$. Пусть точка β является предельной для множества $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$. Если β является предельной слева, то β — ω^- и W^--предельная точка, если β является предельной справа, то β — ω^+ и W^+-предельная точка. Точка β принадлежит F (в силу предложения (*)); множество F обладает свойством Б-2.

Предположим, что для любой точки множества F, предельной слева (справа) для множества $D \setminus F$, неизвестно, является ли она W^- (W^+)-предельной точкой. В этом случае существует лишь конечное число точек множества F, предельных для множества $D \setminus F$ (если множество таких точек бесконечно, то всякая предельная для них точка является ω^-, W^--предельной и предельной слева для множества $D \setminus F$ или ω^+, W^+-предельной и предельной справа для множества $D \setminus F$). Существует открытое множество $G :$ $F \cap G = \varnothing$, $T\overline{G} \subset \overline{G} \cup \overline{G_2}$, множество $(D \setminus F) \cap (E \setminus G)$ замкнуто, для любой ω^* и W^*-предельной точки $\beta \in F$ найдется окрестность $G_{*\beta} :$ $G \cap G_{*\beta} = \varnothing$. Повторяя далее рассуждения, приведенные в случае, когда $D \setminus F$ — замкнутое множество, найдем, что множество F обладает свойством Б-1.

Итак, множество F обладает свойством Б-1 или свойством Б-2.

Из Б-1 следует Б-2. Действительно, если, например, точка β является предельной слева для множества $\{\gamma \in \mathcal{A} : T^j\gamma \notin F \cup$

$\cup\, G_2,\ j = 0, 1, 2, \ldots\}$, то β — ω^- и W^--предельная точка, так как для любой окрестности $G_{-\beta}$ $T^j\overline{G_{-\beta}} \not\subset \overline{G_2},\ j = 0, 1, 2, \ldots$

Выберем последовательность точек $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_i \in D \setminus F$, $T\gamma_i \notin F$, $\gamma_i \notin G_2$, $i = 1, 2, \ldots$, сходящуюся слева (справа) к некоторой ω^- и W^- (w^+ и W^+)-предельной точке $\beta \in F$. Можно всегда предположить, что $\gamma_i \notin \overline{G_2}$, $i = 1, 2, \ldots$

Обозначим $\widehat{F}$ множество точек, принадлежащих F, являющихся ω^- и ω^+-предельными, о которых неизвестно, являются ли они W^*-предельными точками. Если $\delta \in \widehat{F}$, то и $T\delta \in \widehat{F}$ (вследствие А-3); существует номер j_δ : $T^j\delta \notin \bigcup\limits_{i=1}^{r} B_i$ при $j < j_\delta$, $T^{j_\delta}\delta \in \bigcup\limits_{i=1}^{r} B_i$ (вследствие А-4). Для любой точки $\delta \in \widehat{F}$ найдется окрестность $G_{*\delta}$: $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap G_{*\delta} = \varnothing$, $F \cap G_{*\delta} = \varnothing$, $T\overline{G_{*\delta}} \subset \overline{G_{*T\delta}}$, $T^{j_\delta}\overline{G_{*\delta}} \subset \overline{G_2}$.

Обозначим $\widehat{G}$ множество $\bigcup\limits_{\delta \in \widehat{F}} G_{*\delta}$. $\widehat{G}$ — открытое множество, $F \cap \widehat{G} = \varnothing$, $T\overline{\widehat{G}} \subset \overline{\widehat{G}} \cup \overline{G_2}$; $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{\widehat{G}} = \varnothing$, так как $\overline{\widehat{G}} \subset \bigcup\limits_{\delta \in \widehat{F}} \overline{G_{*\delta}} \cup F$.

Рассмотрим множество $D \setminus F$. Точки γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, не принадлежат $D \setminus F$; $T(D \setminus F) \subset \widehat{F}$; если точка $\delta \in D \setminus F$ является $\omega^-(\omega^+)$-предельной точкой, найдется окрестность $G_{-\delta}$ $(G_{+\delta})$: $T\overline{G_{\mp\delta}} \subset \overline{\widehat{G}}$ (согласно предположениям). Однако если точка $\delta \in D \setminus F$ не является ω^*-предельной точкой, то возможно, что для любой окрестности $G_{*\delta}$ $T\overline{G_{*\delta}} \not\subset \overline{\widehat{G}}$. Поэтому, как и при доказательстве свойств Б, перейдем к отображению $\widetilde{T}$, изменив отображение T указанным выше способом. Для любой точки $\delta \in D \setminus F$ найдется окрестность G_δ : $\widetilde{T}\overline{G_\delta} \subset \overline{\widehat{G}}$, $F \cap G_\delta = \varnothing$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{G_\delta} = \varnothing$.

Множество $\widetilde{G} = \bigcup\limits_{\delta \in D \setminus F} G_\delta$ открыто, $F \cap \widetilde{G} = \varnothing$, $\widetilde{T}\overline{\widetilde{G}} \subset \overline{\widehat{G}}$; $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{\widetilde{G}} = \varnothing$, так как $\overline{\widetilde{G}} \subset \bigcup\limits_{\delta \in D \setminus F} \overline{G_\delta} \cup D$.

Множество $\widetilde{G}_2 = G_2 \cup \widehat{G} \cup \widetilde{G}$ открыто, $F \cap \widetilde{G}_2 = \varnothing$, $\widetilde{T}\overline{\widetilde{G}_2} \subset$ $\subset \overline{\widetilde{G}_2} \cup (E \setminus G_1)$. Множество F не изолировано в $F \cup (\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A} \cap$ $\cap \overline{\widetilde{G}_2}))$, так как $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty} \cap \overline{\widetilde{G}_2} = \varnothing$.

Возьмем произвольное открытое множество G'_1 : $F \subset G'_1$, $\overline{G'_1} \subset G_1$. Существует точка $\delta \in D \setminus F$: $\delta \notin \widetilde{G}_2$, $\widetilde{T}^j\delta \in \overline{G'_1} \setminus \widetilde{G}_2$, $j = 1, 2, \dots$ (теорема 1.1.5). Так как $\delta \notin F$, $\widetilde{T}^j\delta \in \widetilde{G}$, $j =$ $= 0, 1, 2, \dots,$ $\widetilde{G} \supset D \setminus F$ и на множестве $\mathcal{A}$ отображения $\widetilde{T}$ и T совпадают, то $T^j\delta \notin F$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, в любом открытом множестве $H' \supset F$ найдется точка $\gamma \in \mathcal{A}$, для которой $T^j\gamma \in H' \setminus F$, $T^j\gamma \notin G_2 \cup \widehat{G}$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Множество H' построим следующим образом. Пусть a_i, b_i — левый и правый концы множества $F \cap H_i$, $i = 1, 2, \dots, r$ (если $F \cap H_{i'} = \varnothing$, то точек a_i, b_i с номером $i = i'$ нет и множество $H_{i'}$ можно не рассматривать).

Возьмем точку $a_{i'} \in H_i$, $a_{i'} < a_i$, такую, что

1) $a_{i'}$ — W-точка, если a_i — ω^- и W^--предельная точка,

2) $(a_{i'}, a_i) \subset G_2 \cup \widehat{G}$, если a_i — ω^--предельная точка и неизвестно, является ли a_i W^--предельной точкой;

Возьмем точку $b_{i'} \in H_i$, $b_{i'} > b_i$, такую, что

1) $b_{i'}$ — W-точка, если b_i — ω^+ и W^+-предельная точка,

2) $(b_i, b_{i'}) \subset G_2 \cup \widehat{G}$, если b_i — ω^+-предельная точка и неизвестно, является ли b_i W^+-предельной точкой.

Множество $H' = \bigcup\limits_i (a_{i'}, b_{i'})$ содержит F. Найдется точка $\beta \in \mathcal{A}$, для которой $T^j\beta \in H' \setminus F$, $T^j\beta \notin G_2 \cup \widehat{G}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Положим

$$c_i = \begin{cases} a_{i'}, & \text{если } a_i \text{ — } \omega^- \text{ и } W^-\text{-предельная точка,} \\ a_i & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} b_{i'}, & \text{если } b_i \text{ — } \omega^+ \text{ и } W^+\text{-предельная точка,} \\ b_i & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, $T^j\beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, $j = 0, 1, 2, \dots$ Точки c_i, d_i, $1 \le i \le r$, являются W-точками. Если β — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка, то для любой окрестности $G_{-\beta}$ $(G_{+\beta})$ найдется номер m : $T^j G_{\mp\beta} \subset \bigcup\limits_i [c_i, d_i]$ при $j < m$, $T^m G_{\mp\beta} \not\subset \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$. Так как $T^m \beta \in \bigcup\limits_i (c_i, d_i)$, то множество $T^j G_{\mp\beta}$ содержит хотя бы одну из W-точек c_i, d_i, $1 \le i \le r$, вместе с некоторой окрестностью (двусторонней); следовательно, множество $G_{\mp\beta}$ содержит хотя бы одну W-точку и точка β является $W^-(W^+)$-предельной. Аналогично доказывается, что и каждая точка $T^j\beta$, $j = 1, 2, \ldots,$ является $W^-(W^+)$-предельной точкой, как только $T^j\beta$ — $\omega^-(\omega^+)$-предельная точка.

Теорема 3.2.2 полностью доказана.

Теорема 3.2.3. *Всякая точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \in \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ предельная слева (справа) для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, является W^- (W^+)-предельной точкой.*

Если точка x является предельной, например, слева для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, то для любой окрестности G_{-x} найдется либо окрестность $G_{-Tx} \subset TG_{-x}$, причем точка Tx является предельной слева для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, либо окрестность $G_{+Tx} \subset TG_{-x}$, причем точка Tx является предельной справа для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Следовательно, если теорема справедлива для точки $x' = Tx$, то она справедлива и для точки x; теорему достаточно доказать для некоторой точки $T^{j'}x$, $j' \ge 0$.

Если существует номер j' : $T^{j'}x \in \mathcal{A}$, то теорема 3.2.3 справедлива (теорема 3.2.2). Ниже будем предполагать, что $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть a_i, b_i — левый и правый концы множества $\mathcal{A} \cap H_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Пусть c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, — W-точки, принадлежащие H_i и такие, что

1) $c_i < a_i$, если a_i — ω^--предельная точка, и $c_i = a_i$, если a_i не является ω^--предельной точкой;

2) $d_i > b_i$, если b_i — ω^+-предельная точка и $d_i = b_i$, если b_i не являются ω^+-предельной точкой.

Найдется номер j' : $T^j x \in \bigcup\limits_i^r (c_i, d_i)$ при $j \ge j'$.

Предположим, точка $x' = T^{j'}x$ является предельной слева для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Покажем, что любая окрестность $G_{-x'}$ содержит хотя бы одну W-точку. Действительно, найдется номер m : $T^j G_{-x'} \subset \bigcup\limits_i^r [c_i, d_i]$ при $j < m$, $T^m G_{-x'} \not\subset$ $\not\subset \bigcup\limits_i^r [c_i, d_i]$ (следствие теоремы 3.2.1). Так как $T^m x' \in \bigcup\limits_i^r (c_i, d_i)$, то интервал $T^m G_{-x'}$ содержит по крайней мере одну из W-точек c_i, d_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, вместе с некоторой, окрестностью. Следовательно, и множество $G_{-x'}$ содержит W-точку. Теорема доказана.

Теорема 3.2.3 содержит достаточно тонкий результат. Значительная часть дальнейших результатов этой главы и следующей так или иначе опирается на эту доказанную теорему.

Приведем теорему 3.2.3 в более пространной форме.

Пусть выполнены предположения (B): множество $\mathcal{A}$ *содержит неподвижную точку* α *и*

1) $K^-, K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, *или*

2) $K^- \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$, *или*

2′) $K^- \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$, $K^+ \in \mathbb{K}_\alpha(T)$, *или*

3) $K^-, K^+ \notin \mathbb{K}_\alpha(T)$.

Для любой окрестности H *множества* $\mathcal{A}$ W*-окрестность* $U = U(H, W)$ *обладает свойством: если точка* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *является предельной слева (справа) для множества* $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *и* $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ *то для любой окрестности* $G_{-x}(G_{+x})$ *и любого замкнутого множества* $V \subset U$ *найдутся замкнутое множество* $V' \subset G_{\mp x}$ *и номер* m : $T^j V' \subset H$ *при* $j < m$, $T^j V' \subset V$ *при* $j \geq m$; *если* V *— интервал, то и в качестве* V' *можно взять интервал.*

Напомним, что под окрестностью множества $\mathcal{A}$ понимается открытая окрестность, каждая компонента которой содержит точки множества $\mathcal{A}$.

Приведем некоторые следствия теоремы 3.2.3.

Теорема 3.2.4. *Пусть множество* $\mathcal{A}$ *содержит цикл и* σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_r$ *— открытые множества такие, что* $\sigma_i \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$,

$i = 1, 2, \ldots, r,\quad \bigcup\limits_{i=1}^{r} \sigma_i \supset \mathcal{A}$. *Существует цикл, состоящий из точек* $\beta_1, \ldots, \beta_m$, *такой, что* $\sigma_i \cap \{\beta_j\}_{j=1}^m \neq \varnothing,\ i = 1, 2, \ldots m$, $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \sigma_i \supset \{\beta_j\}_{j=1}^m$.

Эта теорема является уточнением теорем 5.1 и 5.2. Теорема показывает, что множество $\mathcal{A}$ равномерно аппроксимируется циклами отображения T.

Доказательство. Пусть $H = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \sigma_i$ и выполнены предположения (B). Можно построить (открытое расширяющееся) множество W (лемма 3) и W-окрестность $U(H, W)$; для этой W-окрестности имеет место теорема 3.2.3.

Возьмем произвольную точку $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \cap W$, для которой $T^j x \in H,\ j = 1, 2, \ldots,$ предельную для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$. Найдется номер m': для каждого $\sigma_i,\quad 1 \leq i \leq r$, существует номер $m_i \leq m'$ такой, что $T^{m_i} x \in \sigma_i$. Возьмем окрестность $G_x:\ T^j \overline{G_x} \subset \sigma_i$ при $T^j x \in \sigma_i,\quad 0 \leq j \leq m',\quad \overline{G_x} \subset W$. Пусть $V = \overline{G_x}$. Существуют замкнутый интервал $V' \subset V$ и номер $m \geq m'$ такие, что $T^j V' \subset H$ при $j < m,\quad T^m V' \supseteq V$ (теорема 3.2.3). Так как $T^m V' \supset V'$, то существует точка $\beta \in V'$, для которой $T^m \beta = \beta$. Точки $\beta, T\beta, \ldots, T^{m-1}\beta$ образуют цикл периода $\leq m$. Этот цикл содержится в H. Так как $\beta \in \overline{G_x}$, то каждое $\sigma_i,\quad 1 \leq i \leq r$, содержит хотя бы одну точку цикла.

Рассмотрим теорему 3.2.4 в общем случае, когда известно только, что множество $\mathcal{A}$ содержит цикл. Пусть цикл имеет период k и α — точка этого цикла.

Для отображения $S = T^{2k}$ точка α является неподвижной точкой и удовлетворяет условиям 1)—3). Если $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, то для отображения $S = T^{2k}$ траектория $\{T^j x\}_{j=0}^\infty$ распадается на $2k$ траекторий и множество $\mathcal{A}$ распадается на $2k$ притягивающих множеств $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}, \ldots, \mathcal{A}^{(2k)}$, причем (**)

$$T\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(2)}, \ldots, T\mathcal{A}^{(2k-1)} = \mathcal{A}^{(2k)}, T\mathcal{A}^{(2k)} = \mathcal{A}^{(1)}, \bigcup_{q=1}^{2k} \mathcal{A}^{(q)} = \mathcal{A}.$$

Если $\alpha \in \mathcal{A}^{(q')}$, то для множества $\mathcal{A}^{(q')}$ теорема 3.2.4 справедлива (ибо выполнены предположения (В)). Можно выбрать открытые множества $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{r'}$ так, что $\sigma'_{i'} \cap \mathcal{A}^{(q')} \neq \varnothing$, $i' = 1, 2, \ldots, r'$, $H' = \bigcup\limits_{i'=1}^{r'} \sigma'_{i'} \supset \mathcal{A}^{(q')}$, $T^j H' \subset H$, $j = 0, 1, \ldots, 2k-1$, и для любого σ_i, $1 \leq i \leq r$, найдутся $\sigma'_{i'}$, $1 \leq i' \leq r'$, и номер $j' < 2k:$ $\sigma_i \supset T^{j'} \sigma'_{i'}$ (ввиду свойств (**) и непрерывности отображения). Если точки $\beta, S\beta, \ldots, S^{m-1}\beta$ образуют цикл отображения S, содержащийся в H', то точки $\beta, T\beta, \ldots, T^{2mk-1}\beta$ образуют цикл отображения T, содержащийся в H. Если каждое $\sigma'_{i'}$, $1 \leq i' \leq r'$, содержит точку цикла отображения S, то и каждое σ_i, $1 \leq i \leq r$, содержит точку цикла отображения T.

Тем самым теорема 3.2.4 доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между поведением отображения в окрестности множества $\mathcal{A}$ и структурой множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Теорема 3.2.5. *Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл и существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — множество 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена.*

Доказательство теоремы повторяет в основном доказательство аналогичного утверждения в случае, когда $\mathcal{A}$ — неподвижная точка, данное в параграфе 3.1. Поэтому ниже отметим лишь некоторые отличия от указанного доказательства.

Пусть выполняются предположения (В).

Будем полагать, что открытое множество G удовлетворяет условию (Г), *если всякая точка, являющаяся концом одной из компонент множества G, либо принадлежит множеству $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, либо, если она принадлежит $\mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, то множеству $\mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ принадлежит и некоторый открытый в E интервал, содержащий эту точку.*

Выберем окрестность H множества $\mathcal{A}$ так, чтобы множество H удовлетворяло условию (Г). Это всегда можно сделать, учитывая, что всякая ω^- (ω^+)-предельная точка является предельной слева (справа) для множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, всякая точка множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A}'), \mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ слева (справа), является предельной слева (справа) и для множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}'' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$ (следствие теоремы 3.2.1).

Построим W-окрестность U. При этом множество W можно выбрать так, чтобы W удовлетворяло условию (Г).

Обозначим J множество, состоящее из точек
$$x \in \bigcup_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap \overline{W},$$
предельных для множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, для которых $T^j x \in \overline{H}$, $j = 1, 2, \ldots$ Множество J непусто (условие теоремы); $TJ \supset J$; J — множество типа G_δ. Если точка $x \in J$ является предельной слева (справа) для множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, то для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любой точки $x' \in J$ найдется номер m : $T^m(G_{\mp x} \cap J) \ni x'$ (ибо x — $W^-(W^+)$-точка). Всякая точка множества J является предельной для множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ по крайней мере либо слева, либо справа (ввиду условия (Г)). Поэтому множество J плотно в себе. С использованием теоремы 3.2.1, как и в параграфе 3.1, доказывается, что множество J нигде не компактно. Следовательно, J гомеоморфно множеству иррациональных чисел.

Далее, как и в параграфе 3.1, показывается, что $J \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — множество 3-го класса.

Если вместо выполнения условий (В) требовать только, чтобы множество $\mathcal{A}$ содержало цикл, например, периода k, то непосредственный переход к отображению $S = T^{2k}$, использованный при доказательстве теоремы 3.2.4., в данном случае ничего не дает: точки множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ могут вести себя в окрестности множества $\mathcal{A}$ существенно различным образом и при переходе к отображению $S = T^{2k}$ множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ может притягиваться не $2k$ притягивающими множествами, а, быть может, бесконечным числом таких множеств.

Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл периода k, можно построить открытое множество $W \subset H: \ TW \supset W, \ \ \mathcal{A} \cap W \neq \varnothing$ и W-окрестность $U = U(H, W)$. Если точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является предельной слева (справа) для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то для любой окрестности $G_{-x}(G_{+x})$ и любого замкнутого множества $V \subset U$ найдутся замкнутое множество $V' \subset \bigcup\limits_{j=0}^{2k-1} T^j G_{\mp x}$ (а не $\subset G_{\mp x}$, как в случае, когда $\mathcal{A}$ содержит неподвижную точку) и номер $m: \ \ T^j V' \subset H$ при $j < m$, $\ T^j V' \supset V$ при $j \geq m$.

Этот факт нетрудно получить как следствие теоремы 3.2.3. Отмеченное выше различие свойств W-окрестности не существенно для указанного ранее доказательства того, что $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — множество 3-го класса.

Замечание. При доказательстве теоремы наличие точки $x \in \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, нужно лишь для того, чтобы множество J и его подмножества типа множеств F из параграфа 3.1 были непустыми. Это всегда будет выполняться и при более слабом условии: во всякой W-окрестности U множества $\mathcal{A}$ (W-окрестность можно заменить обычной окрестностью, если $\mathcal{A}$ — нигде не плотное множество) существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, $\ x \notin \mathcal{A}$, для которой $T^j x \in U$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (возможно, $T^j x \in \mathcal{A}$, начиная с некоторого $j' \geq 1$). Выполнение этого условия зачастую легко усмотреть. Из доказываемой ниже теоремы 3.2.6 вытекает: если во всякой W-окрестности U множества $\mathcal{A}$ существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, $\ x \notin \mathcal{A}$, $\ Tx \in \mathcal{A}$, то существует и точка $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x' \notin \mathcal{A}$, $j = = 0, 1, 2, \ldots$

Следствие 1. *Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл и изолированную в $\mathcal{A}$ точку, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ — множество 3-го класса.*

Действительно, если $\mathcal{A}$ содержит изолированную точку, то $\mathcal{A} \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) = \varnothing$.

Следствие 2. *Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл и существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, то существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$.*

Действительно, если существует окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством (следствие теоремы 1.2.1), т. е. множеством класса ≤ 2.

Следствие 3. *Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл и существует окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то для любой точки $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ существует номер j_x : $T^j x \in \mathcal{A}$ при $j \geq j_x$.*

Такое множество $\mathcal{A}$, очевидно, является совершенным множеством.

Если не предполагать, что множество $\mathcal{A}$ содержит цикл, то можно построить примеры, когда утверждения теоремы 3.2.5 и следствий 1, 2, 3 не имеют места.

Справедливо утверждение, обратное следствию 2.

Теорема 3.2.6. *Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл и во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, для которой $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.*

Будем предполагать, что выполнены условия (B). Доказательство в общем случае почти ничем не отличается от приводимого ниже.

Рассмотрим последовательность окрестностей $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$ множества $\mathcal{A}$ такую, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_n = \mathcal{A}$, и последовательность соответствующих W-окрестностей $U_1, U_2, \ldots$ Для каждого n выберем множество $\mathcal{A}_n$: $H_n \supset \mathcal{A}_n \supset \mathcal{A}$ и точку $x_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})_n) \cap \cap W_{n-1}$, предельную для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})_n)$ и такую, что $T^j x_n \in H_n$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $H_n = \bigcup\limits_{s=1}^{k_n} \sigma_n^s$, где σ_n^s, $s = = 1, 2, \ldots, k_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — открытые множества, $\sigma_n^s \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$, и система $\{\sigma_n^s\}_{s,n}$ образует базис пространства E на множестве $\mathcal{A}$ (т. е. для любой окрестности G_x каждой точки $x \in \mathcal{A}$ существует $\sigma_{n'}^{s'} \subset G_x$). Для каждого n найдутся 1) номер $j_{n'}$: $\sigma_n^s \cap \{T^j x_n\}_{j=0}^{j_{n'}} \neq \varnothing$, 2) окрестность G_{x_n} : $\mathcal{A} \cap G_{x_n}$, $\overline{G_{x_n}} \subset W_{n-1}$, $T^j G_{x_n} \subset \sigma_n^{s'}$ при $j < j_{n'}$, как только $T^j x_n \in \sigma_n^{s'}$, 3) номер $j_n \geq \geq j_{n'}$ и замкнутое множество $V_n \subset G_{x_n}$: $T^j V_n \subset H_n$ при $j < j_n$,

$T^{j_n}V_n \supset G_{x_{n+1}}$. Возьмем замкнутое множество $F_1 \subset V_1$, для которого $T^{j_1}F_1 = V_2$, замкнутое множество $F_2 \subset F_1$, для которого $T^{j_1+j_2}F_2 = V_3$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ непусто и, если $x \in \bigcap\limits_{n=1} F_n$, то $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, $T^j x \notin \mathcal{A}$, $j = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является множеством 3-го класса, если (и только если) во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$.

Назовем ω*-окрестностью множества* $\mathcal{A}$ *всякое множество* $Q_{\mathcal{A}}$, *обладающее свойством: какова бы ни была точка* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, *существует номер* j_x : $T^j x \in Q_{\mathcal{A}}$ *при* $j \geq j_x$.

Пусть $x \in \mathcal{A}$ и $G_x = G_{-x} \cup \{x\} \cup G_{+x}$ — произвольная окрестность точки x. Положим

$$Q_x = \begin{cases} G_x, & \text{если } x \text{ является } \omega^-\text{- и } \omega^+\text{-предельной точкой,} \\ G_{-x}(G_{+x}), & \text{если } x \text{ является только } \omega^-(\omega^+)\text{-предельной.} \end{cases}$$

Множество $\bigcup\limits_{x \in \mathcal{A}} Q_x$ является ω-окрестностью множества $\mathcal{A}$.

Всякая W-окрестность множества $\mathcal{A}$ согласно определению является его ω-окрестностью.

Если существует окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то, как утверждает следствие 3, множество $\mathcal{A}$ является ω-окрестностью для самого себя.

Теорема 3.2.7. *Если множество* $\mathcal{A}_1$ *содержит цикл,* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ *и существует окрестность множества* $\mathcal{A}_2$, *не содержащая множеств* $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_2$, *то для любой точки* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$ *существует номер* j_x : $T^{j_x}x \in \mathcal{A}_2$ (т. е. множество $\mathcal{A}_2$ является ω-окрестностью множества $\mathcal{A}_1$).

Теорема 3.2.7 вытекает из теоремы 3.2.5 (следствие 3) и следующего утверждения: *если множество* $\mathcal{A}_1$ *содержит цикл,* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ *и существует точка* $x \in \mathcal{A}_1$, *для которой* $T^j x \notin \mathcal{A}_2$, $j = 0, 1, 2, \dots$, *то существует и точка* $x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2)$, *для которой* $T^j x' \notin \mathcal{A}_2$, $j = 0, 1, 2, \dots$

Докажем последнее. Пусть $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ — окрестности множества $\mathcal{A}_2, \bigcap\limits_i H_i = \mathcal{A}_2$ и $H_i = \bigcup\limits_{s=1}^{k_i} \sigma_i^s$, где σ_i^s, $s = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots,$ — открытые множества, $\sigma_i^s \cap \mathcal{A}_2 \neq \varnothing$ и система $\{\sigma_i^s\}_{s,i}$ образует базис пространства E на множестве $\mathcal{A}_2$. Построим W-окрестности $U_i(H_i, W_i)$ множества $\mathcal{A}_1$. Так как $H_2 \supset \mathcal{A}_2$, $W_i \cap \mathcal{A}_2 \neq \varnothing$, то множества U_i, $i = 1, 2, \dots,$ являются W-окрестностями и множества $\mathcal{A}_2$. Можно считать, что точка x является предельной для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$ (учитывая лемму 4 из параграфа 3.1). Для каждого i найдется номер r_i : $T^{r_i} x \in W_i$, $T^j \in U_i$ при $j \geq r_i$. Пусть G_i — окрестность точки $T^{r_i} x$ такая, что $\overline{G_i} \subset W_i$, $\overline{G_i} \cap \mathcal{A}_2 = \varnothing$, $i = 1, 2, \dots$. Выберем точки $x_i \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2) \cap W_i$, $i = 1, 2, \dots$. Для каждого i найдется номер r'_i : $\sigma_i^s \cap \{T^j x_i\}_{j=0}^{r'_i} \neq \varnothing$, $s = 1, \dots, k_i$. Выберем окрестности G_{x_i} : $\overline{G_{x_i}} \subset W_i$, $T^j G_{x_i} \subset \sigma_i^{s'}$ при $j \leq r'_i$, как только $T^j x_i \in \sigma_i^{s'}$, $i = 1, 2, \dots$. Так как U_i — W-окрестность множества $\mathcal{A}_1$, существуют замкнутое множество $V_i \subset G_i$ и номер m_i : $T^{m_i} V_i \supset G_{x_i}$, $i = 1, 2, \dots$ (следствие теоремы 3.2.3). Так как U_i — W-окрестность множества $\mathcal{A}_2$, то существуют замкнутое множество $V'_i \subset G_{x_i}$ и номер $m'_i \geq r'_i$: $T^{m'_i} V'_i \supset G_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ (следствие теоремы 3.2.3). Найдутся замкнутое множество $F_1 \subset V_1$: $T^{m_1} F_1 \subset V'_1$, $T^{m_1 + m'_1} F_1 = V_2$, замкнутое множество $F_2 \subset F_1$: $T^{m_1 + m'_1 + m_2} F_2 \subset V'_2$, $T^{m_1 + m'_1 + m_2 + m'_2} F_2 = V_3$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ непусто и если $x' \in \bigcap\limits_{i=1} F_i$, то $\mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}_2$. $\{T^j x'\}_{j=0}^{\infty} \cap \mathcal{A}_2 = \varnothing$, так как $T^{\sum\limits_{i=1}^{n} (m_i + m'_i)} x' \in V_{n+1}$, $V_{n+1} \cap \mathcal{A}_2 = \varnothing$, $n = 1, 2, \dots$.

3.3. Притягивающие множества, не содержащие циклов

Остается рассмотреть случай, когда притягивающее множество $\mathcal{A}$ не содержит циклов. Здесь необходимо различать две существенно разные ситуации: существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, содержащее цикл, или такое множество не существует.

Предположим, что существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, содержащее цикл. В этом случае отображение в окрестности множества $\mathcal{A}$ ведет себя примерно таким же образом, как и тогда, когда $\mathcal{A}$ содержит цикл.

Вот, например, утверждение, вытекающее из теоремы 3.2.1: *если существует множество* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *для которого выполнены условия (B) (см. параграф 3.2), то для любой окрестности* $G_{-x}(G_{+x})$ *точки* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, *содержащей хотя бы одну точку множества* $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, *и любого замкнутого множества* $F \subset (c, d)$, *где* c *и* d *— соответственно, левый и правый концы множества* $\mathcal{A}'$, *найдется номер* $m:$ $T^j G_{\mp x} \supset F$ *при* $j \geq m$.

Имеет место также утверждение, аналогичное теореме 3.2.3.

Если во всякой окрестности H *множества* $\mathcal{A}$ *существует множество* $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, *то можно построить* W*-окрестность* $U(H, W)$ *множества* $\mathcal{A}$, *обладающую свойством: существует целое положительное число* $k = k(H, W)$ *такое, что для любой окрестности* $G_{-x}\,(G_{+x})$ *точки* $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, *для которой* $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots,$ *предельной слева (справа) для множества* $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ *и любого замкнутого множества* $V_1 \subset U$ *найдутся замкнутое множество* $V_2 \subset G_{\mp x}$ *и номер* $m:$ $T^j V_2 \subset H$ *при* $0 \leq j < km$, $T^j(\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} T^i V_2) \supset V_1$ *при* $j \geq m$.

Основная трудность при доказательстве заключается в построении открытого множества W такого, что $TW \supset W$, $W \cap \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$.

Множество $\mathcal{A}$, как и в случае, когда $\mathcal{A}$ содержит цикл, равномерно аппроксимируется циклами. Множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является множеством 3-го класса тогда и только тогда, когда во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. Доказательство этих фактов в основном повторяет соответствующие доказательства из параграфа 3.2.

Следует отметить, что множество $\mathcal{A}$, не содержащее циклов, всегда существует, как только есть бесконечное притягивающее множество, содержащее цикл. При этом всегда существует и множество $\mathcal{A}$, не содержащее циклов, во всякой окрестности которого есть множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. Об этом еще будет идти речь в следующей главе.

Можно несколько изменить отображение T_∞ из параграфа 2.2 (это достаточно сделать только при $x > \gamma$) так, что помимо множеств $\mathcal{A}, \mathcal{A}_0$, не содержащих циклов, будет существовать множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ $(\supset \mathcal{A}_0)$, содержащее цикл. Однако найдется окрестность H множества $\mathcal{A}_0$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_0$. В этом случае W-окрестность $U(H, W)$ множества $\mathcal{A}_0$ не обладает свойством, составляющим содержание указанного выше аналога теоремы 3.2.3.

Рассмотрим более подробно случай, когда всякое множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ не содержит циклов.

Существует множество $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ такое, что для любого $x \in \mathcal{A}_0$ $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_0$. $\mathcal{A}_0$ — совершенное нигде не плотное на E множество.

Теорема 3.3.1. *Всякий смежный к $\mathcal{A}_0$ интервал содержит не более двух точек множества* $\bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A}'$.

Л е м м а 1. *В любой окрестности G_α произвольной точки $\alpha \in \mathcal{A}_0$ найдутся открытый интервал V : $V \cap \mathcal{A}_0 \neq \varnothing$ и число k такие, что $T^k V \supseteq V$.*

Действительно, если точка α является предельной слева (справа) для точек множества $\mathcal{A}_0$, то точка α является предельной слева (справа) и для точек циклов (теорема 2.2.1). Найдутся точка $x_1 \in G_\alpha$, принадлежащая циклу периода k_1, точка $x_2 \in G_\alpha$, принадлежащая циклу периода k_2, причем $x_1 < < x_2 < \alpha$ и $(x_1, x_2) \cap \mathcal{A}_0 \neq \varnothing$. Если $k = k_1 \cdot k_2$ и $V = (x_1, x_2)$, то $T^k V \supseteq V$.

Положим $W = \bigcup\limits_{j=0}^{k-1} T^j V$; $W \subset TW \subset T^2 W \subset \ldots$. $\overline{\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^j W} \supset \supset \bigcup\limits_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A}$, так как W содержит хотя бы одну точку множества

$\mathcal{A}_0$ вместе с некоторой окрестностью (а следовательно, и хотя бы одну точку множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A}), \mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$).

Положим $U_i = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} T^{j\,k}(T^{i-1}V)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. U_i — замкнутый интервал; $T^k U_i = U_i$ и $U_2 = TU_1$, $\ldots$, $U_k = TU_{k-1}$, $U_1 = TU_k$. $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} T^j W}$; следовательно, $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = \bigcup_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A}$.

Пусть (a, b) — произвольный смежный к $\mathcal{A}_0$ интервал и $Q = (a, b) \cap \bigcup_{\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0} \mathcal{A}$. Утверждается, что если Q содержит по крайней мере три точки, то существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_0$, содержащее цикл.

Так как каждое множество U_i, $1 \leq i \leq k$, содержит по крайней мере одну точку множества $\mathcal{A}_0$, то найдутся два множества $U_{i'}$ и $U_{i''}$ такие, что $Q \subset U_{i'} \cup U_{i''}$ и $a, b \in U_{i'} \cup U_{i''}$. И это всегда будет так, какова бы ни была окрестность G_α точки α (при стягивании окрестности G_α к точке α будет лишь возрастать число k). Если Q содержит хотя бы три точки, то по крайней мере одно из множеств $U_{i'}, U_{i''}$ содержит хотя бы две точки множества Q. Будем предполагать, что какова бы ни была окрестность G_α, найдется множество $U_{i'}$, содержащее точки $x', x'' \in Q$.

Интервал $U_{i'}$ содержит либо точку a, либо точку b вместе с некоторой окрестностью. Действительно, $\bigcup_{j=0}^{k-1} T^j(\mathcal{A}_0 \cap U_{i'}) = \mathcal{A}_0$ и поэтому $\mathcal{A}_0 \cap U_{i'} \not\subset \{a\} \cup \{b\}$. Будем предполагать, что $U_{i'}$ содержит точку a вместе с некоторой окрестностью.

Пусть $x' < x''$. Возьмем точку $c' < a$, принадлежащую $U_{i'}$ вместе с некоторой окрестностью, и точку $d \in (x', x'')$. Найдется номер j_V : $T^{j_V} V \supset [c', d]$; это следует из определения множества $U_{i'}$.

Л е м м а 2. *Всякая точка* $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$, *является предельной для точек множества* $E \setminus \bigcup_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Пусть $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и, например, $T^{j_1}y < T^{j_2}y < \ldots \to x$, $j_1 < j_2 < \ldots$. Покажем, что всякий интервал $(T^{j_r}y, T^{j_{r+1}}y)$ содержит хотя бы одну точку множества $E \setminus \bigcup\limits_{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{A}_0} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Пусть $x_1 \in \mathcal{A}_0$ и точка x_1 является, например, предельной справа для точек множества $\mathcal{A}_0$.

Найдется точка $x_2 > x_1$, $x_2 \in \mathcal{A}$, такая, что

$$[x_1, x_2] \cap T^k[x_1, x_2] = \varnothing,$$

где $k = j_{r+1} - j_r$. Возьмем точку $T^{j_0}y \in (x_1, x_2)$, $j_0 > j_r$. $T^{j_0+k}y \notin [x_1, x_2]$. Следовательно, интервал $T^{j_0-j_r}[T^{j_r}y, T^{j_{r+1}}y]$ содержит либо точку x_1, либо точку x_2 вместе с некоторой окрестностью. Так как точки x_1, x_2 являются предельными для точек циклов, то найдется точка $y' \in [T^{j_r}y, T^{j_{r+1}}y]$, для которой $T^{j_0-j_r}y'$ — точка цикла, т. е. $y' \notin \bigcup\limits_{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{A}_0} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$.

Рассмотрим произвольную окрестность $G_{x'}$ точки x', лишь бы $G_{x'} \subset [a, d]$. Пусть $x' \in \mathcal{A}'$, $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap G_{x'}$, $y' \notin \bigcup\limits_{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{A}_0} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, $y' \in G_{x'}$.

Найдется окрестность $\widetilde{G}_\alpha$ точки α, не содержащая точек $T^j y'$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Будем предполагать, что всякая выбираемая нами окрестность G_α содержится в $\widetilde{G}_\alpha$. Интервал V выбирается всегда так, что $\overline{V} \not\ni \alpha$. Поэтому найдется номер j' : точка $T^{j'}y$ лежит между точкой α и интервалом V. Так как $T^{j'}y' \notin G_\alpha$, то либо $T^{j'}G_{x'} \supset V$, либо $T^{j'}G_{x'} \supset G'_\alpha$, где G'_α — некоторая окрестность точки α.

В первом случае $T^{j'+j_V}G_{x'} \supset [c', d]$. Во втором случае согласно предположению также найдутся точка $c'' < a$ и номер j'' : $T^{j''}G_{x'} \supset [c'', d]$. Таким образом, всегда существуют точка $c < a$ и номер $j_{x'}$ такие, что $T^{j_{x'}}G_{x'} \supset [c, d]$.

Так как $\overline{G}_{x'} \subset [c, d]$, $c \notin \overline{G}_{x'}$, то согласно лемме 2 из параграфа 2.5 существуют точка $\gamma \in \overline{G_{x'}}$, принадлежащая циклу, последовательность точек $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \gamma$, $\gamma_r \in \overline{G_{x'}}$, $r = 1, 2, \ldots$, и последовательность чисел $m_1 < m_2 < \ldots$ такие, что $T^{m_r}V_r \supset [c, \gamma]$, где $V_r = [\gamma_r, \gamma]$, $r = 1, 2, \ldots$.

Возьмем последовательность точек $\beta_1 = c < \beta_2 < \beta_3 \ldots \to a$. Так как $(\beta_s, a) \cap \mathcal{A}_0 \neq \varnothing$, $s = 1, 2, \ldots,$ то для каждого интервала $I_s = [\beta_s, a]$ согласно предположению существует номер n'_s : $T^{n'_s} I_s \supset [a, d] \supset G_{x'}$. Поэтому существует и номер n_s : $T^{n_s} I_s \supset [c, d]$.

Таким образом, $T^{m_r} V_r \supset I_s$, $T^{n_s} I_s \supset V_r$, $r, s = 1, 2, \ldots$ Найдется замкнутое множество $F_1 \subset V_1$:

$$T^{m_1} F_1 \subset I_1, T^{m_1+n_1} F_1 = V_2,$$

замкнутое множество $F_2 \subset F_1$:

$$T^{m_1+n_1+m_2} F_2 \subset I_2, T^{m_1+n_1+m_2+n_2} F_2 = V_3,$$

замкнутое множество $F_3 \subset F_2$:

$$T^{m_1+n_1+m_2+n_2+m_3} F_3 \subset I_3, T^{m_1+n_1+m_2+n_2+m_3+n_3} F_3 = V_4$$

и т. д. Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ не пусто и, если $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, то $\mathcal{A}_x \supset \supset \{a\} \cup \{\gamma\}$. Множество $\mathcal{A}_x$ содержит $\mathcal{A}_0$, так как $\mathcal{A}_a = \mathcal{A}_0$, и содержит цикл. Теорема доказана.

Вот некоторые утверждения, являющиеся следствием доказанной теоремы или доказываемые с помощью тех же соображений, что и теорема 1.

1. *Для любой точки* $x \in \bigcup\limits_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A}$ $\quad \mathcal{A}_x = \mathcal{A}_0$.

Действительно, множество $\bigcup\limits_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$ не более, чем счетно (следствие теоремы 3.3.1), и не содержит циклов. Следовательно, если $\mathcal{A}_x \neq \mathcal{A}_0$, то $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty} x \cap \mathcal{A}_x = \varnothing$. Всякая точка $x' \in \in \mathcal{A}_x \setminus \mathcal{A}_0$ является предельной для точек множества $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty} x$. Смежный к $\mathcal{A}_0$ интервал, содержащий точку x', содержит более двух точек множества $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty} x$, а это невозможно.

Итак, всякая точка $x \in \bigcup\limits_{\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0} \mathcal{A}$ принадлежит множеству $\mathfrak{B}(\mathcal{A})_0)$.

2. *Если* (a,b) *— смежный к* $\mathcal{A}_0$ *интервал и* $c \in (a,b) \cap \cap \bigcup_{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{A}_0} \mathcal{A}$, *то либо* $(a,c) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})_0)$, *либо* $(c,b) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})_0)$.

Как и при доказательстве теоремы 3.3.1, показывается, что для любой окрестности G точки c и любого замкнутого множества $I_a \subset [a,c)$ или замкнутого множества $I_b \subset (c,b]$ существует j' : $T^{j'}G \supset I_a$ или $T^{j'}G \supset I_b$. В первом случае $(a,c) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})_0)$, во втором $(c,b) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{A})_0)$.

Рассмотрим, например, первый случай. Имеет место следующий точный результат: *для любой точки* $x \in (a,c)$ $T^j x \in \in [T^j a, T^j c]$ *(или* $[T^j c, T^j a]$*),* $j = 1, 2, \ldots$.

Если бы для некоторого $j' > 0$ это оказалось не так, то нашлась бы точка $x' \in (a,c)$: $T^{j'}x' = T^{j'}a$ или $T^{j'}c$ и для любой окрестности $G_{x'}$ точки x' существует окрестность точки $T^{j'}a$ или $T^{j'}c$, содержащаяся в $T^{j'}G_{x'}$. Однако последнее невозможно, ибо в таком случае существует притягивающее множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_0$, содержащее цикл. Доказательство этого почти дословно повторяет доказательство теоремы 3.3.1.

Из только что отмеченного факта вытекает следующее. Если M_0 — множество односторонних точек множества $\mathcal{A}_0$, то $TM_0 \subseteq M_0$ (на самом деле $TM_0 = M_0$).

Можно представлять себе, что каждое множество $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$ получается из $\mathcal{A}_0$ путем расщепления (раздвоения) некоторых траекторий, входящих в $\mathcal{A}_0$. Количество возможных притягивающих множеств определяется числом траекторий, составляющих M_0. Так, если M_0 состоит из одной единственной траектории, то может существовать лишь одно множество $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$.

3. *Если* $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}_0$, *то существует притягивающее множество* $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$.

Л е м м а 3. *Если* $c' \in \mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}_0$, $c'' \in \mathcal{A}'' \setminus \mathcal{A}_0$, *то для любой окрестности* G' *точки* c' *найдется окрестность* G'' *точки* c'' *и номер* n : $T^n G' \supset G''$ *и, наоборот, для любой окрестности* $\widetilde{G}''$ *точки* c'' *найдется окрестность* $\widetilde{G}'$ *точки* c' *и номер* $\tilde{n}$: $T^{\tilde{n}}\widetilde{G}'' \supset \widetilde{G}'$.

Докажем первое утверждение. Пусть $a \in \mathcal{A}_0$. Найдется окрестность G точки a и номер n': $G \subset T^{n'}G'$ (см. доказательство теоремы 3.3.1). Множество $\{T^{-j}c''\}_{j=0}^{\infty}$, где $T^{-j}c''$ — множество точек $x \in \mathcal{A}''$, для которых $T^j x = c''$, плотно на $\mathcal{A}_0$ (так как множество предельных точек этого множества содержится в $\mathcal{A}_0$, инвариантно, и $\mathcal{A}_0$ не содержит замкнутых инвариантных подмножеств). Следовательно, $\{T^{-j}c''\}_{j=0}^{\infty} \cap G \neq \varnothing$. Найдется окрестность G'' точки c'' и номер n'': $G'' \subset T^{n''}G$. Если $n = n' + n''$, то $T^n G' \supset G''$.

Пусть $\{c_i'\}_{i=1}^{\infty}$ — совокупность точек множества $\mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}_0$, упорядоченная произвольным образом, и $\{c_i''\}_{i=1}^{\infty}$ — совокупность точек множества $\mathcal{A}'' \setminus \mathcal{A}_0$, также упорядоченная произвольным образом. Пусть $U_i^i \supset U_i^{i+1} \supset U_i^{i+2} \supset \ldots$ — окрестности точки c_i' и $\bigcap\limits_{s=i}^{\infty} U_i^s = c_i'$, $V_i^i \supset V_i^{i+1} \supset V_i^{i+2} \supset \ldots$ — окрестности точки c_i'' и $\bigcap\limits_{s=i}^{\infty} V_i^s = c_i''$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Найдутся открытое множество $G_1 \subset U_1^1$ и числа $n_1^1 < n_2^1$, такие, что $T^{n_1^1}G_1 \subset V_1^1$, $T^{n_2^1}G_1 = U_1^2$, открытое множество $G_2, \overline{G_2} \subset G_1$, и числа $n_1^2 < n_2^2 < n_3^2 < n_4^2$ такие, что $T^{n_1^2}G_2 \subset U_2^2$, $T^{n_2^2}G_2 \subset V_1^2$, $T^{n_3^2}G_2 \subset V_2^2$, $T^{n_4^2}G_2 = U_1^3$, открытое множество $G_3, \overline{G_3} \subset G_2$, и числа $n_1^3 < \ldots < n_6^3$ такие, что $T^{n_1^3}G_3 \subset U_2^3$, $T^{n_2^3}G_3 \subset U_3^3$, $T^{n_3^3}G_3 \subset V_1^3$, $T^{n_4^3}G_3 \subset V_2^3$, $T^{n_5^3}G_3 \subset V_3^3$, $T^{n_6^3}G_3 = U_1^4$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ не пусто и если $x \in \bigcap\limits_i G_i$, то $\mathcal{A}_x \supset \{c_i'\}_{i=1}^{\infty} \cup \{c_i''\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. $\mathcal{A}_x \supset \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$.

Из доказанного факта, в частности, вытекает, что существует не более одного притягивающего множества $\mathcal{A}^{\max} \supset \mathcal{A}_0$, не содержащегося ни в каком другом притягивающем множестве.

В действительности имеет место следующий точный результат:

а) *если* $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}_0$, *то* $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ *является притягивающим множеством;*

б) *если* $\mathcal{A}_i \supset \mathcal{A}_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *то* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ *является притягивающим множеством.*

Отсюда, в частности, вытекает, что существует одно и только одно множество $\mathcal{A}^{\max} \supset \mathcal{A}_0$.

Чтобы доказать а), б), необходимо вместо иметь леммы 3 аналог теоремы 3.2.3. Получить его, использовав уже имеющиеся результаты, не столь уж трудно.

4. Примем, что множество $\mathcal{A}'$ непосредственно следует за множеством $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$, если не существует притягивающих множеств $\mathcal{A}: \quad \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Из п. 2 вытекает, что за множеством $\mathcal{A}_0$ могут непосредственно следовать $q = 1, 2, 3, \ldots, \aleph_0$ ($\aleph_0$ обозначает счетное кардинальное число) притягивающих множеств.

Совокупность всех притягивающих множеств, содержащих $\mathcal{A}_0$, представленная в виде графа (по теоретико-множественному включению) согласно всем приведенным выше данным, может иметь вид, показанный на рис. 3.1. При этом мощность множества притягивающих множеств, содержащих $\mathcal{A}_0$, равна 2^q и, следовательно, может быть либо конечной, либо иметь мощность континуума ($2^{\aleph_0}$).

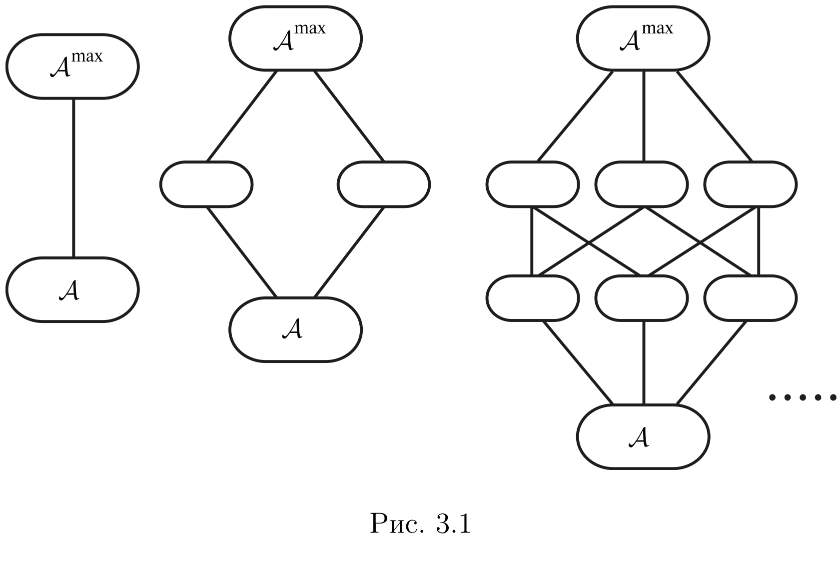

Рис. 3.1

Можно построить достаточно сложные примеры отображений, когда имеет место каждый из указанных выше случаев[7].

Теорема 3.3.2. *Всякая точка множества* $\bigcup\limits_{\mathcal{A}\supseteq\mathcal{A}_0} \mathcal{A}\setminus\mathcal{A}_0$ *не является предельной для точек циклов.*

Для доказательства теоремы требуется лишь незначительно изменить доказательство теоремы 3.3.1. В дальнейшем теорема 3.3.2 не будет использоваться. Нам понадобится только одно утверждение, которое можно рассматривать как предельный случай теоремы 3.3.2:

(*) *Если не существует множеств* $\mathcal{A}\supset\mathcal{A}_0$, *то всякая односторонняя точка множества* $\mathcal{A}_0$ *является предельной для точек циклов только с одной стороны (либо слева, либо справа).*

Заметим, что если множество $\mathcal{A}\supset\mathcal{A}_0$ существует, то это утверждение также справедливо и немедленно вытекает из п.2.

Утверждение (*) доказывается так же, как и теорема 3.3.2.

3.4. Классификация притягивающих множеств

Цель настоящего параграфа — подвести некоторые итоги изучения бесконечных притягивающих множеств. Классификация конечных притягивающих множеств — циклов, достаточно подробная, дана в параграфе 3.1.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное бесконечное притягивающее множество. Исследования, проведенные в параграфах 3.2 и 3.3, показывают, что естественно различать следующие случаи:

1) множеств $\mathcal{A}'\supset\mathcal{A}$ не существует;

2) множества $\mathcal{A}'\supset\mathcal{A}$ существуют, но существует окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}'\supset\mathcal{A}$;

[7] В работе [64] ошибочно утверждается, что может иметь место лишь простейший случай. Как уже отмечалось, это справедливо только тогда, когда множество односторонних точек $\mathcal{A}_0(M_0)$ состоит из одной траектории.

3) во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$,
а также

а) существует множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, содержащее цикл,

б) всякое множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$ не содержит циклов.

Все эти возможности, кроме 3), б), реализуются.

Множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является в точности

1°) G_δ-множеством, если множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ не существует;

2°) $F_{\sigma\delta}$- и $G_{\delta\sigma}$-множеством, если множества $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ существуют, но существует окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$;

3°) $F_{\sigma\delta}$-множеством, если во всякой окрестности множества $\mathcal{A}$ существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$;
и, таким образом, структура множества $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не зависит от а) и б).

Утверждение 1°) вытекает из теоремы 1.2.1 и лемм 3, 4 из параграфа 3.1. Утверждение 2°) содержится в параграфах 3.2 и 3.3. Следует лишь остановиться на случае 2°).

I. Если существует множество $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не является G_δ-множеством.

Это немедленно вытекает из 1°) и утверждения: *для любых двух бесконечных множеств* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, *для которых существует множество* $\mathcal{A}'$: $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}_2$, $\overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_1)} = \overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}_2)}$.

Последнее доказывается так. Если существует множество $\mathcal{A}'$, содержащее цикл, то утверждение следует из теоремы 3.2.1 и ее обобщений, одно из которых приведено в параграфе 3.3. В этом случае используются те же рассуждения, что и при доказательстве следствия 1 теоремы 3.2.1. Если же всякое множество $\mathcal{A}'$ не содержит циклов, то это доказывается примерно таким же образом, но опираясь на лемму 3 параграфа 3.3.

II. $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не является F_σ-множеством ($\mathcal{A}$ — бесконечное множество).

В случаях 1) и 3) это верно. Рассмотрим случай 2).

Если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл, то $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ не является F_σ-множеством согласно следствию теоремы 1.1.6.

Предположим, что множество $\mathcal{A}$ не содержит циклов. Пусть H — произвольная окрестность множества $\mathcal{A}$. Обозначим F множество точек $x \in \overline{H}$, для которых $T^j x \in \overline{H}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ Множество F замкнуто. Множество $F \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A}) = F \cap \bigcup\limits_{\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}} \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$ и не является G_δ-множеством. Можно показать, что $F \cap \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является множеством класса > 1 и, следовательно, не является F_σ-множеством. Однако для этого необходимо утверждение, аналогичное теореме 3.2.3, и останавливаться подробнее на этом мы не будем (тем более, что за пределами настоящего параграфа этот результат не используется).

Таким образом, в случае 2) множество $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ является одновременно $F_{\sigma\delta}$- и $G_{\delta\sigma}$-множеством (следствие теорем 2.1 и 2.2) и не является множеством более простой структуры.

Отметим еще следующее. В то время, как множества типа 1), 2) в случае а) являются совершенными множествами, в случае б) множества, содержащие другие притягивающие множества (т. е. не являющиеся минимальными), кроме совершенной части, содержат еще счетное множество точек.

Глава 4

Частично упорядоченная система притягивающих множеств

Пусть $\mathbb{M}$ — совокупность всех притягивающих множеств отображения T. Система $\mathbb{M}$ естественным образом частично упорядочивается: если $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathbb{M}$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, то $\mathcal{A}'$ предшествует $\mathcal{A}''$ в $\mathbb{M}$.

Частично упорядоченная система $\mathbb{M}$ рассматривалась и ранее, например, в параграфе 3.3, но тогда мы ее не определяли, поскольку в этом не было необходимости. В настоящей главе изучаются свойства частично упорядоченной системы притягивающих множеств произвольного непрерывного отображения; обсуждается вопрос, насколько отображение характеризуется частично упорядоченной системы его притягивающих множеств. При этом используется общепринятая терминология частично упорядоченной множеств [22, 31]. *Притягивающие множества, составляющие систему* $\mathbb{M}$, *называются также элементами системы* $\mathbb{M}$.

4.1. Свойства частично упорядоченной системы притягивающих множеств

1. *Всякая максимальная цепь системы* $\mathbb{M}$ *имеет минимальный элемент.*

Для любого семейства $\{\mathcal{A}_\zeta\}$, состоящего из вложенных друг в друга множеств из $\mathbb{M}$, множество $F = \bigcap\limits_\zeta \mathcal{A}_\zeta$ не пусто, замкнуто и $TF = F$. Следовательно, существует множество $\mathcal{A} \subseteq F$, $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$.

Множество $\mathcal{A}$ является минимальным элементом тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathcal{A}$ $\quad \mathcal{A}_x = \mathcal{A}$. Минимальным элементом может быть либо конечное множество точек, образующих цикл отображения T, либо совершенное нигде не плотное множество.

2. *Всякая максимальная цепь системы* $\mathbb{M}$ *имеет максимальный элемент.*

Пусть $\mathbb{L}$ — произвольная максимальная цепь системы $\mathbb{M}$ и $\mathcal{A} \in \mathbb{L}$. Если всякий элемент $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ не содержит циклов, то $\mathbb{L}$ имеет максимальный элемент (см. параграф 3.3). Рассмотрим случай, когда существует элемент $\mathcal{A}' \in \mathbb{M}$, $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, содержащий цикл.

Докажем две леммы.

Л е м м а 1. *Если* $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_n \subset \ldots$, *то замыкание множества* $\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n$ *является притягивающим множеством.*

Как будет видно ниже, чтобы доказать п. 2, достаточно доказать лемму 1 в предположениях, что множество $\mathcal{A}_1$ содержит цикл (или, более того, для $\mathcal{A}_1$ выполняются условия (B)). Этот случай мы и рассмотрим. Доказательство леммы опирается на теорему 3.2.3 и сходно с доказательством теоремы 3.2.6.

Пусть $H_1 \supset H_2 \supset \ldots$ — окрестности множества $\overline{\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n}$, $\bigcap\limits_n H_n = \overline{\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n}$ и $H_n = \bigcup\limits_{s=1}^{r_n} \sigma_n^s$, где σ_n^s, $s = 1, 2, \ldots, r_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ — открытые множества, $\sigma_n^s \cap \mathcal{A}_n \neq \varnothing$ и семейство $\{\sigma_n^s\}_{s,n}$ образует базу пространства E на $\overline{\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n}$. Построим

W-окрестности $U_n(H_n, W_n)$ множеств $\mathcal{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots,$ при условии, что $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset \ldots$. Для каждого $n \geq 1$ возьмем точку $x_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{A})_n) \cap W_n$, предельную для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})_n)$ и такую, что $T^j x_n \in H_n$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Найдется номер j'_n: $\sigma^s_n \cap \{T^j x_n\}_{j=0}^{j'_n} \neq \varnothing$, $s = 1, 2, \ldots, r_n$, и окрестность G_{x_n}: $\overline{G_{x_n}} \subset W_n$, $T^j G_{x_n} \subset \sigma^{s'}_n$ при $j \leq j'_n$, если $T^j G_{x_n} \in \sigma^{s'}_n$. Найдутся номер $j_n \geq j'_n$ и замкнутое множество $V_n \subset G_{x_n}$: $T^{j_n} V_n \supset G_{x_{n+1}}$, $T^j V_n \subset H_n$ при $j < j_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (теорема 3.2.3). Возьмем замкнутое множество $F_1 \subset V_1$, для которого $T^{j_1} F_1 = V_2$, замкнутое множество $F_2 \subset F_1$, для которого $T^{j_1+j_2} F_2 = V_3$ и т. д. Множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ не пусто и, если $x \in \bigcap\limits_n F_n$, то $\mathcal{A}_x = \overline{\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n}$.

Л е м м а 2. *Если существует множество $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, отличное от цикла, то существует и множество $\widehat{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}', \mathcal{A}''$.*

Случай, когда всякое множество $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}'$ (или $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}''$) не содержит циклов, рассмотрен в параграфе 3.3. Поэтому можно считать, что множества $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ содержат циклы и даже, ради простоты, что для множеств $\mathcal{A}', \mathcal{A}''$ выполняются условия (B). Воспользуемся теоремой 3.2.1. Пусть c', d' — левый и правый концы множества $\mathcal{A}'$, c'', d'' — концы множества $\mathcal{A}''$. Так как существует множество $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$, отличное от неподвижной точки, то $G = (c', d') \cap (c'', d'') \neq \varnothing$ и, более того, имеется точка $\widetilde{x} \in (\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}'') \cap G$. Возьмем окрестность G_0 точки $\widetilde{x}$, $\overline{G_0} \subset G$. Пусть $H'_1 \supset H'_2 \ldots$ — окрестности множества $\mathcal{A}'$ и $\bigcap\limits_i H'_i = \mathcal{A}'$, $H''_1 \supset H''_2 \supset \ldots$ — окрестности множества $\mathcal{A}''$ и $\bigcap\limits_i H''_i = \mathcal{A}''$. Найдутся точка $x'_i \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap G_0$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, и притом $T^j x'_i \in H'_i$, $j = 0, 1, 2, \ldots$; точка $x''_i \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}'') \cap G_0$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}'')$, и притом $T^j x''_i \in H''_i$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть $H'_i = \bigcup\limits_{l=1}^{k_i} \sigma^l_i$, $H''_i = \bigcup\limits_{n=1}^{m_i} \theta^n_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где σ^l_i, $l = 1, \ldots, k_i, \theta^n_i$, $n = 1, 2, \ldots, m_i$, — открытые множества, $\sigma^l_i \cap \mathcal{A}' \neq \varnothing$, $\theta^n_i \cap \mathcal{A}'' \neq \varnothing$

и семейства $\{\sigma_i^l\}_{i,l}, \{\theta_i^n\}_{i,n}$ образуют базис пространства E соответственно на множествах $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$. Для каждого i выберем номер s_i' : $\sigma_i^l \cap \{T^j x_i'\}_{j=0}^{s_i'} \neq \varnothing$, $l = 1, \ldots, k_i$, и окрестность $G_{x_i'}$ точки x_i' : $G_{x_i'} \subset G_0$ и, если $T^j x_i' \subset \sigma_i^{l'}$, то $T^j G_{x_i'} \subset \sigma_i^{l'}$ при $j \leq s_i'$. Найдется номер $r_i' \geq s_i'$: $T^{r_i'} G_{x_i'} \supset G_0$ (теорема 3.2.1). Для каждого i выберем номер s_i'' : $\theta_i^n \cap \{T^j x_i''\}_{j=0}^{s_i''} \neq \varnothing$, $n = 1, \ldots, m_i$, и окрестность $G_{x_i''}$ точки x_i'' : $G_{x_i''} \subset G_0$ и если $T^j x_i'' \subset \theta_i^{n'}$, то $T^j G_{x_i''} \subset \theta_i^{n'}$ при $j \leq s_i''$. Найдется номер $r_i'' \geq$ $\geq s_i''$: $T^{r_i''} G_{x_i''} \supset G_0$ (теорема 3.2.1). Существует замкнутое множество $F_1 \subset G_{x_1'}$, для которого $T^{r_1'} F_1 \subset \overline{G_{x_1''}}$, $T^{r_1'+r_1''} F_1 = \overline{G_{x_2'}}$, замкнутое множество $F_2 \subset F_1$, для которого $T^{r_1'+r_1''+r_2'} F_2 \subset \overline{G_{x_2''}}$, $T^{r_1'+r_1''+r_2'+r_2''} F_2 = \overline{G_{x_3'}}$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ не пусто и если $x \in \bigcap\limits_i F_i$, то $\mathcal{A}_x \supseteq \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$. Лемма 2 доказана.

В действительности имеет место следующий более точный результат.

Л е м м а 3. *Если множество* $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}''$ *не пусто и существует точка, являющаяся* $\omega^-(\omega^+)$ *-предельной как для множества* $\mathcal{A}'$, *так и для множества* $\mathcal{A}''$, *то* $\mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$ *является притягивающим множеством.*

Условия леммы, в частности, выполняются, если существует множество $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}', \mathcal{A}''$, отличное от цикла. В случае, когда множества $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}''$ содержат циклы, лемма 3 доказывается примерно таким же образом, как и лемма 1.

Докажем п. 2. Пусть $\mathbb{L}: \ \mathcal{A}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_\zeta \subset \ldots$ — максимальная цепь системы $\mathbb{M}$. Если существует элемент $\mathcal{A}_{\zeta'} \in \mathbb{L}$, содержащий цикл, то п. 2 следует из леммы 1, если учесть, что всегда существует последовательность $\mathcal{A}^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(2)} \subset \ldots \subset \mathcal{A}^{(n)} \subset \ldots$, $\mathcal{A}^{(n)} \in \mathbb{L}$, такая, что $\bigcup\limits_\zeta \mathcal{A}_\zeta = \bigcup\limits_n \mathcal{A}^{(n)}$.

Предположим, всякий элемент $\mathcal{A}_\zeta \in \mathbb{L}$ не содержит циклов. Случай, когда для некоторого элемента $\mathcal{A}_{\zeta'} \in \mathbb{L}$ не существует множеств $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_{\zeta'}$, $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$, содержащих циклов, уже рассмотрен (параграф 3.3). Следовательно, остается предположить, что для всякого элемента $\mathcal{A}_\zeta \in \mathbb{L}$ имеется элемент $\mathcal{A}'_\zeta \supset \mathcal{A}_\zeta$, содержащий цикл. В таком случае найдется последовательность $\mathcal{A}''_1 \subset \mathcal{A}''_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}''_n \subset \ldots$ такая, что каждое множество $\mathcal{A}''_n$ содержит цикл и для любого $\mathcal{A}_{\zeta'} \in \mathbb{L}$ найдется номер n' : $\mathcal{A}_{\zeta'} \subset \mathcal{A}''_{n'}$ (следует из леммы 2). Согласно лемме 1 $\mathcal{A} = \bigcup\limits_n \mathcal{A}''_n \in \mathbb{M}$. $\mathcal{A}_\zeta \subseteq \mathcal{A}$ для любого $\mathcal{A}_\zeta \in \mathbb{L}$; множество $\mathcal{A}$ содержит цикл. Итак, последний случай невозможен.

Замечание. Утверждение п. 2 следует также из того, что для любых множеств $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ $\overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}')} = \overline{\mathfrak{B}_2(\mathcal{A}'')}$ (если $\mathcal{A}'$ отлично от цикла). Действительно, если в максимальной цепи $\mathbb{L}$ нет последнего элемента и последовательность $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots \subset$ $\subset \mathcal{A}_n \subset \ldots$ с $\mathcal{A}_n \in \mathbb{L}$ исчерпывает цепь $\mathbb{L}$, т.е. $\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n \supseteq \mathcal{A}$ каково бы ни было $\mathcal{A} \in \mathbb{L}$, то множество $\bigcap\limits_n \mathfrak{B}^*(\mathcal{A}_n)$, где $\mathfrak{B}^*(\mathcal{A}_n) =$ $= \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{A} \in \mathbb{M} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_n}} \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, должно быть пустым. Однако всякое $\mathfrak{B}^*(\mathcal{A}_n)$ является G_δ-множеством (теорема 1.2.1), $\overline{\mathfrak{B}^*_2(\mathcal{A}_{n'})} = \overline{\mathfrak{B}^*_2(\mathcal{A}_{n''})}$ и потому множество $\bigcap\limits_n \mathfrak{B}^*(\mathcal{A}_n)$ не пусто.

Максимальный элемент, не являющийся минимальным, назовем

1) *максимальным элементом первого рода, если он не содержит циклов,*

и

2) *максимальным элементом второго рода, если он содержит хотя бы один цикл.*

Всякий максимальный элемент второго рода является совершенным множеством (следствие теоремы 3.2.5), всякий максимальный элемент первого рода содержит совершенную часть и еще счетное множество точек (параграф 3.3).

Максимальный элемент $\mathcal{A}$ второго рода обладает следующим важным свойством (см. параграфы 3.2, 3.3): для любой точки $x \in E$, для которой $\mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{A}$, существует номер j_x : $T^j x \in \mathcal{A}$ при $j \geq j_x$.

3. *Максимальных элементов второго рода не более чем счетное число.*

Обозначим $\mathbb{N}_k$ совокупность максимальных элементов второго рода, каждый из которых содержит цикл периода $\leq k$. Очевидно, достаточно доказать, что множество $\mathbb{N}_1$ не более чем счетно.

Пусть $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathbb{N}_1$; c', d' — левый и правый концы множества $\mathcal{A}'$, c'', d'' — левый и правый концы множества $\mathcal{A}''$. Утверждается, что $(c', d') \cap (c'', d'') = \varnothing$. Действительно, если бы это было не так, нашлись бы точка $x' \in \mathcal{A}' \cap (c', d') \cap (c'', d'')$ и точка $x'' \in \mathcal{A}'' \cap (c', d') \cap (c'', d'')$. Далее, опираясь на теорему 3.2.1 и используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 2, мы получили бы, что существует множество $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}' \cup \mathcal{A}''$, а это невозможно.

Таким образом, каждому множеству $\mathcal{A} \in \mathbb{N}_1$ можно поставить в соответствие открытый интервал так, что любые два таких интервала не пересекаются; это означает, что множество $\mathbb{N}_1$ не более чем счетно.

Совокупность максимальных элементов, являющихся одновременно и минимальными, может иметь мощность континуума (например, для отображения $x \mapsto x$).

4. *Любые две максимальные цепи, содержащие общий элемент, отличный от минимального, имеют один и тот же максимальный элемент.*

Это вытекает из леммы 2.

Если $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$, положим $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_x,\, x \in \mathcal{A}\}$. Частично упорядоченная система $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}$ состоит из элементов системы $\mathbb{M}$, предшествующих $\mathcal{A}$ в $\mathbb{M}$ (т. е. содержащихся в $\mathcal{A}$).

Пусть $\mathbb{N}$ — совокупность максимальных элементов системы $\mathbb{M}$. Если $\mathcal{A} \in \mathbb{N}$, система $\mathbb{M}/\mathcal{A}$ может состоять либо из одного элемента, либо из конечного числа (2^q) элементов, либо иметь мощность континуума. Последний случай может иметь место для максимального элемента первого рода и, как мы увидим ниже, всегда имеет место для максимального элемента второго рода.

Если $\mathcal{A}$ — максимальный элемент первого рода, то система $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}$ не имеет общих элементов ни с какой другой системой

$\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \in \mathbb{N}$. $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}$ имеет единственный максимальный элемент и образует дистрибутивную структуру (в смысле [22]).

Если $\mathcal{A}$ — максимальный элемент второго рода, то система $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}$ может иметь общий элемент — цикл с некоторой системой $\mathbb{M}\,/\,\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}' \in \mathbb{N}$.

5. *Если отображение T имеет только циклы периода 2^i, $i \le i_0$, то всякий максимальный элемент является и минимальным, т. е. $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ (параграфы 2.4, 2.5).*

6. *Если отображение T имеет только циклы периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \dots$, то всякий максимальный элемент является либо минимальным, либо максимальным элементом первого рода* (следствие теоремы 3.2.1).

7. *Если отображение T имеет цикл периода $\ne 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то существует хотя бы один максимальный элемент второго рода* (см. параграфы 2.5, 3.2).

Рассмотрим более детально систему $\mathbb{M}\,/\,\widehat{\mathcal{A}}$, где $\widehat{\mathcal{A}}$ — максимальный элемент второго рода.

Л е м м а 4. *Пусть множество $\widehat{\mathcal{A}}$ содержит неподвижную точку, c, d — левый и правый концы множества $\widehat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. Для любой точки $x \in (c, d) \setminus \mathcal{A}$ такой, что $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, предельной для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, существует множество $\mathcal{A}' \ni x$, причем множество $\mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}$ состоит из одной траектории (т. е., для любой точки $x' \in \mathcal{A}' \setminus \mathcal{A}\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ существует $n:$ $T^n x' = x$ и для любого n существует только одна такая точка x').*

При доказательстве леммы 4 и далее будем предполагать, что утверждение, аналогичное теореме 3.2.3, имеет место для любого множества $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$. Более того, для простоты будем считать, что имеет место теорема 3.2.3. Исключение может представить случай, когда $\mathcal{A}$ — минимальное множество, однако утверждения, которые формулируются для множеств $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$, остаются справедливыми и в этом случае.

Пусть $H_1 \supset H_2 \supset \dots$ — окрестности множества $\mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_i H_i = \mathcal{A}$. Построим W-окрестности множества $\mathcal{A}$ $U_i = U_i(H_i, W_i)$, $i = 1, 2, \dots$, при условии, что $W_1 \supset W_2 \supset \dots$ Найдется номер

$j_1 : \ T^{j_1}W_1 \ni x$ (теорема 3.2.1). Следовательно, существует и точка $x_1 \in W_1$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$ и такая, что $T^{j_1}x_1 = x$. Найдутся точка $x_2 \in W_2$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, и номер $j_2 : \ T^{j_2}x_2 = x_1, \ \ T^{j_2}x_2 \in H_1$ при $j < j_2$ (следствие теоремы 3.2.3); найдутся точка $x_3 \in W_3$, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, и номер $j_3 : \ T^{j_3}x_3 = x_2$, $T^{j_3}x_3 \in H_2$ при $j < j_3$, и т. д. Получаем последовательность точек $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ принадлежащих одной траектории, которую составляет множество $Q = \{T^j x_i, \ j = 0, 1, 2, \ldots, \ i = 1, 2, \ldots\}$. $\overline{Q} \subset Q \cup \mathcal{A}$. Остается доказать, что замкнутое множество $M = Q \cup \mathcal{A}$ — притягивающее множество.

$TM = M$. Пусть $\sigma_i^l, l = 1, 2, \ldots, k_i, \ i = 1, 2, \ldots,$ — открытые множества, такие что $G_i = \bigcup\limits_{l=1}^{k_i} \supset M, \ i = 1, 2, \ldots, \ \ \bigcap\limits_i G_i = M$, $\sigma_i^l \cap M \neq \varnothing$ для любых l, i. Так как множество M нигде не плотно на E, семейство $\{\sigma_i^l\}_{l,i}$ образует базу пространства E на множестве M. Для любой точки $x_i, \ i = 1, 2, \ldots,$ найдутся номер $s_i : \ \ \sigma_i^l \cap \{T^j x_i\}_{j=0}^{s_i} \neq \varnothing, \ \ \ l = 1, 2, \ldots, k_i$, и окрестность $G_{x_i} : \ \overline{G_{x_i}} \subset W_i$ и, если $T^j x_i \in \sigma_i^{l'}$, то $T^j G_{x_i} \subset \sigma_i^{l'}$ при $j \leq s_i$. Найдутся замкнутое множество $V_i \subset G_{x_i}$ и номер $r_i \geq s_i$: $T^{r_i}V_i \supset G_{x_{i+1}}, \ \ T^j V_i \subset G_i$ при $j \leq r_i, \ i = 1, 2, \ldots$ (следствие теоремы 3.2.3).

Существуют замкнутое множество $F_1 \subset V_1 : \ \ T^{r_1}F_1 = V_2$, замкнутое множество $F_2 \subset F_1 : \ \ T^{r_1+r_2}F_2 = V_3$, и т. д. Множество $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ не пусто и, если $x' \in \bigcap\limits_i F_i$, то $\mathcal{A}_{x'} = M$.

Подобным же образом доказывается

Л е м м а 5. *Если множество $\widehat{\mathcal{A}}$ содержит неподвижную точку, c, d — левый и правый концы множества $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \widehat{\mathcal{A}}$, то для любых точек $x_1, x_2 \in (c, d) \setminus (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ таких, что $\mathcal{A}_{x_1} = \mathcal{A}_1, \ \ \mathcal{A}_{x_2} = \mathcal{A}_2$, предельных соответственно для множеств $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}_1)$ и $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A}_2)$, существует притягивающее множество $\mathcal{A} \ni x_1, x_2$, причем множество $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2)$ состоит из двух траекторий.*

8. *Для любых двух элементов* $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathbb{M}\,/\,\widehat{\mathcal{A}}$ *существует элемент, непосредственно следующий как за* $\mathcal{A}'$, *так и за* $\mathcal{A}''$.

Вытекает из леммы 5.

9. *Множество элементов, непосредственно следующих за любым элементом* $\mathcal{A}$, *предшествующим* $\widehat{\mathcal{A}}$, *имеет мощность континуума.*

Это следует из лемм 4, 5, если учесть, что множество точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$ и предельных для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, не является F_σ-множеством (если $\mathcal{A}$ отлично от цикла) и потому имеет мощность континуума.

Обозначим $\mathbb{M}'\,/\,\widehat{\mathcal{A}}$ подмножество $\mathbb{M}\,/\,\widehat{\mathcal{A}}$, состоящее из притягивающих множеств $\mathcal{A}$, для каждого из которых существует окрестность H, не содержащая притягивающих множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. т. е. являющихся локально максимальными. Система $\mathbb{M}'\,/\,\widehat{\mathcal{A}}$ также частично упорядочивается по включению.

Ниже рассматриваются только частично упорядоченные системы $\mathbb{M}/\widehat{\mathcal{A}}$ и $\mathbb{M}'/\widehat{\mathcal{A}}$, и мы будем обозначать их впредь $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$.

Еще несколько лемм.

Л е м м а 6. *Если* $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$, *то во всякой окрестности* H *множества* $\mathcal{A}$ *существует множество* $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \in \mathbb{M}'$.

Построим окрестность $H' = \bigcup\limits_{i=1}^{r} (a_i, b_i)$ множества $\mathcal{A}$ так, чтобы $H' \subseteq H$ и a_i принадлежит $\mathfrak{B}(\mathcal{A})_{a_i})$ вместе с некоторой окрестностью, или $a_i \in \mathfrak{B}(\widehat{\mathcal{A}})$, или $a_i \in \mathfrak{B}(\widetilde{\mathcal{A}})$, $\widetilde{\mathcal{A}} \not\subset \widehat{\mathcal{A}}$; b_i принадлежит $\mathfrak{B}(\mathcal{A})_{b_i})$ вместе с некоторой окрестностью, или $b_i \in \mathfrak{B}(\widehat{\mathcal{A}})$, или $b_i \in \mathfrak{B}(\widetilde{\mathcal{A}})$, $\widetilde{\mathcal{A}} \not\subset \widehat{\mathcal{A}}$. Это возможно, так как всякая точка x, предельная для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})_x)$, $\mathcal{A}_x \subset \widehat{\mathcal{A}}$, является предельной и для множества $\mathfrak{B}(\widehat{\mathcal{A}})$.

Существует по крайней мере одно множество $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$, для которого множеств $\mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'' \subset \overline{H'}$ не существует (лемма 1) (из леммы 3 вытекает, что такое множество $\mathcal{A}'$ существует только одно). Точки a_i, b_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, множеству $\mathcal{A}'$ не принадлежат. Поэтому H' является окрестностью множества $\mathcal{A}'$ и притом не содержит множеств $\mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}'$, т. е. $\mathcal{A}' \in \mathbb{M}'$.

Л е м м а 7. *Если* $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ *не является минимальным элементом, то для любого множества* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ *существует при-*

тягивающее множество $\mathcal{A}''$: $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$, *причем множество* $\mathcal{A}'' \setminus \mathcal{A}'$ *состоит из одной траектории.*

Пусть H — окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A}'$ не является циклом. Построим W-окрестность $U(H,W)$ множества $\mathcal{A}'$; U является W-окрестностью множества $\mathcal{A}$, ибо $H \supset \mathcal{A}, W \cap \mathcal{A} \neq \varnothing$. Существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}') \cap W$, для которой $T^j x \in U$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (согласно определению W-окрестности). Можно считать, что $x \notin \mathcal{A}'$ (так как множество $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ не пусто и любая точка множества $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ является W-предельной). Далее так же, как и в лемме 4, доказывается, что существует притягивающее множество $\mathcal{A}'' \ni x$, $\mathcal{A}'' \subset H$ и множество $\mathcal{A}'' \setminus \mathcal{A}'$ состоит из одной траектории. Из леммы 3 следует, что $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'' \in \mathbb{M}$. Так как $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'' \subset H$ и окрестность H не содержит множеств $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$. Так как $\mathcal{A}$ — совершенное множество, то $\mathcal{A}'' \neq \mathcal{A}$. Итак, $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$.

Предположим, что $\mathcal{A}'$ — цикл. W-окрестность U может не содержать точек $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, для которых $T^j x \in U$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае можно доказать, что существует точка $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}')$, принадлежащая множеству $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Дальнейшие рассуждения, как и выше; хотя точка x и точки цикла могут не принадлежать U, они являются предельными для W-точек множества U.

Для простоты рассмотрим случай, когда $\mathcal{A}'$ — неподвижная точка. Пусть это будет точка α и α является, например, только ω^--предельной точкой для множества $\mathcal{A}$. Можно считать, что множество W является левосторонней окрестностью точки α. Если существует точка $x \in \mathcal{A} \setminus \{\alpha\}$, для которой $Tx = \alpha$, утверждение справедливо. Предположим, такой точки x не существует. В этом случае для любой точки $\widetilde{x} \in W$ $\sup\limits_{x \in W, x < \widetilde{x}} Tx > \widetilde{x}$ (см. доказательство леммы 3 из параграфа 3.2), откуда следует (см. доказательство теоремы 3.1.1), что существует точка $x \in W \cap \mathfrak{B}(\alpha)$, для которой $T^j x \in \overline{W}$, $j = 1, 2, \ldots$. Так как точка α является предельной слева для точек, не принадлежащих множеству $\mathfrak{B}(\alpha)$, то можно считать, что и точка x

является предельной для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\alpha)$, т. е. x — W-предельная точка. Далее поступаем, как и в случае, когда $\mathcal{A}'$ не является циклом.

Доказательство несколько усложняется, если точка α для множества $\mathcal{A}$ является ω^- и ω^+-предельной.

Л е м м а 8. *Если $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ не является минимальным элементом, то на множестве $\mathcal{A}$ всюду плотно лежат точки циклов.*

Пусть H — окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, и G — произвольное открытое множество такое, что $\mathcal{A} \cap G \neq \varnothing$. Нужно доказать, что существует точка цикла, принадлежащая множеству $\mathcal{A} \cap G$.

Построим W-окрестность $U(H, W)$ множества $\mathcal{A}$. Возьмем точку $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{A}) \cap W$, для которой $T^j x \in H$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, предельную для множества $E \setminus \mathfrak{B}(\mathcal{A})$, например, справа. Найдется номер j' : $T^{j'} x \in G$. Пусть G' — компонента множества $U \cap G$, содержащая точку $T^{j'} x$. Согласно определению W-окрестности U существует множество $G'' \subset W$ такое, что $T^{j'} G'' = G'$, и это множество открыто. Возьмем связную окрестность G_{+x} точки x, $G_{+x} \subseteq G''$, $\overline{G_{+x}} \subset W$. Существуют замкнутый интервал $V \subset G_{+x}$ и номер $m \geq j'$: $T^j V \subset U$ при $j < m$, $T^m V \supset \overline{G_{+x}}$ (следствие теоремы 3.2.3). Воспользуемся леммой 2 из параграфа 3.2. Так как $T^m V \supset \overline{G_{+x}} \supset V$ и $x \notin V$, то существует точка $\gamma \in V$, принадлежащая циклу, период которого делит $2m$, и последовательность точек $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \to \gamma$, $\gamma_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots$, таких, что $T^{2mi} \gamma_i = x$. Поскольку x — W^+-предельная точка, то γ — W^--предельная точка.

Утверждается, что $\gamma \in \mathcal{A}$ и, таким образом, $\mathcal{A} \cap G$ содержит точку $T^{j'} \gamma$, принадлежащую циклу. Действительно, пусть $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Если $\gamma \in \mathcal{A}'$, то утверждение справедливо. Если $\gamma \notin \mathcal{A}'$, как и в лемме 5 (лемме 4), то доказывается, что существует множество $\mathcal{A}'' \supset \mathcal{A}' \cup \{\gamma\}$, $\mathcal{A}'' \subset H$. Из леммы 3 следует, что $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'' \in \mathbb{M}$. Так как $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'' \subset H$ и окрестность H не содержит множеств $\widetilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}$, т. е. $\gamma \in \mathcal{A}$.

10. *Каждый элемент* $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ *во всякой максимальной цепи системы* $\mathbb{M}$, *содержащей* $\mathcal{A}$, *не имеет непосредственно предшествующего элемента.*

Это следует из леммы 7.

Непосредственно из определения системы $\mathbb{M}'$ вытекает:

11. *Для любого элемента* $\mathcal{A} \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}'$ *существует максимальная цепь, содержащая* $\mathcal{A}$, *в которой нет элемента, непосредственно следующего за* $\mathcal{A}$.

Множество $\mathbb{M} \setminus \mathbb{M}'$ не пусто. Из леммы 7, например, следует, что существует множество $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$, содержащее изолированные точки; такое множество принадлежит $\mathbb{M} \setminus \mathbb{M}'$ (см. параграф 3.2).

Таким образом, система $\mathbb{M}$ не удовлетворяет условию обрыва возрастающих и убывающих цепей: существуют бесконечные цепи $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$ и $\mathcal{A}'_1 \supset \mathcal{A}'_2 \supset \dots$, $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}'_i \in \mathbb{M}$, $i = 1, 2, \dots$

12. *Совокупность минимальных элементов системы* $\mathbb{M}$, *отличных от циклов, имеет мощность континуума.*

В самом деле, пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ не является минимальным элементом. На множестве $\mathcal{A}$ имеются циклы сколь угодно большого периода (и, более того, любая точка множества $\mathcal{A}$ является предельной для точек циклов, принадлежащих $\mathcal{A}$, среди которых есть циклы сколь угодно большого периода). Это следует из леммы 8, непрерывности отображения и того факта, что существует точка $x \in \mathcal{A}$, не принадлежащая циклу (такие точки лежат на множестве $\mathcal{A}$ всюду плотно).

Пусть $\mathcal{A}'$ — цикл периода k', $\mathcal{A}''$ — цикл периода k'', $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' \neq \mathcal{A}''$. Существует множество $\widetilde{\mathcal{A}}'$: $\mathcal{A}' \subset \widetilde{\mathcal{A}}' \subset \mathcal{A}$, и множество $\widetilde{\mathcal{A}}''$: $\mathcal{A}'' \subset \widetilde{\mathcal{A}}'' \subset \mathcal{A}$, причем каждое из множеств $\widetilde{\mathcal{A}}' \setminus \mathcal{A}'$, $\widetilde{\mathcal{A}}'' \setminus \mathcal{A}''$ состоит из одной траектории (лемма 7). Очевидно, $\widetilde{\mathcal{A}}' \cap \widetilde{\mathcal{A}}'' = \varnothing$. Найдутся окрестность H' множества $\widetilde{\mathcal{A}}'$ и окрестность H'' множества $\widetilde{\mathcal{A}}''$ такие, что $H' \cap H'' = \varnothing$. Можно считать, что H' не содержит точек циклов периода $< k'$ и H'' не содержит точек циклов периода $< k''$ (ввиду непрерывности отображения). Существует множество $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}' \in \mathbb{M}'$, $\widetilde{\mathcal{A}}' \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}' \subset H'$, и множество $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}'' \in \mathbb{M}'$, $\widetilde{\mathcal{A}}'' \subset \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}}'' \subset H''$ (лемма 6). Если H — окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\widetilde{\mathcal{A}} \supset \mathcal{A}$, и $H', H'' \subset H$, то $\widetilde{\widetilde{\mathcal{A}'}}, \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}''}} \subset \mathcal{A}$ (следует из леммы 3).

Таким образом, можно построить систему, приведенную на рис. 4.1. где $\mathcal{A}_{i_1\dots i_s} \in \mathbb{M}'$, $i_s = 0$ или 1, $s = 1, 2, \dots$,

$$\mathcal{A}_{i_1\dots i_{s-1}} \supset \mathcal{A}_{i_1\dots i_{s-1} i_s},$$

$$\mathcal{A}_{i_1\dots i_{s-1}0} \cap \mathcal{A}_{i_1\dots i_{s-1}1} = \varnothing,$$

и если $k_{i_1\dots i_s}$ — наименьший из периодов циклов, принадлежащих $\mathcal{A}_{i_1\dots i_s}$, то $k_{i_1\dots i_{s-1}} < k_{i_1\dots i_{s-1} i_s}$, $s = 2, 3, \dots$

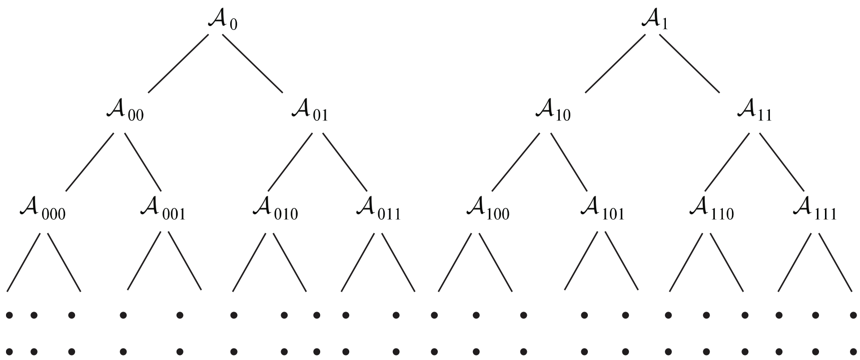

Рис. 4.1

Всякой бесконечной цепи $\mathbb{L}:\ \mathcal{A}_{i_1} \supset \mathcal{A}_{i_1 i_2} \supset \mathcal{A}_{i_1 i_2 i_3} \supset \dots$ соответствует непустое замкнутое множество $F = \bigcap\limits_{\mathcal{A}_{i_1\dots i_s} \in \mathbb{L}} \mathcal{A}_{i_1\dots i_s}$. Очевидно, $TF = F$ и множество F не содержит циклов. Всякий минимальный элемент $\mathcal{A} \subset F$ не является циклом. Множество всех бесконечных цепей $\mathcal{A}_{i_1} \supset \dots \supset \mathcal{A}_{i_1\dots i_s} \supset \dots$, $i_s = 0$ или 1, $s = 1, 2, \dots$, имеет мощность континуума; различным цепям соответствуют различные минимальные элементы.

Остается заметить, что совокупность всех замкнутых множеств пространства E (также) имеет мощность континуума.

Остановимся подробнее на частично упорядоченной системе $\mathbb{M}'$.

Из леммы 6 вытекает, что для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{M} \backslash \mathbb{M}'$ существует последовательность множеств $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots$, $\mathcal{A}_i \in \mathbb{M}'$, такая, что $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$.

$\mathbf{1}'$. *Всякая максимальная цепь системы* $\mathbb{M}'$ *плотна в себе, т. е. для любых* $\mathcal{A}', \mathcal{A}'' \in \mathbb{M}'$, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$, *существует элемент* $\mathcal{A} \in \mathbb{M}' : \quad \mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$.

Это вытекает из лемм 7, 6 и 3.

$\mathbf{2}'$. *Всякая максимальная цепь системы* $\mathbb{M}'$ *счетна.*

Если $\{F_\zeta\}$ — произвольное семейство замкнутых множеств $F_\zeta \subset E$, вложенных друг в друга ($F_{\zeta'} \subset F_{\zeta''}$, если $\zeta' < \zeta''$), то для любого ζ' $F_{\zeta'} = \bigcap\limits_{\zeta > \zeta'} F_\zeta$, за исключением, быть может, счетного числа индексов ([30, с. 274]). Для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ существует окрестность (в E), не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$, и поэтому всякая цепь системы $\mathbb{M}'$ не более чем счетна. Всякая максимальная цепь, как плотная в себе, счетна.

Таким образом, всякая максимальная цепь системы $\mathbb{M}'$ подобна множеству рациональных точек. В зависимости от того, содержит максимальная цепь минимальный элемент или не содержит, эта цепь подобна множеству рациональных точек интервала $[0,1]$ или $(0,1]$.

$\mathbf{3}'$. *Система* $\mathbb{M}'$ *имеет мощность континуума.*

Пусть $\mathcal{A} \in \mathbb{M}'$ и H — окрестность множества $\mathcal{A}$, не содержащая множеств $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$. Используя лемму 7 можно выделить последовательность множеств $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$, $\mathcal{A}_n \in \mathbb{M}$, таких, что $\mathcal{A}_n \supset \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{n'} \cap \mathcal{A}_{n''} \subset H$, и при этом каждая точка множества $\bigcup\limits_n \mathcal{A}_n \setminus H$ изолирована в нем.

Найдутся окрестности H_n множеств $\mathcal{A}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $H_{n'} \cap H_{n''} \subset H$. Любой последовательности целых положительных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ можно поставить в соответствие множество $\mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \in \mathbb{M}' : \quad \mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \subset \bigcup\limits_k H_{n_k}$, $\mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \supset \supset \bigcup\limits_k \mathcal{A}_{n_k}$ (леммы 3, 1, 6). Если последовательности $n_1 < n_2 < \ldots$ и $n_1' < n_2' < \ldots$ различны, т. е. существует, например, $n' \in$

$\in \{n'_1, n'_2, \ldots\}$, $n' \notin \{n_1, n_2, \ldots\}$, то $\mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \neq \mathcal{A}_{n'_1 n'_2 \ldots}$. Действительно, $\mathcal{A}_{n'_1 n'_2 \ldots} \supset \mathcal{A}_{n'}$, но $\mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \not\supset \mathcal{A}_{n'}$, так как $\mathcal{A}_{n_1 n_2 \ldots} \cap \cap \mathcal{A}_{n'} \subset H$, $\mathcal{A}_{n'} \not\subset H$. Остается заметить, что множество различных последовательностей $n_1 < n_2 < \ldots$ имеет мощность континуума.

Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathbb{M}'$, то обозначим $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ "интервал" $\{\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{M}', \ \mathcal{A} \subset \widetilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'\}$.

4′. *Для любых элементов* $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathbb{M}'$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, *существует по крайней мере счетное множество элементов* $\mathcal{A}_\zeta \in \in (\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ *таких, что* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_{\zeta'}) \cap (\mathcal{A}, \mathcal{A}_{\zeta''}) = \varnothing$, *если* $\zeta' \neq \zeta''$.

Доказательство сходно с доказательством п. 3′.

Несколько слов о мощности максимальной цепи системы $\mathbb{M}$.

Л е м м а 9. *Если* $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots$, $\mathcal{A}_n \in \mathbb{M}$, *то* $\bigcap\limits_n \mathcal{A}_n$ *является притягивающим множеством.*

Лемма доказывается так же, как и теорема 3.2.6.

Пусть $\mathbb{L}'$ — произвольная максимальная цепь системы $\mathbb{M}'$. Дополним $\mathbb{L}'$ пересечениями всевозможных подцепей $\mathbb{L}'$. Согласно лемме 9, при этом получим некоторую цепь $\mathbb{L}$ системы $\mathbb{M}$ (необязательно максимальную). Цепь $\mathbb{L}$, очевидно, имеет мощность континуума.

Однако нетрудно указать максимальные цепи системы $\mathbb{M}$, являющиеся счетными (используя, например, лемму 4).

Оказывается, что всякая максимальная цепь системы $\mathbb{M}$ либо счетна, либо имеет мощность континуума. Это следует из того, что всякой максимальной цепи можно поставить в соответствие замкнутое множество интервала $[0, 1]$ (для этого нужно воспользоваться леммами 1, 9).

Если, например, $\mathbb{L}'$ — максимальная цепь системы $\mathbb{M}'$, не содержащая минимального элемента, и элементам цепи $\mathbb{L}'$ поставлены в соответствие точки канторова совершенного множества, являющиеся предельными для точек множества только слева, то каждая точка канторова множества будет соответствовать некоторому элементу любой цепи $\mathbb{L}$ системы $\mathbb{M}$, содержащей $\mathbb{L}'$.

Максимальная цепь $\mathbb{L}$ системы $\mathbb{M}$ имеет мощность континуума всякий раз, когда цепь $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}'$ содержит плотную в себе подцепь. Справедливо ли обратное утверждение?

По-видимому, нетрудно описать все замкнутые множества интервала $[0,1]$, которые могут быть поставлены в соответствие максимальным цепям системы $\mathbb{M}$.

Тем не менее, мы еще далеки от того, чтобы полностью описать частично упорядоченную систему $\mathbb{M}$, т. е. найти полный набор свойств, которым должно удовлетворять произвольное частично упорядоченное множество, чтобы быть изоморфным ("соответствовать") частично упорядоченной системе притягивающих множеств некоторого непрерывного отображения.

4.2. Связь между строением отображения и строением его частично упорядоченной системы притягивающих множеств

Интересно выяснить, в какой мере частично упорядоченная система $\mathbb{M}$ характеризует отображение. Иными словами, как много "информации" о строении отображения содержит в себе частично упорядоченная система его притягивающих множеств?

Как уже отмечалось во введении, аналогичная проблема — связь между строением группы и строением структуры ее подгрупп — уже достаточно давно изучается в алгебре. Существуют группы, которые полностью определяются структурой своих подгрупп.

Не окажется ли, что и для некоторых динамических систем информация, заключенная в частично упорядоченной системе ее притягивающих множеств, является полной? По-видимому, существуют такие транзитивные динамические системы, для которых ответ будет утвердительным. В этом случае появится некоторый подход к решению так называемой проблемы изоморфизма динамических систем.

Как известно, отображения T и T', заданные соответственно на E и E', называются изоморфными, если существует гомеоморфизм $S : E \to E'$ такой, что $T' = STS^{-1}$. Проблема изоморфизма и заключается в том, при каких условиях отображения T и T' будут изоморфными.

Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — максимальные элементы второго рода отображений T_1 и T_2 (именно в случае, когда притягивающее множество $\mathcal{A}$ отображения T является максимальным элементом второго рода, динамическая система на $\mathcal{A}$ транзитивна: существует точка $x \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$). Пусть далее $\mathbb{M}_1/\mathcal{A}_1$, $\mathbb{M}_2/\mathcal{A}_2$ — частично упорядоченные системы, элементы которых — притягивающие множества, содержащиеся соответственно в $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Будут ли изоморфны отображения T_1 и T_2, рассматриваемые соответственно на множествах $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, если изоморфны частично упорядоченные системы $\mathbb{M}_1/\mathcal{A}_1$ и $\mathbb{M}_2/\mathcal{A}_2$?[1] Очевидное, но не существенное ограничение: наименьший период циклов, содержащихся как в $\mathcal{A}_1$, так и в $\mathcal{A}_2$, должен быть один и тот же.

Заметим, что для любого отображения T вся информация о частично упорядоченной системе $\mathbb{M}$ содержится в частично упорядоченной системе $\mathbb{M}'$ (определенной в предыдущем параграфе) и, таким образом, фигурирующие выше $\mathbb{M}_1/\mathcal{A}_1$, $\mathbb{M}_2/\mathcal{A}_2$ можно заменить соответственно $\mathbb{M}_1'/\mathcal{A}_1$, $\mathbb{M}_2'/\mathcal{A}_2$.

Пусть $\mathbb{L}', \mathbb{L}''$ — произвольные цепи частично упорядоченной системы $\mathbb{M}'$. Будем говорить, что цепи находятся

1) в отношении $\gg$ ($\mathbb{L}' \gg \mathbb{L}''$), если для любого элемента $\mathcal{A}' \in \mathbb{L}'$ существует элемент $\mathcal{A}'' \in \mathbb{L}''$, $\mathcal{A}'' \subseteq \mathcal{A}'$,
2) в отношении $\gg\ll$ ($\mathbb{L}' \gg\ll \mathbb{L}''$), если $\mathbb{L}' \gg \mathbb{L}''$ и $\mathbb{L}'' \gg \mathbb{L}'$.

Если $\mathbb{L}' \gg\ll \mathbb{L}''$, то $\mathbb{L}'$ и $\mathbb{L}''$ определяют один и тот же элемент $\mathcal{A} \in \mathbb{M}$, т. е. множество $\mathcal{A} = \bigcap\limits_{\substack{\widetilde{\mathcal{A}} \subset E \\ \widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{L}'}} \widetilde{\mathcal{A}} = \bigcap\limits_{\substack{\widetilde{\mathcal{A}} \subset E \\ \widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{L}''}} \widetilde{\mathcal{A}}$.

Если $\mathcal{A} \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{M}'$, то любые две цепи из $\mathbb{M}'$, определяющие элемент $\mathcal{A}$, находятся в отношении $\gg\ll$. Последнее вытекает из теоремы 3.2.7 и ее обобщений, следующих из лемм 3, 4 пара-

[1] Частично упорядоченные множества M_1 и M_2 называются изоморфными, если между M_1 и M_2 существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.

графа 4.1. Таким образом, $\mathbb{M}$ представляет собой пространство цепей $\mathbb{M}'$, факторизованное по $\gg\ll$ и частично упорядоченное по $\gg$.

Как и для структуры подгрупп группы, интересно изучить свойства, инвариантные при изоморфизмах частично упорядоченной системы притягивающих множеств. В частности, найти элементы или множества элементов, инвариантные при таких изоморфизмах. Например, множество $\mathbb{M}'/\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — максимальный элемент второго рода, инвариантно при изоморфизмах $\mathbb{M}/\mathcal{A}$, так как для любого элемента $\mathcal{A}' \in \mathbb{M}'/\mathcal{A}$ во всякой максимальной цепи $\mathbb{M}/\mathcal{A}$ существует элемент, непосредственно следующий за $\mathcal{A}'$, а для любого элемента $\mathcal{A}'' \in \mathbb{M}/\mathcal{A}$, но не принадлежащего $\mathbb{M}'/\mathcal{A}$, существует цепь, в которой нет элемента, непосредственно следующего за $\mathcal{A}''$. Впрочем, нам неизвестно, существуют ли вообще изоморфизмы системы $\mathbb{M}/\mathcal{A}$, отличные от тождественного.

Что же касается существования неизоморфных частично упорядоченных систем, то такие можно указать. Например,

$$T_1 x = 4x(1-x), \quad 0 \le x \le 1,$$

$$T_2 x = \begin{cases} 8x(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

И у T_1, и у T_2 имеется единственный максимальный элемент второго рода. Однако существует притягивающее множество $\mathcal{A}$ отображения T_1 такое, что 1) в любой максимальной цепи, содержащей $\mathcal{A}$, нет элемента, непосредственно предшествующего $\mathcal{A}$, 2) существует цепь, содержащая $\mathcal{A}$, в которой нет элемента, непосредственно следующего за $\mathcal{A}$. Отображение T_2 не имеет притягивающего множества, обладающего такими свойствами, поэтому соответствующие частично упорядоченные системы не изоморфны.

В заключение можно отметить следующий факт, который дает основания предполагать, что частично упорядоченная система $\mathbb{M}$ $(\mathbb{M}')$ содержит всю информацию об отображении на любом притягивающем множестве, являющемся максимальным элементом второго рода.

Отображение T можно восстановить на всяком множестве $\mathcal{A}$ $(\subseteq E)$, являющемся максимальным элементом второго рода системы $\mathbb{M}$, если задать на множестве $\mathcal{A}$ систему $\mathbb{F}$ замкнутых множеств, состоящую из всех притягивающих множеств, содержащихся в $\mathcal{A}$ (кроме "формы" $\mathbb{M}$ учитывается и "содержание"). При этом, если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл периода k (т. е. множество $F \in \mathbb{F}$, состоящее из k точек), то существует не более $(2k)!$ отображений, имеющих данную систему притягивающих множеств; все такие отображения изоморфны между собой.

Этот результат является следствием леммы 4 из предыдущего параграфа и утверждений:

а) для любого множества $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ точки $x \in \mathcal{A}$, для которых $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}'$, лежат на $\mathcal{A}$ всюду плотно;

б) если множество $\mathcal{A}$ содержит цикл периода k, то для любой точки $x \in \mathcal{A}$ (исключая не более $3k$ точек) существует по крайней мере две различные точки $x', x'' \in \mathcal{A}$ такие, что $T^{2k}x' = T^{2k}x'' = x$.

Рассмотрим произвольное множество $F \in \mathbb{F}$. Обозначим $\mathbb{F}/F$ совокупность множеств $F' \in \mathbb{F}$ таких, что $F' \supset F$ и $F' \setminus F$ состоят из одной траектории. Согласно лемме 4 и следствия а) подсистема $\mathbb{F}/F$ не пуста и множество $\bigcup\limits_{F' \in \mathbb{F}/F} F'$ всюду плотно на $\mathcal{A}$.

Пусть $F' \in \mathbb{F}/F$. Найдется множество $F'' \in \mathbb{F}$ (даже $F'' \in \in \mathbb{F}/F$) такое, что $F' \cap F'' = F \cup Q_0$, где $Q_0 = F' \setminus F''$, не пусто и $\neq F' \setminus F$ (ввиду леммы 4 и утверждения б)).

Предположим, что: б$'$) для всякой точки $x \in \mathcal{A}$, исключая, быть может, концы множества $\mathcal{A}$ — точки c и d, существуют точки $x', x'' \in \mathcal{A}$, $x' \neq x''$, $Tx' = Tx'' = x$ (это справедливо, если для множества $\mathcal{A}$ выполнены условия (В) из параграфа 3.2). Чтобы далее не делать исключений из-за точек c и d, будем считать, что $c \in F$, если $\mathcal{A}_c \neq \mathcal{A}$, и $d \in F$, если $\mathcal{A}_d \neq \mathcal{A}$.

Для любого $n > 0$ найдется $F_n \in \mathbb{F}$ такое, что $F' \cap F_n = F \cup Q_n$, причем $Q_n \supset Q_0$ и множество $Q_n \setminus Q_0$ состоит из n точек (ввиду леммы 4 и утверждения б$'$)). Так как $F' \setminus F$ состоит из одной траектории, то $Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ Всякое множество $Q_{i+1} \setminus Q_i$ состоит из одной точки, $T(Q_{i+1} \setminus Q_i) = Q_i \setminus Q_{i-1}$. Если $Q_i \setminus Q_{i-1} = x_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ то $Tx_{i+1} = x_i$. Таким образом отображение восстанавливается в каждой точке множества $\bigcup\limits_{F' \in \mathbb{F}/F} F'$, исключая, быть может, те точки x, для которых $Tx \in F$. Множество $T^{-1}F$, состоящее из точек $x \in \mathcal{A}$, для которых $Tx \in F$, нигде не плотно на $\mathcal{A}$ (ибо существует точка $x' \in \mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}_{x'} = \mathcal{A}$); множество $\bigcup\limits_{F' \in \mathbb{F}/F} F'$ всюду плотно на $\mathcal{A}$. Следовательно, отображение T восстанавливается при этом на плотном в $\mathcal{A}$ множестве и, ввиду непрерывности T, на всем множестве $\mathcal{A}$.

Если выполняются лишь условия б) (вместо б$'$)), то рассуждения аналогичны. Однако отображение T восстанавливается неоднозначно, так как каждое множество $Q_i \setminus Q_{i-1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ состоит из $2k$ точек.

Утверждение а) следует, например, из леммы 4 и теоремы 3.2.2.

Доказательство утверждения б) опирается на следующее утверждение:

с) *если множество $\mathcal{A}$ содержит неподвижную точку, c и d — левый и правый концы множества $\mathcal{A}$, то любая точка $x \in (c, d)$ такая, что $Tx \in \mathcal{A}$, принадлежит множеству $\mathcal{A}$, если для любой окрестности G_x точки x существует*

(−) *окрестность $G_{-Tx} \subset TG_x$, когда Tx — ω^--предельная точка,*

или

(+) *окрестность $G_{+Tx} \subset TG_x$, когда Tx — ω^+-предельная точка множества $\mathcal{A}$.*

Доказательство этого использует теорему 3.2.1 и рассуждения, подобные тем, которые приведены при доказательстве п.3 параграфа 3.3.

Докажем утверждение б$'$); б) следует из б$'$). Пусть выполнены условия (B), точки c, d являются концами множества $\mathcal{A}$, $x \in \mathcal{A} \cap (c, d)$. Так как $T\mathcal{A} = \mathcal{A}$, то существует точка $x' \in \mathcal{A}$, $Tx' = x$. Допустим, точка $x'' \in \mathcal{A}$, $x'' \neq x'$, такая, что $Tx'' = x$, не существует. Тогда ввиду с) либо $T[c, x'] \subset K_x^-$, $T[x', d] \subset K_x^+$, либо $T[c, x'] \subset K_x^+$, $T[x', d] \subset K_x^-$. Поскольку $x \in (c, d)$, $T[c, d] \supset [c, d]$, то $x' \in (c, d)$. Найдется интервал $(a, b) \supset [c, d]$ такой, что для $\widetilde{x} \in (a, b) \setminus [c, d]$ $T\widetilde{x} \neq x$. Построим отображение $\widetilde{T} : \widetilde{T} = T$, когда $a \leq \widetilde{x} \leq b$, $\widetilde{T}\widetilde{x} = Ta$ при $\widetilde{x} < a$, $\widetilde{T}\widetilde{x} = Tb$ при $\widetilde{x} > b$. Для отображения $\widetilde{T}$ множество $\mathcal{A}$ является притягивающим множеством и в то же время либо $\widetilde{T}K_{x'}^- \subset K_x^-$, $\widetilde{T}K_{x'}^+ \subset K_x^+$, либо $\widetilde{T}K_{x'}^- \subset K_x^+$, $\widetilde{T}K_{x'}^+ \subset K_x^-$. Если, например, $x' < x$, то либо $\widetilde{T}K_{x'}^+ \subset K_x^+ \subset K_{x'}^+$, что невозможно, так как $\mathcal{A} \not\subset K_{x'}^+$, $\mathcal{A} \not\subset K_{x'}^-$, либо $\widetilde{T}^2 K_{x'}^+ \subset \widetilde{T}K_x^- \subset \subset \widetilde{T}K_{x'}^- \subset K_x^+ \subset K_{x'}^+$ и тогда $\widetilde{T}^{2j} K_{x'}^+ \subset K_{x'}^+$, $j = 1, 2, \ldots$, что противоречит теореме 3.2.1, которая должна иметь место, так как выполнены условия (B). Аналогичная ситуация при $x' > x$.

Глава 5

Некоторые приложения

5.1. Множество сходимости одномерных итераций

Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots$ — последовательность непрерывных действительных функций действительного переменного. Множество сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, состоящее из точек x, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, есть множество типа $F_{\sigma\delta}$ и, каково бы ни было множество M типа $F_{\sigma\delta}$, можно построить последовательность непрерывных функций, для которой M есть множество точек сходимости (Хан, см. [35, 49]).

Предположим, $f(x)$ — непрерывная функция действительного переменного. Функция $f(x)$ порождает последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, где $f_{n+1}(x) = f_n(f(x))$, $n = 1, 2, \ldots,$ $f_1(x) = f(x)$. Естественно ожидать, что множество сходимости последовательности итераций функции $f(x)$ не может быть произвольным $F_{\sigma\delta}$-множеством.

Например, нетрудно убедиться, что множество, содержащее полуинтервал, не может быть множеством сходимости. Более того, не всякое открытое или замкнутое множество может быть множеством сходимости [38]. Можно было бы предположить, что множество сходимости последовательности итераций непрерывной функции есть множество более простого типа, чем $F_{\sigma\delta}$-множество. Однако это не так. Ниже формулируются условия, при выполнении которых множество сходимости является множеством 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена, т. е. будучи $F_{\sigma\delta}$-множеством, не является $G_{\delta\sigma}$-множеством.

Обозначим множество сходимости последовательности итераций функции $f(x)$ через $\mathfrak{B}$ и множество сходимости к данной точке α через $\mathfrak{B}_\alpha$.

Функции $f(x)$ соответствует непрерывное отображение $T : x \mapsto f(x)$ вещественной прямой E в себя. Если $x \in \mathfrak{B}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \alpha$, т. е. $x \in \mathfrak{B}_\alpha$, то α — неподвижная точка отображения T. В наших прежних обозначениях $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}(\alpha)$. Множество $\mathfrak{B}$ состоит из тех и только тех точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x$ состоит из одной точки — неподвижной точки отображения T.

Теорема 5.1.1. *Множество $\mathfrak{B}$ является множеством 3-го класса тогда и только тогда, когда существует точка α, для которой $\mathfrak{B}_\alpha$ является множеством 3-го класса.*

Напомним (см. параграф 3.1), что $\mathfrak{B}_\alpha$ является множеством 3-го класса тогда и только тогда, когда существуют последовательности точек $x_1, x_2, \ldots \to \alpha$, $x'_1, x'_2, \ldots \to \alpha$ и последовательности чисел $j_1, j_2, \ldots,$ $j'_1, j'_2, \ldots$ такие, что

$$a_1)\ \ x_k < x_{k+1} \le T^{j_k} x_k \le \alpha, \quad j_k \le 2;$$

$$r_1)\ \ x'_{k+1} > x'_k \ge T^{j'_k} x'_{k+1};$$

или

$$a_2)\ \ x_k > x_{k+1} \ge T^{j_k} x_k \ge \alpha, \quad j_k \le 2;$$

$$r_2)\ \ x'_{k+1} < x'_k \le T^{j'_k} x'_{k+1}; \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Множество $\mathfrak{B}$ и любое $\mathfrak{B}_\alpha$ являются $F_{\sigma\delta}$-множествами.[1] Поэтому теорема 5.1.1 равносильна следующему: $\mathfrak{B}$ *является* $G_{\delta\sigma}$-

[1] Все утверждения, доказываемые ранее в случае, когда E — компакт, и используемые здесь, имеют место, как легко видеть, и тогда, когда пространство E локально-компактно.

множеством тогда и только тогда, когда всякое $\mathfrak{B}_\alpha$ *является* $G_{\delta\sigma}$*-множеством.* Именно это утверждение мы и докажем.

Множество $\mathfrak{B}^*_\alpha$, состоящее из точек $x \in E$, для которых $\mathcal{A}_x \ni \alpha$, является G_δ-множеством (теорема 1.2.1). Следовательно, если $\mathfrak{B}$ — $G_{\delta\sigma}$-множество, то и $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^*_\alpha$ также является $G_{\delta\sigma}$-множеством.

Остается доказать: если всякое $\mathfrak{B}_\alpha$ — $G_{\delta\sigma}$-множество, то и $\mathfrak{B}$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством.

Обозначим B множество неподвижных точек отображения T. Примем, что точка $\alpha \in B$ обладает свойством a_1 или $\overline{a_1}$ (соответственно, a_2, r_1, r_2) в зависимости от того, существует для точки α последовательность типа a_1 (соответственно, a_2, r_1, r_2) или не существует.

Обозначим B^1 множество неподвижных точек, обладающих свойствами $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$,

B^2 — свойствами $\overline{r_1}$, $\overline{r_2}$,

B^3 — свойствами $a_1, \overline{a_2}, \overline{r_1}, r_2$,

B^4 — свойствами $\overline{a_1}, a_2, r_1, \overline{r_1}$.

Если всякое множество $\mathfrak{B}_\alpha$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством, то каждая точка $\alpha \in B$ принадлежит хотя бы одному из множеств B^i, $i = 1, 2, 3, 4$, т. е. $B^1 \cup B^2 \cup B^3 \cup B^4 = B$.

Если $\alpha \in B^1$, то для любой точки $x \in \mathfrak{B}_\alpha$ существует номер $k:\ T^k x = \alpha$ (см. параграф 3.1). Положим $\mathfrak{B}^1 = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} B$, где через $T^{-j}B$ обозначено множество точек $x \in E$, для которых $T^j x \in B$. Если $\alpha \in B^1$, то $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}^1$. Очевидно, $\mathfrak{B}^1 \subseteq \mathfrak{B}$. Так как B — замкнутое множество, то $\mathfrak{B}^1$ — F_σ-множество.

Если $\alpha \in B^2$, то для любой окрестности U точки α найдется окрестность $U' :\ T^j U' \subset U$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Далее удобно предположить, что на E введена обычная метрика.

Рассмотрим множество V^k_n, $k \geq 0$, $n \geq 1$, состоящее из точек $x \in E$, для которых существует окрестность U_x : для любых точек $x', x'' \in U_x$ $|T^j x' - T_j x''| < \frac{1}{n}$, $j = k, k+1, k+2, \ldots$. Вместе с точкой x множеству V^k_n принадлежат и точки окрестности U_x. Следовательно, V^k_n — открытое множество. Положим $V_n = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} V_n^k$ и $\mathfrak{B}^2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. $\mathfrak{B}^2$ — множество типа G_δ. Утверждается, что $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}^2$, если $\alpha \in B^2$, и $\mathfrak{B}^2 \subseteq \mathfrak{B}$.

Действительно, если $\alpha \in B^2$, то для окрестности $U = \{x : |x-\alpha| < \frac{1}{2n}\}$ найдется окрестность U' точки α такая, что $T^j U' \subset U$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Если $x \in \mathfrak{B}_\alpha$, найдется номер $k:$ $T^k x \in U'$. Поскольку U' — открытое множество, найдется окрестность U'' точки x такая, что $T^k U'' \subseteq U'$. Следовательно, $x \in V_n^k$; $x \in V_n$ и $x \in \mathfrak{B}^2$. Итак, $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}^2$.

Пусть $x \in \mathfrak{B}^2$. Это означает, что $x \in V_n$, $n = 1, 2, \dots$; для любого $n \geq 1$ существует номер k_n такой, что $x \in V_n^{k_n}$. Следовательно, $|T^j x - T_{k_n} x| < \frac{1}{n}$, $j = k_n + 1, k_n + 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность $T^j x$ сходится и $x \in \mathfrak{B}$. Итак, $\mathfrak{B}^2 \subseteq \mathfrak{B}$.

Рассмотрим множество B^3. Если $\alpha \in B^3$, то (согласно $\overline{a_2}$) существует интервал $(\alpha, \gamma):$ $Tx \neq \alpha$ при $x \in (\alpha, \gamma)$. Если $Tx < \alpha$ при $x \in (\alpha, \gamma)$, то точка α является предельной слева для точек $x:$ $Tx > \alpha$ (в силу свойства r_2) и точек $x:$ $Tx \leq \alpha$ (в силу свойств a_1 и $\overline{a_2}$); следовательно, точка α является предельной слева для точек $x:$ $Tx = \alpha$ и предельной справа для точек $x:$ $T^2 x = \alpha$. Последнее означает, что α обладает свойством a_2, что невозможно. Итак, $Tx > \alpha$ для $x \in (\alpha, \gamma)$.

Таким образом, $B^3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n^3$, где B_n^3 — множество точек $\alpha \in B^3$ таких, что $Tx > \alpha$ для $x \in (\alpha, \alpha + \frac{1}{n})$. Если $\mathcal{A} \supset \{\alpha\}$ и $\alpha \in B^3$, то $\mathcal{A} \not\subset (\gamma, \alpha + \frac{1}{n})$, $\gamma < \alpha$.

Если точка является предельной справа для точек множества B^3, то $Tx > \beta$ при $x \in (\beta, \beta + \frac{1}{n})$. Если точка является предельной слева для точек множества B^3, то $Tx \geq \beta$ при $x \in (\beta, \beta + \frac{1}{n})$ и точка обладает свойством $\overline{r_1}$. Следовательно, если точка является предельной и слева, и справа для точек множества B^3, то всякое множество $\mathcal{A} \supset \{\beta\}$ (если такое существует) не содержится целиком в любом интервале $(\gamma, \beta + \frac{1}{n})$, $\gamma < \beta$.

Обозначим $\overline{B_n}$ замыкание множества B_n^3. Множество $\overline{B_n}$ нигде не плотно на E (множества B^3 и B^4 являются нигде не плотными на E). Возьмем открытые непересекающиеся интервалы $U_1, U_2, \ldots, U_m$: $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i \supset \overline{B_n}$, $\sup\limits_{x', x'' \in U_i} |x' - x''| < \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Обозначим $\widehat{B_n}$ множество точек $\alpha \in \overline{B_n} \setminus B_n^3$, которые являются предельными для точек множества B_n^3 только слева. Множество $\widehat{B_n}$ не более, чем счетно. Если $\mathcal{A} \supset \{\alpha\}$, $\alpha \in \overline{B_n}$ и $\mathcal{A} \subset U_i$, $1 \le i \le m$, то $\alpha \in \widehat{B_n}$.

Рассмотрим множество $\widehat{B_n} \cap U_1$. Возьмем последовательность открытых в E множеств $U_1 \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$, причем $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i = \widehat{B_n} \cap U_1$. Построим множества $W_i = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} V_i$, где через $T^{-j} V_i$ обозначено множество точек $x \in U_1$, для которых $Tx, \ldots, T^{j-1}x \in U_1$ и $T^j x \in V_i$. W_i, $i = 1, 2, \ldots$, — открытые множества. Положим $Q' = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} W_i$ и $Q'' = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} Q'$, где $T^{-j} Q'$ — множество точек $x \in E$, для которых $T^j x \in Q'$. Q'' — множество типа $G_{\delta\sigma}$.

Если $x \in \mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in \overline{B_n} \cap U_1$, то существует номер l : $T^j x \in U_1$ при $j \ge l$. Для любого $i \ge 1$ существует номер m_i : $T^j x \in V_i$ при $j \ge m_i$. Следовательно, $T^j x \in W_i$ при $j \ge l$ и $i = 1, 2, \ldots$; $T^j x \in Q'$ при $j \ge l$ и $x \in Q''$.

Если $\mathcal{A}_x \cap \overline{B_n} = \varnothing$, то найдется номер i_x такой, что множества V_i при $i \ge i_x$ не содержат точек $\{T^j x\}_{j=0}^{\infty}$ и, следовательно, $x \notin Q''$. Если $x \in Q''$, то $\mathcal{A}_x$ содержится в замыкании множества U_1. Таким образом, если $x \in Q''$, $x \notin \mathfrak{B}$, то $\mathcal{A}_x$ содержит точку множества $\widehat{B_n}$ (только одну: если $\beta \in \widehat{B_n}$, то $Tx \ge \beta$ при $x \in (\beta, \beta + \frac{1}{n})$).

Если множество $\widehat{B_n}$ не пусто, обозначим точки множества $\widehat{B_n}$ через $\beta_1, \ldots, \beta_k, \ldots$ (последовательность обрывается, если $\widehat{B_n}$ — конечное множество). Пусть γ_k — ближайшая к β_k справа точка множества $\widehat{B_n}$, или если β_k — правый конец множества $\widehat{B_n}$, то правый конец интервала U_1. Если $x \in Q''$, $\mathcal{A}_x \ni \beta_k$, то $\mathcal{A}_x \subseteq [\beta_k, \gamma_k]$. Если $\gamma_k \in B_n^3$, то γ_k обладает свойством $\overline{r_1}$ и следовательно, найдется точка $\delta_k < \gamma_k$: всякое $\mathcal{A}_x$, содержащее β_k, если $x \in Q''$, содержится в $[\beta_k, \delta_k)$. Для удобства точки $\gamma_k \notin B_n^3$ также будем обозначать через δ_k. Таким образом, для любой точки $x \in Q''$, для которой $\mathcal{A}_x \ni \beta_k$, $\mathcal{A}_x \neq \beta_k$, т.е. $x \notin \mathfrak{B}$, найдется номер j' такой, что $T^j x \in [\beta_k, \delta_k]$ при $j \geq j'$.

Обозначим F_k, $k \geq 1$, множество точек x, для которых $T^j x \in [\beta_k, \delta_k]$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Множества F_k, $k = 1, 2, \ldots$, замкнуты. Множество $Q''' = \bigcup\limits_k \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} T^{-j} F_k$, где $T^{-j} F_k = \{x \in E : T^j x \in F_k\}$, — множество типа F_σ.

Если $x \in \mathfrak{B}_\alpha$, $\alpha \in B_n^3$, то $x \notin Q'''$. Если $x \in Q'''$, $x \notin \mathfrak{B}$, то $x \in Q'''$. Положим $Q_1 = Q'' \setminus Q'''$; Q_1 — множество типа $G_{\delta\sigma}$. $\mathfrak{B}_\alpha \subset Q_1$, если $\alpha \in B_n^3 \subset U_1$, и $Q_1 \subset \mathfrak{B}$.

Для интервалов $U_2, \ldots, U_m$ аналогично строятся $G_{\delta\sigma}$-множества $Q_2, \ldots, Q_m$. Множество $\mathfrak{B}_n^3 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством. Множество $\mathfrak{B}^3 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n^3$ также является $G_{\delta\sigma}$-множеством. $\mathfrak{B}^3 \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}^3$, если $\alpha \in B^3$.

Аналогичным образом строится $G_{\delta\sigma}$-множество $\mathfrak{B}^4 : \mathfrak{B}^4 \subset \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}^4$, если $\alpha \in B^4$.

Множество $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^1 \cup \mathfrak{B}^2 \cup \mathfrak{B}^3 \cup \mathfrak{B}^4$ является $G_{\delta\sigma}$-множеством. Теорема доказана.

В качестве примера можно рассмотреть функцию $f(x) = x + x\sin(1/x)$. Множество точек $x :\ f_n(x) \to 0$ не является $G_{\delta\sigma}$-множеством (теорема 3.1.6). Следовательно, и множество сходимости, будучи $F_{\sigma\delta}$-множеством, не является $G_{\delta\sigma}$-множеством; это — множество 3-го класса.

Если $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то, как нетрудно установить, множество сходимости является F_σ-множеством.

В связи с рассмотренным вопросом было бы интересно выяснить, *остается ли теорема 5.1.1, доказанная для последовательности итераций функции, справедливой и для произвольной последовательности непрерывных функций.*

5.2. О функциональных уравнениях

1. Нельзя не отметить тот очевидный факт, что все результаты предыдущих параграфов могут быть сформулированы на языке решений функционального уравнения

$$x(t+1) = F(x(t)), \tag{5.1}$$

где t принимает значения $0, 1, 2, \ldots,$ значения $F(x)$ и искомой функции x принадлежат некоторому топологическому пространству E.

Уравнению (5.1) соответствует отображение

$$T : x \mapsto F(x) \tag{5.2}$$

(фазового) пространства E в себя.

Пусть T — непрерывное отображение. Результаты главы 1 можно перефразировать в случае, когда E — компакт; результаты глав 1—5 переносятся, когда E — вещественная прямая (или замкнутый интервал вещественной прямой).

Приведем некоторые примеры. Пусть E — замкнутый интервал.

а) Если уравнение (5.1) имеет периодическое решение с периодом k, то уравнение (5.1) имеет и периодическое решение с любым периодом, следующим за k в упорядочении натуральных чисел $(*)$ из параграфа 2.1; если уравнение (5.1) не имеет периодического решения с периодом k', то оно не имеет и периодических решений с любым периодом, предшествующим k' в $(*)$.

б) Всякое решение уравнения (5.1) асимптотическая приближается к периодическому решению тогда и только тогда, когда начальные значения $x(0)$, порождающие периодические решения, образуют замкнутое множество (теорема 2.5.1).

в) Если существует периодическое решение периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ то существуют решения, не приближающиеся асимптотически ни к какому периодическому решению (следствие теорем 2.5.1 и 2.5.2).

г) В параграфе 5.1 приведены необходимые и достаточные условия того, чтобы множество начальных значений, порождающих решения, асимптотически приближающиеся к стационарным решениям, было множеством 3-го класса классификации Бэра–Валле-Пуссена.

2. Ниже рассматриваются функциональные уравнения более общего вида, чем уравнение (5.1). Приведем несколько общих соображений.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — произвольные пространства и $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$ — некоторое пространство операторов, действующих из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Рассмотрим уравнение

$$Y(P(X, Y(X))) = Q(X, Y(X)), \tag{5.3}$$

где $X \in \mathcal{X}$, $Y(X) \in \mathcal{Y}(\mathcal{X})$ является искомым оператором, $P(X, Y(X))$ и $Q(X, Y(X))$ — заданные операторы, определенные в $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}(\mathcal{X})$, со значениями соответственно в $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$.

Уравнениями вида (5.3) являются различные дифференциальные, интегральные уравнения, и при этом $P(X, Y(X)) \equiv X$.

Если $P(X, Y(X)) \not\equiv X$, то уравнение (5.3) есть уравнение с так называемым отклоняющимся аргументом. Сюда относятся, например, дифференциальные уравнения с запаздывающим, опережающим аргументом и т.п.

Всякому $Y(X) \in \mathcal{Y}(\mathcal{X})$ соответствует график $\widetilde{Y(X)}$ в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Оператор $Y(X)$ является решением (5.3), если соответствующий график $\widetilde{Y(X)}$ инвариантен при отображении

$$\begin{cases} X \mapsto P(X, Y(X)) \\ Y \mapsto Q(X, Y(X)), \end{cases}$$

т. е. при любом $X \in \mathcal{X}$ точка $(P(X, Y(X)), Q(X, Y(X)))$ принадлежит $\widetilde{Y(X)}$.

Если, например, оператор $P(X, Y(X))$ зависит только от первого аргумента и притом непрерывно и $\mathcal{X}$ — вещественная прямая, то все наши результаты могут (и должны) быть использованы при изучении соответствующих уравнений; к последним, в частности, относятся дифференциальные уравнения с произвольным (а не только запаздывающим или опережающим) отклонением.

Предположим, операторы P и Q таковы, что при всяком $X' \in \mathcal{X}$ их значения зависят от значений $Y(X)$ только в точке X'. В этом случае оператор $Y(X)$ является решением (5.3), если соответствующий график инвариантен при отображении

$$\begin{cases} X \mapsto P(X, Y) \\ Y \mapsto Q(X, Y) \end{cases} \tag{5.4}$$

пространства $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ в себя.

Таким образом, нахождение решений сводится (в зависимости от $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$, т. е. от того, что требуется от решения — непрерывность, однозначность и т. п.) к отысканию различных инвариантных при отображении (5.5) множеств в пространстве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Если, например, оператор $P(X, Y)$ зависит только от X и $\mathcal{X}$ — вещественная прямая или оператор $Q(X, Y)$ зависит только от Y и $\mathcal{Y}$ — вещественная прямая, то для изучения таких уравнений можно непосредственно применить результаты нашей работы.

3. Рассмотрим, например, одно из наиболее простых уравнений такого вида — уравнение

$$y(f(x)) = F(x, y(x)), \tag{5.5}$$

когда значения x, $y(x)$, $f(x)$ и $F(x, y)$ принадлежат вещественной прямой.

Уравнение (5.5) явилось предметом многочисленных исследований, начиная с XVIII века и по настоящий день. Однако до построения полной теории таких уравнений, по-видимому, еще достаточно далеко. Основные результаты, относящиеся к уравнению (5.5), можно найти в монографии M. Germănescu [7] и обзорной статье M. Kuczma [13]. В последнее время это уравнение интенсивно изучается рядом польских математиков (J. Kordylewski, M. Kuczma и др.).

Уравнению (5.5) соответствует отображение

$$S : \begin{cases} x \mapsto f(x) \\ y \mapsto F(x, y) \end{cases}$$

плоскости (x, y) (или, быть может, некоторого плоского множества) в себя.

Всякому решению уравнения (5.5) соответствует график в плоскости (x, y), который отображает S в себя. Если под решениями понимаются непрерывные, однозначные множества, то во всякой непрерывной, однозначной по x кривой, инвариантной относительно S, существует множество, которое соответствует решению уравнения (5.5).

Наряду с отображением S рассмотрим отображение T : $x \mapsto f(x)$.

Будем предполагать, что $x, f(x) \in E_x$, $y(x), F(x, y) \in E_y$, где E_x, E_y — замкнутые интервалы числовой прямой; f, F — непрерывные функции своих аргументов; $y(x)$ принадлежит классу непрерывных на E_x функций.

Построение решения уравнения (5.5) во всей области существования можно разбить на следующие этапы:

1) Построение решения на каждом (максимальном) притягивающем множестве отображения T.

2) Построение решения в окрестности каждого притягивающего множества.

3) Построение решения “в целом”.

В случае, когда притягивающее множество конечно, т. е. является циклом отображения T, первая задача решается тривиально. Если же имеется бесконечное притягивающее множество, то здесь можно указать только отдельные работы (например, [21]), однако, в [21] E_x — окружность). В большинстве работ, посвященных уравнению (5.5), рассматривается задача 2) и, отчасти, 3). Однако при этом рассматривается случай, когда T не имеет бесконечных притягивающих множеств. Более того, обычно предполагается, что T — взаимно-однозначное отображение. В таком случае общее решение уравнения (5.5) зависит от произвольной функции.

Заметим, что само E_x может быть притягивающим множеством и тогда задачи 1)—3) совпадают (например, если $E_x = [-1, 1]$ и $T : x \mapsto 2x^2 - 1$).

Ниже мы рассмотрим первую задачу в случае, когда притягивающее множество $\mathcal{A}$ бесконечно. Нас будет интересовать множество непрерывных решений уравнения (5.5).

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — максимальное притягивающее множество второго рода (т. е. содержащее цикл). Случай, когда $\mathcal{A}$ — максимальное притягивающее множество первого рода или минимальное, мы не будем здесь рассматривать.

Существует точка $x_0 \in \mathcal{A}$, для которой множество $\{T^j x_0\}_{j=0}^{\infty}$ лежит на $\mathcal{A}$ всюду плотно (см. параграфы 3.2, 4.1). Такие точки образуют на $\mathcal{A}$ G_δ-множество второй категории.

Непрерывное на $\mathcal{A}$ решение $y(x)$ определяется однозначно своим значением в точке x_0.

Выясним структуру множества “допустимых” значений $y(x_0)$, т. е. тех значений $y(x_0)$, которым соответствуют непрерывные на $\mathcal{A}$ решения.

Пусть $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots \to 0$ — произвольная числовая последовательность. Положим $y(x_0) = y_0$ и $S^j(x_0, y_0) = (x_j, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots$. Пусть $M_n^k = \{y : |y_j - y_k| \le a_n,$ если $|x_j - x_k| \le 1/n;\ j = k, k+1, \ldots\}$, $k, n = 1, 2, \ldots$. Ввиду непрерывности отображения T множества M_n^k, $k, n = 1, 2, \ldots$, замкнуты. Множество $M = \bigcap\limits_{k,n=1}^{\infty} M_n^k$ также замкнуто.

Если $y_0 \in M$, то значению $y(x_0) = y_0$ соответствует непрерывное на $\mathcal{A}$ решение $y(x)$ уравнения (5.5). Если $\omega(x)$ — модуль непрерывности функции $y(x)$ на множестве $\mathcal{A}$, то $\omega(\frac{1}{n}) \le a_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $b = \max\limits_{y, y' \in E_y} |y' - y|$ и числа a_n^r, $n, r = 1, 2, \ldots$, таковы, что $a_1^r > a_2^r > \ldots \to 0$ при любом n. Для всякой непрерывной на $\mathcal{A}$ функции $\phi(x)$, имеющей на $\mathcal{A}$ модуль непрерывности $\omega(x)$, существует номер $r' :$ $\omega(\frac{1}{n}) \le a_n^{r'}$, $n = 1, 2, \ldots$

Для каждого r построим, как и выше, замкнутое множество $M^{(r)}$: если $y_0 \in M^{(r)}$, то значению $y(x_0) = y_0$ соответствует непрерывное на $\mathcal{A}$ решение $y(x)$ уравнения (5.5), причем модуль непрерывности $\omega(x)$ функции $y(x)$ на множестве $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $\omega(\frac{1}{n}) \le a_n^r$, $n = 1, 2, \dots$. Множество $M_0 = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} M^{(r)}$ является F_σ-множеством.

Всякому $y_0 \in M_0$ соответствует непрерывное на $\mathcal{A}$ решение уравнения (5.5). Для любого непрерывного решения $y(x)$ уравнения (5.5) $y(x_0) \in M_0$.

Итак, "допустимые" значения $y(x_0)$ образуют на E_y F_σ-множество.

Несколько замечаний.

а) Приведенные выше рассуждения нигде не используют тот факт, что отображение S имеет "треугольный вид". Поэтому полученный выше результат можно сформулировать и для уравнения $y(f(x, y(x))) = F(x, y(x))$, которому соответствует отображение

$$\begin{cases} x \mapsto f(x, y) \\ y \mapsto F(x, y). \end{cases}$$

б) Аналогичный результат может быть получен и в том случае, когда E_x, E_y — пространства более сложной природы, чем интервалы вещественной прямой.

в) Если $x \in E_x$ и $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, то существует номер j' : $T^{j'}x \in \mathcal{A}$ (следствие теоремы 3.2.5). Прообраз всякого F_σ-множества является F_σ-множеством. Поэтому множество "допустимых" значений $y(x)$ в любой точке x, для которой $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$, является F_σ-множеством.

Для простоты рассмотрим далее уравнение

$$y(f(x)) = F(y(x)), \tag{5.6}$$

являющееся частным случаем уравнения (5.5).

Уравнению (5.6) соответствует отображение

$$S : \begin{cases} T_1 : x \mapsto f(x) \\ T_2 : y \mapsto F(y). \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{A}_1$ — максимальное притягивающее множество второго рода отображения T_1 и $\mathcal{A}_2$ — максимальное притягивающее множество второго рода отображения T_2.

Предположим, $x_0 \in \mathcal{A}_1$ и множество $\{T_1^j x_0\}_{j=0}^{\infty}$ плотно на $\mathcal{A}_1$. Тогда множество точек $y \in \mathcal{A}_2$ таких, что $\{S^j(x_0, y)\}_{j=0}^{\infty}$ плотно на $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, является плотным на $\mathcal{A}_2$ множеством типа G_δ.

Доказательство этого предложения опирается на теоремы 1.2.1 и 3.2.2.

Таким образом, множество значений $y(x_0)$, соответствующих непрерывным на $\mathcal{A}_1$ решениям уравнения (5.6), образует на всяком максимальном притягивающем множестве (второго рода) отображения T_2 F_σ-множество первой категории (быть может, пустое).

Нетрудно доказать, что множество "допустимых" значений $y(x_0)$, которым соответствуют решения, отличные от стационарных, лежит в объединении максимальных притягивающих множеств второго рода отображения T_2.

Рассмотрим простейший пример:

$$y(2x^2 - 1) = 2y^2(x) - 1, \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

которому соответствует отображение

$$\begin{cases} T_1 : x \mapsto 2x^2 - 1 \\ T_2 : y \mapsto 2y^2 - 1. \end{cases}$$

Множество непрерывных решений этого уравнения зависит от константы $c \in [-1, 1]$. Однако константа c пробегает не весь интервал $[-1, 1]$, а только некоторое F_σ-множество первой категории.[2]

Отметим, что множество значений $y(x_0)$, соответствующих решениям уравнения (5.6), которые непрерывны только в точке x_0 (необязательно всюду на $\mathcal{A}_1$), является $F_{\sigma\delta}$-множеством первой категории на $\mathcal{A}_2$, всюду плотно на $\mathcal{A}_2$ и имеет мощность континуума.

Доказательство основывается на теореме 3.2.2.

[2]Функции $y(x) = T_1^k x$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, являются решениями этого уравнения. Вообще, если $\varphi(x)$ — решение уравнения (5.6), то решением уравнения (5.6) будут и функции $\varphi(T_1^k x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Список литературы

[1] *Auslander J., Bhatia N.P., Seibert P.* Attractors in dynamical systems // Boletin de la Soc. Matem. Mexicana, 1964.

[2] *Baire R.* Sur la representation des fonctions discontinues // Acta Math., 30 (1905).

[3] *Barna B.* Uber die Iteration reeler funktionen // Public. Math. Debrecen, 7 (1960).

[4] *Birkhoff G., Smith P.* Structure Analysis of Surface transformations // Journ. de Math., VII (1928).

[5] *Euler.* De formulis exponentialibus replicatis // Acta Acad. Scient. Petropolitanae, v. I (1777).

[6] *Fatou.* Sur les equation fonctionnelles // Bulletin de la Soc. Math. de France, XLVII (1919); XLVIII (1920).

[7] *Ghermanescu M.* Ecuatii functionale. — Bucuresti, 1960.

[8] *Gottschalk W.H., Hedlund G.A.* Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, v. 36, 1955.

[9] *Julia.* Memoire sur 1'iteration des fonctions rationnelles // Journ. de la Math. pures et appliquees, 8-e ser., 1918.

[10] *Koenigs.* Recherches sur les substitutions uniformes // Bulletin des Sciences math., 1883.

[11] *Koenigs.* Recherches sur les equations fonctionnelles // Ann. sc. de l'Ecole Normale sup., 1884, 1885.

[12] *Kuczma M.* General solutions of the functional equation $\varphi(f(x)) = G(x, \varphi(x))$ // Ann. Polon. Math., 9 (1961).

[13] *Kuczma M.* Rownania funkcyjne i ich znaczenie we wspolczesnej matematyce // Prace Matematyczne, 6 (1961).

[14] *Kuczma M.* Bemerkungen uber die Klassifikation der Funktionalgleichungen // Prace Matematyczne, 9 (1965).

[15] *Picard E.* Lecons sur quelques equations fonctionnelles…, 1928.

[16] *Александров П.С., Урысон П.С.* Uber nulldimensionale Funktmengen // Math. Ann., **98** (1928).

[17] *Андронов А.А.* Теория точечных преобразований Пуанкаре-Брауера-Биркгофа и теория нелинейных колебаний // Вест. АН СССР, N 6 (1944).

[18] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний — М.: Физматгиз, 1959.

[19] *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.

[20] *Аристов И.И.* Итерации функций // Известия физико-матем. общества Казан. ун-та, т. X, вып. 1, 2 (1900).

[21] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР, сер. матем., **25** (1) (1961).

[22] *Биркгоф Г.* Теория структур. — ИЛ, 1952.

[23] *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы — ОГИЗ, 1941.

[24] *Бовшеверов В.М.* О некоторых колебательных задачах, приводящих к функциональным уравнениям // ЖТФ, VI, вып. 9 (1936).

[25] *Витт А.А.* К теории скрипичной струны // ЖТФ, VI, вып. 9 (1936).

[26] *Келдыш Л.В.* Структура B-множеств // Труды матем. ин-та им. Стеклова, **17** (1945).

[27] *Кенжегулов Х.К.* Итерационные последовательности высших классов // Труды I-ой науч. конференции матем. кафедр пед. ин-тов Поволжья, 1961.

[28] *Кенжегулов Х.К.* Об итерациях одной непрерывной функции // Волжский матем. сб., вып. 3 (1965).

[29] *Кенжегулов Х.К., Шарковский А.Н.* О свойствах множества предельных точек итерационной последовательности непрерывной функции // Волжский матем. сб., вып. 3 (1965).

[30] *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1966, т. 1.

[31] *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. — М.: Физматгиз, 1962.

[32] *Леонов Н.Н.* К теории разрывного преобразования прямой в прямую // Изв. вузов. Радиофизика, III, 5 (1960).

[33] *Ливенцов А.И.* Опыт систематического изложения функционального счисления с одним независимым переменным // Мат. сб., VIII (1876).

[34] *Лузин Н.Н.* Лекции об аналитических множествах. — М.: Гостехиздат, 1953.

[35] *Ляпунов А.А.* $B-$ функции // УМН, V, вып. 5 (1950).

[36] *Майер А.Г.* О порядковом числе центральных траекторий // ДАН СССР, **59**, N 8 (1948).

[37] *Майер А.Г.* Центральные траектории и проблема Биркгофа // Мат. сб., **26**(68) (1950).

[38] *Минаев Е.И.* О множестве сходимости одномерных итераций // УМЖ, **18**(1) (1966).

[39] *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических множеств, 1936.

[40] *Неймарк Ю.И.* Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний // Труды международ. симпозиума по нелинейн. колебаниям, т. II, Изд. АН УССР, 1963.

[41] *Немыцкий В.В.* Топологические вопросы теории динамических систем // УМН, IV, вып. 6 (1949).

[42] *Немыцкий В.В.* Обобщения теории динамических систем // УМН, V, вып. 3 (1950).

[43] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика в СССР за 30 лет. — М.: ОГИЗ, 1948.

[44] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциального уравнения. — М.: ОГИЗ, 1949.

[45] *Пулькин С.П.* Об итерациях функции одного независимого переменного // Изв. АН СССР, серия матем., 6 (1942).

[46] *Пулькин С.П.* Осциляционные последовательности итераций // ДАН СССР, **23**, N 6 (1950).

[47] *Рохлин В.А.* Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой // УМН, XV, вып. 4 (1960).

[48] *Судзуки М.* Строение группы и строение структуры ее подгрупп. — М.: ИЛ, 1960.

[49] *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. — М.: ОНТИ, 1937.

[50] *Хильми Г.Ф.* Sur les ensembles quasi-minimaux dans les systemes dynamiques // Ann. of Math, **37**, N 4 (1937).

[51] *Хильми Г.Ф.* О теории квазиминимальных множеств // ДАН СССР, **15**, N 2 (1937).

[52] *Хильми Г.Ф.* Sur les mouvements des systemes dynamiques qui admettent "l'incomperessibilite" des domaines // Am. J. Math., 59 (1937).

[53] *Шарковский А.Н.* О решении одного класса функциональных уравнений // УМЖ, **13**, N 3 (1961).

[54] *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // УМЖ, **16**, N 1 (1964).

[55] *Шарковський О.М.* Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе // Доповіді АН УРСР, N 7, 1964.

[56] *Шарковский А.Н.* О притягивающих и притягивающихся множествах // ДАН СССР, **160**, N 5 (1965).

[57] *Шарковский А.Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // УМЖ, **17**, N 3 (1965).

[58] *Шарковский А.Н.* Об одной классификации неподвижных точек // УМЖ, **17**, N 5 (1965).

[59] *Шарковський О.М.* Про неперервне відображення на множині ω-граничних точок // Доповіді АН УРСР, N 11, 1965.

[60] *Шарковский А.Н.* Поведение отображения в окрестности притягивающего множества // УМЖ, **18**, N 2 (1966).

[61] *Шарковський О.М.* Про множину збіжності одновимірних ітерацій // Доповіді АН УРСР, N 7, 1966.

[62] *Шарковский А.Н.* Непрерывное отображение на множестве предельных точек итерационной последовательности // УМЖ, **18**, N 5 (1966).

[63] *Шарковский А.Н.* Строение эндоморфизма на ω-предельном множестве // Междунар. матем. конгресс, Москва, Тезисы кратких сообщений, 1966.

[64] *Шарковский А.Н.* Частично упорядоченная система притягивающих множеств // ДАН СССР, **170**, N 6 (1966).

[65] *Шарковский А.Н.* Про одну теорему Дж. Біркгофа // Доповіді АН УРСР, N 5, 1967.

Часть II

ПЯТНАДЦАТЬ И БОЛЕЕ ЛЕТ СПУСТЯ

Г л а в а 6

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г л а в а 7

σ-АТТРАКТОРЫ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ БАССЕЙНЫ

Продолжение истории

После защиты в 1967 году диссертации автор практически не занимался исследованием одномерных динамических систем вплоть до 80-х годов, когда эта тематика стала весьма популярной, а вокруг старых и новых понятий возникли новые проблемы. Эти, более поздние, исследования уже не были систематическими и сколько-нибудь регулярными. Здесь, вероятно, можно выделить два направления, которые привлекали, да и сейчас продолжают привлекать определенное внимание. Одно из них связано с гомоклиническими траекториями. А второе обусловлено стремлением лучше понять, какими могут быть отображения, называемые теперь отображениями типа 2^∞ (имеющие циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \dots$, и только) и лежащие на границе между простыми отображениями и сложными.

Но прежде — несколько слов об исследованиях, которые проводились при участии автора сразу после защиты диссертации.

Конечно, в первую очередь интересно было посмотреть, можно ли получить в размерности > 1 что-либо аналогичное "одномерным" результатам. Однако первые же попытки продвинуться в этом направлении свидетельствовали о принципиальном отличии "многомерного случая", и как показало дальнейшее, действительно реальным и весьма полезным шагом стало выделение классов многомерных отображений, в том или ином смысле близких к одномерным.

В 60-е годы XX века стала активно развиваться теория гладких динамических систем, в том числе гиперболическая теория, теория структурной устойчивости систем (или теория грубых систем в терминологии А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина, которые начали эти исследования еще в 30-х годах), появились системы Аносова и подкова Смейла (как их теперь называют), возникли понятия "топологическая энтропия" и, чуть позднее, "странные аттракторы". Так что вполне естественным было желание приобщиться к этому направлению исследований, тем более,что в Киеве еще со времен Н. Н. Крылова и Н. Н. Боголюбова много внимания уделялось исследованию колебаний, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

Начиная с 1963 года, Институт математики ежегодно проводил математические школы. Летом 1971 года (в Крыму, Кацивели) состоялась уже девятая по счету школа, организацией которой занимался автор. Основное внимание предполагалось уделить гладким динамическим системам, и по предложению Д. В. Аносова основные курсы лекций были приглашены прочитать В. М. Алексеев, А. Б. Каток и А. Г. Кушниренко; кроме них лекции читались и другими математиками, в частности, В. И. Арнольдом и Г. А. Маргулисом. Лекции этой школы, как и всех предыдущих, были опубликованы, а в 1976 году даже переизданы. Правда, в связи с этим мне не раз пришлось съездить в Москву, даже побывать дома у Алексеева и Катка, чтобы вовремя заполучить у них сначала тексты лекций, а для второго издания — их дополнения и уточнения. Результат оказался неплохим, если судить хотя бы по тому, что упомянутые выше три курса лекций по динамическим системам были позднее переведены в США, а лекции Алексеева не так давно были изданы и в Москве.

С 1964 года я стал читать лекции в Киевском университете, вначале по вариационному исчислению, а позднее и по динамическим системам. В 1971 году у меня появились два аспиранта, В. С. Бондарчук и В. А. Добрынский, которые занялись гладкими системами и общими вопросами топологической динамики. В 1974 году они успешно защитили свои диссертации, официальными оппонентами по которым были В. М. Алексеев, Д. В. Аносов и А. Б. Каток. К сожалению, мое сотрудничество с этими аспирантами, которое могло и далее быть весьма плодотворным (о чем говорит и доклад [52]), вскоре прекратилось.

Последний параграф моей диссертации был посвящен некоторым классам функциональных уравнений, называемых иногда итеративными функциональными уравнениями, ибо они сводятся к итерациям отображений, т. е. к динамическим системам (например, уравнению $x(g(t)) = f(t, x(t))$ отвечает двумерное отображение $t \mapsto g(t)$, $x \mapsto f(t, x)$ и график любого решения — инвариантное множество этого отображения). Начатые в конце 60-х годов исследования в этом направлении вскоре распространились и на дифференциально-функциональные, и на дифференциально-разностные уравнения, так что в результате моими учениками в разные годы было защищено в этой области около десятка кандидатских и даже три докторские диссертации. Кроме того, в 1974 году в издательстве "Наукова Думка" вышла небольшая книжка "Введение в теорию функциональных уравнений", написанная совместно с моим первым аспирантом Г. П. Пелюхом; в 2013 году эта книжка с существенными дополнениями была переиздана под названием "Метод инвариантов в теории функциональных уравнений".

Последняя из упомянутых докторских диссертаций, защищенная Е. Ю. Романенко в 2007 году, подытожила наши исследования по качественной теории простейшего(!) разностного уравнения $x(t+1) = f(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$ (которое на самом деле вовсе не такое уж и простое). В этой диссертации, в частности, показано, каким образом может случиться так, что для почти каждого решения аттрактор соответствующей траектории состоит из случайных функций. Эти результаты нашли применение при исследовании некоторых бесконечномерных динамических систем и легли в основу концепции так называемой идеальной турбулентности (о чём чуть подробнее — в конце этого раздела).

А что происходило в это время, до 80-х годов XX века, с одномерными динамическими системами?

Уже в первое десятилетие, в 1961–1970 годах, основные результаты, представленные в диссертации, стали доступными и на английском языке. Так как "Доклады АН СССР" переводили на английский, то автоматически были переведены три статьи автора, опубликованные там в 1961, 1965 и 1966 годах. В 1970 году в журнале Amer. Math. Soc. Translations (**97**, No 2, 1970, p. 159–179 и p. 227–258) были напечатаны переводы статей "Об одной классификации неподвижных точек" (УМЖ, **17**, № 5, 1965) и "Поведение отображения в окрестности притягивающего множества" (УМЖ, **18**, № 2, 1966). Однако в те годы работы по такой тематике не привлекали к себе особого внимания, о чем свидетельствует и тот факт, что статья "Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя" появилась в английском переводе только в 1995 году (в "Intern. J. Bifurcation and Chaos" (**5**, No 5, p. 1263–1273) и в "Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives" (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. B, **8**, 1995, p. 1–11). Правда, содержание этой статьи со всеми деталями было изложено раньше в [27].

Вторая половина 70-х стала поворотной для одномерных динамических систем. В этот период были опубликованы работы, существенно обогатившие тематику исследований в теории динамических систем (и не только одномерных). Возникли новые понятия, такие как "хаос", "чувствительная зависимость от начальных условий". Были обнаружены различного рода универсальные свойства гладких систем, например, характеризующие скорость бифуркаций (а не только их порядок, что было известно ранее), были найдены простые и красивые закономерности, увязывающие между собой старые и новые понятия. Можно утверждать, что одномерные динамические системы сыграли в этот период ключевую роль в развитии всей теории динамических систем.

Со второй половины 70-х годов интерес к одномерным динамическим системам неуклонно возрастал не только среди математиков. Слова "хаос", "хаотическая система", берущие свое начало как математические понятия в статье Ли и Йорка [12], стали весьма популярными. Оказалось, что даже простейшие нелинейные отображения — квадратичные — могут достаточно хорошо моделировать динамику различного рода процессов в физике, биологии и т.п.

Все это привело к тому, что в последующие $15-25$ лет очень активно развивалась теория гладких одномерных систем, в частности, появились теория бифуркаций и теория структурной устойчивости. Очень быстро стала развиваться конформная динамика — теория динамических систем на комплексной плоскости, благодаря которой мы имеем теперь удовольствие любоваться прекрасными компьютерными картинами. Еще раньше были выделены классы многомерных систем, по своим свойствам, близкие к одномерным, например, так называемые треугольные $x_i \mapsto f_i(x_1, \ldots, x_i),\ i = 1, \ldots, n$ [10]. Эти отображения очень активно изучались последние двадцать лет, и к настоящему времени параллели между ними и одномерными отображениями удалось проследить достаточно далеко. Можно также отметить появление нового направления в теории динамических систем — комбинаторной динамики, основным толчком к развитию которой стала теорема о сосуществовании циклов различных периодов. Первым итогам и перспективам комбинаторной динамики была посвящена конференция “Thirty years after Sharkovskii’s theorem: new perspectives”, состоявшаяся в 1994 году в Испании.

Нельзя не сказать несколько слов о встрече автора с Йорком (J.Yorke), которая произошла в 1975 году на конференции в Берлине. Эта встреча упоминается и даже не в одной публикации, но преподносится достаточно оригинально (и, к сожалению, не совсем точно). Например, в [1] на с. 110 читаем:

“... есть забавный анекдот, связывающий эти работы [речь идет о [42] и [12]] ... Шарковский опубликовал свою теорему в украинском журнале (на русском языке) в начале шестидесятых годов, но в то время никто не обратил на нее внимание. Согласно Глейку [J. Gleick, *Chaos. Making a New Science*, Penguin, 1987], Шарковский встретил Йорка на конференции в Восточном Берлине. Было что-то очень важное, что украинец должен был сообщить Йорку. В стиле настоящей холодной войны, встреча была организована на лодке на реке Шпрее. Там, с помощью анонимного польского переводчика, Шарковский сообщил Йорку о своем открытии...”[1]

В действительности наша встреча произошла на корабле во время совместной прогулки участников конференции по реке Шпрее. Увидев Йорка я захотел объяснить ему, что уже более 10 лет назад были получены результаты, более сильные, чем те, о которых шла речь в его докладе. На клочке бумаги я написал $3, 5, 7, \ldots, 4, 2, 1$, и понимая, что мой весьма слабый английский будет бесполезен, попросил помочь с переводом знакомого поля-

[1] Alejo Barrio Blaya and Victor Jimenez Lopez, “*Is trivial dynamics that trivial?*”, Monthly **113**, 2006, p. 110 : ...there is an amusing anecdote linking these works [“Coexistence of cycles...” and “Period three implies chaos”]. Sharkovsky had published his theorem in a Ukrainian journal (in Russian) in the early sixties, but at the time nobody had taken notice of it. According to Gleick [*Chaos. Making a New Science*, Penguin, 1987], Sharkovsky approached Yorke at a conference in East Berlin. There was something very important the Ukrainian had to tell Yorke. In true cold war fashion, a meeting was arranged on a boat on the Spree River. There, with the help of an anonymous Polish translator, Sharkovsky informed Yorke about his discovery...”

ка Мариана Квапиша. Однако тот знал только французский, так что пришлось пригласить и француза Христиана Миру, немного говорившего по-английски. Конечно, такой двойной перевод врядли мог быть достаточно успешным.

Стоит отметить, что встреча с Йорком могла бы состояться и раньше, еще в 1969 году, когда в Киеве проходила 5-я Международная конференция по нелинейным колебаниям (ICNO-1969), насчитывавшая около 500 участников, среди которых было много математиков из США. Дж. Йорк также прислал тезисы доклада и его доклад был включен в программу секции "Качественные методы" (где я был не только докладчиком, но и ученым секретарем). Однако Йорк в Киев так и не приехал, хотя позднее прислал текст доклада, который и был опубликован в "Трудах конференции" (J. A. Yorke (Maryland, USA), "Non-Lipshitz Lyapunov functions", том 2, Качественные методы, Киев, 1970, с. 170–176).

Теперь об исследованиях 80-х годов одномерных динамических систем, к которым автор был причастен. Что касается отображений типа 2^∞, то они представлены несколькими статьями во второй части книги в главе 6. А об исследовании одномерных гомоклиник, а также о некоторых более поздних применениях одномерных отображений идет речь ниже.

Несколько статей и выступлений на конференциях было посвящено гомоклиническим траекториям, известным еще со времен Пуанкаре и обычно свидетельствующим о присутствии в системе сложной динамики. Еще на конференции ICNO, проходившей в Киеве в 1969 году, в докладе [51] было отмечено, что для одномерных отображений гомоклиническая траектория существует тогда и только тогда, когда у отображения существует цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Более того, так как гомоклиническая траектория — это двусторонняя траектория, для которой аттрактором, как при возрастании времени, так и при его убывании является один и тот же цикл, то можно, по-видимому, говорить о сосуществовании гомоклинических траекторий в зависимости от периода цикла, являющегося ее аттрактором. И в 1979 году в докладе [38] на конференции в Кишиневе была предложена следующая классификация гомоклинических траекторий: *гомоклиническую траекторию, притягиваемую циклом периода* n, *назовем* n*-гомоклинической или* $2n$*-гомоклинической в зависимости от того, существует или не существует точка цикла, к которой гомоклиническая траектория приближается только с одной стороны, когда время стремится к* $-\infty$.

Сосуществование гомоклинических траекторий описывается тогда таким образом: *если отображение имеет* n*-гомоклиническую траекторию, то оно имеет и* n'*-гомоклиническую траекторию, если* $n \triangleright n'$, *где* "$\triangleright$" *— следующий порядок на множестве натуральных чисел:*

$$\begin{aligned} &1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots \triangleright \\ &\qquad \triangleright 2 \triangleright 3\cdot 2 \triangleright 5\cdot 2 \triangleright 7\cdot 2 \triangleright \cdots \triangleright \\ &\qquad\qquad \triangleright 2^2 \triangleright 3\cdot 2^2 \triangleright 5\cdot 2^2 \triangleright 7\cdot 2^2 \triangleright \cdots \end{aligned} \qquad (*)$$

Отличие $(*)$ от порядка для сосуществования циклов [42]

$$\begin{aligned} &3 \succ 5 \succ 7 \succ 9 \succ \cdots \succ \\ &\qquad \succ 3\cdot 2 \succ 5\cdot 2 \succ 7\cdot 2 \succ \cdots \succ \\ &\qquad\qquad \succ 3\cdot 2^2 \succ 5\cdot 2^2 \succ 7\cdot 2^2 \succ \cdots \succ \\ &\qquad\qquad\qquad \succ \cdots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1 \end{aligned} \qquad (**)$$

состоит в том, что каждая степень двойки из $(**)$ "перекочевывает" в соответствующий ей блок, порожденный нечетными числами, где она становится самой "сильной". В частности, число 1, самое "слабое" в $(**)$, становится в $(*)$ самым "сильным": неподвижная точка у отображения существует, даже если циклов нет, а вот гомоклиническая к неподвижной точке может быть только тогда, когда у отображения уже есть гомоклинические к циклам всех периодов (и, конечно, есть сами циклы).

Исследование гомоклинических траекторий в одномерных и некоторых многомерных системах в духе комбинаторной динамики эпизодически продолжается и в настоящее время (см., например, [41, 6]).

Стоит немного сказать еще и о приложениях одномерных динамических систем, чему автор уделял достаточно много внимания в последние 30 лет.

Вполне естественно поставить вопрос: могут ли одномерные динамические системы предложить что-либо для исследования сложных природных явлений, например, турбулентности? Сами по себе одномерные системы не могут моделировать пространственно-временную динамику, для этого уже необходимо привлекать бесконечномерные динамические системы. Тем не менее, существует совсем короткая дорога, ведущая от динамических систем с простейшим фазовым пространством — действительной прямой, к динамическим системам с "самым сложным" фазовым пространством, содержащим фрактальные и/или случайные функции.

Это очень наглядно демонстрируют широкие классы одно- и двумерных краевых задач математической физики, асимптотическая динамика которых непосредственно описывается одномерными отображениями. На примерах эволюции "внутренней" (пространственной) структуры решений таких задач можно наблюдать явления, которые обычно характеризуют турбулентность, в частности, каскадный процесс образования когерентных структур убывающих масштабов, обусловленный сложной геометрией бассейнов притяжения циклов соответствующих одномерных отображений. В связи с исследованиями процессов такого рода автором еще в 1983 году было предложено понятие *идеальная турбулентность* (первоначально под названием *су-*

хая турбулентность по аналогии с сухой водой фон Неймана [20, 21]). Позднее оно было зафиксировано в [18]: *идеальная турбулентность* — математическое явление, которое может иметь место в бесконечномерных детерминированных динамических системах и заключается в том, что аттрактор траектории лежит вне фазового пространства и среди точек аттрактора есть фрактальные или даже случайные функции.

Один очень простой (но только по форме!) пример — краевая задача

$$u_t(t,x) - u_x(t,x) = 0, \quad u(t,1) = f(u(t,0)), \quad t \in \mathbb{R}^+, \ x \in [0,1].$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$u(t,x) = w(t+x),$$

w — произвольная функция. Подстановка в эту формулу краевого условия сводит краевую задачу к разностному уравнению $w(t+1) = f(w(t))$. Так как $w(t+n) = f^n(w(t))$, то каждое начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in [0,1]$, дает решение $u(t,x) = f^{[t+x]}(\varphi(\{t+x\}))$, $t \in \mathbb{R}^+$, где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ — целая и дробная часть числа. Таким образом, свойства решений определяются отображением $u \mapsto f(u)$, а краевая задача порождает бесконечномерную динамическую систему сдвигов вдоль решений по формуле $\mathcal{F}^t(\varphi(x)) = f^{[t+x]}(\varphi(\{t+x\}))$, в частности, $\mathcal{F}^n(\varphi(x)) = f^n(\varphi(x))$.

Пусть, например, $f(u) = \lambda u(1-u)$ и $\lambda^* \approx 3{,}57$ — значение параметра, при котором у отображения $u \mapsto \lambda u(1-u)$ есть циклы только периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Для почти всех (по мере) $\lambda \in (\lambda^*, 4]$ реализуемы две альтернативные возможности: отображение имеет либо притягивающий цикл, либо гладкую (абсолютно непрерывную относительно меры Лебега) инвариантную меру. Соответственно имеются две возможности и для решений краевой задачи.

В частности, при $\lambda = 3.83$ для динамической системы $\mathcal{F}^t$, порождаемой решениями краевой задачи, аттрактор почти каждой траектории состоит из полунепрерывных сверху фрактальных функций, на которых $\mathcal{F}^t$ задает периодическое движение. А при $\lambda = 4$ почти все траектории системы $\mathcal{F}^t$ имеют один и тот же аттрактор, который состоит из одной (единственной) точки — случайного процесса $\mathcal{P}(x,t)$ с функцией распределения $F\big(z;\,(x,t)\big) = (2/\pi)\arcsin\sqrt{z}$, $z \in [0,1]$, $(x,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}^+$. Все это следствие того, что отображение $u \mapsto \lambda u(1-u)$ в первом случае имеет притягивающий цикл (периода 3), а во втором — гладкую инвариантную меру с плотностью $2/\pi\sqrt{1-u^2}$, $u \in [0,1]$ (см. [53, 34, 17]).

В завершение — о перспективах. Они представляются весьма многообещающими, однако… в настоящий момент ситуация очень напоминает ту, что была 40–50 лет назад с самими одномерными динамическими системами (о чем шла речь еще в предисловии). Создается впечатление, что специалисты по математической физике, в том числе, по турбулентности, все еще не замечают те возможности, которые одномерные динамические системы могут предоставить для понимания (и моделирования) крайне сложных динамических процессов, таких, как, например, каскадный процесс рождения пространственно-временных структур убывающих масштабов. Поживем — увидим.

* * *

Относительно содержания второй части книги. В ней представлены некоторые результаты исследований, выполненных автором и его учениками в 80-х годах и даже позднее и которые можно рассматривать как продолжение исследований 60-х годов.

Глава “Классификация одномерных динамических систем” включает опубликованные в 80-х годах статьи, в которых рассматриваются отображения типа 2^∞, т. е. имеющие циклы только периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и занимающие, как известно, промежуточное положение между отображениями с простой и сложной динамикой.

Последняя глава книги — это обзорная статья А. Г. Сивака, написанная специально для этого издания. В ней идет речь о так называемых σ-аттракторах траекторий — множествах, в окрестности которых траектория находится с вероятностью 1, и являющихся, следовательно, подмножествами аттракторов соответствующих траекторий.

Глава 6

Классификация одномерных динамических систем

6.1. Отображение с замкнутым множеством периодических точек*

В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский

Рассматриваются динамические системы, порождаемые непрерывными отображениями замкнутого интервала в себя. Предполагается, что основные понятия теории динамических систем известны (см. [43]). Ниже используются следующие обозначения:

$C^0(I, I)$ — пространство непрерывных отображений замкнутого интервала $I \subset R^1$ в себя;

$\mathrm{Fix}(f) = \{x : fx = x\}$ — множество неподвижных точек отображения f;

---

*Опубликовано в *Федоренко В.В., Шарковский А.Н.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек // Сб.: Исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, С. 137–145.

$\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(f^i)$ — множество периодических точек отображения f;

$\Omega(f)$ — множество неблуждающих точек отображения f;

$\mathrm{C}(f)$ — центр отображения f;

$f_x = \{f^i x,\ i \geq 0\}$ — траектория отображения f, проходящая через точку x;

$\mathcal{A}_x\,(= \mathcal{A}_x(f)\,)$ — ω-предельное множествотраектории отображения f, проходящей через точку x;

$\omega(f) = \bigcup_{x\in I} \mathcal{A}_x$;

$n_x\ (= n_x^f)$ — период периодической траектории отображения f, проходящей через точку $x \in \mathrm{Per}(f)$;

$h(f)$ — топологическая энтропия отображения f;

$C_A^0(I, I)$ — множество непрерывных отображений интервала I в себя с замкнутым множеством периодических точек;

$(...)'$ — множество предельных точек множества $(...)$.

Множество $\mathrm{Per}(f)$ отображения $f \in C^0(I, I)$ всегда есть *множество типа* F_σ, т. е. представимо в виде объединения не более, чем счетного числа замкнутых множеств. При этом $\mathrm{Per}(f)$ может быть либо замкнутым, либо только *множеством типа* G_δ (т. е. представимым в виде пересечения не более, чем счетного числа открытых множеств), либо даже не быть G_δ-множеством [45].

Если f имеет периодическую траекторию периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, то множество $\mathrm{Per}(f)$ не является G_δ-множеством. В этом случае f устроено сложно: имеет континуум минимальных множеств, гомеоморфных канторову множеству, гомоклинические траектории, положительную топологическую энтропию и т. д.

Если $\mathrm{Per}(f)$ является G_δ-множеством, то f имеет периодические траектории, период которых равен степени двойки, и только такие [45, 50]. При этом $h(f) = 0$ [13]. Тем не менее f может оставаться еще достаточно сложным, например, иметь бесконечные ω-предельные множества, не являющиеся минимальными. Если же $\mathrm{Per}(f)$ является замкнутым множеством, то отображение f устроено просто, хотя может иметь периодические траектории сколь угодно большого периода [45]. Ниже приведено описание свойств отображений из $C^0_A(I,I)$.

А. Пусть $f\in C^0(I,I)$.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\mathrm{Per}(f)=\overline{\mathrm{Per}(f)}$;

2) $\Omega(f)=\omega(f)=\mathrm{C}(f)=\mathrm{Per}(f)$;

3) для любой точки $x\in I$ $\mathcal{A}_x$ — периодическая траектория.

Б. Пусть $f\in C^0_A(I,I)$, тогда

1) период каждой периодической траектории равен степени двойки: если есть периодическая траектория периода 2^k, то есть периодическая траектория периода 2^i с любым i, $0\le i\le k$;

2) отображение f не имеет периодических траекторий периода 2^{m+1} тогда и только тогда, когда для любой точки $x\in I$ либо $f^{2^m}x=x$, либо $f^{2^m}x>x$, $f^{2^{m+1}}x>x$, либо $f^{2^m}x<x$, $f^{2^{m+1}}x<x$;

3) если $x_i\to x_0$, $i=1,2,\dots$, и $x_i\in\mathrm{Per}(f)$, то $(\bigcup_i f_{x_i})'= = f_{x_0}$;

4) если $x_i\to x_0$, $i=1,2,\dots$, $x_i\in\mathrm{Per}(f)$ и $n_{x_i}\to\infty$, то f — не дифференцируемая функция по крайней мере в одной из точек траектории f_{x_0}; следовательно, если $f\in C^1_A(I,I)$, то существует $N<\infty$ такое, что $n_x\le N$ для всякого $x\in \in\mathrm{Per}(f)$;

5) отображение f не имеет гомоклинических траекторий;

6) $h(f)=0$.

Доказательство утверждений А, за исключением равенства $\Omega(f)=\omega(f)$ и Б. 2), приведено в работе [45]; Б. 1) следует из работ [45, 42]; Б. 5) — из [45, 51]; Б. 6) — из [45, 13]. В настоящей работе завершается доказательство утверждений А и доказываются Б. 3), Б. 4).

Теорема 6.1.1. $\Omega(f)=\mathrm{Per}(f)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Per}(f)$ *— замкнутое множество.*

Доказательство. Если $\mathrm{Per}(f)=\Omega(f)$, то $\mathrm{Per}(f)$ — замкнутое множество, так как $\Omega(f)$ замкнуто.

Предположим, что $\mathrm{Per}(f)$ — замкнутое множество, и докажем, что $\Omega(f)=\mathrm{Per}(f)$. Поскольку $\Omega(f)\supseteq\mathrm{Per}(f)$, то достаточно показать, что $\mathrm{Per}(f) \supseteq \Omega(f)$. Допустим, что последнее неверно, т. е. существует точка $c \in \Omega(f) \setminus \mathrm{Per}(f)$, тогда ω_c — периодическая траектория (свойство А. 3)).

Для произвольного отображения $f \in C^0(I, I)$ имеет место следующее утверждение, доказательство которого вынесено в конец параграфа.

Л е м м а. *Если* $c \in \Omega(f)$, $\mathcal{A}_c$ *— периодическая траектория и* $c \notin \mathcal{A}_c$, *то* c — гомоклиническая точка.

Из леммы вытекает, что отображение f имеет гомоклиническую траекторию, а это противоречит свойству Б. 5). Теорема доказана.

Как следствие этой теоремы получаем следующее утверждение, являющееся частным случаем одной из теорем работы [13]: если $f \in C^0_A(I, I)$, то $h(f) = 0$.

Действительно, представим множество $\mathrm{Per}(f)$ в виде

$$\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{\alpha} p_\alpha,$$

где p_α — целая периодическая траектория. Тогда, используя известные свойства топологической энтропии [29], имеем

$$h(f) = h(f|_{\Omega(f)}) = h(f|_{\mathrm{Per}(f)}) = h(f|_{\bigcup_\alpha p_\alpha}) = \sup h(f|_{p_\alpha}) = 0.$$

Теорема 6.1.2. *Пусть* $f \in C^0_A(I, I)$. *Если* $x_i \to x_0$, $i = 1, 2, \ldots$, *и* $x_i \in \mathrm{Per}(f)$, *то* $(\bigcup_i f_{x_i})' = f_{x_0}$.

Согласно теореме 6.1.2, если последовательность периодических точек сходится к некоторой (периодической) точке, то и последовательность периодических траекторий, порождаемых этими точками, сгущается к единственной (периодической) траектории. В случае, когда $\mathrm{Per}(f)$ — незамкнутое множество, это не так: множество $(\bigcup_i f_{x_i})'$ может содержать, например, счетное множество периодических траекторий и плотную (непериодическую) траекторию.

Теорема 6.1.2 вытекает из следующих предложений, доказанных в работе [42] (леммы 4, 5) для произвольного непрерывного отображения прямой в себя.

Пусть $f \in C^0(I, I)$ и γ — периодическая траектория отображения f периода n.

Предложение А. *Если существуют точки* $\alpha_1, \alpha_2 \in \gamma$ *такие, что* $f\alpha_1 > \alpha_1$, $f\alpha_2 < \alpha_2$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то* f *имеет периодические точки с любым периодом.*

Предложение Б. *Если существует точка* $\alpha \in \gamma$ *такая, что* $\alpha < f\alpha < f^2\alpha$ *или* $\alpha > f\alpha > f^2\alpha$, *то* f *имеет периодические точки с любым периодом, большим* n *и любым четным периодом.*

В работе [45] доказано: если отображение f имеет периодические траектории периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то $\mathrm{Per}(f)$ не является множеством типа G_δ, и, следовательно, $\mathrm{Per}(f)$ — незамкнутое множество. Таким образом, отображение f может иметь периодическую траекторию, содержащую точки, удовлетворяющие условиям либо предложения А, либо предложения Б только тогда, когда $\mathrm{Per}(f)$ — незамкнутое множество.

Перейдем к доказательству теоремы 6.1.2. Пусть $(\bigcup_i f_{x_i})' = F$; так как $\mathrm{Per}(f)$ — замкнутое множество, то $F \subset \mathrm{Per}(f)$.

Допустим, $F \neq f_{x_0}$, т. е. F, кроме траектории $\gamma = f_{x_0}$, содержит еще по крайней мере одну периодическую траекторию, например, γ'. Пусть n, n' — периоды траекторий γ, γ' и $g = f^{n \cdot n'}$; траектории γ, γ' распадаются на неподвижные относительно g точки. Очевидно,

$$(\textstyle\bigcup_i f_{x_i})' = \left(\displaystyle\bigcup_{s=0}^{nn'-1} f^s \textstyle\bigcup_i g_{x_i}\right)' = \displaystyle\bigcup_{s=0}^{nn'-1} f^s (\textstyle\bigcup_i g_{x_i})',$$

поэтому множество $(\bigcup_i g_{x_i})'$ содержит по крайней мере одну из точек γ'. Обозначим x_0' какую-либо из таких точек, принадлежащих γ' и $(\bigcup_i g_{x_i})'$. Таким образом, имеем две неподвижные относительно g точки x_0 и $x_0' \in (\bigcup_i g_{x_i})'$ (в частности, $x_i \to x_0$).

Выберем окрестности U, U' точек x_0, x_0' соответственно так, чтобы U и U' не пересекались. Поскольку $gx_0 = x_0$ и $gx_0' = x_0'$, существуют окрестность U_{-1} точки x_0 такая, что

$gU_{-1} \subset U$, и окрестность U'_{-1} точки x'_0 такая, что $gU'_{-1} \subset U'$. Выберем i' так, чтобы U_{-1} и U'_{-1} содержали точки траектории $\gamma_{x_{i'}}$, и пусть $\alpha \in \in \gamma_{x_{i'}} \cap U_{-1}$, $\alpha' \in \gamma_{x_{i'}} \cap U'_{-1}$.

Если $\alpha < g\alpha$ $(\alpha > g\alpha)$, то $g\alpha > g^2\alpha$ (соответственно, $g\alpha < < g^2\alpha$), иначе бы точка α удовлетворяла условиям предложения Б. Аналогично, если $\alpha' > g\alpha'$ $(\alpha' < g\alpha')$, то $g\alpha' < g^2\alpha'$ $(g\alpha' > g^2\alpha')$. Но в таком случае точки α и α' удовлетворяют условиям предложения А. Следовательно, отображение g, а значит, и f имеют периодическую траекторию, период которой отличен от степени двух. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема 6.1.3. *Пусть* $f \in C^0_A(I,I)$. *Если* $x_i \to x_0$, $x_i \in \in \mathrm{Per}(f)$, $n_{x_i} \to \infty$, $i = 1, 2, \dots$, *то* f *не дифференцируема по крайней мере в одной из точек траектории* f_{x_0}.

Доказательство. Пусть $n_{x_0} = 2^k$. Точка x_0 является неподвижной относительно отображения $g = f^{2^k}$; $x_i \in \mathrm{Per}(g)$ и $n^g_{x_i} \to \infty$. В любой окрестности U точки x_0 существуют точки $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ такие, что либо а) $g\beta_1 < g\beta_2$, $g\beta_2 \geq \beta_3$, $g\beta_3 \leq \beta_2$, либо б) $g\beta_1 \geq \beta_2$, $g\beta_2 < g\beta_1$, $g\beta_3 \geq g\beta_2$.

Действительно, согласно теореме 6.1.2 существует i_0 такое, что $g_{x_{i_0}} \subset U$, $n^g_{x_i} = l > 2$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ — точки этой траектории и $\alpha_{max} = \max_{1\leq j\leq l}\{\alpha_j\}$, $\alpha_{min} = \min_{1\leq j\leq l}\{\alpha_j\}$ Возьмем $\alpha', \alpha'' \in g_{x_{i_0}}$ такие, что $g\alpha' = \alpha_{min}$, $g\alpha'' = \alpha_{max}$. Из предложения А следует, что $\alpha' > \alpha''$. Если $\alpha_{min} \neq \alpha''$, то в качестве точек $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ берем точки $\alpha_{min}, \alpha'', \alpha'$; если $\alpha_{min} = \alpha''$, то точки $\alpha_{min}, \alpha', \alpha_{max}$; одновременное выполнение равенств $\alpha_{min} = \alpha''$, $\alpha_{max} = \alpha'$ невозможно, так как $l > 2$.

В случае а)

$$\frac{g(\beta_2) - g(\beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} > 0, \quad \frac{g(\beta_3) - g(\beta_2)}{\beta_3 - \beta_2} < -1;$$

в случае б)

$$\frac{g(\beta_2) - g(\beta_1)}{\beta_2 - \beta_1} < -1, \quad \frac{g(\beta_3) - g(\beta_2)}{\beta_3 - \beta_2} > 0.$$

Так как окрестность U можно стягивать к точке x_0,

$$\lim_{x', x'' \to x_0} \frac{g(x') - g(x'')}{x' - x''}$$

не существует, т. е. функция $g(x)$ не дифференцируема в точке x_0, поэтому функция $f(x)$ не дифференцируема по крайней мере в одной из точек траектории f_{x_0}.

Из приведенного доказательства видно, что условие $n_{x_i} \to \infty$ можно заменить условием $n_{x_i} \geq 4n_{x_0}$.

Доказательство леммы. Пусть вначале $\mathcal{A}_c = \{d\}$, где d — неподвижная точка отображения f, а U — произвольная достаточно малая окрестность этой точки такая, что $c \notin \overline{U}$. Так как $\mathcal{A}_c = \{d\}$ и f — непрерывная функция, то существуют попарно непересекающиеся окрестности $U_0, U_1, \dots, U_n$ соответственно точек $c, f(c), \dots, f^n(c)$ такие, что $fU_{k-1} \subset U_k$, $k = 1, \dots, n$, и $U_n \subset U$.

Доказательство разобьем на две части.

I. Покажем, что окрестность U обладает следующим свойством: $\forall U'(d) \subset U \;\; \exists c_{-i} \in U'(d)$ и номер i такие, что $f^i c_{-i} = c$.

II. Построим гомоклиническую траекторию, проходящую через точку c.

I. Рассмотрим множество $V = \bigcup_{i=0} f^i U$. Так как $d \in f^i U$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то V — интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый). Кроме того, $fV \subseteq V$. Действительно,

$$f \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i U = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^i U \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i U.$$

Пусть $\overline{V} = [a, b]$. Тогда или $a \leq c \leq b$, или $c < a$, или $c > b$. Однако последние два случая невозможны, поскольку $f^n U_0 \subset U$ и $c \in \Omega(f)$.

I. 1. $a < c < b$. В этом случае существует номер i такой, что $f^i U \ni c$, следовательно, существует точка c_i такая, что $f^i c_{-i} = c$.

I. 2. $a = c$. Пусть $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$. Если $m > a$, то это противоречит тому, что $c \in \Omega(f)$. Пусть $m = a$. Возможны два случая: а) минимум функции $f(x)$ достигается во внутренней точке интервала $[a, b]$; б) минимум достигается в точке b (в точке a $f(a) \neq a$). Первый случай сводится к п. I. 1.

Рассмотрим второй случай: $f(x) > a$ при $x \in [a, b]$ и $f(b) = a$. Здесь также возможны два случая: либо максимум достигается во внутренней точке интервала $[a, b]$, либо в точке a. (Если $M < b$, то это противоречит тому, что $c \in \Omega(f)$). Первый случай сводится к п. I. 1. Второй случай невозможен, так как $c \notin \mathrm{Per}(f)$.

I. 3. $c = b$; этот случай рассматривается аналогично п. I. 2.

II. Перейдем к построению гомоклинической траектории к неподвижной точке d. Достаточно рассмотреть случай $c < d$ и $fc < c$; остальные случаи рассматриваются аналогично.

II. 1. Пусть $c < c_{-i} < d$ и $fc_{-i} < c_{-i}$ (остальные случаи будут естественным образом возникать в ходе построения). Тогда $f[c_i, d] \supset [c_i, d]$, следовательно, существует точка $c_{-i-1} = \max\{x \in [c_{-i}, d] : fx = c_{-i}\}$ и $c_{-i} < c_{-i-1}$. Очевидно, что $fc_{-i-1} < c_{-i}$, и существует точка $c_{-i-2} = \max\{x \in [c_{-i-1}, d] : fx = c_{-i-1}\}$, $c_{-i-1} < c_{-i-2}$ и т. д. Продолжая этот процесс, получаем последовательность точек $c_i < c_{-i-1} < \ldots < c_{-i-j} < \ldots < d$ такую, что $fc_{-i-j} = c_{-i-j+1}$. Если $c_{-i-j} \to d$ при $j \to \infty$, то построена гомоклиническая траектория $\ldots, c_{-i-j}, c_{-i-j+1}, \ldots, c_i, \ldots, c, fc, f^2c, \ldots$.

II. 2. Пусть $c_{-i-j} \to d_1 < d$ при $j \to \infty$. Очевидно, что d_1 — неподвижная точка отображения f и в силу построения имеем $fx \geq d_1$ при $x \in [d_1, d]$. Существует точка $x \in [d_1, 1]$ такая, что $fx > x$ и $f^2x < d_1$ (если бы такой точки не существовало, то это противоречило бы тому, что $c \in \Omega(f)$). Пусть $c_{-i-i_1} \in [f^2x, d_1]$ и $f^{i+i_1}c_{-i-i_1} = c$. Отсюда следует, что существует точка $c_{-i-i_1-1} = \min\{x \in [d, 1] : fx = c_{-i-i_1}$ (случай $c < d < c_{-i}$ и $fc_{-i} = c_{-i}$). Кроме того, существует точка $c_{-i-i_1-2} = \max\{x \in [d_1, c_{-i-i_1}] : \quad fx = c_{-i-i_1-1}\}$.

II. 2 А. Пусть $c_{-i-i_1-2} > d$ (случай $c < d < c_{-i}$ и $fc_{-i} > c_i$); тогда, аналогично тому, как это проделано в п. II. 1, построим последовательность точек $c_{i-i_1-2} > c_{-i-i_1-3} > \ldots > c_{-i-i_1-j} > \ldots$. Если $c_{-i-i_1-j} \to d$ при $j \to \infty$, то получим гомоклиническую траекторию к неподвижной точке d. Если $c_{-i-i_1-j} \to d_1 > d$ при $j \to \infty$, то проводим дальнейшие построения аналогично п. II. 2.

II. 2. Б. Пусть $c_{i-i_1-2} < d$ (случай $c < c_{-i} < d$ и $fc_{-i} > c_i$). Тогда построение сводится либо к п. II. 1, либо к п. II. 2 в зависимости от того, лежит ли прообраз точки c_{-i-i_1-2} слева или справа от неподвижной точки d.

Таким образом, указанный алгоритм дает возможность построить гомоклиническую траекторию к неподвижной точке d.

Пусть теперь $\mathcal{A}_c$ — периодическая траектория периода n. Пусть $g = f^n$. Тогда $c \in \Omega(f)$, а $\mathcal{A}_c$ — неподвижная точка отображения g. Следовательно, c принадлежит гомоклинической траектории отображения g. В силу непрерывности отображения f точка c также будет принадлежать гомоклинической траектории отображения f.

6.2. Отображение с нулевой топологической энтропией, имеющее континуум канторовых минимальных множеств*

Если непрерывное отображение f интервала I в себя имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, например 3, то, как известно, топологическая энтропия отображения f положительна и f имеет сложную структуру траекторий, в частности, у f

*Опубликовано в *Шарковский А.Н.* Отображение с нулевой топологической энтропией, имеющее континуум канторовых минимальных множеств // Сб.: Динамические системы и турбулентность, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989, С. 109–117.

есть континуум минимальных множеств, отличных от циклов (и, следовательно, гомеоморфных множеству Кантора). Если же у отображения f период каждого цикла равен 2^i, $i \in \mathbb{Z}^+$, то топологическая энтропия равна нулю. При этом, если множество периодических точек $\mathrm{Per}(f)$ замкнуто, то любое минимальное множество — цикл (множество $\mathrm{Per}(f) = \bigcup_n \mathrm{Fix}(f^n)$ замкнуто, если, например, периоды циклов не превосходят некоторого $N > 0$, поскольку $\mathrm{Fix}(f^n) = \{x \in I : f^n(x) = x\}$ — всегда замкнутое множество). Если же множество $\mathrm{Per}(f)$ не замкнуто, то f обязательно имеет минимальные множества, отличные от циклов. По-видимому, когда f — гладкое отображение замкнутого интервала, таких минимальных множеств может быть лишь конечное число. Ниже приведен пример построения непрерывного отображения $I \to I$, у которого период каждого цикла равен 2^i, $i \in \mathbb{Z}^+$ (и $\mathrm{Per}(f)$ — незамкнутое множество), имеющего континуум минимальных множеств, отличных от циклов.

1. Динамическая система, которая будет построена, на каждом минимальном множестве эквивалентна некоторой динамической системе на множестве Кантора. С построения этой (известной) системы мы и начнем.

Пусть $I = [0,1]$ и K — стандартное множество Кантора, т. е. подмножество интервала I, каждая точка которого в троичной системе счисления записывается в виде $0, j_1 j_2 \dots j_i \dots$, где $j_i = 0$ или 2, $i = 1, 2, \dots$; далее в п. 1 все время будет использоваться троичная система счисления. Тогда

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j_1,\dots,j_n \in \{0,2\}} I_{j_1 \dots j_n},$$

где $I_{j_1 \dots j_n} = [a, a + 1/3^n]$, $\quad a = 0, j_1 \dots j_n$, $\quad j_i \in \{0, 1, 2\}$.

Введем на I отображения

$$\alpha_0 : x \mapsto 1/3x, \qquad \alpha_2 : x \mapsto 1/3x + 2/3,$$

так что при $j_0 = 0$ и $j_0 = 2$

$$\alpha_{j_0}(I) = I_{j_0};$$

более того,

$$\alpha_{j_0}:\ 0,j_1j_2\ldots\ \mapsto\ 0,j_0j_1j_2\ldots$$

и поэтому

$$\alpha_{j_0}(I_{j_1\ldots j_n})=I_{j_0j_1\ldots j_n},$$

$$\alpha_{j_0}^{-1}(I_{j_0j_1\ldots j_n})=I_{j_1\ldots j_n}.$$

Отображение f_0 зададим следующими условиями:
1) $f\in C(I,I)$,
2) f удовлетворяет функциональному соотношению

$$f(\alpha_2(x))=\alpha_0(f(x)),$$

3) f удовлетворяет "начальным условиям":

$$f(x)=x+2/3 \text{ при } x\in I_0,$$

$$f \text{ — линейная функция при } x\in I_1.$$

Условия 1)–3) однозначно определяют отображение f_0. Из условия 2) следует, что

$$f(x)=\alpha_0(f(\alpha_2^{-1}(x))) \text{ при } x\in I_2, \tag{6.1}$$

а при $m>1$ и $x\in I_{\underbrace{2\ldots2}_{m}}$

$$f(x)=\alpha_0^m(f(\alpha_2^{-m}(x)));$$

если $x\in I_{\underbrace{2\ldots2}_{m}}\setminus I_{\underbrace{2\ldots2}_{m+1}}$, т. е. $x=0,\underbrace{2\ldots2}_{m}j_{m+1}\ldots$, $j_{m+1}\in\{0,1\}$, то $\alpha_2^{-m}(x)\in I_0\cup I_1$, так что $f(\alpha_2^{-m}(x))$ определяется условием 3). В частности, если $x\in I_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0}$, т. е. $x=0,\underbrace{2\ldots2}_{m}0j_{m+2}\ldots$, то $\alpha_2^{-m}(x)=0,0j_{m+2}\ldots$, $f(\alpha_2^{-m}(x))=0,2j_{m+2}\ldots$, и, следовательно, $f(x)=\alpha_0^m(0,2j_{m+2}\ldots)=0,\underbrace{0\ldots0}_{m}2j_{m+2}\ldots$. При

$m = 0$, т. е. когда $x \in I_0$, отображение имеет такой же вид: согласно условию 3) $f(0,0j_2\ldots) = 0,2j_2\ldots$. Таким образом, при $x \in I_{\underbrace{2\ldots2}_{m-1}0}$, $m \geq 1$,

$$f(0,j_1\ldots j_{m-1}j_mj_{m+1}\ldots) = 0,\overline{j_1}\ldots\overline{j_{m-1}j_m}j_{m+1}\ldots, \tag{6.2}$$

где $\overline{j_i} = 2 - j_i$ (и $f(0,22\ldots) = 0,00\ldots$, т. е. $f(1) = 0$ в силу непрерывности f). Остается отметить, что $K \subset \bigcup_{m=0}^{\infty} I_{\underbrace{2\ldots2}_{m}0} \cup \{1\}$, а $I_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty}(I_{\underbrace{2\ldots2}_{m}} \setminus I_{\underbrace{2\ldots2}_{m+1}}) \cup \{1\}$.

Из условия 3) следует, что

$$f(\alpha_0(x)) = \alpha_0(x) + 2/3 = \alpha_2(x),$$

и поэтому

$$f^2(\alpha_0(x)) = f(\alpha_2(x)) = \alpha_0(f(x)),$$
$$f^2(\alpha_2(x)) = f(\alpha_0(f(x)) = \alpha_2(f(x)).$$

Это означает, что отображение f на I топологически эквивалентно отображению f^2 и на I_0, и на I_2. Отсюда, в частности, следует, что отображение f имеет циклы периодов $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$.

По индукции далее получаем, что при любом $m \geq 1$ для $x \in I$ и $j \in \{0, 2\}$

$$f^{2^m}(\alpha_j(x)) = \alpha_j(f^{2^{m-1}}(x)). \tag{6.3}$$

Действительно, если предположить, что (6.3) справедливо при $m = k$, то тогда для $m = k + 1$

$$f^{2^{k+1}}(\alpha_j(x)) = f^{2^k}(\alpha_j(f^{2^{k-1}}(x))) = \alpha_j(f^{2^{k-1}}(f^{2^{k-1}}(x))) =$$
$$= \alpha_j(f^{2^k}(x)).$$

Соотношение (6.3) можно переписать таким образом:

$$f^{2^m}(x) = \alpha_j(f^{2^{m-1}}(\alpha_j^{-1}(x))), \tag{6.4}$$

когда $x \in I_j$, $j \in \{0, 2\}$, $m \geq 1$.

Из (6.4) следует, что для точек интервалов $I_{j_1\ldots j_{m-1}\,j_m}$, $j_i \in$ $\in \{0, 2\}$, при $m \geq 1$

$$f^{2^{m-1}}(0, j_1 \ldots j_{m-1}\, j_m \ldots) = 0, j_1 \ldots j_{m-1}\, \overline{j_m} \ldots \tag{6.5}$$

В самом деле, при $m = 1$ (6.5) справедливо: $f(0, j_1, \ldots) =$ $= 0, \overline{j_1} \ldots$, когда $j_1 = 0$, согласно 3) и, когда $j_1 = 2$, согласно (6.1). Воспользуемся далее индукцией: если (6.5) справедливо при $m = k$, то

$$f^{2^k}(0, j_1 \ldots j_k\, j_{k+1} \ldots) = \alpha_{j_1}(f^{2^{k-1}}(\alpha_{j_1}^{-1}(0, j_1 \ldots j_k\, j_{k+1} \ldots))) =$$

$$= \alpha_{j_1}(f^{2^{k-1}}((0, j_2 \ldots j_k\, j_{k+1} \ldots)) = \alpha_{j_1}(0, j_2 \ldots j_k\, \overline{j}_{k+1} \ldots) =$$

$$= 0, j_1 \ldots j_k\, \overline{j}_{k+1} \ldots,$$

т. е. (6.5) справедливо и при $m = k + 1$.

Из (6.5) немедленно вытекают необходимые нам свойства динамической системы

$$f^{2^{m-1}}(I_{j_1\ldots j_{m-1}\,j_m}) = I_{j_1\ldots j_{m-1}\,\overline{j_m}}, \tag{6.6}$$

$$f^{2^m}(I_{j_1\ldots j_m}) = I_{j_1\ldots j_m} \tag{6.7}$$

при любом $m \geq 1$ и любых $j_1, \ldots, j_m \in \{0, 2\}$.

Свойство (6.7) означает, что каждый интервал (ранга m) $I_{j_1\ldots j_m}$ — периодический интервал и притом ввиду (6.6) периода 2^m. Так как таких интервалов ранга m всего 2^m, то они образуют единственную периодическую траекторию

$$I_{00\ldots0} \to I_{20\ldots0} \to I_{020\ldots0} \to I_{220\ldots0} \to I_{0020\ldots0} \to \ldots \to I_{2\ldots2} \to I_{00\ldots0};$$

порядок переходов определяется (6.2), т. е.

$$f(I_{j_1\ldots j_i \ldots j_l j_{l+1} \ldots j_n}) = I_{\overline{j_1}\ldots\overline{j_l} j_{l+1}\ldots j_n},$$

если $j_l = 0$, а при $i < l$ $j_i = 2$, $1 \leq l \leq n$; $f(I_{2\ldots2}) = I_{0\ldots0}$.

При увеличении m на единицу количество интервалов и, соответственно, период образуемой ими периодической траектории возрастают в два раза. Отсюда следует, что множество Кантора $K = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j_1,\dots,j_m \in \{0,2\}} I_{j_1 \dots j_m}$ представляет собой минимальное множество динамической системы, каждая точка множества K порождает (почти периодическую) траекторию, плотную на K.

Отображение f_0 (рис. 6.1) имеет циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \dots$ (по одному каждого периода, все циклы отталкивающие), циклов других периодов нет. Каждая точка из I, за исключением счетного множества $\cup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(\mathrm{Per} f)$, притягивается множеством K.

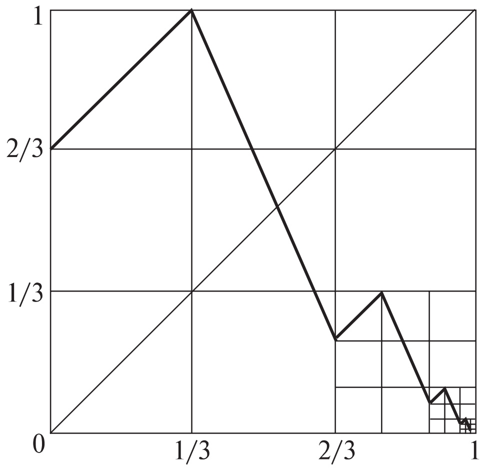

Рис. 6.1

2. Для того чтобы построить отображение, имеющее уже не одно, а континуум минимальных множеств, гомеоморфных множеству Кантора, достаточно лишь немного изменить алгоритм: вместо того, чтобы при переходе от интервалов $I_{j_1 \dots j_m}$ (ранга m) к интервалам $I_{j_1 \dots j_{m+1}}$ (ранга $m+1$) всякий раз удваивать период, следует чередовать удвоение периода траекторий периодических интервалов с расщеплением таких траекторий на две того же периода. Именно, при переходе от периодического интервала $I_{j_1 \dots j_m}$ к содержащимся в нем четырем интервалам $I_{j_1 \dots j_m j_{m+1} j_{m+2}}$, $j_{m+1}, j_{m+2} \in \{0, 2\}$, каждый из этих (меньших) интервалов должен иметь период в два раза (а не в четыре) больше периода интервала $I_{j_1\dots j_m}$, и потому эти четыре интервала должны будут принадлежать не одной, а двум разным траекториям. Это обеспечит, в конце концов, и то, что инвариантных множеств, гомеоморфных множеству Кантора, будет континуум, и то, что каждое из них будет минимальным (ибо периоды периодических интервалов с увеличением m неограниченно возрастают).

В предлагаемом алгоритме последовательное удвоение периодов интервалов и увеличение в два раза количества траекторий таких интервалов можно осуществлять одновременно, за один шаг. Для этого удобнее вместо троичной системы счисления использовать 9-ричную, чтобы число интервалов каждого следующего ранга увеличивалось как раз в 4 раза. В таком случае

$$K = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j_1,\dots,j_n \in \{0,2,6,8\}} I_{j_1\dots j_n},$$

где $I_{j_1\dots j_n} = [a, a+9^{-n}], \quad a = 0, j_1\dots j_n, \quad j_i \in \{0,1,2,3,\dots,8\}.$

3. Формально описать, как устроено отображение, имеющее континуум канторовых минимальных множеств, можно следующим образом.

Разобьем множество Кантора $K = \{0, j_1 j_n \dots,\ j_i \in \{0,2,6,8\}\}$ на континуум множеств, каждое из которых само гомеоморфно множеству Кантора.

Прежде всего, отметим, что каждое целое число $j \in \{0,2,6,8\}$ единственным образом разлагается в сумму $r + s$, где $r \in \{0,2\}$, $r = j (\operatorname{mod} 6)$; при этом $s = j - r \in \{0,6\}$. Поэтому и каждая точка $a \in K$, как точка числовой прямой, единственным образом представима в виде $a' + a''$, где $a' \in K' = \{0, r_1 r_2 \dots,\ r_i \in \{0,2\}\}$, $a'' \in K'' = \{0, s_1 s_2 \dots,\ s_i \in \{0,6\}\}$: если $a = 0, j_1 j_2 \dots j_n \dots$, $j_n \in \{0,2,6,8\}$ и $j_n = r_n + s_n$, $r_n \in \{0,2\}$, $s_n \in \{0,6\}$, то $a' = 0, r_1 \dots r_n \dots$, $a'' = 0, s_1 \dots s_n \dots$.

Множества K' и K'' гомеоморфны множеству Кантора. Эти множества порождают естественное разбиение множества K на континуум канторовых множеств:

$$K = \bigcup_{a'' \in K''} K_{a''},$$

где $K_{a''} = \{a = a' + a'',\ a' \in K'\}$, или, в несколько других обозначениях,

$$K = \bigcup_{s_1,\dots,s_n,\dots \in \{0,6\}} K_{s_1\dots s_n\dots}\,,$$

где $K_{s_1\dots s_n\dots} = \{a = 0,s_1\dots s_n\dots + 0,r_1\dots r_n\dots,\ r_n \in \{0,2\},\ n = 1,2,\dots\}$.

В частности, $K' = K_{0\,0\dots}$. Можно формально записать

$$K_{s_1\dots s_n\dots} = K_{0\,0\dots} + 0,s_1\dots s_n\dots,$$

т. е. сдвиг $\tau_{s_1 s_2\dots}$ вдоль числовой прямой вправо на расстояние $0,s_1 s_2\dots$ (запись в 9-ричной системе счисления) приводит к совмещению множества $K_{0\,0\dots}$ с множеством $K_{s_1 s_2\dots}$:

$$K_{s_1 s_2\dots} = \tau_{s_1 s_2\dots}(K_{0\,0\dots}).$$

Построение отображения f_* удобно начать с множества $K_{0\,0\dots}$ $(= K')$. На множестве $K_{0\,0\dots}$ зададим f_*, как и f_0, по формуле (6.2), т. е. положим

$$f_*(0,\underbrace{2\dots2}_{m-1}0j_{m+1}\dots) = 0,\underbrace{0\dots0}_{m-1}2j_{m+1}\dots, \qquad m \geq 1,$$

$$f_*(0,22\dots) = 0,00\dots,$$

считая, однако, что используется 9-ричная система счисления. В таком случае $f_*(K_{0\,0\dots}) = K_{0\,0\dots}$ и отображения f_* на $K_{0\,0\dots}$ и f_0 на K топологически эквивалентны. В частности, на $K_{0\,0\dots}$ динамическая система, задаваемая f_*, минимальна.

На каждом из множеств $K_{s_1 s_2\dots}$ отображение f_* зададим эквивалентным отображению f_0 на K, "передвигая" отображение с $K_{0\,0\dots}$ $(= K')$, где оно уже определено, вдоль числовой прямой вправо на величину $0,s_1\dots s_n\dots$: если $x \in K_{s_1 s_2\dots}$, то

$$f_*(x) = 0,s_1\dots s_n\dots + f_*(x - 0,s_1\dots s_n\dots),$$

т. е. $f_* = \tau_{s_1\dots s_n\dots} \circ f_* \circ \tau^{-1}_{s_1\dots s_n\dots}$.

Очевидно, каково бы ни было число $0, s_1 \ldots s_n \ldots$, принадлежащее множеству "параметров" K'', $f_*(K_{s_1 s_2 \ldots}) = K_{s_1 s_2 \ldots}$ и динамическая система на $K_{s_1 s_2 \ldots}$ минимальна.

Теперь отображение f_* уже определено на множестве $K = \bigcup_{s_1, s_2, \ldots \in \{0,6\}} K_{s_1 s_2 \ldots}$ и непрерывно на нем (ибо отображение f_* непрерывно на K и $\tau_{s_1 s_2 \ldots} \to id$ при $0, s_1 \ldots s_n \ldots \to 0$). Остается продолжить f_* с множества Кантора на весь интервал $I = [0, 1]$ с сохранением непрерывности так, чтобы при этом "не усложнить" отображение (т. е. чтобы не появились циклы периодов $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$). Это выполнимо, если полагать, что на каждом интервале, смежном с K, f_* — линейное отображение (рис. 6.2).

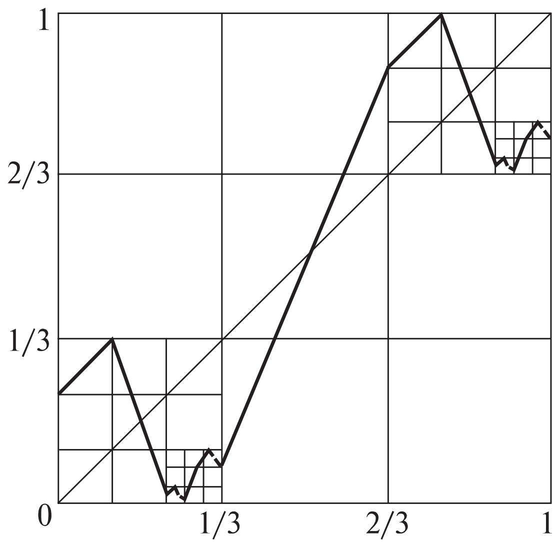

Рис. 6.2

4. Отображение f_* можно построить, а затем изучить аналогично тому, как это было проделано в п. 1 для отображения f_0. Не вдаваясь в подробные объяснения, опишем этот подход. Он использует уже не одно, как для f_0, а два функциональных соотношения (другими словами, не одно ренормпреобразование, а два).

Введем на I отображения

$$\alpha_j : x \mapsto 1/9x + 1/9, \quad j = 0, 2, 4, 8,$$

так что при $j_0 \in \{0, 2, 6, 8\}$ (в 9-ричной системе счисления)

$$\alpha_{j_0} : 0, j_1\, j_2\, \ldots \mapsto 0, j_0\, j_1\, j_2 \ldots,$$

$$\alpha_{j_0}(I_{j_1 \ldots j_m}) = I_{j_0\, j_1 \ldots j_m}.$$

Отображение f_* определяется условиями:

1′) $f \in C(I, I)$;

2′) $f(\alpha_2(x)) = \alpha_0(f(x)), \quad f(\alpha_8(x)) = \alpha_6(f(x)), \quad x \in I$;

3′) а) $f(x) = x + 2/9$ при $x \in I_0$, $f(x) = x + 8/9$ при $x \in I_6$;

3′) б) f — линейная функция на каждом интервале, где условия 2′) и 3′) не задают f.

Из 3′) следует, что

$$\begin{aligned} f(\alpha_0(x)) &= \alpha_2(x), \\ f(\alpha_6(x)) &= \alpha_8(x), \end{aligned} \tag{6.8}$$

так что

$$f^2(\alpha_j(x)) = \alpha_j(f(x)), \quad j = 0, 2, 6, 8,$$

и при любом $m \geq 1$

$$f^{2^m}(\alpha_j(x)) = \alpha_j(f^{2^{m-1}}(x)).$$

Как уже отмечалось, индекс $j \in \{0, 2, 6, 8\}$ единственным образом разлагается в сумму $r + s$, где $r \in \{0, 2\}$, $s \in \{0, 6\}$, $r = j \,(\mathrm{mod}\, 6)$. При $j \in \{0, 2, 6, 8\}$ будем обозначать $\overline{j}$ сумму $\overline{r} + s$, где $\overline{r} = 2 - r$.

Как и для отображения f_0, доказывается, что при $x \in \in I_{j_1 \ldots j_m}$, $j_i \in \{0, 2, 6, 8\}$, $i = 1, \ldots, m$, и любом $m \geq 1$

$$f^{2^{m-1}}(0, j_1 \ldots j_{m-1} j_m \ldots) = 0, j_1 \ldots j_{m-1}\overline{j_m} \ldots,$$

так что

$$f^{2^{m-1}}(I_{j_1 \ldots j_{m-1} j_m}) = I_{j_1 \ldots j_{m-1}\overline{j_m}},$$

$$f^{2^m}(I_{j_1\dots j_m}) = I_{j_1\dots j_m}.$$

Это означает, что каждый интервал $I_{j_1\dots j_m}$ периодический и его период равен 2^m.

Важно также, что при любых $j_1\dots j_m \in \{0,2,6,8\}$ отображение f_* меняет у индекса $j_1\dots j_m$ лишь “составляющую” $r_1\dots r_m$ и не изменяет $s_1\dots s_m$: если $f(I_{j_1\dots j_m}) = I_{j_1'\dots j_m'}$, то $s_i' = s_i$, $i = 1,\dots,m$. Это следует из условия 2) и формулы (6.8).

Таким образом, интервалы $I_{j_1\dots j_m}$ с одними и теми же $s_1\dots s_m$ образуют одну периодическую траекторию (периода 2^m), каждому из 2^m наборов $s_1\dots s_m$ $(s_i \in \{0,6\})$ соответствует одна такая периодическая траектория. При переходе от интервалов $I_{j_1\dots j_m}$ к интервалам $I_{j_1\dots j_m j_{m+1}}$ количество интервалов увеличивается в 4 раза (и равно 4^{m+1}), а их периоды возрастают только в 2 раза (и равны 2^{m+1}), так что эти интервалы составляют в 2 раза больше периодических траекторий (также 2^{m+1}).

5. Отметим, что среди канторовых минимальных множеств отображения f_* есть множества двух типов (соответственно двум типам точек самого множества параметров — канторова множества K''). Это “односторонние” множества, точки которых предельные для точек других минимальных множеств только слева или только справа (как, например, множество $K_{00\dots}$)) и “двусторонние”. “Односторонних” множеств — счетное число, “двусторонних” — континуум.

В [50] для отображений, имеющих циклы только периодов 2^i, $i = 0,1,2,\dots$, показано, что $\mathrm{Per}(f)$ есть G_δ -множество в предположении, что f не имеет “двусторонних” минимальных множеств. Для отображения f_*, хотя оно и имеет континуум минимальных множеств, $\mathrm{Per}(f)$ также есть G_δ -множество. Тот факт, что $\mathrm{Per}(f)$ — G_δ-множество для произвольного непрерывного отображения, имеющего циклы периодов $1, 2, 2^2, \dots$ и только их, — следствие, например, “отделимости” циклов больших периодов. Если же у отображения f есть цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0,1,2,\dots$, то $\mathrm{Per}(f)$ (будучи F_σ -множеством) не является G_δ -множеством [45].

6.3. Возвращаемость в одномерных динамических системах*

М. Б. Верейкина, А. Н. Шарковский

В теории динамических систем изучается различного типа возвращаемость. С возвращаемостью связаны такие понятия, как периодичность, почти периодичность, устойчивость по Пуассону (или рекуррентность), неблуждаемость и многие другие, которые играют определяющую роль в асимптотическом поведении траекторий динамических систем.

В работе вводится понятие "почти возвращаемости" точек фазового пространства, рассматривается связь множества почти возвращающихся точек с другими множествами, которые характеризуются возвращаемостью, а также обсуждается вопрос об одном из возможных вариантов "спектрального разложения" этих множеств.

1. Определения и обозначения. Пусть I — замкнутый интервал и $f \in C^0(I, I)$. Обозначим f^n n-ю итерацию отображения f, $\mathrm{Per}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in I : f^n(x) = x\}$ — множество периодических точек отображения f.

Для $x \in I$ и $\varepsilon > 0$ положим $U_\varepsilon(x) = \{\tilde{x} \in I : |x - \tilde{x}| < \varepsilon\}$, $U_\varepsilon^+(x) = \{\tilde{x} \in I : 0 < \tilde{x} - x < \varepsilon\}$, $U_\varepsilon^-(x) = \{\tilde{x} \in I : 0 < x - \tilde{x} < \varepsilon\}$. Произвольную одностороннюю ε-окрестность точки $x \in I$ обозначим $U_\varepsilon^\sharp(x)$, полагая, что либо $U_\varepsilon^\sharp(x) = U_\varepsilon^+(x)$, либо $U_\varepsilon^\sharp(x) = U_\varepsilon^-(x)$.

Напомним необходимые определения. Точка $x \in I$ называется *неблуждающей* (*односторонне неблуждающей*) точкой отображения f, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $n = n(\varepsilon) > 0$ такое, что $f^n(U_\varepsilon(x)) \cap U_\varepsilon(x) \neq \varnothing$ (соответственно, $f^n(U_\varepsilon^\sharp(x)) \cap$

*Опубликовано в *Верейкина М.Б., Шарковский А.Н.* Возвращаемость в одномерных динамических системах // Сб.: Приближенные и качественные исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, С. 35–46.

$\cap\, U^\sharp_\varepsilon(x) \neq \varnothing$). Обозначим $\Omega(f)$ множество неблуждающих точек отображения f, $\Omega^\sharp(f)$ — множество односторонне неблуждающих точек отображения f.

Точка $y \in I$ называется *ω-предельной точкой* траектории $\{f^i(x)\}_{i=0}^{\infty}$, $x \in I$, если для произвольных $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ существует $n = n(\varepsilon, N) > N$ такое, что $f^n(x) \in U_\varepsilon(y)$.

Обозначим $\mathcal{A}_x$ множество ω-предельных точектраектории $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in I$.

Говорят, что на инвариантном замкнутом множестве $F \subseteq I$ имеет место *возвращаемость областей*, если для любого множества $V \subset F$, открытого в F, существует $n = n(V) > 0$ такое, что $f^n(V) \cap (V) \neq \varnothing$. Пусть $C(f)$ — центр отображения f, т.е. максимальное инвариантное замкнутое множество, на котором имеет место возвращаемость областей.

Введем понятие области слабого влияния и почти возвращающейся точки.

Для произвольного множества $F \subseteq I$ положим $U_\varepsilon(F) = \bigcup_{x\in F} U_\varepsilon(x)$ и построим последовательность множеств

$$Q^0_\varepsilon(x,f) = U_\varepsilon(x), \quad Q^j_\varepsilon(x,f) = U_\varepsilon(f(Q^{j-1}_\varepsilon(x,f))) \text{ для } j=1,2,\dots .$$

Пусть $Q_\varepsilon(x,f) = \bigcap_{i\geq 0} \overline{\bigcup_{j\geq i} Q^j_\varepsilon(x,f)}$. Назовем множество

$$Q(x,f) = \bigcap_{\varepsilon>0} Q_\varepsilon(x,f)$$

областью слабого влияния точки $x \in I$ относительно отображения f.

Точку $x \in I$ назовем *почти возвращающейся точкой* отображения f, если $x \in Q(x,f)$. Обозначим $\mathcal{B}(f)$ множество почти возвращающихся точек отображения f. Заметим, что множество $\mathcal{B}(f)$ совпадает с множеством слабо неблуждающих точек [52] (по крайней мере в $C^0(I,I)$) и множеством цепно-рекуррентных точек (см., например, [3]). В настоящей работе предпочтение отдается понятию почти возвращаемости.

2. Взаимосвязь множеств, характеризующихся возвращаемостью. Имеют место следующие соотношения

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = C(f) = \Omega(f \restriction_{\Omega(f)}) \subseteq \bigcup_{x \in I} \mathcal{A}_x = \Omega^\sharp(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq \mathcal{B}(f). \tag{6.9}$$

Соотношения

$$\overline{\mathrm{Per}(f)} = C(f) = \Omega(f \restriction_{\Omega(f)}) \subseteq \bigcup_{x \in I} \mathcal{A}_x \subseteq \Omega(f)$$

содержатся в [43] , равенство $\Omega^\sharp(f) = \bigcup_{x \in I} \mathcal{A}_x$ доказано в [48]. Включение $\Omega(f) \subseteq \mathcal{B}(f)$ следует из определений.

Приводимые ниже примеры показывают, что все включения в (6.9) могут быть строгими.

На рис. 6.3 представлено отображение $f \in C^0(I, I)$, для которого $\Omega(f) \neq \mathcal{B}(f)$ (см. [3]). В этом случае $\mathcal{B}(f) = [a, b]$, а $\Omega(f) = \Omega^\sharp(f) = C(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$ и $\Omega(f) \cap (a, c) = \varnothing$.

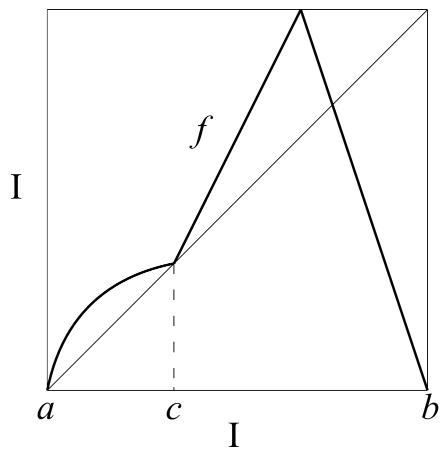

Рис. 6.3

На рис. 6.4 представлены отображения $g_1 \in C^0(I_1, I_1)$ (см. [43]) и $g_2 \in C^0(I_2, I_2)$ (см. [28]), для которых $\bigcup_{x \in I_i} \mathcal{A}_x \neq \Omega(g_i)$, $i = 1, 2$, а также $\Omega(g_i) \neq \mathcal{B}(g_i)$, $i = 1, 2$, так как $\bigcup_{x \in I_i} \mathcal{A}_x = \overline{\mathrm{Per}(g_i)} \neq$ $\neq \overline{\mathrm{Per}(g_i)} \cup \{1\} = \Omega(g_i)$ и $(\alpha, 1) \cap \Omega(g_i) = \varnothing$, но $(\alpha, 1) \subset \mathcal{B}(g_i)$.

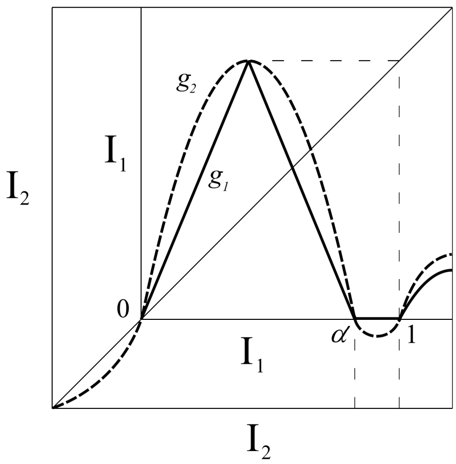

Рис. 6.4

Пример отображения $f \in C^0(I, I)$, для которого $\bigcup_{x\in I} \mathcal{A}_x \neq$ $\neq \overline{\mathrm{Per}(f)}$, представлен в работе [49]. Это отображение (обозначим его f_∞) строится следующим образом (см. рис. 6.5).

Пусть $[\alpha, \beta] \subset I$ и $\alpha, \beta \notin \partial I$. Выберем произвольную последовательность точек так, что $a_1 = \alpha < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots <$ $< a_i < b_i \ldots < \beta$ и $b_i - a_i = \beta - a_i$ для $i = 1, 2, \ldots$. Положим $f_\infty(\alpha) = a_2$, $f_\infty(b_1) = \beta$, $f_\infty(a_i) = \alpha + \beta - b_i$, $f_\infty(b_i) = \alpha + \beta - a_i$ для $i = 2, 3, \ldots$, $f_\infty(\beta) = \alpha$. На каждом из интервалов $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, отображение f_∞ определяется как линейное. Для $x \geq \beta$ положим $f_\infty(x) = \alpha - (x - \beta)$.

Выберем точки $d_i, c_{i+1} \in (b_i, a_{i+1})$ для $i = 1, 2, \ldots$, и $c_1 < a_1$ так, чтобы $d_i < c_{i+1}$, $a_i - c_i = 2(d_i - b_i) = 2(a_{i+1} - c_{i+1})$. Положим f_∞ на $[c_i, a_i]$ и $[b_i, d_i]$ линейным так, чтобы $f'_\infty(x) = \frac{1}{2}$ для $x \in (c_i, a_i)$ и $f'_\infty(x) = 2$ для $x \in (b_i, d_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Выберем точки $d_i^1, c_{i+1}^1 \in (d_i, c_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots$ и $c_1^1 < c_1$ так, чтобы $d_i^1 < c_{i+1}^1$, $c_i - c_i^1 = d_i^1 - d_i = 2(c_i - c_{i+1}^1) < \frac{1}{2}(c_{i+1} - d_i)$. На $[c_i^1, c_i]$ и $[d_i, d_i^1]$, $i = 1, 2, \ldots$, положим отображение f_∞ линейным так, чтобы $f'_\infty(x) = 1$ для $x \in (c_i^1, c_i) \cup (d_i, d_i^1)$.

Пусть c_i^2 — середина интервала (c_i^1, c_i), d_i^2 — середина интервала (d_i, d_i^1), $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $f_\infty^{2^{i-1}}(c_i^2) = c_{i+1}^1$, $f_\infty^{2^{i-1}}(d_{i+1}^1) = d_i^2$

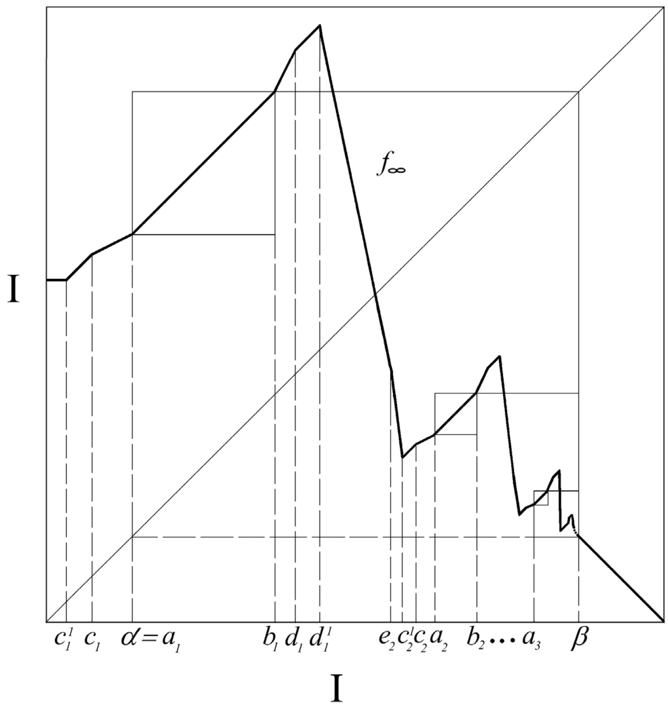

Рис. 6.5

для $i = 1, 2, \dots$, и $f_\infty^2(d_1^1) = c_1^1$. Положим $e_{i+1} = f_\infty^{2^{i-1}}(c_i^1)$ для $i = 1, 2, \dots$. Тогда $e_{i+1} \in (d_i^1, c_{i+1}^1)$ и c_{i+1}^1 является серединой интервала (e_{i+1}, c_{i+1}). Положим $f_\infty(e_i) = f_\infty(d_i^1) = d_{i-1}^2$ для $i = 2, 3, \dots$.

На $[d_i^1, e_{i+1}]$ и $[e_{i+1}, c_{i+1}^1]$, $i = 1, 2, \dots$, доопределим f_∞ линейным по непрерывности. Для $x \le c_1^1$ положим $f_\infty(x) = f_\infty(c_1^1)$.

Согласно построению, интервалы $[a_i, b_i]$, $f_\infty([a_i, b_i]), \dots$, $f_\infty^{2^i-1}([a_i, b_i])$ попарно не пересекаются. Поэтому отображение f_∞ имеет по одному циклу периода 2^i, $i = 0, 1, 2, \dots$, и не имеет других циклов. Множество $\Omega_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^i-1} f_\infty^j([a_i, b_i])$ является ω-предельным для траектории $\{f_\infty^j(\alpha)\}_{j=0}^{\infty}$. Множество $\Omega_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} f_\infty^j(d_i) \bigcup \Omega_0$ является ω-предельным для каждой из траекторий $\{f_\infty^j(c_i^1)\}_{j=0}^\infty$, $\{f_\infty^j(c_i^2)\}_{j=0}^\infty$, $\{f_\infty^j(d_i^1)\}_{j=0}^\infty$, $\{f_\infty^j(d_i^2)\}_{j=0}^\infty$, $\{f_\infty^j(e_{i+1})\}_{j=0}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots$. Но $(\Omega_1 \backslash \Omega_0) \bigcap \mathrm{Per}(f_\infty) = \varnothing$.

Для данного отображения $\overline{\mathrm{Per}(f_\infty)} = \mathrm{Per}(f_\infty) \bigcup \Omega_0$, $\Omega(f_\infty) = \bigcup_{x \in I} \mathcal{A}_x = \overline{\mathrm{Per}(f_\infty)} \bigcup \Omega_1$. Но $\mathcal{B}(f_\infty) \neq \Omega(f_\infty)$, так как $\{(c_i^1, c_i) \bigcup (c_i, a_i) \bigcup (b_i, d_i) \bigcup (d_i, d_i^1)\} \subset \mathcal{B}(f_\infty)$, а $\{(c_i^1, c_i) \bigcup (c_i, a_i) \bigcup \bigcup (b_i, d_i) \bigcup (d_i, d_i^1)\} \bigcap \Omega(f_\infty) = \varnothing$ для $i = 1, 2, \ldots$.

3. Неблуждающие и почти возвращающиеся точки. Из определений следует, что $\Omega(f^n) \subseteq \Omega(f)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$.

На рис. 6.6 представлено отображение $f \in C^0(I, I)$, для которого $\Omega(f^2) \neq \Omega(f)$ (см. [4]). Для этого отображения $\Omega(f) = \{a\} \cup \overline{\mathrm{Per}(f)} \neq \Omega(f^2) = \Omega(f^{2^k})$, $k = 1, 2, \ldots$. Для отображений, представленных на рис. 6.4, $\Omega(g_i) \neq g_i(\Omega(g_i))$, так как $\Omega(g_i) = \overline{\mathrm{Per}(g_i)} \cup \{1\} \neq \overline{\mathrm{Per}(g_i)} = g_i(\Omega(g_i))$, $i = 1, 2$.

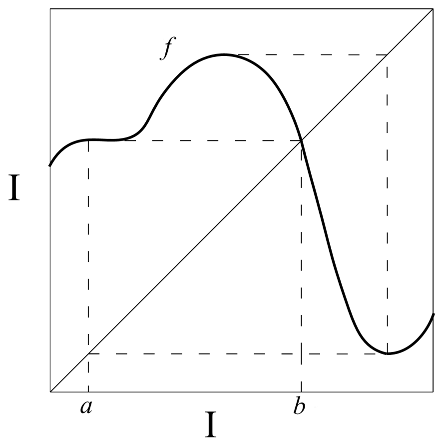

Рис. 6.6

Теорема 6.3.1.

1. $\Omega(f^{2^m}) = \Omega(f^{2^m(2k+1)})$ *при любых* $m > 0$, $k \geq 1$.

2. Каково бы ни было множество $M \subseteq \mathbb{N}$, *существует отображение* $f_M \in C^0(I, I)$ *такое, что*

а) $\Omega(f_M^{2^{m-1}}) \neq \Omega(f_M^{2^m})$ *при* $m \in M$;

б) $\Omega(f_M^{2^{m-1}}) = \Omega(f_M^{2^m})$ *при* $m \in \mathbb{N} \setminus M$.

Пункт 1 является непосредственным следствием результатов работ [4] и [2].

Чтобы доказать пункт 2, мы построим для произвольного $n \in \mathbb{N}$ отображение f_n такое, что $\Omega(f_n) = \ldots = \Omega(f_n^{2^{n-1}}) \neq \neq \Omega(f_n^{2^n}) = \Omega(f_n^{2^{n+1}}) = \ldots$.

Если $n = 1$, в качестве отображения f_1 можно взять отображение, представленное на рис. 6.6, для которого $\Omega(f_1) \neq \Omega(f_1^2) = = \overline{\mathrm{Per}(f_1)}$.

Для построения f_n при $n > 1$ воспользуемся стандартной процедурой "удвоения периода", имеющейся, например, в [45]. Тогда множество $\Omega(f_n) = \Omega(f_n^{2^{n-1}})$ состоит из множества $\overline{\mathrm{Per}(f_n)}$ и 2^{n-1} изолированных точек, которые не являются неблуждающими точками отображения $f_n^{2^n}$, а $\Omega(f_n^{2^n}) = \overline{\mathrm{Per}(f_n)}$, и, следовательно, $\Omega(f_n^{2^i}) = \overline{\mathrm{Per}(f_n)}$ при $i \geq n$.

Используя отображение f_n, $n \geq 1$, построим отображение f_M.

Выберем на интервале I произвольные непересекающиеся интервалы $[\alpha_m, \beta_m]$, $m \in M$. На каждом интервале $[\alpha_m, \beta_m]$, $m \in M$, отображение f_M строится топологически эквивалентным отображению f_m на I. На интервалах $I \backslash (\bigcup_{m \in M} [\alpha_m, \beta_m])$ отображение f_M доопределяется по непрерывности, например, как линейное отображение.

Заметим, что отображение f_n при любом $n \in \mathbb{N}$ обладает свойством

$$\Omega(f_n) \neq f_n(\Omega(f_n)) \neq \ldots \neq f_n^{2^{n-1}-1}(\Omega(f_n)) \neq f_n^{2^{n-1}}(\Omega(f_n)) =$$

$$= \overline{\mathrm{Per}(f_n)} = f_n^{2^{n-1}+1}(\Omega(f_n)) = \ldots ,$$

поэтому, если M счетно, то построенное указанным выше способом отображение f_M обладает свойством

$$f_M^i(\Omega(f_M)) \neq f_M^{i+1}(\Omega(f_M)) \quad \text{для} \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Возникает вопрос, что собой представляют точки множества $\Omega(f)$, которые приводят к неинвариантности $\Omega(f)$ и его изменению при переходе к итерациям отображения f. Ответ дает теорема 6.3.2, вытекающая из [4]и [2].

Теорема 6.3.2. *Для* $f \in C^0(I,I)$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

1. $\Omega(f) \setminus \Omega(f^n) \subseteq \{\bigcup_{k\ge 0} f^{-k}(\mathrm{Per}(f))\} \setminus \mathrm{Per}(f)$*;*

2. $\Omega(f) \setminus f^n(\Omega(f)) \subseteq \overline{\bigcup_{k\ge 0} f^{-k}(\mathrm{Per}(f))}$*;*

3. $\overline{\mathrm{Per}(f)} \subseteq f^n(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f^n) \subseteq \Omega(f)$.

Существует отображение $f \in C^0(I,I)$, обладающее свойствами $\Omega(f) = \Omega(f^n)$ и $f^{n-1}(\Omega(f)) \neq f^n(\Omega(f))$ для $n = 1, 2, \ldots$. Это отображение нетрудно получить, используя отображение f_∞, представленное на рис. 6.5. Положим $\widetilde{f}_\infty(x) = \beta + 2(d_1 - b_1)$ для $x \in [d_1, d_1^1]$, $\widetilde{f}_\infty(x) = f_\infty(x)$ для $x \in I \setminus (d_1, e_2)$, а на $[d_1^1, e_2]$ доопределим $\widetilde{f}_\infty$ линейным по непрерывности.

Для отображения $\widetilde{f}_\infty$, как и для f_∞, $\overline{\mathrm{Per}(\widetilde{f}_\infty)} = \mathrm{Per}(f_\infty) \bigcup \Omega_0$. Но, в отличие от f_∞, только $\bigcup_{j=2}^{\infty} \widetilde{f}_\infty^{j}(d_1) = \bigcup_{j=0}^{\infty} \widetilde{f}_\infty^{j}(c_1) \subset \subset \Omega(\widetilde{f}_\infty)$, а $\left\{\bigcup_{i=2}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^i-1} \widetilde{f}_\infty^{j}(d_i)\right\} \cap \Omega(\widetilde{f}_\infty) = \varnothing$. Тогда

$$\widetilde{f}_\infty^{n}(\Omega(\widetilde{f}_\infty)) = \overline{\mathrm{Per}(\widetilde{f}_\infty)} \cup \left\{ \bigcup_{j=n+2}^{\infty} \widetilde{f}_\infty^{j}(c_1) \right\} \neq \widetilde{f}_\infty^{n+1}(\Omega(\widetilde{f}_\infty)) =$$

$$= \overline{\mathrm{Per}(\widetilde{f}_\infty)} \cup \left\{ \bigcup_{j=n+3}^{\infty} \widetilde{f}_\infty^{j}(c_1) \right\}.$$

В отличие от множества $\Omega(f)$, множества $\overline{\mathrm{Per}(f)}$, $C(f)$ и $\Omega^\sharp(f)$ всегда инвариантны и сохраняются для итераций отображения f. Однако все перечисленные множества при как угодно малом возмущении отображения f могут “взрываться”.

Пусть $\mathfrak{U}_\delta(f) = \{\widetilde{f} \in C^0(I,I) : \widetilde{f}(x) \in U_\delta(f(x))$ для всех $x \in I\}$.

Напомним, что динамическая система f *не допускает* Ω-*взрыв* в C^0-топологии, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\Omega(g) \subset U_\varepsilon(\Omega(f))$ для всех $g \in \mathfrak{U}_\delta(f)$ (см., например, [30]).

Для отображения, представленного на рис. 6.3, $\Omega(f) = \Omega^\sharp(f) = = C(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$ и $\Omega(f) \bigcap (a, c) = \varnothing$. Но для любого $\delta > 0$ существует отображение $g \in \mathfrak{U}_\delta(f)$, для которого $\Omega(g) = \Omega^\sharp(g) = = C(g) = \overline{\mathrm{Per}(g)} = [a, b]$.

Теорема 6.3.3.
1. $\mathcal{B}(f)$ *— замкнутое инвариантное множество.*
2. $\mathcal{B}(f) = \mathcal{B}(f^m)$.

Инвариантность $\mathcal{B}(f)$ следует из того, что $Q(x,f) = Q(f(x),f)$ и $Q(x,f) = f(Q(x,f))$, замкнутость — из того, что для любой точки $x \in I \setminus \mathcal{B}(f)$ можно выбрать $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset \subset I \setminus \mathcal{B}(f)$.

Включение $\mathcal{B}(f) \supseteq \mathcal{B}(f^m)$ следует непосредственно из того, что $Q(x,f) \supseteq Q(x,f^m)$, а включение $\mathcal{B}(f) \subseteq \mathcal{B}(f^m)$ из того, что $x \in Q(x,f^m)$, если $x \in Q(x,f)$.

В отличие от множеств $\overline{\mathrm{Per}(f)}$, $C(f)$, $\Omega^\sharp(f)$, множество $\mathcal{B}(f)$ не только инвариантно и сохраняется для итераций отображения f, но и не "взрывается".

Рассмотрим отображение $\tau : I \times C^0(I,I) \to 2^I$, где $\tau(x,f) = Q(x,f)$.

Теорема 6.3.4. *Отображение* τ *полунепрерывно сверху.*

Полунепрерывность сверху отображения τ по f означает, что для любых $x \in I$, $f \in C^0(I,I)$ и $\gamma > 0$ существует $\delta = \delta(x,\gamma,f) > 0$ такое, что $Q(x,\widetilde{f}) \subset U_\gamma(Q(x,f))$ для каждого $\widetilde{f} \in \mathfrak{U}_\delta(f)$.

Согласно определению $Q(x,f)$, существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x,\gamma,f) > 0$ такое, что $Q_{\varepsilon_0}(x,f) \subset U_\gamma(Q(x,f))$. С помощью индукции по j, учитывая непрерывность f на I, доказывается, что существует $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$ такое, что для $\widetilde{f} \in \mathfrak{U}_\delta(f)$ найдется $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(\varepsilon_0,\widetilde{f})$, $0 < \widetilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$, для которых $Q^j_{\widetilde{\varepsilon}}(x,\widetilde{f}) \subseteq Q^j_{\varepsilon_0}(x,f)$, $j = 0,1,\dots$, и, следовательно, $Q_{\widetilde{\varepsilon}}(x,\widetilde{f}) \subseteq Q_{\varepsilon_0}(x,f)$. Тогда $Q(x,\widetilde{f}) \subseteq Q_{\widetilde{\varepsilon}}(x,\widetilde{f}) \subseteq Q_{\varepsilon_0}(x,f) \subset U_\gamma(Q(x,f))$.

Аналогично доказывается полунепрерывность сверху отображения τ по x.

4. Разбиение множеств $\Omega(f)$ и $\mathcal{B}(f)$ на компоненты. Анализ множества неблуждающих точек при помощи разложения множества периодических точек — так называемое "спектральное разложение" — проведен в [9] для унимодальных отображений (гладких отображений с единственной критической точкой, переводящих границу ∂I в себя). В [16] такой анализ проведен для более широкого класса отображений — непрерывных кусочно-монотонных отображений.

"Спектральное разложение" множеств, характеризующихся возвращаемостью, целесообразно проводить, используя области слабого влияния. Отметим, что при этом наиболее законченный вид получается для "спектрального разложения" множества почти возвращающихся точек. Ниже мы рассмотрим лишь вопрос о разбиении множеств $\Omega(f)$ и $\mathcal{B}(f)$ на компоненты, не затрагивая по существу вопрос о разбиении множеств $\Omega(f^n)$ и $\mathcal{B}(f^n)$.

Введем на множествах $\Omega(f)$ и $\mathcal{B}(f)$ отношение эквивалентности: точка x *эквивалентна* точке y (обозначим $x \sim y$), если $Q(x,f) = Q(y,f)$. В соответствии с введенным отношением эквивалентности разобьем множество $\Omega(f)$ (множество $\mathcal{B}(f)$) на классы эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначим $\Omega(f)/_\sim$ (соответственно, $\mathcal{B}(f)/_\sim$).

Пусть K — произвольный элемент множества $\Omega(f)/_\sim$ (соответственно, $B \in \mathcal{B}(f)/_\sim$). Имеет смысл положить $Q(K) = Q(x,f)$, где $x \in K$ (соответственно, $Q(B) = Q(x,f)$, где $x \in B$).

Теорема 6.3.5.

1. K — замкнутое множество и $f(K) \subseteq K$;

2. B — замкнутое инвариантное множество.

Замкнутость K (или B) следует из замкнутости $\Omega(f)$ (или $\mathcal{B}(f)$) и $Q(K)$ (или $Q(B)$). Включение $f(K) \subseteq K$ (соответственно, $f(B) = B$) следует из того, что $Q(x,f) = Q(f(x),f)$, $Q(x,f) = f(Q(x,f))$ и $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$ (соответственно, $f(\mathcal{B}(f)) = \mathcal{B}(f)$).

Теорема 6.3.6. *$K \bigcap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$ (или $B \bigcap \mathrm{Per}(f) \neq \varnothing$), если и только если $Q(K) = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$ (или $Q(B) = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$), где Q_j — замкнутые непересекающиеся интервалы, циклически переставляемые отображением f.*

Доказательство необходимости очевидно. Доказательство достаточности использует результаты работы [9].

Обозначим $n(K)$ минимальный период точек множества $\mathrm{Per}(f)\bigcap K$, если $\mathrm{Per}(f)\bigcap K \neq \varnothing$; если $\mathrm{Per}(f)\bigcap K = \varnothing$, положим $n(K) = \infty$.

Для элементов множества $\Omega(f)/_{\sim}$ введем отношение частичного порядка: $K_1 \in \Omega(f)/_{\sim}$ предшествует $K_2 \in \Omega(f)/_{\sim}$ (обозначим $K_1 \rhd K_2$), если $Q(K_1) \supset Q(K_2)$.

Построим граф Γ, соответствующий введенному порядку.

Теорема 6.3.7.

1. *Граф Γ — ацикличный и может или быть, или не быть "деревом".*
2. *Граф Γ может иметь конечное, счетное число или континуум как максимальных, так и минимальных элементов.*
3. *Максимальная цепь графа Γ может иметь конечное, счетное число или континуум элементов.*
4. *Для каждого максимального элемента K графа Γ $n(K) \leq 2$, для каждого элемента K, не являющегося минимальным, $n(K) < \infty$.*
5. *Если $K_1 \rhd K_2$, то $n(K_1) \leq 2 \cdot n(K_2)$ и, если $n(K_2) < \infty$, то $2 \cdot n(K_2) \,\vdots\, n(K_1)$.*

Ацикличность графа Γ следует из определения, (1)–(3) иллюстрируются примерами. Доказательство (4) использует результаты [9]. Доказательство (5) опирается на теорему 6.3.6.

Очевидно, если $\mathcal{A}_x \bigcap K \neq \varnothing$, то $\mathcal{A}_x \subseteq K$. Каждая компонента $B \in \mathcal{B}(f)/_{\sim}$ содержит одну и только одну компоненту $K \in \Omega(f)/_{\sim}$, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.8. *Существует взаимно однозначное отображение $\varphi : \Omega(f)/_{\sim} \to \mathcal{B}(f)/_{\sim}$ такое, что $\varphi(K) = B$, где $K \in \Omega(f)/_{\sim}$, $B \in \mathcal{B}(f)/_{\sim}$ и $K \subseteq B$.*

Из теоремы 6.3.8 следует, что для множеств $B \in \mathcal{B}(f)/_{\sim}$ справедлива теорема, аналогичная теореме 6.3.7.

Отметим, что существуют отображения $f \in C^0(I, I)$, у которых есть компоненты $\Omega(f)/_{\sim}$, распадающиеся на инвариантные замкнутые непересекающиеся множества (см., например, рис. 6.3), и таких множеств может быть конечное, счетное число или континуум.

Будем говорить, что множество $\mathcal{B}(f)$ (соответственно, $\Omega(f)$) *не допускает "взрыв"*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, f) > 0$ такое, что для каждого $\widetilde{f} \in \mathfrak{U}_\delta(f)$ и любой компоненты $\widetilde{B} \in \mathcal{B}(\widetilde{f})/_\sim$ найдется такая компонента $B \in \mathcal{B}(f)/_\sim$, что $\widetilde{B} \subset U_\varepsilon(B)$ (соответственно, для любой компоненты $\widetilde{K} \in \Omega(\widetilde{f})/_\sim$ найдется такая компонента $K \in \Omega(f)/_\sim$, что $\widetilde{K} \subset U_\varepsilon(K)$).

Теорема 6.3.9.

1. *Множество* $\mathcal{B}(f)$ *не допускает "взрыв".*
2. *Множество* $\Omega(f)$ *не допускает "взрыв", если и только если* $\Omega(f) = \mathcal{B}(f)$.

Доказательство пункта 1 опирается на теорему 6.3.3. Доказательство пункта 2 использует пункт 1 и теорему 6.3.8.

Теорема 6.3.9 показывает также, что если $K \in \Omega(f)/_\sim$ допускает "взрыв", то этот "взрыв" не "шире", чем $B = \varphi(K)$.

В теореме 6.3.4 полунепрерывность по f отображения $\tau(x, f)$ можно несколько уточнить. Имеет место *покомпонентная* полунепрерывность сверху: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была компонента $B^g \in \mathcal{B}(g)/_\sim$, где $g \in \mathfrak{U}_\delta(f)$, найдется компонента $B^f \in \mathcal{B}(f)/_\sim$ такая, что $B^g \subset U_\varepsilon(B^f)$.

Рассмотрим более детально простейшую ситуацию, когда $\mathrm{Per}(f)$ — замкнутое множество. В этом случае $\mathcal{B}(f) = \mathrm{Per}(f)$ [3].

Нетрудно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.10. *Если* $\mathrm{Per}(f)$ *— замкнутое, нигде не плотное множество, то каждая компонента* $\mathcal{B}(f)/_\sim$ *состоит из одного цикла.*

Если $\mathrm{Per}(f)$ — замкнутое множество, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $m > 0$ такое, что диаметр каждого ω-предельного множества для отображения f^{2^m} меньше ε [19]. Следующая теорема обобщает это утверждение и теорему 2 из [26].

Теорема 6.3.11. *Если* $\mathrm{Per}(f)$ *— замкнутое нигде не плотное на* I *множество, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$

и $m > 0$ *такие, что каково бы ни было* $g \in \mathfrak{U}_\delta(f)$, *диаметр каждой компоненты* $\mathcal{B}(g^{2^m})/_\sim$ *меньше* ε.

Эта теорема говорит о том, что траектории каждого отображения g, C^0-близкого к f, при $m \to \infty$ будут ε-мало отличаться от одного из циклов периода $1, 2, \ldots, 2^m$ отображения g.

Отображение $f_\infty \in C^0(I, I)$, представленное на рис. 6.5, имеет только циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, но $\mathrm{Per}(f_\infty)$ — незамкнутое множество и $\mathcal{B}(f_\infty) \neq \overline{\mathrm{Per}(f_\infty)}$. Возникает вопрос, существуют ли в $C^r(I, I)$, $r \geq 1$, отображения f, обладающие таким же свойством. По-видимому, для любого гладкого отображения f, имеющего только циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, всегда $\mathcal{B}(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$.

6.4. Классификация одномерных отображений*

Рассматриваются динамические системы, задаваемые непрерывными отображениями $f \in C^0(I, I)$ замкнутого интервала I. Приведена классификация динамических систем, содержащих периодические точки только с периодами 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Такие системы называются системами типа 2^∞. Они образуют в пространстве $C^0(I, I)$ нигде не плотное множество.

Известно, что динамическая система на I простая, если периоды ее циклов ограничены. В этом случае существует число $m \geq 0$ (зависящее от f) такое, что период любой периодической точки равен 2^i, $0 \leq i \leq m$; любая траектория динамической системы является периодической или асимптотически периодической, а это означает, что ее ω-предельное множество является циклом. Топологическая энтропия $h(f)$ при этом равна нулю.

*Сокращенный перевод текста доклада на Европейской конференции по теории итераций (ECIT-87), опубликованного в *A.N. Sharkovsky.* Classification of One-dimensional Dynamical Systems // In: European Conference on Iteration Theory (ECIT-87), World Scientific, Singapore, 1989, p. 42–55.

Если отображение f содержит периодическую точку периода, не равного степени двойки, то динамическая система, как известно [45]–[47],[51, 53], является сложной. В частности, существуют циклы сколь угодно больших периодов, гомоклинические траектории, хаос согласно Ли–Йорку, $h(f) > 0$, и так далее.

Можно отметить еще несколько свойств, характеризующих сложность динамической системы. Асимптотическое поведение траекторий описывается ω-предельными множествами, и разнообразие ω-предельных множеств свидетельствует о разнообразии в поведении самих траекторий.

В теории динамических систем используется такое понятие, как локально максимальное ω-предельное множество (или базисное множество) (ω-предельное множество F называется локально максимальным множеством (л.м.м.), если существует окрестность, которая не содержит больших ω-предельных множеств $F' \supset F$). Если отображение $f \in C^0(I, I)$ содержит цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, тогда оно имеет максимальное (не содержащееся в большем множестве) ω-предельное множество F_{max}, содержащее циклы. Обозначим одно из них как F_{max}. F_{max} является канторовым множеством или состоит из нескольких интервалов. Пусть $\mathfrak{F}$ — это цепь, состоящая из вложенных друг в друга л.м.м., которые содержаться в F_{max} и содержат F_{min} (каждое из этих л.м.м. является канторовым множеством). Предположим, что цепь полная, т. е., не содержится в большей цепи. Тогда $\mathfrak{F}$, будучи линейно упорядоченным множеством, подобно множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$: для произвольных $F', F'' \in \mathfrak{F}$, существует $F''' \in \mathfrak{F}$, лежащее между ними (если $F' \subset F''$, то $F' \subset F''' \subset F''$) [47, 51].

Пусть л.м.м. F — собственное подмножество F_{max}. Тогда всегда существует счетное число $F_1, \dots, F_i, \dots$ таких, что $F_{i'} \cap \cap F_{i''} = F$ для любых $i', i'' \geq 1$, $i' \neq i''$. Если F $(\subseteq F_{max})$ — л.м.м., отличное от минимального, тогда всегда существует счетное число л.м.м. $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$, удовлетворяющих условию $F_i \subset F$ и $F_{i'} \not\subset F_{i''}$ для любых i, i', i'' $(i' \neq i'')$ [47, 51] (рис. 6.7).

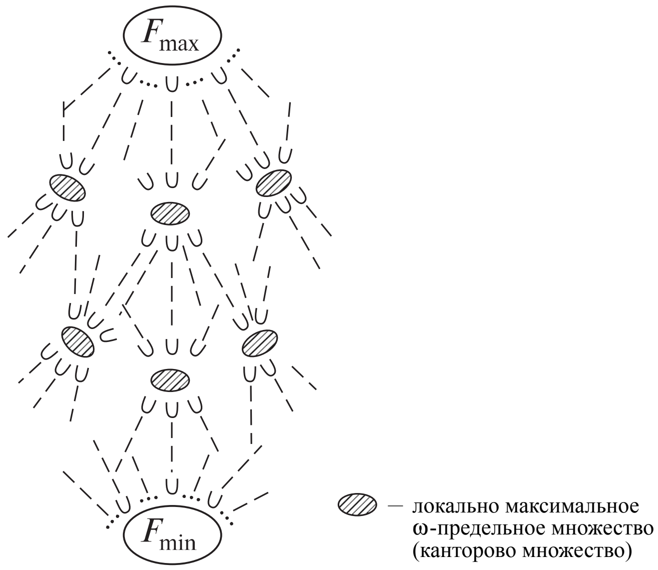

Рис. 6.7

Укажем еще одно свойство. Если отображение содержит цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, то оно имеет континуум минимальных множеств, отличных от циклов (и следовательно, каждое из них есть канторово множество). Утверждение может быть усилено: любое л.м.м., отличное от цикла, содержит континуум минимальных канторовых множеств.

Все приведенное выше, конечно, справедливо и по отношению к семейству $f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1 - x)$, $0 \leq \lambda \leq 4$, $I = [0, 1]$. Для $\lambda < \lambda^* \approx 3,57$ соответствующие динамические системы простые. Они содержат только циклы периодов $1, 2, \dots, 2^m$, $m = m(\lambda) < \infty$, и каждая траектория — периодическая или асимптотически периодическая. При $\lambda > \lambda^*$ f_λ содержит циклы периодов $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Следовательно, динамические системы достаточно сложны, как было отмечено выше. Существует единственное $\lambda = \lambda^*$, когда динамическая система содержит только циклы периодов 2^i, $i = 0, 1, 2, \dots$, т. е., мы имеем систему типа 2^∞. Эта динамическая система имеет минимальное канторово множество F (квазиаттрактор), которое притягивает все точки из $[0,1]$, за исключением счетного количества. Траектории на F почти периодические в следующем смысле. Для любого $x \in F$ и любой его окрестности U существует почти период $m = m(U)$ с $f^{mi}(x) \in U$ для всех $i = 0,1,2,\ldots$. Числа $1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots$ — почти периоды для точек из F. Все траектории динамической системы, порожденной f_{λ^*}, почти периодические или асимптотически почти периодические, за исключением счетного числа периодических и асимптотически периодических траекторий.

Существуют ли динамические системы в $C^r(I,I)$, $r \geq 0$, имеющие траектории, отличные от (асимптотически) периодических и (асимптотически) почти периодических? Положительный ответ сейчас известен. Ниже мы рассмотрим метод построения таких систем.

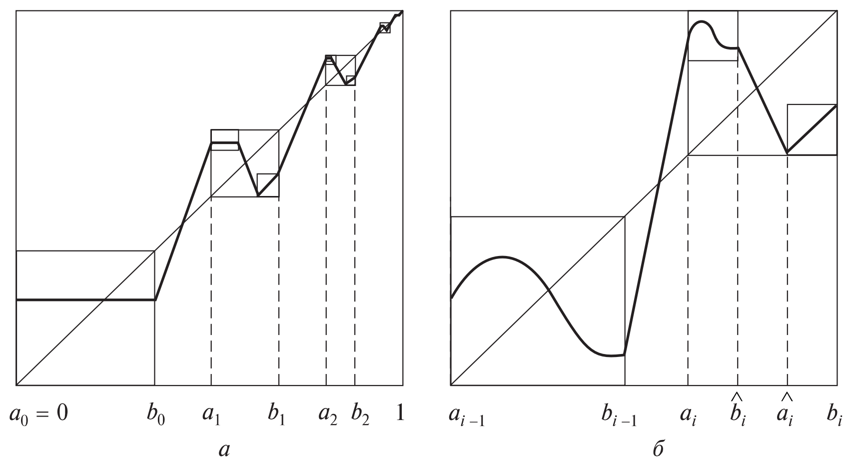

Рис. 6.8

Известно [45], что существуют отображения типа 2^∞ с более простым асимптотическим поведением, чем для f_{λ^*}. Каждая траектория для таких отображений является периодической или асимптотически периодической. Конкретный пример показан на рис. 6.8, *а* (интервалы $[a_i,b_i]$ сходятся к 1, $\hat a_i, \hat b_i, \in (a_i,b_i)$, $f^2|_{[a_i,\hat b_i]}$ и $f^2|_{[\hat a_i,b_i]}$ топологически сопряжены с $f^2|_{[a_{i-1},b_{i-1}]}$ (рис. 6.8, *б*), отображение линейно на каждом интервале, дополнительном к $[a_0, b_0] \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}([a_i, \hat{b}_i] \cup [\hat{a}_i, b_i]))$. Если $f[a_0, b_0] = \mathrm{const}$, то каждая траектория "приклеивается" к периодической, и, следовательно, состоит из конечного числа точек.

В чем еще различие динамических систем, порожденных f_{λ^*} и отображением на рис. 6.8? Они различаются, например, структурой множества периодических точек $\mathrm{Per}\,(f)$. Это множество замкнуто для отображения на рис. 6.8, но не замкнуто для f_{λ^*} (последнее представимо в виде как объединения замкнутых, так и пересечения открытых множеств). Условие $\mathrm{Per}\,(f) = \overline{\mathrm{Per}\,(f)}$ является необходимым и достаточным для того, чтобы ω-предельное множество любой точки $x \in I$ было циклом. Отображения типа 2^{∞} с $\mathrm{Per}\,(f) = \overline{\mathrm{Per}\,(f)}$ имеются только в $C^0(I, I)$. Для C^1-отображения типа 2^{∞} (такого, как f_{λ^*}) множество $\mathrm{Per}\,(f)$ обязательно не замкнуто [40].

Отображения типа 2^{∞} могут содержать не только асимптотически периодические или асимптотически почти периодические траектории. В теории динамических систем рассматриваются траектории, обладающие различными типами возвращаемости точек, такими как периодичность, рекуррентность, устойчивость по Пуассону, неблуждаемость и другие. Классификация, которую мы будем рассматривать, основана как раз на различиях в свойствах возвращаемости точек траекторий. Результаты, изложенные ниже, получены совместно с В.В. Федоренко.

Ниже мы используем следующие обозначения.

$\omega(x, f)$ — множество ω-предельных точек траектории отображения f, проходящей через точку x;

$A_p(f) = \{x : \forall U \ni x\ \exists m$ такое, что $f^m(x) \in U\}$ — множество почти периодических точек отображения f (U — открытое множество);

$\mathrm{Rec}\,(f) = \{x : \omega(x, f)$ — минимальное множество$\}$ — множество рекуррентных точек;

$\mathrm{Pois}\,(f) = \{x : x \in \omega(x, f)\}$ — множество устойчивых по Пуассону точек;

$\omega(f) = \bigcup_x \omega(x, f)$ — множество всех ω-предельных точек для отображения f;

$\Omega(f) = \{x : \forall U \ni x\ \exists m$ такое, что $f^m U \cap U \neq \varnothing\}$ — множество неблуждающих точек;

$\mathrm{C}(f) = \sup\{A : A = \overline{A} = fA$ и $\Omega(f|_A) = A\}$ — центр динамической системы, порожденной отображением f. Если фазовое пространство динамической системы — компакт, то $\mathrm{C}(f) = \overline{\mathrm{Pois}\,(f)}$; в случае интервала I имеем $\mathrm{C}(f) = \Omega(f|_{\Omega(f)}) = \overline{\mathrm{Per}\,(f)}$;

$\mathcal{B}(f) = \{x : \forall V \ni x\ (V = \overline{V} = fV)$ и $\forall U \subset V\ (U \neq V,\ U$ открыто в $V)\ f\overline{U} \not\subset U\}$ — множество почти возвращающихся точек (или, согласно Конли, цепно-рекуррентных точек [31]).

Множества $\Omega(f)$, $\mathrm{C}(f)$, $\mathcal{B}(f)$ всегда замкнуты (для $f \in C^0(X, X)$, если X — компакт); множество $\omega(f)$ замкнуто для интервала; $\mathrm{Per}\,(f)$ — F_σ-множество; $\mathrm{Pois}\,(f)$ — G_δ-множество; $A_p(f)$ и $\mathrm{Rec}\,(f)$ — $F_{\sigma\delta}$-множества.

Для любого $f \in C^0(I, I)$ имеем

$$\mathrm{Per}\,(f) \subseteq A_p(f) \subseteq \mathrm{Rec}\,(f) \subseteq \mathrm{Pois}\,(f) \subseteq \mathrm{C}(f) \subseteq \subseteq \omega(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq \mathcal{B}(f). \qquad (*)$$

Для отображений с периодами циклов $1, 2, \ldots, 2^m$, $m < \infty$, все множества из $(*)$ совпадают: $\mathrm{Per}\,(f) = \ldots = \mathcal{B}(f)$. Для отображений с периодами циклов $\neq 2^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) \neq \mathrm{Pois}\,(f) \neq \mathrm{C}(f)$. Переход от простых отображений к сложным сопровождается последовательным изменением равенств между множествами $\mathrm{Per}\,(f)$, $A_p(f)$, $\mathrm{Rec}\,(f)$, $\mathrm{Pois}\,(f)$ на неравенства. Равенство $\mathrm{Per}\,(f) = A_p(f)$ всегда влечет $A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$, равенство $A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$ влечет $\mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f)$; существует отображение типа 2^∞ с $\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$ и $A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f)$ (см. примеры 2 и 3 ниже). Совпадение или несовпадение множеств $\mathrm{C}(f)$, $\omega(f)$, $\Omega(f)$, $\mathcal{B}(f)$ фактически ничего не говорит о сложности динамической системы, в отличие от устойчивости или неустойчивости структуры ее траекторий; почти для всех $f \in C^0(I, I)$ отображение $f \mapsto \mathcal{B}(f)$ непрерывно (оно полунепрерывно сверху для всех

$f \in C^0(I,I)$) и если f — точка непрерывности, то $\mathrm{C}(f) = \omega(f) = \Omega(f) = \mathcal{B}(f)$. Таким образом, почти для любого отображения f из $C^0(I,I)$ имеем

$$\mathrm{Per}(f) \neq A_p(f) \neq \mathrm{Rec}(f) \neq \mathrm{Pois}(f) \neq \mathrm{C}(f) = \omega(f) = \Omega(f) = \mathcal{B}(f).$$

Однако, какова ситуация для отображений типа 2^∞? Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 [53]. $f \in C^0(I,I)$ *типа* $2^\infty \Longleftrightarrow \mathrm{Pois}\,(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$.

Этот результат был получен независимо также J. Xiang.

Предложение 2 [3, 39, 53]. *Для* $f \in C^0(I,I)$ *эквивалентны следующие утверждения.*

1. $\mathrm{Per}\,(f) = \mathcal{B}(f)$,
2. $\mathrm{Per}\,(f) = \Omega(f)$,
3. $\mathrm{Per}\,(f) = \omega(f)$,
4. $\mathrm{Per}\,(f) = \mathrm{C}(f)$,
5. $\mathrm{Per}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f)$,
6. $\mathrm{Per}\,(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$,
7. $\mathrm{Per}\,(f) = A_p(f)$,
8. $\mathrm{Per}\,(f) = \overline{\mathrm{Per}\,(f)}$.

Предложение 3. *Для* $f \in C^0(I,I)$ *эквивалентны следующие утверждения.*

1. $A_p(f) = \mathcal{B}(f)$,
2. $\mathrm{Rec}\,(f) = \mathcal{B}(f)$,
3. $\mathrm{Pois}\,(f) = \mathcal{B}(f)$.

Примеры, приведенные ниже, показывают, что все совпадения классов отображений, определяемых равенствами типа "$\ldots = \ldots$", для множеств $\mathrm{Per}\,(f), \ldots, \mathcal{B}(f)$ исчерпываются предложениями 1–3.

Приведенное выше подытожено на рис. 6.9, на котором эквивалентные утверждения объединены в блоки, а стрелка "$\longrightarrow$" означает "влечет". Эта информация позволяет предложить разбиение пространства $C^0(I,I)$, представленное в табл. 6.1.

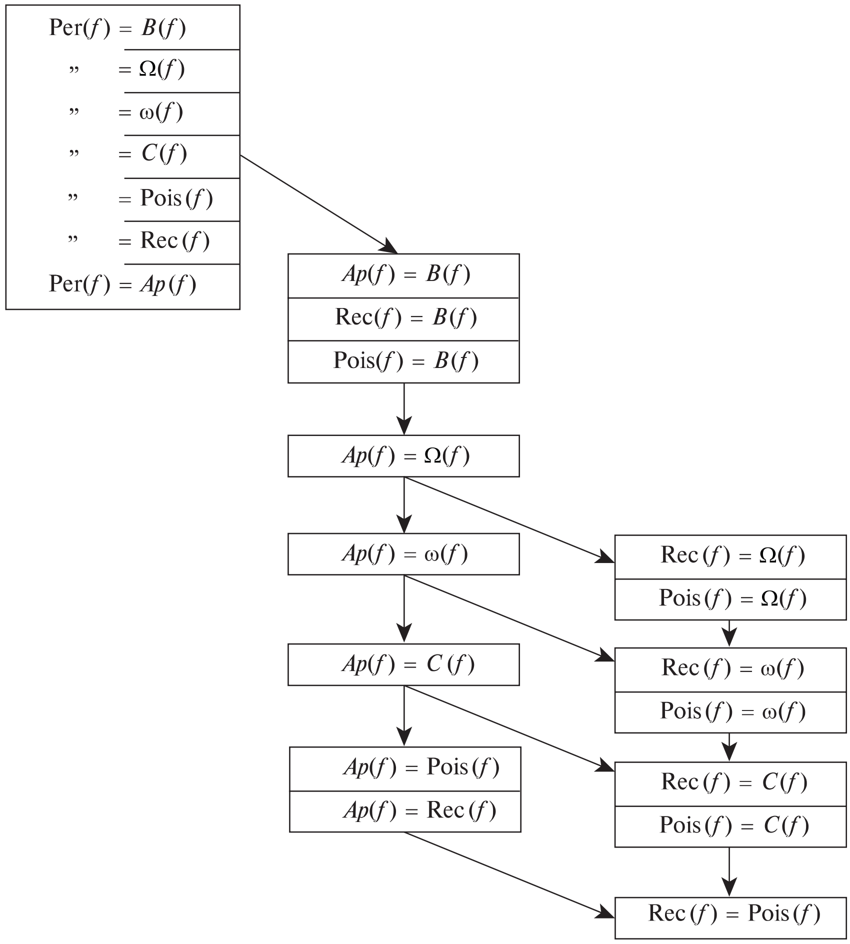

Рис. 6.9

Примеры, построенные ниже, показывают, что каждое из множеств в табл. 6.1 непустое (множество $\{f : \mathrm{Pois}\,(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f)\}$, как известно, открыто и плотно в $C^0(I, I)$). Номера соответствующих примеров приведены в табл. 6.1.

Пример 1. $\mathrm{Per}\,(f) = A_p(f)$. Вернемся к отображению, показанному на рис. 6.4. Оно было упомянуто как простейшее отображение типа 2^∞; например, если $[a_0, b_0]$ содержит только непо-

Т а б л и ц а 6.1

	Множество из $C^0(I,I)$	Номер примера
1.	$\mathrm{Per}\,(f) = A_p(f)$	1
2.	$\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) = \mathcal{B}(f)$	2
3.	$A_p(f) = \Omega(f) \neq \mathcal{B}(f)$	5
4.	$A_p(f) = \omega(f) \neq \Omega(f)$	6
5.	$A_p(f) = \mathrm{C}(f) \neq \omega(f)$	8
6.	$A_p(f) = \mathrm{Pois}\,(f) \neq \mathrm{C}(f)$	7
7.	$A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \Omega(f)$	3
8.	$A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \omega(f) \neq \Omega(f)$	4
9.	$A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{C}(f) \neq \omega(f)$	3, 8
10.	$A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f) \neq \mathrm{C}(f)$	3, 7
11.	$\mathrm{Rec}\,(f) \neq \mathrm{Pois}\,(f)$	

движные точки (т. е. $\mathrm{Per}\,(f) = \mathrm{Fix}\,(f)$ на $[a_0, b_0]$), то $\mathrm{Per}\,(f) = \overline{\mathrm{Per}\,(f)}$. В этом случае легко можно получить

$$\mathrm{Per}\,(f) = A_p(f) = \ldots = \mathcal{B}(f).$$

Пример 2. $\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f)$. Таким свойством обладает отображение $f_{\lambda^*} : x \mapsto \lambda^* x(1-x)$, $\lambda^* \approx 3,57$. При этом $\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f) = \ldots = \mathcal{B}(f)$.

Перед тем, как продолжить построение примеров, заметим, что так называемая ренормализационная техника, применимая во многих случаях, оказывается особенно полезной в нашем примере. Методы построения соответствующих отображений основаны на подобии отображения f и его итераций f^2 или f^{2^m} на некоторых подынтервалах. Это используется и для анализа унимодальных отображений, таких как f_{λ^*}. При построении примера 1 мы использовали подобие f^2 на подынтервале $[a_{i+1}, b_{i+1}]$ и f на интервале $[a_i, b_i]$.

Не имея возможности привести здесь достаточно полное описание примеров (подробнее см. в [54]), в дальнейшем ограничимся графическим представлением отображений и краткой характеристикой их свойств.

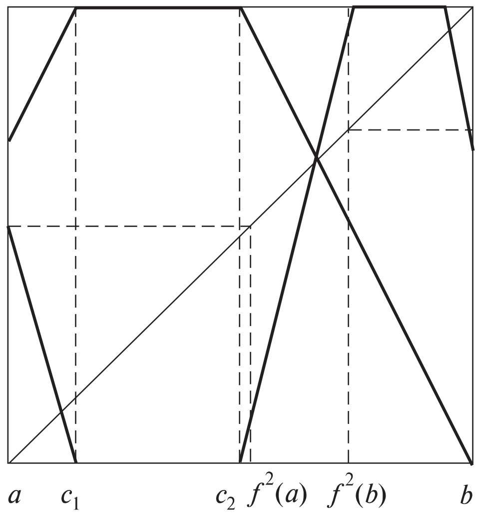

Рис. 6.10

Пример 3. $A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f)$. Этот пример отображения типа 2^∞ отличается от предыдущего следующим. Вместо единственной критической точки ($x = 1/2$ — точка максимума для f_{λ^*}) теперь у нас должен быть целый интервал $[c_1, c_2]$ с $f(x) = \mathrm{const}$ на нем (рис. 6.10). Вместе с тем, $f\,|_{[a,b]}$ должно быть сопряжено с $f^2|_{[a,f^2(a)]}$ (и $f^2|_{[f^2(b),b]}$) и точки a, b, c_1, c_2 должны принадлежать минимальному канторову множеству. Легко видеть, что в этом случае точки a, b являются почти периодическими, точки c_1, c_2 рекуррентные, но не почти периодические. Точки из интервала (c_1, c_2) не принадлежат $\Omega(f)$, но принадлежат множеству $\mathcal{B}(f)$. Следовательно, для этого отображения имеем

$$\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f) = \ldots = \Omega(f) \neq \mathcal{B}(f).$$

Пример 4. $\omega(f) \neq \Omega(f)$ и $A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f)$.

Чтобы получить такое отображение, достаточно лишь немного усложнить отображение в примере 3, а именно: задать на интервале $[c_1', c_2'] \subseteq [c_1, c_2]$ функцию с горбиком (см. рис. 6.11) и затем положить $f(x) = a$ для $x \in [b, b']$, где $b' = max_{[a,b]}f(x)$ и $f(x) > a$ for $x > b'$.

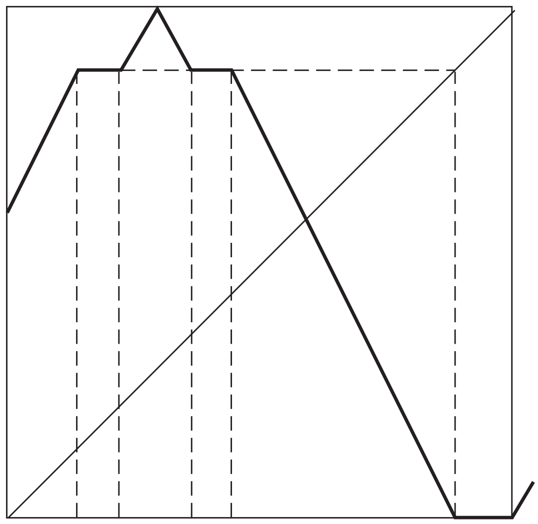

Рис. 6.11

Построенное так отображение имеет тип 2^∞ (на интервале $[a, b' + \xi]$, для малых ξ, например). Точка b' является неблуждающей (для любого $\delta > 0$ существует m с $f^m[b', b' + \delta] \supset$ $\supset [c_1, c_2]$ и, соответственно, $f^{m+1}[b', b' + \delta] \cap [b', b' + \delta] = \{b'\}$). В то же время точка b' не является ω-предельной ни для какой траектории ($\omega(f) \subset [a, b]$, множество ω-предельных точек совпадает с таковым для отображения из примера 3). Поэтому, в этом случае имеем $\mathrm{Per}\,(f) \neq A_p(f) \neq \mathrm{Rec}\,(f) = \mathrm{Pois}\,(f) =$ $= \mathrm{C}(f) = \omega(f) \neq \Omega(f) \neq \mathcal{B}(f)$.

Примеры 5–8 основаны на идее, предложенной автором в его диссертации “Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем” и использованной позднее в ряде работ (в частности, в [31]).

Пример 5. $\Omega(f) \neq \mathcal{B}(f)$ и $A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$. Пусть $a_n =$ $= 1 - 1/3^n$ и $b_n = a_n + 1/3^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Введем функцию $f_0(x)$, которая является линейной на отрезках $[a_n, b_n]$, $[b_n, a_{n+1}]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и равна $x - 1 + 5/3^{n+1}$ для $x \in [a, b]$ (рис. 6.12).

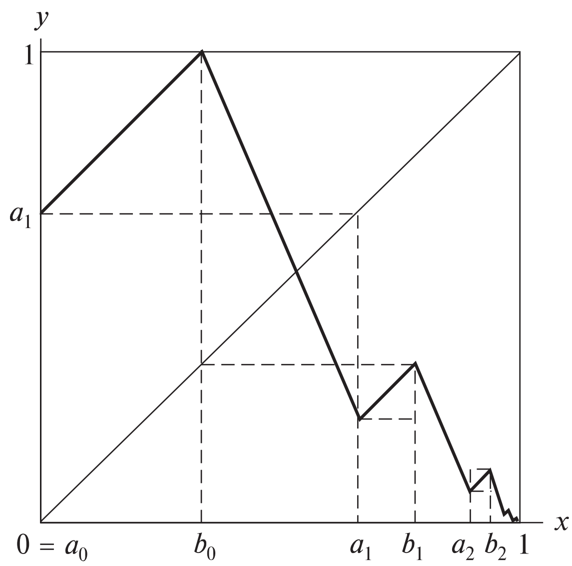

Рис. 6.12

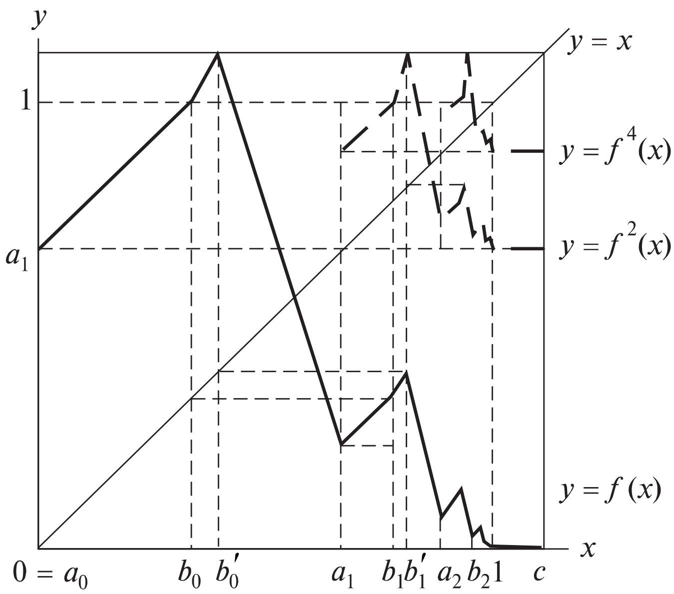

Рис. 6.13

Отображения $f|_{[0,1]}$ и $f_0^2|_{[a_1,1]}$ топологически сопряжены (посредством гомоморфизма $h : x \mapsto (x+2)/3$). Следовательно, f_0 имеет тип 2^∞. В этом примере $B(f_0) = A_p(f_0) = \mathrm{Per}\,(f_0) \cup K$, где K — стандартное канторово множество.

Рассмотрим теперь отображение f_1, которое является модифицированным вариантом отображения f_0 (рис. 6.13). Здесь $f_1(x) = f_0(x)$ при $x \in \cup_{i=0}^{\infty}[a_n, b_n]$, c — произвольная константа и $f_1(x) = 0$ для $x > 1$. Значения $f_1(x)$ в точках $b'_n \in [b_n, a_{n+1}]$ и сами точки должны удовлетворять условию $f_1^{2^n}(b'_n) = c$. Множество $B(f_1)$ содержит канторово множество K и интервалы-прообразы точки a_0, левыми концами которых являются правосторонние точки множества K. Следовательно, $B(f_1) \neq \Omega(f_1)$ и имеем $\mathrm{Per}\,(f_1) \neq A_p(f_1) = \mathrm{Rec}\,(f_1) = \ldots = \Omega(f_1) \neq B(f_1)$.

Пример 6. $\omega(f) \neq \Omega(f)$ и $A_p(f) = \mathrm{Rec}\,(f)$. Пусть $f_2 = f_1|_{[0,c]}$ и $f_2(x) = x - c$ для $x > c$. На отрезке $[0, c)$ отображение f_2 имеет такие же свойства, как и f_1. По сравнению с f_1 существует такое различие: точка c принадлежит $\Omega(f_2) \setminus \omega(f_2)$. В этом случае $\mathrm{Per}\,(f_2) \neq A_p(f_2) = \mathrm{Rec}\,(f_2) = \ldots = \omega(f_2) \neq \Omega(f_2) \neq B(f_2)$.

Пример 7. $\mathrm{Pois}(f) \neq \mathrm{C}(f)$. Пусть $f_3 = f_2\,|_{[a_n, b'_n]}$ и $f(x) = 1 - x$ для $x > 1$. Выберем последовательность точек $a'_n \in [b'_n, a_{n+1}]$, $n = 0, 1, \ldots$, и значений $f_3(x)$ в точках a'_n, которые удовлетворяют следующим условиям: $f_3(c) = a'_0$ и $f_3^{2^n}(a'_n) = a'_{n+1}$. Выберем другие три последовательности a^*_n, b^*_n, d_n, $n = 0, 1, 2\ldots$, удовлетворяющие $b'_n < b^*_n < d_n < a^*_{n+1} < a'_{n+1}$ для любого n. Выберем значения функции $f_3(x)$ в точках последовательностей так, чтобы выполнялось следующее:

1) точки a^*_n, b^*_n, d_n принадлежат тому же циклу периода $2n{+}2$;

2) $f_3^{2^n}(b^*_{n+1}) = b'_n + (b^*_n - b'_n)/2$ (рис. 6.14). Тогда точка c является предельной для точек циклов, содержащих a^*_n. Однако ω-предельное множество точки c находится по левую сторону от точки 1. Следовательно, $c \in C(f_3) \setminus \mathrm{Pois}\,(f_3)$ и $\mathrm{Per}\,(f_3) \neq A_p(f_3) = \mathrm{Rec}\,(f_3) = \mathrm{Pois}\,(f_3) \neq C(f_3) = \omega(f_3) = \Omega(f_3) \neq B(f_3)$.

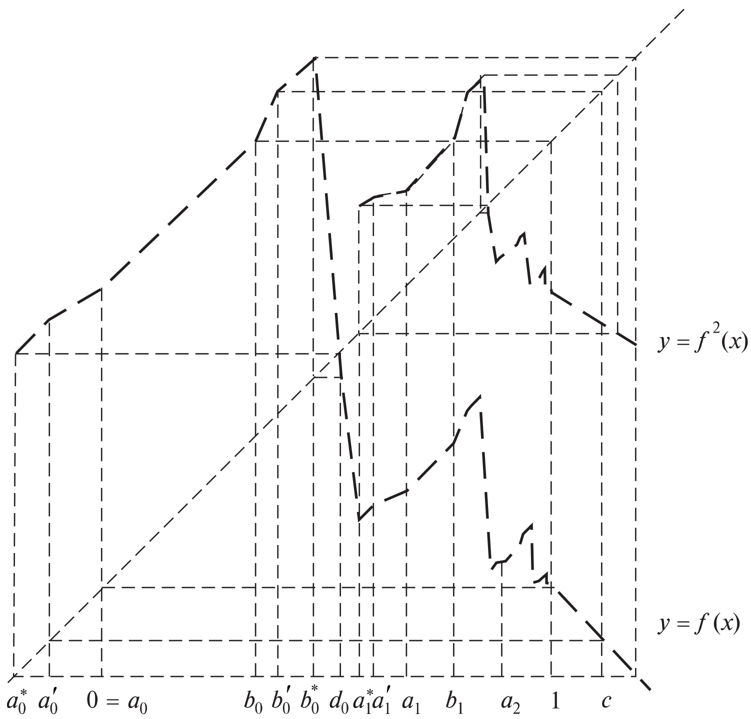

Рис. 6.14

Пример 8. $C(f) \neq \omega(f)$. Обозначим через e_n минимальное значение цикла, содержащего a_n^*, $n \geq 1$, из множества f_3. Пусть $f_4(x) = f_3(x)$ для $x > f_3(c)$ и $f_4(e_n) = f_3(e_{n+1})$; $f_4(x)$ — линейная функция на каждом интервале $[e_n, e_{n+1}]$. Тогда $f_4(c) \in \in \omega(f_4) \setminus C(f_4)$ и $\mathrm{Per}\,(f_4) \neq A_p(f_4) = \mathrm{Rec}\,(f_4) = \ldots = C(f_4) \neq \neq \omega(f_4) = \Omega(f_4) \neq B(f_4)$.

Классификация, которую мы рассматриваем, — достаточно удачная, если исходить из следующих соображений. В теории динамических систем, наряду со свойством возвращаемости, исследуют и много других свойств систем типа 2^∞, не связанных, по крайней мере, явно с возвращаемостью траекторий. Оказывается, что и эти свойства достаточно хорошо вписываются в предлагаемую классификацию, о чем свидетельствует рис. 6.15.

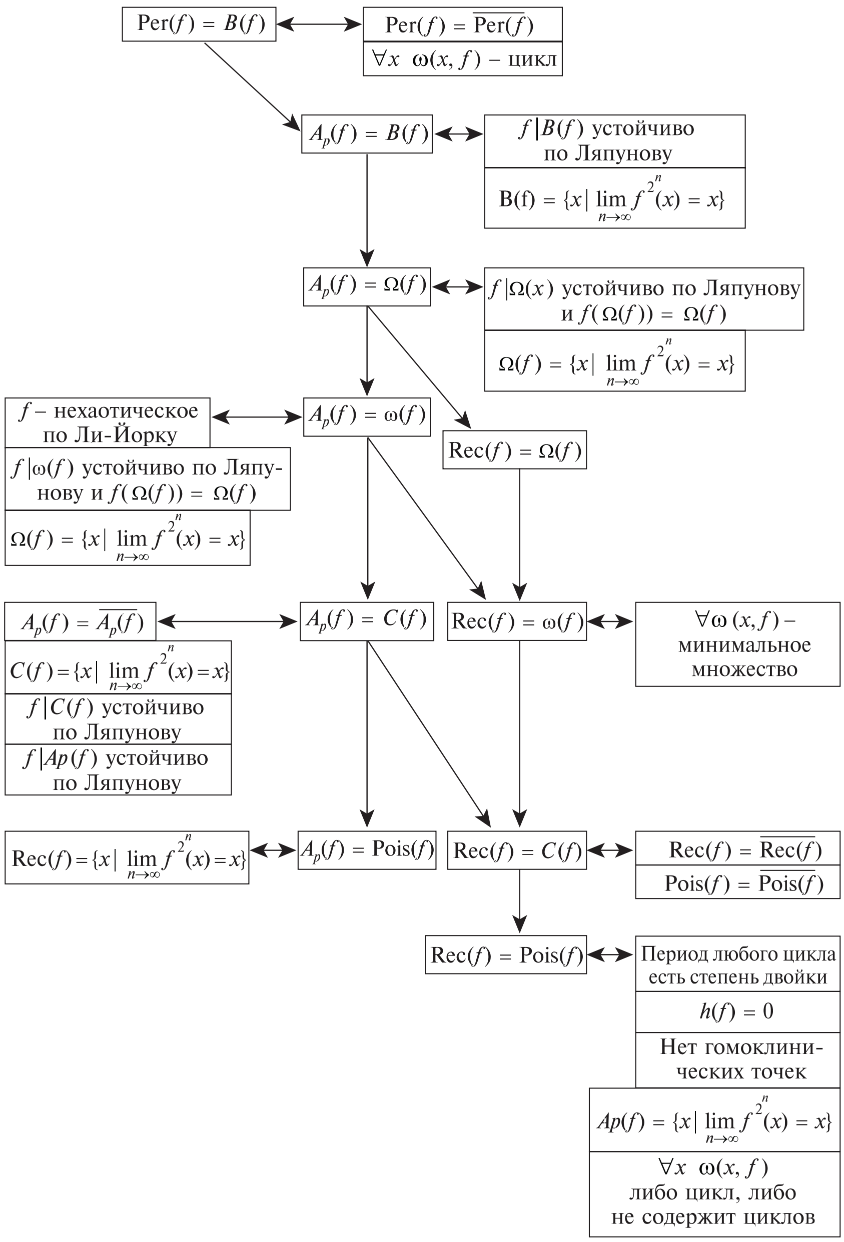
$\mathrm{Per}(f) = B(f)$
$\mathrm{Per}(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$
$\forall x\ \omega(x, f)$ – цикл
$A_p(f) = B(f)$
$f|B(f)$ устойчиво по Ляпунову
$\mathrm{B(f)} = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
$A_p(f) = \Omega(f)$
$f|\Omega(x)$ устойчиво по Ляпунову и $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$
$\Omega(f) = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
f – нехаотическое по Ли-Йорку
$A_p(f) = \omega(f)$
$\mathrm{Rec}(f) = \Omega(f)$
$f|\omega(f)$ устойчиво по Ляпунову и $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$
$\Omega(f) = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
$A_p(f) = \overline{A_p(f)}$
$A_p(f) = C(f)$
$\mathrm{Rec}(f) = \omega(f)$
$\forall\omega(x, f)$ – минимальное множество
$C(f) = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
$f|C(f)$ устойчиво по Ляпунову
$f|Ap(f)$ устойчиво по Ляпунову
$\mathrm{Rec}(f) = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
$A_p(f) = \mathrm{Pois}(f)$
$\mathrm{Rec}(f) = C(f)$
$\mathrm{Rec}(f) = \overline{\mathrm{Rec}(f)}$
$\mathrm{Pois}(f) = \overline{\mathrm{Pois}(f)}$
$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Pois}(f)$
Период любого цикла есть степень двойки
$h(f) = 0$
Нет гомоклинических точек
$Ap(f) = \{x|\lim_{n\to\infty} f^{2^n}(x) = x\}$
$\forall x\ \omega(x, f)$ либо цикл, либо не содержит циклов

Рис. 6.15

Глава 7

σ-Аттракторы траекторий и их бассейны

А.Г. Сивак

Рассмотрим динамическую систему, заданную итерациями непрерывного отображения компактного метрического пространства X в себя: для отображения $f : X \to X$ каждая точка $x \in X$ порождает *траекторию* $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ под действием итераций f. Множество предельных точек траектории называют *ω-предельным множеством* (в первой части книги для него используется обозначение $\mathcal{A}_x$, поскольку это множество является аттрактором для траектории, но часто его обозначают $\omega(x)$, или $\omega(x, f)$, когда нужно указать связь с отображением); для рассматриваемых здесь отображений это множество не пусто, замкнуто и строго инвариантно (т.е. $f(\omega(x)) = \omega(x)$).

В работе [44] показано, что динамика непрерывного отображения на ω-предельном множестве демонстрирует *свойство несжимаемости.*

(ω) *Если U является истинным подмножеством ω-предельного множества, относительно открытым в нем, то замыкание $f(U)$ не может полностью содержаться в U.*

Это свойство указывает на связь между топологической структурой ω-предельного множества непрерывного отображения и динамикой на нем. Например, имеет место следующее утверждение, которое также доказано в [44].

(ω') *Никакая изолированная точка бесконечного ω-предельного множества не может быть периодической; если же ω-предельное множество конечно, то это — цикл.*

В этой главе мы исследуем структуру и свойства так называемых *σ-предельных множеств*, или *σ-аттракторов* отдельных траекторий непрерывных отображений $f : X \to X$. Определение следующее (см. [8, 11]): для траектории точки $x \in X$ ее σ-предельное множество определяется как наименьшее замкнутое множество $F \subset X$ такое, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_U(f^i(x)) = 1$$

для любого открытого $U \supset F$, где χ_U — индикатор U. В компактном пространстве σ-предельное множество любой траектории является непустым, замкнутым и инвариантным подмножеством соответствующего ω-предельного множества [33]. По аналогии с ω-предельными множествами σ-предельное множество обозначим $\sigma(x)$ (или $\sigma(x, f)$, если нужно указать на связь с f).

В теории динамических систем и эргодической теории важную роль играют инвариантные меры. Существование конечных инвариантных мер для непрерывных потоков и каскадов (а значит, и для рассматриваемых здесь динамических систем) на метрических пространствах было доказано Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [11]. Носители конечных инвариантных мер определенным образом связаны с динамикой траекторий: оказывается, что носители всех таких мер содержатся в минимальном центре притяжения системы [33]. В частности, это касается так называемых мер Боуэна–Синая–Рюэля, возникающих естественным образом в задачах статистического предсказания поведения системы: носитель такой меры является *аттрактором* для множества точек, имеющего ненулевую меру Лебега (которая задана в пространстве такой системы). Поэтому было бы целесообразно иметь некоторую дополнительную информацию о допустимой топологической структуре такого аттрактора.

В связи с этим мы сформулируем некоторые общие свойства непрерывных отображений на σ-предельных множествах и укажем необходимые ограничения на топологическую структуру таких множеств, вытекающие из непрерывности.

7.1. Динамика на σ-аттракторах

Точку, принадлежащую своему σ-предельному множеству, будем называть *σ-рекуррентной.* Динамика непрерывного отображения на σ-предельных множествах характеризуется следующим свойством.

(σ) *В любом σ-предельном множестве плотны σ-рекуррентные точки.*

Наличие этого свойства у σ-предельных множеств можно доказать аналогично тому, как в работе [11] доказывается соответствующее утверждение для минимального центра притяжения всей системы (непосредственно доказательство свойства (σ) приведено в [22]). С другой стороны, свойство (σ) может быть выведено из более общих результатов. Так, известно, что каждая эргодическая мера порождается ее генерирующими точками, т.е. точками, для которых средние точечных масс вдоль орбиты сходятся к этой мере в топологии слабой сходимости (см., например, [7]). Затем можно использовать тот факт, что любая инвариантная мера есть интегральное среднее всех эргодических мер (напомним здесь, что эргодические меры являются экстремальными точками во множестве всех инвариантных мер).

Из свойства (σ) следует, что минимальные центры притяжения траекторий непрерывных отображений могут распадаться на меньшие инвариантные подмножества, которые можно рассматривать как независимые блоки, связанные некоторой внешней траекторией. Мы используем это позже при доказательстве того, что любое нигде не плотное компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ является σ-предельным множеством траектории некоторого непрерывного отображения пространства $\mathbb{R}^n$ в себя.

Укажем несколько простых следствий свойств (σ) и (ω), характеризующих связь между динамикой и топологической структурой σ-предельных множеств непрерывных отображений.

Предложение 1 [25]. *Для непрерывных отображений компактного метрического пространства в себя выполняются следующие свойства*:

(A) *если σ-предельное множество имеет изолированную точку, то эта точка является периодической*;

(B) *если ω-предельное множество траектории бесконечно, то соответствующее σ-предельное множество содержится во множестве предельных точек этого ω-предельного множества*;

(C) *если σ-предельное множество траектории не совпадает с его ω-предельным множеством, то это σ-предельное множество нигде не плотно*;

(D) *если σ-предельное множество траектории содержит некоторое открытое множество, то траектория в конце концов попадает в это открытое множество, а следовательно, для этой траектории ее σ-предельное множество совпадает с ω-предельным множеством*;

(E) *если σ-предельное множество траектории совпадает с ее ω-предельным множеством, а последнее бесконечно, то оба множества являются совершенными, т. е. не имеют изолированных точек*; *в частности, совершенным является σ-предельное множество любой σ-рекуррентной точки.*

Доказательство. Согласно свойству (σ) любая изолированная точка σ-предельного множества должна быть σ-рекуррентной, а значит, периодической, поскольку в силу своей изолированности она может вернуться только в себя. Этим доказывается свойство (A).

Согласно свойству (ω') в бесконечном ω-предельном множестве любая изолированная точка не является периодической. Следовательно, в силу (A), изолированные точки бесконечного ω-предельного множества не могут принадлежать соответствующему σ-предельному множеству, поскольку любая изолированная точка множества будет также изолированной и в любом подмножестве этого множества, содержащем данную точку. Этим доказывается (B), откуда немедленно следует (E).

Утверждение (D) является простым следствием определения и основных свойств ω-предельных множеств и σ-предельных множеств. Поскольку любое σ-предельное множество замкнуто, утверждение (C) вытекает из (D).

7.2. Структура σ-аттракторов

Под континуумом понимают компактное связное множество, содержащее не менее двух точек. Пространство локально связно, если любая окрестность каждой его точки содержит связную окрестность этой точки.

Следующая теорема устанавливает простые ограничения на допустимую топологическую структуру σ-предельных множеств для непрерывных отображений в локально связных пространствах. Такие же ограничения будут иметь место и в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Теорема 1 [25]. *Пусть X — локально связное компактное метрическое пространство и $f : X \to X$ — непрерывно. Тогда σ-предельное множество любой траектории является либо нигде не плотным множеством, либо объединением конечного числа попарно непересекающихся континуумов, по крайней мере один из которых имеет непустую внутренность.*

Доказательство. Предположим, что $\sigma(x)$ не является нигде не плотным. Тогда, поскольку $\sigma(x)$ замкнуто, оно содержит открытое множество U. В этом случае $\sigma(x) = \omega(x)$ по предложению 1(D), и, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $x \in U \subset \sigma(x)$. Поскольку пространство локально связно, является метрическим и компактным, можно также полагать, что U связно. Пусть C_0 — связная компонента $\sigma(x)$, содержащая x. Тогда $x \in U \subset C_0 \subset \sigma(x)$.

Известно, что точка x должна вернуться в U и что связные подмножества $\sigma(x)$ отображаются в связные подмножества. Значит, существует $n \geq 1$ такое, что $f^n(C_0) \subset C_0$ и $f^i(C_0) \cap C_0 = \varnothing$ для $0 < i < n$. Пусть C_i — связные компоненты $\sigma(x)$, содержащие соответственно $f^i(C_0)$. Компоненты C_i, $0 \leq i < n$, не пересекаются и $\sigma(x) = \bigcup_{0<i<n} C_i$, поскольку траектория точки x плотна в $\sigma(x)$. Заметим также, что каждое C_i, $0 \leq i < n$, должно содержать как минимум две точки, поскольку иначе траектория точки x была бы в конце концов периодической, а σ-предельное множество — конечным.

Предположим, что замкнутое подмножество S компактного метрического пространства X удовлетворяет ограничениям теоремы 1. Может ли такое множество быть σ-предельным множеством некоторого непрерывного отображения пространства X в себя? Для случая отображений на действительной прямой $\mathbb{R}^1$ положительный ответ на этот вопрос дает сформулированная ниже теорема 2. В работе [23] также рассмотрен вопрос о том, когда пара замкнутых подмножеств (W, S) прямой $\mathbb{R}^1$ $(W \supset S)$ может представлять собой пару ω-предельного и σ-предельного множеств одной и той же траектории рекуррентной точки (т.е. точки x, для которой $x \in \omega(x)$) непрерывного отображения прямой в себя. Этот вопрос здесь мы рассматривать не будем.

Пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, не являются компактными. Поэтому, поскольку наши утверждения касаются отображений в компактных пространствах, в действительности мы должны определить подходящее непрерывное отображение на компактном подмножестве $X \supset S$ в $\mathbb{R}^n$, а затем продолжить это отображение непрерывно на все пространство $\mathbb{R}^n$. Например, для непрерывного отображения f в приведенной ниже теореме 3 такое продолжение может быть определено как тождественное вне компактного множества X, которое в доказательстве теоремы обозначено $P^{(0)}$.

Теорема 2 [24]. *Пусть S — непустое замкнутое подмножество действительной прямой $\mathbb{R}^1$. Множество S является σ-предельным множеством траектории некоторого непрерывного отображения $\mathbb{R}^1$ в себя тогда и только тогда, когда это множество либо нигде не плотно, либо представляет собой объединение конечного числа невырожденных замкнутых интервалов.*

Доказательство. Если σ-предельное множество траектории плотно в некоторой части прямой, то в силу своей замкнутости оно содержит некоторый интервал. Тогда согласно предложению 1(D) σ-предельное множество такой траектории должно совпадать с ее ω-предельным множеством. А в этом случае ω-предельное множество должно представлять собой конечный набор невырожденных замкнутых интервалов в силу свойства (ω).

Теперь докажем обратное, а именно, что любое множество указанного вида реализуется в виде σ-предельного множества траектории некоторого непрерывного отображения отрезка в себя.

Напомним, что отображение $f : X \to X$ называется растягивающим, если для любого открытого $U \subset X$ найдется положительное целое $K < \infty$ (зависящее от U), при котором $f^K(U) = X$.

Нам понадобится следующая вспомогательная теорема.

Вспомогательная теорема. *Пусть I — отрезок прямой, и пусть $f : I \to I$ — растягивающее непрерывное отображение. Тогда для всякого непустого инвариантного множества $Z \subset I$, состоящего только из σ-рекуррентных точек, найдется точка $x \in I$, для которой $\sigma(x) = \overline{Z}$.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующие леммы, в которых условия теоремы предполагаются выполненными.

Л е м м а 1. *Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K = K(\varepsilon)$, при котором для любого открытого интервала $J \subset I$ будет иметь место равенство $f^K(J) = I$, если только длина J больше ε.*

Доказательство. Если найдется такое $\varepsilon > 0$, для которого конечного $K(\varepsilon)$ не существует, то можно найти последовательность открытых интервалов $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $|b_n - a_n| \geq \varepsilon$, и последовательность целых чисел $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, $K_n \to \infty$ при $n \to \infty$, для которых $f^{K_n}((a_n, b_n)) \neq I$ при всех n. В силу компактности I можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда для $\delta = \varepsilon/4$ будем иметь $(a+\delta, b-\delta) \neq \varnothing$ и $f^K((a+\delta, b-\delta)) \neq I$ для всех K. Это противоречит условиям теоремы.

Следующая лемма вытекает непосредственно из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $K(\varepsilon)$ определено леммой 1. Если для некоторого интервала $J \subset I$ и некоторого $n > K(\varepsilon)$ интервал $f^n(J)$ не совпадает с I, то для любого $i \leq n - K(\varepsilon)$ длина интервала $f^i(J)$ меньше ε .*

Для $x \in I$ и $\varepsilon > 0$ пусть $B_\varepsilon(x) = \{y \in I : |y - x| < \varepsilon\}$ обозначает ε-окрестность точки x в I. Следующая лемма вытекает из того факта, что любой конечный сегмент траектории не влияет на ее предельное поведение.

Лемма 3. *Для любой σ-рекуррентной точки x и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\nu > 0$ и последовательность натуральных чисел $\{L_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что*

$$\frac{\operatorname{card}\{i < L_m : f^i(x) \in B_\varepsilon(x)\}}{m + L_m} > \nu$$

для всех $m \geq 1$ ($\operatorname{card} A$ обозначает мощность множества A).

Доказательство. Если точка x является σ-рекуррентной, т.е. $x \in \sigma(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{B_\varepsilon(x)}(f^i(x)) = \nu_0(\varepsilon) > 0.$$

Фиксируем ε и выбираем любое $\nu \in (0, \nu_0(\varepsilon))$. Затем фиксируем $m \geq 1$. Пусть $\Delta = \nu_0(\varepsilon) - \nu$ и $\delta_k = \frac{m}{m+k}$. Также фиксируем произвольное положительное целое k, для которого $\delta_k < \frac{\Delta}{2}$. Из существования указанного выше предела вытекает существование такого целого $L_m > k$, для которого

$$\frac{\operatorname{card}\{i < L_m : f^i(x) \in B_\varepsilon(x)\}}{L_m} > \nu + \frac{\Delta}{2}.$$

Тогда для этого L_m получаем

$$\frac{\operatorname{card}\{i < L_m : f^i(x) \in B_\varepsilon(x)\}}{m + L_m} =$$

$$= \frac{m + \operatorname{card}\{i < L_m : f^i(x) \in B_\varepsilon(x)\}}{m + L_m} - \frac{m}{m + L_m} > \nu + \frac{\Delta}{2} - \delta_k > \nu,$$

что завершает доказательства леммы.

Доказательство вспомогательной теоремы. Положим $\delta_i = \frac{1}{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$ и рассмотрим компактное множество $\overline{Z}$. Для этого множества можно указать последовательность δ_i-сетей $Z_i = \{z_1^{(i)}, \ldots, z_{N_i}^{(i)}\}$, состоящих из точек Z и таких, что $Z_i \subset Z_{i+1}$ для всех $i \geq 1$. Определив последовательность $\{N_i\}_{i=1}^\infty$, где N_i — это число точек в δ_i-сети Z_i, можно единственным образом представить любое натуральное j в виде $j = n(j) + \sum_{k<i(j)} N_k$, где $n(j)$ удовлетворяет условию $1 \leq n(j) \leq N_{i(j)}$. Таким образом все точки всех конечных δ_i-сетей Z_i будут представлены как точки одной бесконечной последовательности $\{z_j\}_{j=1}^\infty$, где $z_j = z_n^{(i)}$, а n и i соответственно равны указанным выше $n(j)$ и $i(j)$. С помощью равенства $\varepsilon_j = \delta_{i(j)}$ последовательность $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ можно также связать с последовательностью $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ положительных действительных чисел, которые будут определять окрестности точек z_j. Заметим, что для любого $j \geq 1$ существует бесконечно много таких $k > j$, для которых $z_k = z_j$, и точки z_j образуют плотное в $\overline{Z}$ подмножество точек из Z.

Используем точки $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ и числа $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ для того, чтобы построить последовательность $\{F_j\}_{j=0}^\infty$ вложенных замкнутых подмножеств отрезка I с непустым пересечением, которое и будет содержать точку с требуемыми свойствами.

Пусть $F_0 = I$ и $t_0 = 0$. Применяя лемму 3, для точки z_1 и ε_1 определим число ν и последовательность $\{L_m\}$. Положим $\nu_1 = \nu$ и $l_1 = L_0 + 2K(\varepsilon_1)$. Теперь пусть t_1 — любое натурально число, для которого $t_1 \geq l_1$ и $\frac{t_1 - 2K(\varepsilon_1)}{t_1} > 1/2$. Поскольку отображение f непрерывно и является растягивающим, существует интервал F_1^*, содержащий точку z_1 и такой, что $f^{t_1 - K(\varepsilon_1)}(\overline{F_1^*}) = \overline{B_{\varepsilon_1}(f^{t_1 - K(\varepsilon_1)}(z_1))}$. После этого согласно лемме 1 можно найти замкнутый интервал $F_1 \subset F_1^*$, для которого $f^{t_1}(F_1) = \overline{B_{\varepsilon_2}(z_2)}$. Заметим, что согласно лемме 2 для любого $t \leq t_1 - 2K(\varepsilon_1)$ длина интервала $f^t(F_1^*)$ меньше ε_1, а следовательно, первые $t_1 - 2K(\varepsilon_1)$ итераций интервала F_1 будут принадлежать ε_1-окрестностям соответствующих итераций точки z_1.

Теперь, применив лемму 3 к точке z_2 и ε_2, определим новое число ν и новую последовательность $\{L_m\}$, а затем положим ν_2 равным этому ν и $l_2 = L_{t_1} + 2K(\varepsilon_2)$. Теперь пусть t_2 — любое натурально число, для которого $t_2 \geq l_1$, $t_2 \geq l_2$ и $\frac{t_2 - 2K(\varepsilon_2)}{t_1 + t_2} > 2/3$. Поскольку отображение f непрерывно и является растягивающим, а также поскольку $f^{t_1}(F_1) = \overline{B_{\varepsilon_2}(z_2)}$, существует интервал F_2^*, который содержится в интервале F_1 и для которого выполняются следующие условия:

а) точка z_2 принадлежит множеству $f^{t_1}(F_2^*)$;

б) $f^{t_1 + t_2 - K(\varepsilon_2)}(\overline{F_2^*}) = \overline{B_{\varepsilon_2}(f^{t_2 - K(\varepsilon_2)}(z_2))}$.

Согласно лемме 1 можно найти замкнутый интервал $F_2 \subset \subset F_2^*$, для которого $f^{t_1 + t_2}(F_2) = \overline{B_{\varepsilon_3}(z_3)}$.

Рассуждая аналогично для любого $j \geq 1$, применяем лемму 3 к точке z_j и ε_j, чтобы определить новое число ν и новую последовательность $\{L_m\}$, а затем положить ν_j равным этому ν и $l_j = L_t + 2K(\varepsilon_j)$, где $t = \sum_{i<j} t_i$. Теперь пусть t_j — любое натурально число, для которого $t_j \geq l_i$ для всех $i \leq j$ и $\frac{t_j - 2K(\varepsilon_j)}{t_1 + t_2 + \cdots + t_j} > \frac{j}{j+1}$. Поскольку отображение f непрерывно и является растягивающим, а также поскольку $f^{t_1 + \cdots + t_{j-1}}(F_{j-1}) = \overline{B_{\varepsilon_j}(z_j)}$, существует интервал F_j^*, который содержится в интервале F_{j-1} и для которого выполняются следующие условия:

а) точка z_j принадлежит множеству $f^{t_1 + \cdots + t_{j-1}}(F_j^*)$;

б) $f^{t_1 + \cdots + t_j - K(\varepsilon_j)}(\overline{F_j^*}) = \overline{B_{\varepsilon_j}(f^{t_j - K(\varepsilon_j)}(z_j))}$.

Согласно лемме 1 можно найти замкнутый интервал $F_j \subset \subset F_j^*$, для которого $f^{t_1+\dots+t_j}(F_j) = \overline{B(z_{j+1}, \varepsilon_{j+1})}$.

Согласно лемме 2 первые $t_j - 2K(\varepsilon_j)$ из последних t_j итераций интервала F_j принадлежат ε_j-окрестностям соответствующих итераций точки z_j. Поскольку интервал F_j содержится во всех ранее построенных интервалах, в силу указанных выше свойств этих интервалов можно заключить, что траектории всех точек интервала F_j аппроксимируют, последовательно для $i = 1, \dots, j$ куски траекторий длины $t_i - 2K(\varepsilon_i)$ точек z_i с точностью до ε_i.

Докажем, что для точки x, лежащей в пересечении всех замкнутых интервалов F_j, $j = 1, 2, \dots$, будем иметь $\sigma(x) = \overline{Z}$. С этой целью для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим ε-окрестность $B_\varepsilon(\overline{Z})$ множества $\overline{Z}$. Понятно, что для всех j, превышающих некоторое $j_0 \geq 1$, будем иметь $B_{\varepsilon_j}(z_j) \subset B_\varepsilon(\overline{Z})$. Тогда при каждом $j > j_0$, в силу выбора t_j, для любого $t \geq \sum_{i \leq j} t_i$ относительное время пребывания траектории точки x вне множества $B_\varepsilon(\overline{Z})$ не будет превышать значения $1/(j+1)$, а следовательно, будет стремиться к 0 при $t \to \infty$. Поэтому $\sigma(x, f) \subseteq \overline{Z}$. Более того, поскольку для любого j найдется бесконечно много таких значений $k > j$, что $z_k = z_j$ и $\varepsilon_k < \varepsilon_j$, а также поскольку t_j выбираются не меньшими, чем l_i для всех $i \leq j$, согласно лемме 3 для каждой точки z_j имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{B_\varepsilon(z_j)}(f^i(x) > 0$$

при любом фиксированном $\varepsilon > 0$. Следовательно, для любого $j \geq 1$ точка z_j принадлежит множеству $\sigma(x)$. Поскольку множество $\sigma(x)$ замкнуто, а точки z_j образуют плотное множество в $\overline{Z}$, получаем включение $\overline{Z} \subseteq \sigma(x)$. Это доказывает равенство $\sigma(x) = \overline{Z}$ и завершает доказательство вспомогательной теоремы.

С помощью вспомогательной теоремы завершим доказательство теоремы 2.

Пусть S — замкнутый интервал $[a, b]$ и c — середина этого интервала. Пусть f — “тент”-отображение на $[a, b]$, т.е. непрерывное отображение, для которого $f(a) = f(b) = a$, $f(c) = b$ и f является линейным на каждом из интервалов $[a, c]$, $[c, b]$. Хорошо известно, что это отображение является растягивающим и что множество его периодических точек плотно на интервале $[a, b]$. Следовательно, в силу вспомогательной теоремы существует точка $x \in [a, b]$, для которой $\sigma(x) = [a, b] = S$.

Если $S = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$, где $n > 1$, и $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n$, то для $i = 1, 2, \dots n-1$ положим $f(a_i) = a_{i+1}$, $f(b_i) = b_{i+1}$ и $f(a_n) = f(b_n) = a_1$, $f(\frac{a_n+b_n}{2}) = b_1$. Продолжив f на остальные отрезки линейно, получим непрерывное кусочно-линейное отображение $f : I \to I$, у которого $f([a_i, b_i]) = [a_{i+1}, b_{i+1}]$ для $i = 1, 2, \dots, n-1$ и $f([a_n, b_n]) = [a_1, b_1]$. Ограничение отображения f^n на $[a_1, b_1]$ является “тент”-отображением на $[a_1, b_1]$, и мы можем использовать вспомогательную теорему снова, чтобы получить точку $x \in [a_1, b_1]$, для которой $\sigma_{f^n}(x) = [a_1, b_1]$, а следовательно, $\sigma(x) = S$.

Теперь предположим, что S — непустое, замкнутое и нигде не плотное подмножество интервала $I = [0, 1]$. Построим непрерывное растягивающее отображение $f : I \to I$, для которого $S \subset \mathrm{Fix}(f)$, где $\mathrm{Fix}(f)$ обозначает множество неподвижных точек f.

Пусть (a, b) — невырожденный интервал, L и R — неотрицательные действительные числа. Определим действительную функцию g на отрезке $[a, b]$ с помощью следующих условий:

(i) $g(a) = a$, $g(b) = b$, $g(a + (b-a)/3) = b + R$ и $g(b - (b - a)/3) = a - L$;

(ii) g линейна на каждом из интервалов множества $(a, b) \setminus \{a + (b-a)/3;\ b - (b-a)/3\}$;

(iii) g непрерывна на $[a, b]$.

Если интервал (a, b) и неотрицательные действительные числа L и R заданы, то полагаем, что функция g определена параметрами (a, b), L, R.

Заметим, что $|g(J)| \geq |J|$ для любого интервала $J \subset [a, b]$, где $|J|$ означает длину интервала J. Более того, если $g(J)$ не содержит концевых точек $[a, b]$, то $|g(J)| \geq \frac{3}{2}|J|$, а если J содержит концевую точку $[a, b]$, то $[a, b] \subset f^K(J)$ для некоторого $K \leq 1 + \log_3 \frac{b-a}{|J|}$.

Пусть $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \geq 0}$ является семейством всех компонент открытого плотного множества $I \backslash S$, которые пронумерованы так, что $|G_j| \geq |G_k|$ при $j < k$, и пусть $\mathcal{G}_n = \{G_i\}_{i \leq n}$.

Фиксируем последовательность $n_0 = 0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots$ так, чтобы при любом $k \geq 1$ конечное семейство открытых интервалов $\mathcal{G}_{n_k}$ имело следующее свойство: если разделить интервал I на 2^k равных частей, то для каждой такой части J можно найти интервал G из $\mathcal{G}_{n_k}$, для которого $G \cap J \neq \varnothing$. Такая последовательность существует, поскольку множество S нигде не плотно в I. Заметим, что для каждого $G_i \in \mathcal{G}$, $i \geq 1$, существует единственное $k = k(i)$, для которого $G_i \in \mathcal{G}_{n_k}$ и $G_i \notin \mathcal{G}_{n_{k-1}}$. Понятно, что если $\mathcal{G}$ бесконечно (т.е. если S бесконечно), то $k(i) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Пусть $L_0 = \inf G_0$ и $R_0 = 1 - \sup G_0$ (напомним, что мы строим отображение на интервале $I = [0, 1]$). Если $i \geq 1$, то определим неотрицательные действительные числа L_i и R_i по следующим правилам:

а) сначала найдем $k = k(i)$, для которого $G_i \in \mathcal{G}_{n_k}$ и $G_i \notin$ $\notin \mathcal{G}_{n_{k-1}}$;

б) если нет элементов $\mathcal{G}_{n_k}$ слева от G_i, то $L_i = \inf G_i$; если есть элементы $\mathcal{G}_{n_k}$ слева от G_i, то $L_i = l_i + |G_{n_k}|$, где l_i — расстояние от G_i до интервала из $\mathcal{G}_{n_k}$, ближайшего к G_i слева;

в) если нет элементов $\mathcal{G}_{n_k}$ справа от G_i, то $R_i = 1 - \sup G_i$; если есть элементы $\mathcal{G}_{n_k}$ справа от G_i, то $R_i = r_i + |G_{n_k}|$, где r_i — расстояние от G_i до интервала из $\mathcal{G}_{n_k}$, ближайшего к G_i справа.

Теперь можно определить отображение $f : I \to I$ по следующим правилам:

а) для $x \in S$ положим $f(x) = x$;

б) на каждом $G_i \in \mathcal{G}$ отображение f совпадает с определенной выше функцией g, заданной параметрами G_i, L_i, R_i.

Чтобы доказать непрерывность f, достаточно доказать, что L_i и R_i стремятся к нулю при $i \to \infty$. Согласно определению L_i это значение либо равно расстоянию от G_i до левого конца интервала I, либо $L_i = l_i + |G_{n_k}|$, где l_i — это расстояние от G_i до интервала из $\mathcal{G}_{n_k}$, ближайшего к G_i слева. Определив $k = k(i)$, согласно определению $\mathcal{G}_{n_k}$ мы имеем $L_i \leq 2^{-k}$ в первом случае и $l_i \leq 2^{-k+1}$ — во втором. Следовательно, $L_i \leq 2^{-k+1} + |G_{n_k}|$. Поскольку $|G_{n_k}| \to 0$ при $k \to \infty$ и $k(i) \to \infty$ при $i \to \infty$, получаем $L_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Точно так же можно показать, что $R_i \to 0$ при $i \to \infty$, а значит, отображение f непрерывно.

Теперь докажем, что отображение f является растягивающим. Пусть U — открытый в I интервал, для которого $U \cap \cap S \neq \varnothing$. Поскольку S нигде не плотно в I, существует $G_i \in \mathcal{G}$, для которого $U \cap G_i \neq \varnothing$ и одна из концевых точек G_i принадлежит U. Определим $k = k(i)$ и рассмотрим интервал $J = U \cap G_i$. Легко проверить, что для некоторого $t \leq 1 + \log_3 \frac{|I|}{|J|} + n_k(1 + \log_3 \frac{|I|}{|G_{n_k}|})$ интервал $f^t(J)$ содержит концевую точку G_0 и $|G_0 \cap f^t(J)| \geq |G_{n_k}|$. Следовательно, для $\tau = 1 + \log_3 \frac{|I|}{|G_{n_k}|}$ необходимо иметь $f^{t+\tau}(J) = I$.

Если $U \cap S = \varnothing$, то $U \subset G_i$ для некоторого $G_i \in \mathcal{G}$. Используя указанные выше свойства функции g и конструкцию отображения f, можно сделать вывод, что если для этого U имеем $f(U) \cap S = \varnothing$, то $|f(U)| \geq \frac{3}{2}|U|$. Поэтому для некоторого конечного N необходимо иметь $f^N(U) \cap S \neq \varnothing$, следовательно, можно использовать аргументы предыдущего случая в применении к новому интервалу $U^* = f^N(U)$. Таким образом, отображение f является растягивающим.

Доказательство теоремы 2 завершается применением вспомогательной теоремы к отображению f и замкнутому множеству $S \subset \mathrm{Fix}(f)$, если вспомнить о том, что любая периодическая точка является σ-рекуррентной.

В пространствах большей размерности такой простой критерий получить не удается. Например, σ-предельным множеством не может быть объединение двух непересекающихся континуумов с непустой внутренностью, имеющих разное число линейно связных компонент: согласно свойству (ω) эти континуумы должны отображаться один в другой, а недостаток числа линейно связных компонент не позволяет обеспечить непрерывное отображение этих континуумов друг на друга. Тем не менее, для нигде не плотных множеств можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3 [25]. *Любое нигде не плотное замкнутое множество в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, *является σ-предельным множеством для некоторого непрерывного отображения* $\mathbb{R}^n$ *в себя.*

Доказательство. Идея доказательства аналогична идее доказательства соответствующего результата для $\mathbb{R}^1$ (см. теорему 2), но, как обычно, описание метода в пространствах более высокой размерности оказывается более сложным. Чтобы упростить изложение, сосредоточимся на рассмотрении случая $n = 2$.

Итак, пусть S — нигде не плотное непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^2$. Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. Вложим множество S в некоторое совершенное нигде не плотное множество S^*. Пусть $P^{(0)}$ — замкнутый прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ (или гиперпараллелепипед в $\mathbb{R}^n$), содержащий S и такой, что его стороны (грани) параллельны осям координат. Так как S нигде не плотно в $P^{(0)}$, можно выбрать достаточно малый открытый квадрат (гиперкуб) $C^{(0)}$ около центра $P^{(0)}$ такой, что $S \cap C^{(0)} = \varnothing$ и стороны $C^{(0)}$ также параллельны осям координат. Продолжив стороны квадрата $C^{(0)}$ до сторон прямоугольника $P^{(0)}$, разобьем $P^{(0)} \setminus C^{(0)}$ на 8 прямоугольников (или $3^n - 1$ гиперпараллелепипедов в $\mathbb{R}^n$), которые обозначим $P_k^{(1)}$, $1 \leq k \leq K_1$. Повторяя рассуждения для каждого $P_k^{(1)}$, определим следующее поколение открытых квадратов $C_k^{(1)}$ и прямоугольных множеств $P_{k'}^{(2)}$, где $1 \leq k' \leq K_2$.

Продолжая описанную процедуру, можно заметить, что размеры $P_k^{(m)}$ стремятся к нулю при $m \to \infty$, а открытые квадраты $C_k^{(m)}$ образуют плотное множество в $P^{(0)}$. Необходимое нам совершенное нигде не плотное множество S^* определяем как дополнение к открытому множеству $\bigcup C_k^{(m)}$ в $P^{(0)}$. Отметим следующее свойство множества S^*.

Лемма 1. *Если U открыто и $U \cap S^* = \varnothing$, то найдутся число m и множество $P_k^{(m)}$ такие, что $P_k^{(m)} \subset U$.*

Шаг 2. Построим растягивающее непрерывное отображение f, для которого $S^* \subset \mathrm{Fix}(f)$. Отображение f будет определено так, чтобы $f(x) = x$ для $x \in S^*$, $f(C^{(0)}) = P^{(0)}$ и $f(C_k^{(m)}) = P_{k'}^{(m-1)}$ для $m > 0$, где $P_{k'}^{(m-1)}$ — прямоугольник поколения $(m-1)$, содержащий открытый квадрат $C_k^{(m)}$. Отображение f на множестве $C_k^{(m)}$ определим следующим образом. Пусть $I_k^{(m)}$ — меньший замкнутый квадрат в $C_k^{(m)}$ со сторонами, параллельными сторонам $C_k^{(m)}$. Рассмотрим внутренность квадрата $C_k^{(m)}$ как эластичную пленку, прикрепленную к границам $C_k^{(m)}$ и $I_k^{(m)}$. Граница $C_k^{(m)}$ будет фиксированной рамкой, а граница $I_k^{(m)}$ — эластичной. Теперь растянем границу $I_k^{(m)}$ на границу прямоугольника $P_{k'}^{(m-1)}$ без поворота так, чтобы вершины $I_k^{(m)}$ отобразились в вершины $P_{k'}^{(m-1)}$. Тогда квадрат $I_k^{(m)}$ отобразится на $P_{k'}^{(m-1)}$, а “кольцевая” область $C_k^{(m)} \setminus I_k^{(m)}$ отобразится на “кольцевую” область $P_{k'}^{(m-1)} \setminus C_k^{(m)}$. Такое определение f на $C_k^{(m)}$ можно формализовать, и определенное таким образом отображение оказывается непрерывным и удовлетворяет следующим двум свойствам.

Лемма 2. *Для $m > 0$ выполняются равенства $f(P_k^{(m)}) = f(C_k^{(m)}) = f(I_k^{(m)}) = P_{k'}^{(m-1)}$, где $P_{k'}^{(m-1)}$ — прямоугольник поколения $(m-1)$, содержащий $P_k^{(m)}$. Для $m = 0$ будем иметь $f(P^{(0)}) = f(C^{(0)}) = f(I^{(0)}) = P^{(0)}$.*

Лемма 3. *Каждый квадрат $I_k^{(m)}$ отображается на его образ линейно и взаимно однозначно.*

Шаг 3. Теперь можно указать точку x, для которой $\sigma(x) = S$. Пусть $\delta_i = 1/(i+1)$ для $i = 1, 2, \ldots$. Поскольку S — компакт, найдем последовательность конечных δ_i-сетей

$$S_i = \{s_1^i, \ldots, s_{N_i}^i\} \subset S$$

таких, что $S_i \subset S_{i+1}$ для всех $i \geq 1$. Все точки множества $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ можно представить в виде одной последовательности $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$ (с повторениями), последовательно добавляя точки следующего множества S_i к предыдущим. Тогда формально каждое натуральное j можно будет представить уникальным образом в виде $j = n(j) + \sum_{k<i(j)} N_k$, где $1 \leq n(j) \leq N_{i(j)}$. Следовательно, $s_j = s_{n(j)}^{(i(j))}$. Положим $\varepsilon_j = \delta_{i(j)}$. Все точки s_j в совокупности образуют плотное подмножество S, и для любого $j \geq 1$ имеется бесконечное число таких $k > j$, для которых $s_k = s_j$ и $\varepsilon_k < \varepsilon_j$.

Для $i > 0$ пусть U_i обозначает ε_i-окрестность точки s_i. В силу леммы 1 для каждого i можно найти прямоугольник $P^{(m_i')} \subset U_i$ (чтобы упростить запись, мы здесь опустили нижний индекс k в обозначении $P_k^{(m_i')}$). В силу леммы 2 имеем $f^{m_i'}(P^{(m_i')}) = P^{(0)}$. Заметим, что для любого $P^{(m_i)} \subset P^{(m_i')}$ с $m_i > m_i'$ также имеем $f^{m_i - m_i'}(P^{(m_i)}) = P^{(m_i')}$ и $f^j(P^{(m_i)}) = P^{(m_i')}$ для всех $0 \leq j \leq m_i - m_i'$. В силу леммы 3 найдется замкнутое прямоугольное подмножество $J^{(m_i)}$ квадрата $I^{(m_i)}$ в $P^{(m_i)}$ такое, что $J^{(m_i)}$ линейно отображается на $P^{(0)}$ с помощью f^{m_i}. Таким образом, $f^j(J^{(m_i)}) \subset U_i$ для всех $0 \leq j \leq m_i - m_i'$. Заметим, что m_i' зависит только от окрестности U_i и что m_i можно выбрать как угодно большим.

Теперь пусть $F_1 = J^{(m_1)}$, а для $i > 1$ пусть F_i — замкнутое прямоугольное подмножество множества F_{i-1} такое, что

$$f^{m_1 + \ldots + m_{i-1}}(F_i) = J^{(m_i)}.$$

Множество F_i можно определить в силу леммы 3. Таким образом получим последовательность $\{F_i\}$ вложенных замкнутых множеств, пересечение которых должно содержать хотя бы одну точку, например, точку x. Докажем, что при подходящем выборе m_i мы получим требуемое равенство $\sigma(x) = S$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $U(\varepsilon)$ — ε-окрестность множества S. Очевидно, что найдется такое $i_0 \geq 1$, что $U_i \subset U(\varepsilon)$ для всех $i > i_0$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{U(\varepsilon)}(f^i(x)) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n'} \sum_{i=i_0}^{n} (m_i - m_i'),$$

где $n' = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Если выбрать последовательность $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы $m_i'/m_i \to 0$ и $m_i / \sum_{j=1}^{n} m_j \to 1$ при $i \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{U(\varepsilon)}(f^i(x)) = 1.$$

С другой стороны, напомним,что для любого $i \geq 1$ существует бесконечно много таких $k > i$, для которых $s_k = s_i$, и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, при указанном выборе m_i, для любого фиксированного i имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{U_i}(f^j(x)) > 0,$$

поскольку эта величина ограничена снизу асимптотическим верхним значением величин $(m_k - m_k')/\sum_{j=1}^{k} m_j$, рассмотренных для тех k, при которых $s_k = s_j$. Это доказывает, что все s_i принадлежат множеству $\sigma(x)$, а следовательно, $S \subseteq \sigma(x)$. Таким образом, $\sigma(x) = S$, и доказательство теоремы завершено.

Замечание. В действительности нами доказано, что для любого нигде не плотного непустого замкнутого множества S в $\mathbb{R}^n$ найдется непрерывное отображение f, для которого σ-предельными множествами его траекторий будет не только само множество S, но и каждое непустое замкнутое подмножество S.

Заметим также, что в силу нашего построения все эти σ-предельные множества порождаются нигде не плотными (в P^0) траекториями. С другой стороны, каждое из этих σ-предельных множеств оказывается "тотально несвязным" с точки зрения динамики, поскольку распадается на неподвижные точки.

7.3. Бассейны σ-аттракторов и множества точек, воспроизводящих инвариантную меру

Важность σ-предельных множеств траекторий определяется, в частности, тем, что на минимальном центре притяжения динамической системы сосредоточены все ее конечные инвариантные меры [33], а сам минимальный центр притяжения совпадает с замыканием множества σ-рекуррентных точек.

Одной из задач теории динамических систем является разложение фазового пространства на так называемые транзитивные компоненты, неразложимые с точки зрения динамики. При этом транзитивность может рассматриваться как с топологической, так и с метрической точек зрения.

Топологическая транзитивность динамической системы означает наличие в ее фазовом пространстве всюду плотной траектории, т. е. существование точки $x \in X$, для которой $\omega(x) = X$.

Метрическая транзитивность динамической системы с инвариантной мерой μ означает, что любое измеримое (относительно μ) инвариантное (с точностью до нулевой меры) подмножество A фазового пространства X либо имеет нулевую меру, либо с точностью до нулевой меры совпадает с X.

Если в X определена топология, то (при естественных предположениях) из метрической транзитивности следует плотность траекторий почти всех точек из X. В этом смысле из метрической транзитивности следует топологическая транзитивность, но обратное не верно.

Для топологически транзитивной динамической системы множество точек x ее фазового пространства X, для которых $\sigma(x) \neq X$, в общем случае не проще $F_{\sigma\delta}$. Соответственно, множество точек, порождающих инвариантные меры с носителем X, будет не проще $G_{\delta\sigma}$, т. е. оно довольно сложно и, как правило, топологически несущественно (нигде не плотно). Но если динамическая система с инвариантной мерой является метрически транзитивной, то множество точек, σ-предельные множества которых совпадают со всем пространством X, уже есть плотным G_δ-множеством, т. е. “массивным” и с топологической точки зрения.

Сформулируем теоремы, обеспечивающие соответствующие дескриптивные оценки.

Для бассейнов σ-аттракторов получаем следующую оценку.

Теорема 4 [35]. *Пусть* $f : X \to X$ *— непрерывное отображение компактного метрического пространства. Тогда для любого замкнутого множества* $S \subset X$ *множество* $\mathfrak{B}_\sigma(S) = \{x \in X : \sigma(x) \subset S\}$ *является множеством типа* $F_{\sigma\delta}$.

Доказательство. При условиях теоремы $S = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} U_\varepsilon$, где $U_\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, S) \leq \varepsilon\}$, $\rho(\cdot,\cdot)$ — некоторая метрика в X. Множества U_ε замкнуты, и $\sigma(x) \subset S$, если

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{U_\varepsilon}(f^i(x)) = 1$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для $1 \leq M \leq L$, $n \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ определим семейство множеств $B_\varepsilon(M, L, n) = \big\{x \in X : \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \chi_{U_\varepsilon}(f^i(x)) \geq \frac{n-1}{n}$ при $M \leq N \leq L\big\}$. Множества этого семейства замкнуты, поскольку для каждого $N \geq 1$ неравенство

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_{U_\varepsilon}(f^i(x)) \geq \frac{n-1}{n}$$

определяет в пространстве X множество точек, которое можно представить в виде объединения конечного числа множеств, являющихся, в свою очередь, пересечением некоторых прообразов замкнутого множества U_ε относительно непрерывных отображений f^i, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Теперь, поскольку множества $B_\varepsilon(M, L, n)$ замкнуты, утверждение теоремы вытекает из равенства

$$\mathfrak{B}_\sigma(S) = \bigcap_{k\ge 1} \bigcap_{n\ge 1} \bigcup_{M\ge 1} \bigcap_{L\ge M} B_{\varepsilon_k}(M, L, n),$$

где $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$ с конечной мерой μ, где $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X. Предположим, что мера μ является инвариантной мерой непрерывного отображения $f : X \to X$. Отображение $f : X \to X$ будем называть *метрически транзитивным*, если метрически транзитивной (относительно инвариантной меры μ) является динамическая система, порожденная итерациями f. Это значит, что мера любого строго инвариантного подмножества пространства X должна быть равной либо 0, либо $\mu(X)$. Такую меру μ называют *эргодической*. Согласно теореме Биркгофа, в этом случае если множество $B \subset X$ измеримо, то для почти каждой точки среднее время пребывания ее траектории в B соответствует мере B, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_B\left(f^i(x)\right) = \frac{\mu(B)}{\mu(X)} \quad \text{для почти всех } x \in X.$$

Теорема 5 [37]. *Пусть* $(X, \mathfrak{A})$ *— компактное измеримое метрическое пространство с конечной мерой* μ, *инвариантной относительно непрерывного отображения* $f : X \to X$. *Если* f *метрически транзитивно, то множество*

$$\mathcal{W}(\mu) = \{x \in X : \omega(x) = X \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}\mu \subseteq \sigma(x)\},$$

где $\operatorname{supp}\mu$ *— носитель меры* μ *в* X, *содержит* G_δ*-множество:*

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\mu) = \Big\{x \in X : \forall\, U \subset X \ \ \forall\, L > 0 \ \ \exists\, N \geq L \quad \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \chi_U\left(f^i(x)\right) > \varepsilon\mu(U)\Big\}, \qquad (7.1)$$

где $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{1}{\mu(X)}\right)$, U *— открыто, а* L, N *— целые.*

Доказательство. Для целых $N > 0$, действительных $\varepsilon > 0$ и открытых $U \in X$ определим множества $W_\varepsilon(\mu, N, U) = \Big\{x \in X : \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\chi_U\left(f^i(x)\right) > \varepsilon\mu(U)\Big\}$. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 5, можно показать, что эти множества открыты.

Множество $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$, указанное в формулировке теоремы, представим в виде

$$\mathcal{W}_\varepsilon(\mu) = \bigcap_{U\subset X}\ \bigcap_{L>0}\ \bigcup_{N\geq L} W_\varepsilon(\mu, N, U). \qquad (7.2)$$

В силу компактности метрического пространства X и существования в нем счетной базы пересечение по всем открытым $U \subset X$ заменим пересечением по некоторому не более чем счетному набору $\{U_n\}$ из X. С учетом этого замечания из представления (7.2) следует, что множество $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$ является G_δ-множеством.

Кроме того,

$$\big\{x \in X : \omega(x) = X\big\} \supset \Big\{x \in X : \forall\ U \subset X \ \ \forall\ L > 0 \ \ \exists\ N \geq L \quad \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\chi_U\left(f^i(x)\right) > 0\Big\} \ \supset\ \mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$$

и

$$\big\{x \in X : \sigma(x) \supseteq \operatorname{supp}\mu\big\} = \Big\{x \in X : \forall\, U \subset X \ (U \cap \operatorname{supp}\mu \neq \varnothing) \\ \exists\, \varepsilon > 0 \quad \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \chi_U\left(f^i(x)\right) > \varepsilon\Big\} \supset \ \mathcal{W}_\varepsilon(\mu),$$

т. е. $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu) \subset \mathcal{W}(\mu)$. Теорема доказана.

Замечание. Множество $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$ может оказаться пустым, если, например, отображение f не имеет плотной в X траектории. Поэтому утверждение теоремы 5 будет содержательным только в том случае, когда мера μ обеспечивает топологическую транзитивность соответствующей динамической системы.

Следствие 1. *Пусть* $(X, \mathfrak{A})$ — *компактное измеримое метрическое пространство с конечной мерой* μ, *инвариантной относительно непрерывного отображения* $f : X \to X$. *Если* f *метрически транзитивно и* $\mu(U) > 0$ *для любого открытого* $U \subset X$, *то множество* $\mathcal{W} = \{x \in X : \sigma(x) = X\}$ *содержит плотное* G_δ*-множество.*

Доказательство. При условиях следствия $\operatorname{supp}\mu = X$, поэтому согласно теореме 5 множество $\mathcal{W}$ содержит G_δ-множество $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$, определенное равенством (7.1). Предположим, что $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$ не плотно, т.е. найдется такое открытое $U \subset X$, для которого $U \cap \mathcal{W}_\varepsilon(\mu) = \varnothing$. Рассмотрим инвариантное множество

$$\mathcal{U} = \bigcup_{-\infty<i<\infty} f^i(U).$$

Заметим, что $f^{-1}(\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)) = \mathcal{W}_\varepsilon(\mu) = f(\mathcal{W}_\varepsilon(\mu))$, поскольку указанные в определении множества $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$ условия будут выполняться как для образов, так и для прообразов точек из $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$. Поэтому из предположения вытекает, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}_\varepsilon(\mu) = \varnothing$, а с учетом условий следствия имеем $\mu(\mathcal{U}) > 0$. Тогда из эргодичности меры μ следует, что $\mu(\mathcal{U}) = \mu(X)$ и $\mu(\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)) = 0$.

С другой стороны, для множества

$$\mathcal{R} = \Big\{ x \in X : \forall\, B \subset X \ (B \text{ измеримо}) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_B\left(f^i(x)\right) = \frac{\mu(B)}{\mu(X)} \Big\}$$

в силу эргодичности μ должно быть $\mu(\mathcal{R}) = \mu(X)$. Но

$$\mathcal{R} \ \subset \ \Big\{ x \in X : \forall\, U \subset X \ (U \text{ открыто}) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_U\left(f^i(x)\right) = \frac{\mu(U)}{\mu(X)} \Big\} \ \subset$$

$$\subset \ \Big\{ x \in X : \forall\, U \subset X \ (U \text{ открыто}) \ \ \forall\, \varepsilon \in (0,1) \ \ \forall\, N \geq L \quad \varepsilon \frac{\mu(U)}{\mu(X)} < \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_U\left(f^i(x)\right) < \frac{1}{\varepsilon} \frac{\mu(U)}{\mu(X)} \Big\} \subset$$

$$\subset \ \Big\{ x \in X : \forall\, U \subset X \ (U \text{ открыто}) \ \ \exists\, \varepsilon \in (0,1) \ \ \forall\, L > 0 \quad \exists\, N \geq L \quad \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \chi_U\left(f^i(x)\right) > \varepsilon \frac{\mu(U)}{\mu(X)} \Big\} = \mathcal{W}_\varepsilon(\mu),$$

а значит, должно выполняться равенство $\mu(\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)) = \mu(X)$, что противоречит полученному выше заключению о нулевой мере $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$, вытекающему из предположения о неплотности $\mathcal{W}_\varepsilon(\mu)$ в X. Следствие доказано.

Если в пространстве $(X, \mathfrak{A})$ определена некоторая "естественная" мера (например, мера Лебега), то следствие 1 можно сформулировать для инвариантных мер, связанных с такой мерой. Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ, то согласно теореме Радона–Никодима существует такая суммируемая по мере λ функция $\rho(x)$, $x \in X$, что для любого множества $B \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство

$$\mu(B) = \int_B \rho(x) d\lambda(x),$$

причем $\rho(x)$ единственна с точностью до множеств нулевой λ-меры (функцию $\rho(x)$ называют плотностью меры μ относительно меры λ). Имея такое представление меры μ, можно сформулировать следующее предложение, непосредственно вытекающее из следствия 1.

Следствие 2. *Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — компактное измеримое метрическое пространство с мерой Лебега λ. Если непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет конечную инвариантную меру μ, абсолютно непрерывную относительно λ и такую, что ее плотность $\rho(x) \geq \varepsilon > 0$ почти везде по мере λ на X, то множество $\mathcal{W} = \{x \in X : \sigma(x) = X\}$ содержит плотное G_δ-множество.*

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$ и

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2; \\ 2 - 2x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

Известно, что мера Лебега на $[0, 1]$ является эргодической инвариантной мерой f. В силу следствия 2 множество точек $x \in$ $\in [0, 1]$, для которых $\sigma(x) = [0, 1]$ (а следовательно, и $\omega(x) =$ $= [0, 1]$), содержит плотное G_δ-подмножество из интервала $[0, 1]$.

Пример 2. То же самое можно утверждать и для гладкого отображения $f : x \to 4x(1 - x)$ на отрезке $[0, 1]$, которое, как известно, имеет инвариантную меру, абсолютно непрерывную относительно меры Лебега, удовлетворяющую условиям следствия 2.

Замечание. Утверждения, аналогичные доказанным выше, можно сформулировать для случая динамических систем с непрерывным временем. Кроме того, аналогичные утверждения справедливы не только для непрерывных, но и для класса так называемых растягивающих разрывных отображений (примером такого отображения на $[0,1]$ есть $f : x \to 2x \pmod 1$, для которого инвариантной является мера Лебега).

Снова пусть X — компактное метризуемое пространство, $f : X \to X$ — непрерывное отображение, μ — вероятностная мера, заданная на борелевских подмножествах пространства X и инвариантная относительно f. Через $C(X)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций на X. Как известно, $C(X)$ является сепарабельным пространством.

Нас интересует структура множества траекторий динамической системы (f, X), воспроизводящих меру μ, т.е. структура множества

$$\mathcal{R}(\mu) = \left\{ x \in X : \mathcal{C}_n\varphi(x) \to \int \varphi\, d\mu \ \text{ для всех } \ \varphi \in C(X) \right\},$$

где $\mathcal{C}_n\varphi(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$ — средние Чезаро для последовательности $\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ — траектории точки x. Множество $\mathcal{R}(\mu)$ можно определить и как совокупность точек $x \in X$, для которых последовательность мер $\mathcal{C}_n\delta_x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \delta_{f^i(x)}$ сходится к мере μ в смысле слабой сходимости мер (δ_x — вероятностная мера, сосредоточенная в точке x).

Основной результат здесь — приведенная далее теорема, утверждающая, что $\mathcal{R}(\mu)$ является множеством типа $F_{\sigma\delta}$. Покажем также, что в типичной ситуации $\mathcal{R}(\mu)$ оказывается множеством первой категории. Для этого рассмотрим структуру множества $\mathcal{Q}(\mu)$ точек $x \in X$, для которых мера μ принадлежит множеству предельных точек последовательности мер $\mathcal{C}_n\delta_x$, используя то, что $\mathcal{Q}(\mu)$ оказывается множеством типа G_δ.

Теорема 6 [36]. *Множество* $\mathcal{R}(\mu)$ *является множеством типа* $F_{\sigma\delta}$.

Доказательство. Некоторый класс $\mathcal{F}$ элементов пространства $C(X)$ называют определяющим сходимость классом, если для любого набора вероятностных мер $\{\nu_n\}_{n-1}^{\infty}$ на X слабая сходимость ν_n к некоторой мере ν вытекает из того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\varphi\, d\nu_n = \int\varphi\, d\nu$ для всех $\varphi\in\mathcal{F}$. Известно, что таким определяющим сходимость классом будет любой класс, плотный в $C(X)$ (в равномерной метрике). Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая плотная в $C(X)$ последовательность функций (такая последовательность найдется в силу сепарабельности $C(X)$). Тогда $\mathcal{R}(\mu)$ можно представить в виде

$$\mathcal{R}(\mu) = \bigcap_{i\ge 1}\bigcap_{k\ge 1}\bigcup_{m\ge 1}\bigcap_{n\ge m}\left\{x\in X : \left|\mathcal{C}_n\varphi_i(x) - \int\varphi_i\, d\mu\right| \le \frac{1}{k}\right\}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что множества $\left\{x\in X : \left|\mathcal{C}_n\varphi_i(x) - \int\varphi_i\, d\mu\right| \le \frac{1}{k}\right\}$ являются замкнутыми в силу непрерывности отображения f и функций φ_i.

Конечно, структура множества $\mathcal{R}(\mu)$ зависит от динамики системы, и в некоторых случаях это множество оказывается намного проще по сравнению с той оценкой, которая предлагается в теореме 5. Далее приведено несколько примеров таких систем. Но, как показано в сформулированных ниже следствиях 1–3 теорем 5–6, в типичной ситуации множество $\mathcal{R}(\mu)$ не является G_δ-множеством. По-видимому, типичным есть случай, когда $\mathcal{R}(\mu)$ является множеством 2-го класса (т.е. не является ни множеством типа G_δ, ни множеством типа F_σ), однако мы не можем привести конкретный пример динамической системы с инвариантной мерой, для которой это справедливо.

Пример 3. $X=[0,1]$, $f_a(x) = ax(1-x)$, $a\in(0,4]$. Предположим, что f_a имеет притягивающий цикл p, а μ — инвариантная мера, сосредоточенная на цикле p. Тогда $\mathcal{R}_f(\mu)$ — открытое плотное множество, совпадающее с бассейном притяжения цикла p.

Пример 4. X и f_a те же, но $a = a^* \approx 3,57$, при котором f_a имеет циклы всех периодов 2^i, $i = 0, 1, \dots$, и не имеет циклов других периодов. В этом случае множество неблуждающих точек $\Omega(f_{a^*})$ отображения f_{a^*} можно представить в виде

$$\Omega(f_{a^*}) = \bigcup_{i \geq 0} p_i \quad \bigcup \quad K,$$

где p_i — циклы периода 2^i, K — минимальное инвариантное канторово множество. В этом случае найдется единственная инвариантная вероятностная мера μ на $[0,1]$, для которой мера любого цикла равна нулю [14]. При этом мера оказывается эргодической, т.е. мера любого строго инвариантного подмножества пространства $X = [0,1]$ будет равна либо 0, либо 1.

Множество $\mathcal{R}(\mu)$ здесь совпадает с бассейном притяжения множества K. Поскольку бассейн притяжения любого цикла p_i в данном случае есть объединение всех его прообразов, а множество всех периодических точек отображения всегда есть F_σ, то для f_{a^*} множество $\mathcal{R}(\mu)$ будет плотным G_δ-множеством. Заметим также, что в этом случае $\mathcal{R}(\mu)$ не есть F_σ, поскольку объединение всех прообразов циклов p_i плотно в X и не лежит в $\mathcal{R}(\mu)$.

Пример 5. $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, т.е. элементами пространства X являются полубесконечные последовательности $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ из нулей и единиц, а в качестве отображения рассматривается сдвиг в пространстве таких последовательностей, который традиционно обозначается σ. В этом пространстве для произвольных $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots)$ из X можно ввести расстояние $|\beta - \alpha| = \left| \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{\beta_i - \alpha_i}{2^i} \right|$ и определить лексикографический порядок. Для $\alpha < \beta$ в этом лексикографическом порядке множество $(\alpha, \beta) = \{\gamma \in X : \alpha < \gamma < \beta\}$ называется интервалом. Мера μ, для которой $\mu((\alpha,\beta)) = |\beta - \alpha|$ для любого интервала (α, β), является инвариантной относительно сдвига σ.

Для произвольного $\alpha \in X$ положим $q_k = \dfrac{N_k}{k}$, где N_k — число индексов $i \leq k$, для которых $\alpha_i = 1$. Тогда множество $A = \bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} \left\{ \alpha \in X : q_k(\alpha) < \frac{1}{3} \right\}$ будет плотным G_δ-множеством. Для точек $\alpha \in A$ требуемая в определении $\mathcal{R}(\mu)$ сходимость нарушается для непрерывной функции $\varphi(\alpha) = \alpha_0$, поэтому $A \cap \mathcal{R}(\mu) = \varnothing$. Таким образом, в этом случае $\mathcal{R}(\mu)$ не может быть G_δ-множеством, поскольку $\mathcal{R}(\mu)$ плотно в X.

Аналогичная ситуация возникает для семейства отображений f_a из примеров 1 и 2 при $a = 4$, когда инвариантной будет мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. Этот результат на первый взгляд кажется неожиданным, но вполне соответствует известному факту, что мера Лебега не является мерой, согласованной с категорией. Таковыми в типичном случае являются и инвариантные меры других динамических систем, заданных непрерывными отображениями.

Рассмотрим множество $\mathcal{Q}(\mu)$ точек $x \in X$, для которых мера μ принадлежит множеству предельных точек последовательности $\mathcal{C}_n\delta_x$, определяемой средними Чезаро для вероятностных мер, сосредоточенных в точках траектории.

Теорема 7 [36]. *Множество $\mathcal{Q}(\mu)$ является множеством типа G_δ.*

Доказательство. Нужная оценка для множества $\mathcal{Q}(\mu)$ вытекает из представления

$$\mathcal{Q}(\mu) = \bigcap_{\ell} \bigcap_{k} \bigcap_{m} \bigcup_{n\geq m} \bigcap_{i=1}^{\ell} \left\{ x \in X : \left| \mathcal{C}_n\varphi_i(x) - \int \varphi_i \, d\mu \right| < \frac{1}{k} \right\},$$

где $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая плотная последовательность в $C(X)$.

Из теорем 6 и 7 можно получить еще несколько утверждений, уточняющих структуру множества $\mathcal{R}(\mu)$ в зависимости от других свойств динамической системы. Ниже сформулировано несколько следствий, показывающих, что в типичном случае $\mathcal{R}(\mu)$ будет множеством первой категории.

Следствие 1. *Предположим, что* $\mathcal{R}(\mu)$ *плотно в* X *и найдется инвариантная мера* $\widetilde{\mu} \neq \mu$, *для которой множество* $\mathcal{Q}(\widetilde{\mu})$ *не является нигде не плотным. Тогда* $\mathcal{R}(\mu)$ *не является* G_δ*-множеством.*

Следствие 2. *Если* $\mathcal{R}(\mu)$ *плотно в* X *и найдется инвариантная мера* $\widetilde{\mu} \neq \mu$, *для которой множество* $\mathcal{Q}(\widetilde{\mu})$ *плотно, то* $\mathcal{R}(\mu)$ *является множеством первой категории.*

Следствие 3. *Пусть непрерывное отображение* $f : X \to X$ *с инвариантной мерой* μ *имеет цикл* $p \notin \mathcal{R}(\mu)$, *прообразы которого формируют плотное в* X *множество. Тогда* $\mathcal{R}(\mu)$ *является множеством первой категории.*

В заключение рассмотрим множество $\mathcal{R} = \bigcup\limits_{\mu} \mathcal{R}(\mu)$, где объединение берется по всем инвариантным мерам отображения $f : X \to X$.

Следующее утверждение соответствует теореме 3 из работы [5].

Следствие 4. *Если найдется точка* $x \notin \mathcal{R}$, *для которой множество* $\operatorname{Orb} x = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{+\infty} f^i x$ *оказывается всюду плотным в* X, *то* $\mathcal{R}$ *является множеством первой категории.*

Заметим тут же, что согласно результатам Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [11] множество $\mathcal{R}$ является множеством инвариантной меры 1, т.е. $\mu(\mathcal{R}) = 1$ для любой инвариантной меры отображения f.

Список литературы к части II

[1] *Blaya A.B., Lopez V.J.* Is trivial dynamics that trivial? // Monthly. — 2006. — **113**. — P. 109–133.

[2] *Block L.* Continuous maps of the interval with finite nonwandering set // Trans. AMS. — 1978. — **240**. — P. 221–230.

[3] *Block L., Franke J.E.* The chain recurrent set for maps of the interval // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — **87**, No. 4. — P. 723–727.

[4] *Coven E.M., Nitecki Z.* Non-wandering set of the powers of maps on the interval // Erg. Th. & Dyn. Syst. — 1981. — **1**. — P. 9–31.

[5] *Dowker Y.N.* The mean and transitive points of homeomorphisms // Ann. Math. — 1953. — **58**. — P. 123–133.

[6] *Fedorenko V.V., Sharkovsky A.N.* Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics // Intern. J. Difference Equations & Appl. — 2012. — **18**, No. 4. — P. 579–588.

[7] *Furstenberg H.* Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory. — Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press. — 1981. — 293 p.

[8] *Hilmy H.* Sur les centres d'attraction minimaux dans les systèmes dynamiques // Compositio Math. — 1936. — **3**. — P. 227—238.

[9] *Jonker L., Rand D.* Bifurcations in one dimension. I. The nonwandering set // Invent. math. — 1981. — **62**, No. 3. — P. 347–365.

[10] *Kloeden P.E.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bull. Austral. Math. Soc. — 1979. — **20**, No. 2. — P. 171–178.

[11] *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La théorie generale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes de la mécanique non linéaire // Ann. of Math. — 1937. — **38**, No. 2. — P. 65–113.

[12] *Li T.-Y., Yorke J.A.* Period three implies chaos // Monthly. — 1975. — **82**. — P. 985–992.

[13] *Misiurewicz M.* Horseshoes for mappings of the interval // Bull de l'Acad. Polonaise des Sciences, Ser. des sciences math. — 1979. — **27**, No. 2. — P. 167–169.

[14] *Misiurewicz M.* Structure of mappings of the interval with zero entropy // Publ. Math. I.H.E.S. — 1981. — **53**. — P. 1–16.

[15] *Nitecki Z.* Periodic and limit orbits and depth of the center for piecewise monotone interval maps // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — **80**, No. 3. — P. 511–513.

[16] *Nitecki Z.* Topological dynamics on the interval // Progress in Math. — Boston: Birkhauser. — 1982. — **21**. — P. 1–73.

[17] *Romanenko E.Yu.* Randomness in deterministic continuous time difference equations // Intern. J. Difference Equations & Appl. — 2010. — **16**, No. 2–3. — P. 243–268.

[18] *Romanenko E.Yu., Sharkovsky A.N.* Turbulence, ideal // Encyclopedia of Nonlinear Science (ed. Alwyn Scott). — Routledge: Taylor & Francis. — 2005. — P. 955–957.

[19] *Sharkovsky A.N.* On some properties of discrete dynamical systems // Collogue international du C.N.R.S. No. 332 sur la theorie de l'Iteration et ses applications. — Toulouse. — 1982.

[20] *Sharkovsky A.N.* "Dry" turbulence // Short Comm. of Intern. Congress of Mathematicians. — Warszawa. — 1983. — **10**, **12**. — P. 4.

[21] *Sharkovsky A.N.* "Dry" turbulence // Proc. Conf. "Nonlinear and Turbulent Processes in Physics" (ed. by Sagdeev, R.Z.). — Gordon & Breach. — 1984. — **3**. — P. 1621–1626.

[22] *Sivak A.G.* The structure of σ-limit sets for continuous mappings. — Report No. 248; Bremen: Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen.— 1991.

[23] *Sivak A.G.* On the structure of minimal attraction centers of recurrent trajectories of continuous maps of the interval // Acta Math. Univ. Comenianae. — 1994. — **LXIII**, No. 2. — P. 227–239.

[24] *Sivak A.G.* The structure of minimal attraction centers of trajectories of continuous maps of the interval // Real Analysis Exchange. — 1994/95. — **20**, No. 1. — P. 125–133.

[25] *Sivak A.G.* Each nowhere dense nonvoid closed set in R^n is a σ-limit set // Fundamenta Mathematicae. — 1996. — **149**. — P. 183–190.

[26] *Smital J., Smitalova K.* Structural stability of nonchaotic difference equations // J. Math. Anal. & Appl. — 1982. — **90**, No. 1. — P. 1–11.

[27] *Stefan P.* A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line // Commun. Math. Phys. — 1977. — **54**. — P. 237–248.

[28] *Young L.S.* A closing lemma on the interval // Invent. math. — 1979. — **54**. — P. 179–187.

[29] *Алексеев В.М.* Символическая динамика. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1976. — 351 с.

[30] *Бронштейн И.У., Бурдаев В.П.* Цепная рекуррентность и расширения динамических систем // Алгебраические инварианты динамических систем (Мат. исследования, **55**). — Кишинёв: Штиинца. — 1980. — С. 3–11.

[31] *Верейкина М.Б., Шарковский А.Н.* Возвращаемость в одномерных динамических системах // Приближенные и качественные методы исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1983. — С. 35–46.

[32] *Верейкина М.Б., Шарковский А.Н.* Множество почти возвращающихся точек динамической системы // Докл. АН УССР, сер. А. — 1984. — № 1.— С. 6–9.

[33] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.–Л.: Гостехиздат. — 1949. — 550 с.

[34] *Романенко Е.Ю., Шарковский А.Н.* Динамические системы и моделирование турбулентности // Украин. матем. журн. — 2007. — **59**, No. 2. — С. 217–230.

[35] *Сивак А.Г.* Дескриптивные оценки для статистически предельных множеств динамических систем // Динамические системы и турбулентность. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1989. — С. 100–102.

[36] *Сивак А.Г.* О структуре множества траекторий, воспроизводящих инвариантную меру // Динамические системы и нелинейные явления. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1990. — С. 39–43.

[37] *Сивак А.Г.* Дескриптивные оценки множества точек, аппроксимирующих инвариантную меру // Украин. матем. журн. — 2003. — **55**, No. 6. — С. 817—823.

[38] *Федоренко В.В., Шарковский А.Н.* О сосуществовании периодических и гомоклинических траекторий // V Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений, Тезисы докладов. — Кишинев. — 1979. — С. 174–175.

[39] *Федоренко В.В.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством почти периодических точек // Investigations on theoretical aspects in mathematics. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1985. — С. 79.

[40] *Федоренко В.В., Шарковский А.Н.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек // Исследования дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1980. — С. 137–145.

[41] *Федоренко В.В., Шарковский А.Н.* О сосуществовании гомоклинических и периодических траекторий // Нелинейная динамика. — 2010. — **6**, № 1. — С. 207–217.

[42] *Шарковский А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Украин. матем. журн. — 1964. — **16**, № 1. — С. 61–71.

[43] *Шарковський О.М.* Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямої в себе // Допов. АН УРСР. — 1964. — № 7. — С. 865–868.

[44] *Шарковский А.Н.* Притягивающие и притягивающиеся множества // Докл. Акад. наук СССР. — 1965. — **160**. — С. 1036–1038; English transl.: Soviet Math. Dokl. — 1965. — **6**. — P. 268—270.

[45] *Шарковский А.Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // Украин. матем. журн. — 1965. — **17**, № 3. — С. 104–111.

[46] *Шарковский А.Н.* Поведение отображения в окрестности притягивающего множества // Украин. матем. журн. — 1966. — **18**, № 2. — С. 60–83.

[47] *Шарковский А.Н.* Частично упорядоченная система притягивающих множеств // Докл. АН СССР. — 1966. — **170**, № 6. — С. 1276–1278.

[48] *Шарковський О.М.* Про одну теорему Дж.Біркгофа // Допов. АН УРСР. — 1967. — № 5. — С. 429–432.

[49] *Шарковский А.Н.* Об ω-предельных множествах дискретных динамических систем. — Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. — Киев. — 1967. — 9 с.

[50] *Шарковский А.Н.* Притягивающие множества, не содержащие циклов // Украин. матем. журн. — 1968. — **20**, № 1. — С. 136–142.

[51] *Шарковский А.Н.* О проблеме изоморфизма динамических систем // Качественные методы теории нелинейных колебаний, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев, 25 авг. – 4 сент. 1969 г.). — Киев: Наукова думка. — 1970. — **2**. — С. 541–545.

[52] *Шарковский А.Н.* Структурная теория дифференцируемых динамических систем и слабо неблуждающие точки // VII Intern. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen (Berlin, 1975). — Berlin: Akademie-Verlag. — 1977. — P. 193–200; Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math., Naturwiss., Techn. — 1977. — No. 4. — P. 193–200.

[53] *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка. — 1986. — 280 с.

[54] *Шарковский А.Н., Федоренко В.В.* Типы возвращаемости в простых динамических системах. — Препринт № 91.2; Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1991. — 16 с.

Предметный указатель

Н а у к о в е   в и д а н н я

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ШАРКОВСЬКИЙ Олександр Миколайович

АТРАКТОРИ ТРАЄКТОРІЙ І ЇХ БАСЕЙНИ

(російською мовою)

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2013

Художній редактор *І. Р. Сільман*
Технічний редактор *Т. С. Березяк*
Комп'ютерна верстка *Л. В. Багненко, А. Г. Сівак*

Підп. до друку 05.11.2013. Формат 60 × 90/16. Папір офс. №1.
Гарн. Computer Modern. Друк офс. Ум. друк. арк. 20,0.
Ум. фарбо-відб. 20,5. Обл.-вид. арк. 17,0.
Тираж 300 прим. Зам. № 13–901

НВП «Видавництво "Наукова думка" НАН України»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

ЗАТ фірма "Віпол"
03151 Київ 151, вул Волинська, 60
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
серія ДК № 752 від 27.12.2001

А.Н. ШАРКОВСКИЙ

АТТРАКТОРЫ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ БАССЕЙНЫ

НАУКОВА ДУМКА