Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Курікша Оксана Вікторівна

УДК 517.958

Груповий аналіз та точні розв'язки систем рівнянь математичної фізики, інваріантних відносно низькорозмірних алгебр Лі

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
член-кореспондент НАН України,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Нікітін Анатолій Глібович

Київ — 2013

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

∂_x	оператор диференціювання за змінною x
∂_i, ∂_{x_i}	оператор диференціювання за змінною x_i
D_x	оператор повного диференціювання за змінною x
D_i, D_{x_i}	оператор повного диференціювання за змінною x_i
$\Box$	оператор Даламбера
$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$	абсолютно симетричний одиничний тензор
$[X, Y]$	комутатор операторів X та Y
$\mathbf{B}$	вектор магнітного поля
$\mathbf{E}$	вектор електричного поля

Вступ

Актуальність теми. Переважна більшість реальних фізичних систем мають ті чи інші властивості регулярності чи симетрії. Тому природньо, що диференціальні рівняння, які вивчаються в математичній фізиці та моделюють реальні фізичні процеси, зазвичай також мають широку симетрію. Більш того, наявність широкої симетрії може бути одним з критеріїв вибору оптимальної математичної моделі серед деякої множини рівнянь.

Норвежський математик Софус Лі [64, 66] розробив основи апарату неперервних груп перетворень, який використовується для симетрійного аналізу диференціальних рівнянь як звичайних, так і з частинними похідними. Первинною метою Лі було створення теорії інтегрування диференціальних рівнянь, аналогічної теорії Абеля для алгебраїчних рівнянь. Проте, роль симетрії диференціальних рівнянь виявляється значно більш широкою. Вивчення груп перетворень, відносно яких інваріантна фізична система, дозволяє отримати важливу інформацію про систему без розв'язку описуючих її рівнянь. Знання групи, яку допускає рівняння або система рівнянь, дозволяє приводити їх до більш зручного для розв'язку вигляду, знаходити закони збереження, будувати сімейства розв'язків за одним відомим розв'язком. Особливу актуальність методи симетрійного аналізу набувають для нелінійних рівнянь, до яких важко або неможливо застосувати класичні методи математичної фізики.

Роботи С. Лі та його учнів поклали початок регулярному використанню методу симетрійної редукції для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними. Подальший розвиток теоретико-групових методів продовжили Г. Біркгоф [3], Л.І. Сєдов [20], Н.Х. Ібрагімов [1,6–8,36,37], Л.В. Овсянніков [15–17], П. Вінтерніц [86,87], Д. Блумен, Ю. Коул [32, 33] та інші. Саме Л.В. Овсянніков запропонував назвати цей важливий напрямок в математичній фізиці “Груповий аналіз диференціальних рівнянь”. Значний вклад в розвиток групового аналізу диференціальних рівнянь внесли і такі вітчизняні вчені, як В.І. Фущич та його учні — А.Г. Нікітін, Р.З. Жданов, Л.Ф. Баранник, М.І. Сєров, Р.О. Попович та інші [22–27, 50–53].

На сьогоднішній день вивчено симетрійні властивості багатьох важливих диференціальних рівнянь математичної фізики. Особлива актуальність та ефективність методів симетрійного аналізу полягає у тому, що їх можна застосовувати не тільки до лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, але й до нелінійних. Інколи використання групового аналізу є практично єдиною можливістю побудувати точні розв’язки складної моделі математичної фізики.

У дисертації проведена групова класифікація та знайдені точні розв’язки певних класів диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики, а саме: описані всі нормальні системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Актуальність опису таких систем полягає в тому, що вони є базовими у класичній механіці, механіці рідини та у загальній теорії відносності.

Проведено груповий аналіз складних систем математичної фізики: моделі Фрьоліха–Пайерлса і моделей аксіонної електродинаміки. Задача побудови групових розв’язків моделі Фрьоліха–Пайерлса була поставлена Д.Я. Петриною. Він побудував частинний розв’язок цієї моделі. У дисертації описані всі розв’язки, які можуть бути отримані в рамках групового аналізу. Моделі аксіонної електродинаміки є складним і цікавим об’єктом для групового аналізу, оскільки це досить складна система, дослідження якої вимагає певного узагальнення відомих підходів. Результати аналізу цієї системи можуть мати важливе прикладне значення, тому що, хоча існування аксіонів поки що немає надійних експериментальних підтверджень, вони затребувані одразу в трьох абсолютно незалежних областях сучасної науки таких, як космологія, фізика твердого тіла та квантова хромодинаміка.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках тем "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098) та "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436).

Мета і завдання дослідження. *Метою* даної роботи є класифікація систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого і другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вище за чотири, а також груповий аналіз і побудова точних розв'язків моделі Фрьоліха–Пайерлса та моделей аксіонної електродинаміки.

Об'єктом дослідження є системи звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядків, модель Фрьоліха–Пайерлса та моделі аксіонної електродинаміки, які описуються системами диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Предметом дослідження є групи симетрії, закони збереження і точні розв'язки таких рівнянь.

Методи дослідження. У роботі використаний апарат групового аналізу диференціальних рівнянь, а також сучасні результати відносно класифікації реалізацій низькорозмірних алгебр Лі, отриманих у роботі [93]. У деяких випадках довелося зробити певні узагальнення класичних алгоритмів, які можуть бути корисними і для інших моделей математичної фізики.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Проведено групову класифікацію систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі відносно до-

пустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних та нелінійних перетворень для незалежної змінної.

2. Отримано вичерпний опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі, розмірності яких не вищі за чотири.

3. Проведено груповий аналіз моделі Фрьоліха–Пайерлса для електронів, що взаємодіють з фононами при певних дискретних модах. Знайдено всі можливі редукції до звичайних диференціальних рівнянь для системи рівнянь, що описує нерівноважні стани цієї моделі, та побудовано відповідні точні розв'язки.

4. Проведено групову класифікацію та знайдено точні розв'язки моделей аксіонної електродинаміки, що відповідають усім нееквівалентним тривимірним підалгебрам алгебри Пуанкаре.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використаними для розв'язування конкретних задач теорії диференціальних рівнянь, а також при побудові моделей математичної фізики з наперед заданою симетрією.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — А.Г. Нікітіну. У роботах, які опубліковано разом зі співавторами, особистий внесок дисертанта такий. У роботах [4, 55] М.О. Нестеренко належить уточнення постановки задач, розробка методів дослідження, дисертанту — опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вище за чотири. У [78] дисертанту належить отримання точних розв'язків моделі Максвелл–Шерн–Саймона. У статтях [79, 81, 82] — проведення групового аналізу та побудова інваріантних розв'язків моделей аксіонної електродинаміки.

Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2006–2012, керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін), на науково–практичному семінарі "Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь: здобутки і перспективи (до 70-річчя з дня народження В.І. Фущича)" (Полтава, 2006), на конференції "Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики" (Київ, 2006), на семінарі "Математичні методи у статистичній механіці", присвячений пам'яті академіка Д.Я. Петрини (Київ, 2007), на науково-методичних конференціях "Могилянські читання" (Миколаїв, 2006–2012), на VII та VIII Міжнародних конференціях "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 2007, 2009), на V форумі з математичної фізики: Літня школа та конференція з сучасної математичної фізики (Белград, 2008), на Міжнародному семінарі до 75-річчя В.І. Фущича "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Київ, 2011), на Науковій конференції "Young Women in PDE" (Бонн, Германія, 2012), на Міжнародній математичній конференції присвяченій 70-ти річчю професора В.В. Кириченка (Миколаїв, 2012), на VII форумі з математичної фізики: Літня школа та конференція з сучасної математичної фізики (Белград, 2012).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у дев'яти роботах [4, 9, 10, 55, 61, 78, 79, 81, 82], шість з яких — у фахових наукових виданнях України та інших держав, що включені до переліку фахових видань, затверджених МОН України. Три роботи опубліковані без співавторів.

Структура, обсяг та зміст дисертації. Дисертація складається із змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 112 найменувань. Повний обсяг дисертації 132 сторінка, з них 12 сторінок займає список використаних джерел.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з чотирьох розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст цього розділу за підрозділами.

У першому розділі проводиться докладний огляд літератури, пов'язаної з темою дисертації, та викладаються основні елементи апарату групового аналізу, що використовуються в наступних розділах.

У другому розділі дисертації проведено групову класифікацію систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядку. Він складається з двох підрозділів. У першому підрозділі вивчено симетрійні властивості систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку наступного вигляду:

$$\dot{u}_1 = f_1(u_1, u_2), \quad \dot{u}_2 = f_2(u_1, u_2),$$

де u_a — невідомі функції від t, $\dot{u}_a = du_a/dt$, $a = 1, 2$. Для класу таких рівнянь проведено повну групову класифікацію відносно перетворень, лінійних за залежними змінними. При цьому незалежна змінна може допускати довільні, у тому числі і нелінійні перетворення. Знайдено всі нееквівалентні дво- та тривимірні алгебри симетрії для таких систем. Описаний алгоритм відшукання нелінійностей f_a та наведені результати обчислень. Отримані класи систем можуть допускати однопараметричні групи перетворень, які не виводять систему з цього класу.

У другому підрозділі представлено опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вище за чотири. Систему звичайних диференціальних рівнянь інваріантну відносно алгебри $\mathfrak{g}$ можна локально зобразити як об'єднання рівнянь, записаних у термінах диференціальних інваріантів $\mathfrak{g}$ ("регулярна" частина системи) та умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів ("сингулярна" частина). У дисертації розглянуто і регулярні, і сингулярні системи.

Досліджується питання: коли інваріантну регулярну систему двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку можна записати в нормальному вигляді

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{0.1}$$

У цьому підрозділі доводиться теорема, яка дає необхідний і достатній критерій існування системи (0.1), інваріантної відносно заданої алгебри Лі. Також розглядаються реалізації алгебр Лі, для яких регулярна інваріантна система не може бути записана в нормальній формі.

У третьому розділі розглядається модель Фрьоліха–Пайерлса, яка в одновимірному випадку описується системою зачеплених рівнянь

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(t,x) + \omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(t,x) = -4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(t,x)|^2,\\
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\right)\Psi(t,x) + W(t,x)\Psi(t,x),
\end{gathered}$$

де ω_0, m, μ, α — дійсні параметри.

Для цієї моделі проведено групову класифікацію та знайдено всі точні розв'язки, які можна отримати класичними груповими методами.

У четвертому розділі дисертації представлена групова класифікація моделей аксіонної електродинаміки. Узагальнений лагранжіан аксіонної електродинаміки має вигляд:

$$L = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - V(\theta). \tag{0.2}$$

Тут $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ — вектор-потенціал електромагнітного поля, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, θ — аксіонне поле, $p_\mu = \partial_\mu\theta$, $V(\theta)$ — функція від θ та κ — безрозмірна ненульова стала.

Рівняння Ейлера–Лагранжа, які відповідають лагранжіану (0.2), мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\mathbf{E}=\kappa\mathbf{p}\cdot\mathbf{B},\\
&\partial_0\mathbf{E}-\nabla\times\mathbf{B}=\kappa(p_0\mathbf{B}+\mathbf{p}\times\mathbf{E}),\\
&\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\\
&\partial_0\mathbf{B}+\nabla\times\mathbf{E}=0,
\end{aligned}\tag{0.3}$$

$$\Box\theta=-\kappa\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}+F.\tag{0.4}$$

Тут $\mathbf{B}$ та $\mathbf{E}$ — вектори магнітного та електричного полів, які наступним чином пов'язані з компонентами тензора електромагнітного поля: $E^a = F^{0a}$, $B^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0abc}F_{bc}$ та $F = -\frac{\partial V}{\partial\theta}$, $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$, $\nabla^a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = \overline{1,3}$.

Система (0.3), (0.4) містить сім залежних функцій B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3, θ і один довільний елемент F, який залежить від θ, тобто вона є досить складною. У результаті проведення групового аналізу знайдено, що максимальною неперервною групою інваріантності системи (0.3), (0.4) з довільною функцією $F(\theta)$ є група Пуанкаре. У випадках, коли $F = c$ та $F = b\mathrm{e}^{a\theta}$, де c, a та b — ненульові сталі, ця симетрія задається розширеними 11-параметричними групами Пуанкаре, у той час як для тривіального F група симетрій є 12-параметричною.

Використовуючи тривимірні підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре, отримано широкий клас точних розв'язків для електромагнітного та аксіонного полів. Ці розв'язки включають довільні параметри, а деякі і довільні функції. Найбільш загальні з них містять шість таких функцій.

У кінці основної частини дисертації наведено загальні висновки.

Подяки. Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівнику члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору **Нікітіну Анатолію Глібовичу** за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі, доктору фізико-математичних наук **Поповичу Роману Омеляновичу** та кандидатам фізико-математичних наук **Нестеренко Марині Олександрівні**, **Ванєєвій Олені Олександрівні** та **Бойко В'ячеславу Миколайовичу** за плідну співпрацю, підтримку та допомогу. Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, пов'язаної з темою дисертації. Також сформульовано алгоритми групової класифікації та побудови групових розв'язків диференціальних рівнянь. Результати дослідження та класифікації реалізацій алгебр Лі наведено у підрозділі 1.1. Огляд літератури, в якій розглядається груповий аналіз систем двох звичайних диференціальних рівнянь, виконано у підрозділі 1.2. У підрозділі 1.3 проаналізовано роботи, які пов'язані з рівняннями аксіонної електродинаміки та моделлю Фрьоліха–Пайерлса. Алгоритм пошуку групових розв'язків представлений у підрозділі 1.4.

1.1. Реалізації алгебр Лі

Вперше питання опису реалізацій алгебр Лі векторними полями поставив ще С. Лі, ним же отримано багато фундаментальних результатів в цій області. Реалізації алгебр Лі векторними полями має дуже широкий спектр застосувань, наприклад, до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, групової класифікації рівнянь з частинними похідними, класифікації гравітаційних полів, тощо. Побудова таких реалізацій залишається і досі актуальною (та при цьому досить складною) математичною задачею.

С. Лі провів класифікацію несингулярних алгебр Лі векторних полів, що діють у просторі однієї змінної, а також однієї та двох комплексних змінних [65,67]. У роботі [68] він вказав шлях до отримання класифікації реалізацій алгебр Лі векторними полями, які діють на дійсній площині, використовуючи оригінальні геометричні аргументи.

На початку XX століття дослідження реалізацій алгебр Лі векторними полями скінченної розмірності продовжив У. Амалді [28, 29]. Він провів класифікацію алгебр Лі векторних полів у просторі трьох змінних, але питання повноти отриманих ним реалізацій і досі залишається відкритим.

А. Гонзалес-Лопес, Н. Камран та П. Олвер прокласифікували скінченновимірні алгебри Лі диференціальних операторів першого порядку $Q = \xi^i(x)\partial_{x_i} + f(x)$ від двох комплексних змінних [56]. У роботі [57] автори впорядкували класифікацію реалізацій алгебр Лі векторних полів від двох комплексних змінних та розширили її до дійсного випадку. М. Нестеренко [75] доповнила та уточнила класифікацію отриману в [57].

Ф.М. Махмуд та П. Ліч вивчали реалізації тривимірних дійсних алгебр Лі векторними полями двох змінних та застосовували їх для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь третього порядку [74]. А. Шмукер та Г. Чіховскі розглянули реалізації чотиривимірних алгебр Лі, що не містять абелевого ідеалу [100].

Реалізації алгебри $so(3)$ вперше прокласифіковано В.І. Лагном та Р.З. Ждановим [63, 112]. Коваріантні реалізації цікавих з фізичної точки зору алгебр Лі побудовано в роботах [5, 46–50, 63, 70, 71, 110, 112]. Повний опис реалізацій алгебри Галілея у просторі двох залежних і двох незалежних змінних знайдено в [49, 99]. Скінченновимірні векторні реалізації алгебри Галілея описані у роботі [39].

Скінченновимірні алгебри поліноміальних векторних полів від n дійсних змінних розмірності не вище трьох, які містять векторні поля ∂_{x_i} $(i = \overline{1,n})$ описані у роботі [60]. Скінченновимірні алгебри Лі поліноміальних векторних полів від n змінних, які містять векторні поля $\partial_{x_i}(i = \overline{1,n})$ та $x_i\partial_{x_i}$ були розглянуті Г. Постом [94–96].

Попередні класифікації реалізацій дійсних тривимірних та чотиривимірних алгебр Лі були зроблені у роботах [72, 76]. Повну класифікацію таких реалізацій векторними полями з довільною фіксованою кількістю змінних отримано в [12, 14, 93], детальна класифікація реалізацій дійсних нерозв'язних алгебр Лі розмірностей до чотирьох включно з повними доведеннями наведена у статті [77].

Реалізації алгебр Лі векторними полями широко застосовуються у загальній теорії диференціальних рівнянь, інтегруванні диференціальних рівнянь та їх систем [15, 18], у груповій класифікації звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними [31], у класифікації гравітаційних полів загального вигляду відносно груп рухів [19], у геометричній теорії керування та у теорії систем, що допускають принципи суперпозиції [35, 101].

Реалізації алгебр Лі пов'язані з теорією квазі-точно розв'язних задач квантової механіки через так званий алгебраїчний підхід до теорії розсіювання та молекулярної динаміки. Такі реалізації можна застосовувати до побудови різницевих схем для чисельних розв'язків диференціальних рівнянь [34].

Перелік можливих застосувань реалізацій алгебр Лі векторними полями не вичерпується наведеними.

1.2. Груповий аналіз звичайних диференціальних рівнянь

Груповий аналіз є ефективним інструментом при дослідженні диференціальних рівнянь. Зокрема, він надає регулярну процедуру опису класів еквівалентності, для яких можуть бути справедливі ті чи інші загальні твердження теорії диференціальних рівнянь. Найбільш вражаючі досягнення групового аналізу пов'язані зі звичайними диференціальними рівняннями. Майже усі спеціальні методи інтегрування таких рівнянь (заміна змінних, метод інтегруючого множника, тощо) насправді є частковими випадками загальної процедури, яка є складовою групового аналізу.

Основні ідеї групового аналізу сформульовані Софусом Лі ще у XIX столітті [68], ним же введене поняття “диференціального інваріанта”, яке є важливим при вивчені диференціальних рівнянь груповими методами. У роботі [69] Лі довів, що кожну невироджену інваріантну систему диференціальних рівнянь можна зобразити у термінах диференціальних інваріантів відповідної групи симетрій. У цій роботі Лі застосував диференціальні інваріанти до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Внаслідок цього теорія диференціальних інваріантів стала важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. Пізніше теорія диференціальних інваріантів та відповідний понятійний апарат були розвинуті у роботах Тресе [102,103], Овсяннікова [15] та Олвера [41, 42, 85].

Диференціальні інваріанти усіх локальних скінченновимірних груп перетворень у просторі двох комплексних змінних описано самим Лі [66]. Сучасне трактування цих результатів запропоновано у [84]. А саме, для усіх нееквівалентних реалізацій точкових та контактних скінченновимірних груп перетворень на комплексній площині побудовано функціональні базиси диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання.

Дійсні скінченновимірні алгебри Лі контактних векторних полів та їх диференціальні інваріанти повністю прокласифіковано Дубровим та Комраковим [40]. Диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у випадку довільної кількості залежних та незалежних змінних досліджено Поповичем і Бойко у роботі [91].

У дисертаційній роботі теорію диференціальних інваріантів застосовано для вичерпного опису регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. А саме, однією з задач, що розв'язані у дисертації, є знаходження усіх систем вигляду

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{1.1}$$

які інваріантні відносно дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі.

Зокрема, серед рівнянь вигляду (1.1) містяться усі ньютонівські і геодезичні системи [43, 73]. Дослідження усіх можливих симетрій таких систем є надзвичайно складною задачею. Тому у багатьох роботах виконувалася групова класифікація лише часткових випадків системи (1.1).

Даміану та Софоклеус в [38] знайшли групи точкових перетворень автономних гамільтонових систем з двома степенями вільності. Вони розглядали системи, записані у Ньютонівській формі

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

з потенціал-функцією $V = V(x, y)$.

Вперше точкові симетрії систем двох лінійних рівнянь другого порядку були розглянуті Горрінгом та Лічем [58], пізніше Вафо Сохом та Махмудом [106]. Вафо Сох та Махмуд розглядали критерій лінеаризації [105] та канонічні форми [104] систем вигляду (1.1), але, на жаль, їх роботи базуються на помилковій класифікації векторних полів і внаслідок цього містять ряд хибних тверджень. Детальний аналіз цих помилок можна знайти в [92].

1.3. Рівняння аксіонної електродинаміки та модель Фрьоліха–Пайерлса

Груповий аналіз диференціальних рівнянь є фундаментальною гілкою математики, яка включає багато важливих і змістовних внутрішніх проблем. Але, можливо, найбільш приваблива риса групового аналізу полягає у тому, що він включає потужні методи дослідження і побудови точних розв'язків складних моделей математичної фізики. Інколи використання групового аналізу є практично єдиною можливістю побудувати такі розв'язки.

Основи групового аналізу були закладені великим норвежським математиком С. Лі [64–69]. Друге життя цієї теорії почалося завдяки зусиллям Л.В. Овсяннікова [15–17] та його численних учнів, які створили сучасні потужні методи групового аналізу. Важливий внесок у розвиток групового аналізу зроблено школою В.І. Фущича [22–27, 45, 46, 48–53].

Слід підкреслити, що класичний алгоритм Лі не дає можливості знайти всі групові розв'язки диференціальних рівнянь. Зокрема можливість побудови таких розв'язків пов'язана з певними умовами на ранг представлення алгебр Лі, що відповідає симетрії заданого рівняння. Були створені методи подолання цих труднощів (метод частинно інваріантних розв'язків Овсяннікова та умова слабкої трансверсальності, запропонована Грюндландом, Темпестою та Вінтерніцем [59]). Ці методи значно розширили можливості побудови точних розв'язків, але для деяких складних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними вони виявляються недостатньо ефективними.

У дисертації проведено групову класифікацію та побудовано точні розв'язки складної моделі математичної фізики, що має назву аксіонна електродинаміка. Важливість цієї моделі може бути обгрунтована наступними міркуваннями. Фундаментальна теорія мікросвіту, що зветься квантовою хромодинамікою передбачає порушення симетрії відносно перетворень комбінованої інверсії CP при взаємодії кварків. Оскільки це порушення ніколи не було підтверджено експериментально, довелося шукати можливі корекції цієї теорії. У роботі [89] було побудовано таку корекцію, яка передбачала існування додаткового псевдоскалярного поля, що було названо полем аксіонів. Надалі аксіонна електродинаміка була предметом дослідження в роботах [98, 107–109].

Зараз аксіони є основними кандидатами на роль частинок, що формують темну матерію. Додаткові аргументи на користь існування аксіонів були знайдені у фізиці твердого тіла [97]. Таким чином, хоча існування аксіонів поки що не має надійних експериментальних підтверджень, вони затребувані одразу в трьох абсолютно незалежних областях сучасної науки: космології, квантової хромодинаміці та фізиці твердого тіла.

Рівняння аксіонної електродинаміки виявились також досить цікавим об'єктом групового аналізу. Побудова їх точних розв'язків стала можливою тільки після певного узагальнення існуючих підходів, запропонованого у дисертації, яке може бути застосоване також до інших моделей математичної фізики.

Ще одним об'єктом групового аналізу, що вивчається в дисертації є модель Фрьоліха–Пайерлса, яка описує взаємодію електронів з фононами. У роботі Д.Я. Петрини [90] було знайдено частинний розв'язок цієї моделі, причому це розв'язок солітонного типу. У дисертації знайдено всі можливі редукції до звичайних диференціальних рівнянь цієї моделі, які можна отримати класичними груповими методами та побудовано сім'ї точних розв'язків. Вони включають частинний точний розв'язок, отриманий Д.Я. Петриною, а також досить широкий клас нових розв'язків. Зауважимо, що задача відшукання групових розв'язків була поставлена самим Д.Я. Петриною незадовго до його смерті.

1.4. Алгоритм пошуку групових розв'язків

Алгоритм побудови групових розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними започаткував Софус Лі. Його можна сформулювати наступним чином [11, 15, 18]:

- Знайти базис максимальної алгебри Лі A_m, яка відповідає неперервним локальним симетріям рівняння.
- Знайти оптимальну систему підалгебр SA_μ алгебри A_m. У випадку диференціальних рівнянь з частинними похідними з чотирма незалежними змінними доцільно обмежитися тривимірни-

ми підалгебрами. Їх базисні елементи мають уніфіковану форму $Q_i = \xi_i^\mu \partial_\mu + \varphi_i^k \partial_{u_k},\ i = 1, 2, 3$, де u_k — залежні змінні.

- Будь-яка тривимірна підалгебра SA_μ, базисні елементи якої задовольняють умови

$$\operatorname{rank}\{\xi_i^\mu\} = \operatorname{rank}\{\xi_i^\mu, \varphi_i^k\} \tag{1.2}$$

та

$$\operatorname{rank}\{\xi_i^\mu\} = 3 \tag{1.3}$$

може бути використана для отримання заміни змінних, яка редукує систему диференціальних рівнянь з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь. Нові змінні включають всі інваріанти трипараметричних груп Лі, відповідних оптимальним підалгебрам SA_μ.

- Розв'язуючи, якщо це можливо, отримані звичайні диференціальні рівняння, дістаємо точний (частинний) розв'язок вихідних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

- Застосовуючи до цього розв'язку загальні перетворення групи симетрій можна отримати множину точних розв'язків, залежних від додаткових довільних параметрів.

Практична реалізація цього алгоритму включає кілька нетривіальних кроків. По-перше, знаходження групи симетрії для системи із семи диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка включає довільну функцію. По-друге, не всі підалгебри отриманої алгебри задовольняють умову (1.3), для таких випадків потрібно накласти такі додаткові умови на залежні змінні, при яких рівняння (1.2) буде виконуватися. Ця ідея використовується в підході слабкої трансверсальності, запропонованому у роботі [59].

Алгоритм цього підходу коротко можна подати в наступному вигляді:

- Рівняння (1.2) розглядається як додаткова умова, яка додається до вихідної системи.

- Розв'язуючи (1.2), отримаємо певні умови для функцій u_k.

- Підставляємо отримані вирази в Q_i та вимагаємо, щоб умова (1.2) задовольнялась. При цьому отримуємо додаткові обмеження для функцій u_k.

- Підставляємо отримані вирази у вихідну систему. Оскільки тепер умова (1.2) буде виконуватись, отримане рівняння редукується до рівняння з меншою кількістю змінних.

Метод слабкої трансверсальності є частинним випадком більш загального підходу Л.В. Овсяннікова, в якому використовуються так званні частинно інваріантні розв'язки. Цей метод є конструктивним, але дозволяє отримати далеко не всі розв'язки, які можуть бути знайдені груповими методами. У дисертації запропонований і використаний узагальнений метод слабкої трансверсальності.

РОЗДІЛ 2

Груповий аналіз систем двох звичайних диференціальних рівнянь

Цей розділ присвячено груповому аналізу систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого та другого порядку.

У підрозділі 2.1 вивчено симетрійні властивості систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку наступного вигляду:

$$\dot{u}_1 = f_1(u_1, u_2), \quad \dot{u}_2 = f_2(u_1, u_2), \tag{2.1}$$

де u_a — невідомі функції від t, $\dot{u}_a = du_a/dt$, $a = 1, 2$.

Для класу рівнянь (2.1) проведено повну групову класифікацію відносно перетворень, лінійних за залежними змінними. При цьому незалежна змінна може допускати нелінійні перетворення. У підрозділі 2.1.1 знайдено всі нееквівалентні дво- та тривимірні алгебри симетрії для системи (2.1). У підрозділі 2.1.2 описаний алгоритм відшукання нелінійностей f_a та наведені результати обчислень. Отримані класи систем можуть допускати додаткові однопараметричні групи перетворень еквівалентності, які не виводять систему з цього класу. Такі перетворення розглядаються у підрозділі 2.1.3. Приклад інтегрування систем вигляду (2.1), що допускають групові перетворення, розглянуто у підрозділі 2.1.4.

У підрозділі 2.2 представлено опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірності не вище за чотири. У підрозділі 2.2.1 наведено необхідні поняття та твердження, що стосуються диференціальних інваріантів. У підрозділі 2.2.2 представлено частину класифікації реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі трьох змінних відповідно до класифікації представленої у роботі [92]. У підрозділі 2.2.3 розглянуто приклад побудови інваріантної системи. У підрозділах 2.2.4–2.2.6 представлені системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що інваріантні відносно алгебр розмірностей не вище за чотири.

У підрозділі 2.3 підсумовано отримані результати та наведено деякі фізично важливі системи, що зводяться до описаних.

2.1. Системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантні відносно лінійних реалізацій алгебр Лі

2.1.1. Ліївські симетрії. Добре відомо, що рівняння (2.1) мають нескінчену симетрію, яка, на жаль, не може бути описана конструктивно [15]. Проте, можна провести групову класифікацію таких рівнянь, якщо накласти певні апріорні обмеження на клас симетрій.

Ми провели повну групову класифікацію рівнянь вигляду (2.1) відносно допустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних u_a. При цьому незалежна змінна може допускати довільні, у тому числі і нелінійні перетворення.

Задача опису можливих груп симетрій та відповідних нелінійних членів f_a навіть у випадку лінійних перетворень залишається дуже складною. Використовуючи ідеї, які запропоновано та реалізовано у роботах [54,80,111], для розв'язання цієї задачі спочатку визначимо загальний вигляд базисних елементів алгебр Лі, які відповідають цим симетріям, а потім використовуємо умову інваріантності відносно цих алгебр для обчислення f_a.

Оскільки обидві частини рівнянь (2.1) не залежать від t явно, то ці рівняння з довільними функціями f_1 та f_2 допускають очевидну симетрію відносно зсуву по незалежній змінній t. Відповідний інфінітезимальний оператор X_0 є оператором диференціювання за цією змінною:

$$X_0 = \partial_t. \tag{2.2}$$

Інші оператори симетрії будемо шукати у вигляді:

$$X = \eta\partial_t + \pi^a\partial_{u_a}, \tag{2.3}$$

де $\pi^a = \pi^{ab}u_b + \omega^a$, а η, π^{ab}, ω^a — функції від незалежної змінної t. Тут і надалі по індексам, що повторюються відбувається сумування.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти всі нееквівалентні двовимірні алгебри симетрії для системи (2.1), що включають інфінітезимальні оператори X_0 та X. За умовою

$$[X_0, X] = \alpha X_0 + \beta X, \tag{2.4}$$

де α і β — дійсні сталі.

Перетворення еквівалентності, що зберігають форму рівнянь (2.1) задаються наступною формулою:

$$u_a \to \Lambda^{ab}u_b + \varphi^a, \tag{2.5}$$

де φ^a — довільні сталі, та Λ^{ab} — постійна невироджена матриця.

Підставивши (2.3) у (2.4) отримаємо визначальну систему рівнянь:

$$\dot{\eta} = \alpha + \beta\eta,$$
$$\dot{\pi}^{ab} = \beta\pi^{ab},$$
$$\dot{\omega}^a = \beta\omega^a.$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо функції η, π^{ab} та ω^a, які визначають інфінітезимальний оператор X вигляду (2.3). Результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2.1. *З точністю до перетворень* (2.5) *існує тільки шість нееквівалентних інфінітезимальних операторів X, що задовольняють умові* (2.4)*:*

$$X_1 = \mu t\partial_t - u_1\partial_{u_1} - \nu u_2\partial_{u_2},$$

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \mu t\partial_t - \partial_{u_1} - u_2\partial_{u_2},\\
X_3 &= \mu t\partial_t - \nu\partial_{u_1} - \partial_{u_2},\\
X_4 &= e^{\lambda t}\left(u_1\partial_{u_1} + \nu u_2\partial_{u_2}\right),\\
X_5 &= e^{\lambda t}\left(\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}\right),\\
X_6 &= e^{\lambda t}(\mu\partial_{u_1} + \partial_{u_2}),
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

де μ, ν та λ — довільні константи.

Наступний крок — це побудова тривимірних алгебр Лі, що включають інфінітезимальний оператор X_0 та два інфінітезимальні оператори загального вигляду (2.3) за умови

$$
[X_0, X_a] = \alpha_a X_0 + \beta_{ab}X_b, \quad [X_1, X_2] = \alpha_0 X_0 + \beta_{0b}X_b. \tag{2.7}
$$

Аналогічно, підставивши ці два інфінітезимальні оператори загального вигляду (2.3) в умови (2.7), отримаємо визначальну систему рівнянь, розв'язавши яку знайдемо функції η, π^{ab} та ω^a. В результаті приходимо до такого твердження.

Теорема 2.2. *Існує 42 нееквівалентні реалізації тривимірних алгебр Лі у класі* (2.2), (2.3) *для систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду* (2.1). *Базисні елементи цих реалізацій включають інфінітезимальний оператор X_0 та одну з наступних пар інфінітезимальних операторів:*

$$
\begin{aligned}
&R_1: \quad \mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + \nu t u_2\partial_{u_2}, \quad X_7 = u_2\partial_{u_2};\\
&R_2: \quad X_8 = \mu t\partial_t - u_1\partial_{u_1}, \quad X_9 = \nu t\partial_t - u_2\partial_{u_2};\\
&R_3: \quad F_1u_1\partial_{u_1} + G_1u_2\partial_{u_2}, \quad F_2u_1\partial_{u_1} + G_2u_2\partial_{u_2};\\
&R_4: \quad X_{10} = \mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + \nu t\partial_{u_2}, \quad X_{11} = \partial_{u_2};\\
&R_5: \quad \mu t\partial_t + \nu t u_1\partial_{u_1} + \partial_{u_2}, \quad X_{12} = u_1\partial_{u_1};\\
&R_6: \quad (F_1 + G_1u_1)\partial_{u_2}, \quad (F_2 + G_2u_1)\partial_{u_2};\\
&R_7: \quad F_1u_1\partial_{u_1} + G_1\partial_{u_2}, \quad F_2u_1\partial_{u_1} + G_2\partial_{u_2};\\
&R_8: \quad X_{11}, \quad X_{13} = \mu t\partial_t + \partial_{u_1} + \nu t\partial_{u_2};
\end{aligned}
$$

$R_9: \quad X_{14} = \partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}, \quad \mu t\partial_t + X_{11} + \nu t X_{14};$

$R_{10}: \quad X_{11}, \quad X_{15} = \mu t\partial_t + (\nu t + u_1)\partial_{u_2};$

$R_{11}: \quad F_1X_{11} + G_1X_{14}, \quad F_2X_{11} + G_2X_{14};$

$R_{12}: \quad \mu t\partial_t + (u_1 + \nu t)\partial_{u_1} + \lambda u_2\partial_{u_2}, \quad X_{16} = \partial_{u_1};$

$R_{13}: \quad X_{17} = (\mu u_1 - u_2)\partial_{u_1} + (u_1 + \mu u_2)\partial_{u_2}, \quad \lambda t\partial_t + X_{18} + \nu t X_{17};$

$R_{14}: \quad X_{18} = u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}, \quad \lambda t\partial_t + X_{17} + \nu t X_{18};$

$R_{15}: \quad X_{19} = u_1\partial_{u_2}, \quad \mu t\partial_t + X_{20} + \nu t X_{19};$

$R_{16}: \quad X_{19}, \quad \mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + (\lambda u_2 + \nu t u_1)\partial_{u_2}, \quad \lambda \neq 1;$

$R_{17}: \quad \mu t\partial_t + X_{14} + \nu t(X_7 + X_{18}), \quad X_7 + X_{18};$

$R_{18}: \quad -X_{19}, \quad \mu t\partial_t + u_1\partial_{u_1} + (1 - \nu t u_1)\partial_{u_2};$

$R_{19}: \quad X_1|_{\nu=1} - X_{19}, \quad X_{21} = \nu t\partial_t - u_1\partial_{u_2};$

$R_{20}: \quad F_1X_{20} + G_1X_{19}, \quad F_2X_{20} + G_2X_{19};$

$R_{21}: \quad F_1X_{18} + G_1X_{17}, \quad F_2X_{18} + G_2X_{17};$

$R_{22}: \quad X_8, \quad X_{22} = \nu t\partial_t - \partial_{u_2};$

$R_{23}: \quad X_{22}, \quad X_{23} = \mu t\partial_t - \partial_{u_1};$

$R_{24}: \quad X_{21}, \quad X_{23}; \qquad R_{25}: \quad X_{11}, \quad X_{13} + X_{19};$

$R_{26}: \quad X_{22}, \quad X_{23} - X_{19}; \qquad R_{27}: \quad X_1, \quad X_{16};$

$R_{28}: \quad X_1|_{\nu=1}, \quad X_{24} = \lambda\partial_{u_1} + \partial_{u_2};$

$R_{29}: \quad X_{24}, \quad \mu t\partial_t + \nu t X_{24} + X_{18}; \qquad R_{30}: \quad X_2, \quad X_{11};$

$R_{31}: \quad X_1|_{\nu=1}, \quad \nu t\partial_t - X_{17};$

$R_{32}: \quad F_1\partial_{u_1} + G_1\partial_{u_2}, \quad F_2\partial_{u_1} + G_2\partial_{u_2};$

$R_{33}: \quad X_1|_{\nu\neq1}, \quad X_{19}; \qquad R_{34}: \quad X_7 + X_{13}, \quad X_{11};$

$R_{35}: \quad X_8 - X_{11}, \quad -X_{19}; \qquad R_{36}: \quad X_9, \quad X_{19};$

$R_{37}: \quad X_{18}, \quad X_{23} - X_{19};$

$R_{38}: \quad X_{20} = u_1\partial_{u_1} + (u_1 + u_2)\partial_{u_2}, \quad \mu t\partial_t + \nu t X_{20} + X_{19};$

$R_{39}: \quad X_{19}, \quad \mu t\partial_t + (\nu t u_1 + u_2)\partial_{u_2};$

$$R_{40}: \quad X_1|_{\nu=1} - X_{19}, \quad X_{11}; \qquad R_{41}: \quad X_{11}, \quad X_{15}+X_{18};$$
$$R_{42}: \quad X_{19}, \quad \mu t\partial_t + (1+\nu t u_1)\partial_{u_2}.$$

Тут (F_1, G_1), (F_2, G_2) *— набори фундаментальних розв'язків системи* $F_t = \lambda F + \nu G$, $G_t = \sigma F + \gamma G$, *де* λ, ν, σ, γ *— довільні сталі.*

2.1.2. Алгоритм пошуку нелінійностей f_a. Запишемо систему звичайних диференціальних рівнянь (2.1) у вигляді

$$F_a(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2) = \dot{u}_a - f_a(u_1, u_2) = 0. \tag{2.8}$$

Інфінітезимальний оператор X є оператором симетрії рівняння (2.8), якщо він задовольняє критерій інваріантності [15]:

$$X^{(1)}F\Big|_{[F]} = 0,$$

де $[F]$ — многовид, що задає рівняння (2.8) у просторі джетів першого порядку над змінними t, u_1, u_2, а $X^{(1)} = X + \xi^a\partial_{\dot{u}_a}$ — перше продовження інфінітезимального оператора X. Коефіцієнти ξ^a обчислюються за формулою $\xi^a = D_t(\pi^a) - \dot{u}_a D_t(\eta)$, де $D_t = \partial_t + \dot{u}_a\partial_{u_a} + \ddot{u}_a\partial_{\dot{u}_a} + \cdots$ — інфінітезимальний оператор повного диференціювання по змінній t.

Отже, діємо продовженим інфінітезимальним оператором $X^{(1)}$ на функцію $F = (F_1, F_2)$ та прирівнюємо отриманий вираз до нуля:

$$X^{(1)}F = 0, \quad \text{або} \quad \dot{\pi}^{ab}u_b + \pi^{ab}\dot{u}_b + \dot{\omega}^a - \dot{\eta}\dot{u}_a = \left(\pi^{cb}u_b + \omega^c\right)\frac{\partial f_a}{\partial u_c}.$$

Переходимо на многовид $[F]$, тобто в отриманій рівності замінюємо $\dot{u}_a$ на f_a. У такий спосіб дістаємо визначальні рівняння на нелінійності f_a:

$$\dot{\pi}^{ab}u_b + \pi^{ab}f_b + \dot{\omega}^a - \dot{\eta}f_a = \left(\pi^{cb}u_b + \omega^c\right)\frac{\partial f_a}{\partial u_c}. \tag{2.9}$$

Для кожного випадку з формули (2.6) або теореми 2.2 підставимо вирази для коефіцієнтів π^{ab}, ω^a та η у (2.9). У результаті отримуємо систему визначальних рівнянь на довільні елементи f_a. Якщо ця система має розв'язки, то система (2.1) з такими довільними елементами f_a допускає відповідну алгебру симетрії. Нижче наведемо результати обчислень, які подамо у вигляді двох теорем. Вони не включають лінійні і незачеплені системи (2.1), а також системи, що відповідають випадкам $f_1 f_2 = 0$, оскільки такі системи є інтегровними незалежно від їх симетрій.

Теорема 2.3. *Нееквівалентні системи вигляду* (2.1)*, інваріантні відносно двовимірних алгебр Лі, перерахованих в теоремі* 2.1*, задаються наступними формулами:*

$$
\begin{aligned}
&X_1: \quad \dot u_1 = u_1^{1+\mu} F_1\left(u_2 u_1^{-\nu}\right), \quad \dot u_2 = u_1^{\nu+\mu} F_2\left(u_2 u_1^{-\nu}\right);\\
&X_2: \quad \dot u_1 = u_2^{\mu} F_1\left(u_2 e^{-u_1}\right), \quad \dot u_2 = u_2^{\mu+1} F_2\left(u_2 e^{-u_1}\right);\\
&X_3: \quad \dot u_1 = e^{\mu u_2} F_1\left(\nu u_2 - u_1\right), \quad \dot u_2 = e^{\mu u_2} F_2\left(\nu u_2 - u_1\right);\\
&X_4: \quad \dot u_1 = u_1\big(\lambda \ln|u_1| + F_1\big(u_2 u_1^{-\nu}\big)\big), \quad \dot u_2 = u_2\big(\lambda \ln|u_2| + F_2\big(u_2 u_1^{-\nu}\big)\big);\\
&X_5: \quad \dot u_1 = \lambda u_1 + F_1\left(u_2 e^{-u_1}\right), \quad \dot u_2 = \lambda u_1 u_2 + u_2 F_2\left(u_2 e^{-u_1}\right);\\
&X_6: \quad \dot u_1 = \lambda u_1 + F_1\left(\nu u_2 - u_1\right), \quad \dot u_2 = \lambda u_2 + F_2\left(\nu u_2 - u_1\right).
\end{aligned}
$$

Теорема 2.4. *Нееквівалентні системи вигляду* (2.1)*, інваріантні відносно тривимірних алгебр Лі, вичерпуються наступним переліком. Перед кожною системою наведена реалізація R_n алгебр Лі з теореми* 2.2.

$$
\begin{aligned}
&R_2: \quad \dot u_1 = C_1 u_1^{1+\mu} u_2^{\nu}, \quad \dot u_2 = C_2 u_1^{\mu} u_2^{1+\nu};\\
&R_3: \quad \dot u_1 = u_1(\lambda \ln u_1 + \nu \ln u_2 + C_1), \quad \dot u_2 = u_2(\sigma \ln u_1 + \gamma \ln u_2 + C_2);\\
&R_7: \quad \dot u_1 = u_1\left(\lambda \ln u_1 + \nu u_2 + C_1\right), \quad \dot u_2 = \sigma \ln u_1 + \gamma u_2 + C_2;\\
&R_9: \ \text{при } \mu \neq 0: \quad \dot u_1 = \frac{\nu}{\mu} + C_1 e^{\frac{\mu}{2}u_1^2 - \mu u_2},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \dot u_2 = \frac{\nu}{\mu} u_1 + (C_1 u_1 + C_2) e^{\frac{\mu}{2}u_1^2 - \mu u_2};\\
&\qquad \text{при } \mu = 0: \quad \dot u_1 = \nu(2u_2 - u_1^2) + C_1,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \dot u_2 = 2\nu u_1(2u_2 - u_1^2) + u_1 + C_2;\\
&R_{11}: \quad \dot u_1 = -\frac{\sigma}{2} u_1^2 + \gamma u_1 + \sigma u_2 + C_1,\\
&\qquad \dot u_2 = -\frac{\sigma}{2} u_1^3 + \left(\gamma - \frac{\lambda}{2}\right) u_1^2 + (\nu + C_1 + \sigma u_2) u_1 + \lambda u_2 + C_2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&R_{13}, \quad \lambda = 0: \\
&\quad \dot{u}_1 = \frac{\nu}{2}(\mu u_1 - u_2)\ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) + C_1 u_1 - \mu\nu(\mu u_1 - u_2)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + (C_2 + \nu)u_2, \\
&\quad \dot{u}_2 = \frac{\nu}{2}(\mu u_2 + u_1)\ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) + C_1 u_2 - \mu\nu(\mu u_2 + u_1)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} - (C_2 + \nu)u_1; \\
&R_{14}, \quad \lambda = 0: \\
&\quad \dot{u}_1 = \nu u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1 u_1 + C_2 u_2, \quad \dot{u}_2 = \nu u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1 u_2 - C_2 u_1; \\
&R_{17}, \quad \mu = \nu = 0: \qquad\qquad (2.10) \\
&\quad \dot{u}_1 = C_1\sqrt{u_1^2 - 2u_2}, \quad \dot{u}_2 = C_1 u_1\sqrt{u_1^2 - 2u_2} + C_2(u_1^2 - 2u_2); \\
&R_{19}: \quad \dot{u}_1 = C_1 u_1^{\mu-\nu+1} e^{\nu\frac{u_2}{u_1}}, \quad \dot{u}_2 = \left(C_1 u_1^{\mu-\nu} u_2 + C_2 u_1^{\mu-\nu+1}\right) e^{\nu\frac{u_2}{u_1}}; \\
&R_{20}: \quad \dot{u}_1 = u_1\left((\lambda - \nu)\ln u_1 + C_1\right) + \nu u_2, \\
&\quad \dot{u}_2 = u_1\left((\lambda - \nu - \gamma + \sigma)\ln u_1 + C_2\right) + u_2\left(\nu + \gamma + (\lambda - \nu)\ln u_1 + C_1 + \nu\frac{u_2}{u_1}\right); \\
&R_{21}: \quad \dot{u}_1 = u_1 g_1 + u_2 g_2, \quad \dot{u}_2 = u_2 g_1 - u_1 g_2, \\
&\quad \text{де } g_1 = \frac{\mu\sigma + \lambda}{2}\ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) + \left(\nu + \mu(\gamma - \lambda) - \sigma\mu^2\right)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1, \\
&\quad\quad g_2 = -\frac{\sigma}{2}\ln\left(u_1^2 + u_2^2\right) + (\mu\sigma - \gamma)\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + (C_2 + \sigma); \\
&R_{22}: \quad \dot{u}_1 = C_1 u_1^{1+\mu} e^{\nu u_2}, \quad \dot{u}_2 = C_2 u_1^{\mu} e^{\nu u_2}; \\
&R_{26}: \quad \dot{u}_1 = C_1 e^{\frac{u_1}{2}(2\nu - \mu u_1) + \mu u_2}, \quad \dot{u}_2 = (C_1 u_1 + C_2) e^{\frac{u_1}{2}(2\nu - \mu u_1) + \mu u_2}; \\
&R_{38}, \quad \mu \neq 0: \quad \dot{u}_1 = \frac{\nu}{\mu}u_1 + C_1 u_1^{\mu+1} e^{-\frac{\mu u_2}{u_1}}, \\
&\qquad\qquad\qquad \dot{u}_2 = \frac{\nu}{\mu}(u_1 + u_2) + (C_1 u_2 + C_2 u_1)\, u_1^{\mu} e^{-\frac{\mu u_2}{u_1}}; \\
&\quad \mu = 0: \quad \dot{u}_1 = \nu u_2 + u_1(C_1 - \nu\ln|u_1|), \\
&\qquad\qquad\qquad \dot{u}_2 = C_2 u_1 - \nu(u_1 + u_2)\ln|u_1| + (\nu + C_1 + \frac{\nu u_2}{u_1})u_2.
\end{aligned}
$$

2.1.3. Перетворення еквівалентності. Ми знайшли повний список систем рівнянь вигляду (2.1), інваріантних відносно дво- та тривимірних алгебр Лі. Деякі з цих рівнянь можуть бути спрощені за допомогою перетворень еквівалентності, які не виводять систему з цього класу. Ці перетворення породжуються інфінітезимальними операторами наступного загального вигляду

$$Q = \varphi(t)\partial_t + (\alpha_{ab}(t)u_b + \beta_a(t))\partial_{u_a}.$$

Оператор Q генерує перетворення еквівалентності тоді і тільки тоді, коли комутатори його першого продовження $Q^{(1)}$ з першими продовженнями знайдених (лінійно незалежних) інфінітезимальних операторів лівської симетрії Y_s, $s = \overline{1,l}$, систем з класу є лінійними комбінаціями тих же інфінітезимальних операторів з функціональними коефіцієнтами, тобто

$$[Q^{(1)}, Y_s] = \gamma_{ss'}(t, u_1, u_2)Y_{s'}, \quad s = \overline{1,l}. \tag{2.11}$$

Як приклад розглянемо такі перетворення для системи, інваріантної відносно реалізації R_{14}, (див. (2.10)):

$$\begin{aligned} \dot u_1 &= \nu u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1u_1 + C_2u_2,\\ \dot u_2 &= \nu u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1} + C_1u_2 - C_2u_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Вважаємо, що $\nu \neq 0$, оскільки в протилежному випадку маємо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Система (2.12) допускає тривимірну алгебру Лі з інфінітезимальними операторами

$$X_0 = \partial_t, \quad X_1 = u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}, \quad X_2 = \nu t X_1 - u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2}. \tag{2.13}$$

Запишемо їх перші продовження

$$\begin{aligned} &Y_0 = \partial_t, \quad Y_1 = X_1 + \dot u_1\partial_{\dot u_1} + \dot u_2\partial_{\dot u_2},\\ &Y_2 = X_2 + (\nu u_1 + \nu t\dot u_1 - \dot u_2)\partial_{\dot u_1} + (\nu u_2 + \nu t\dot u_2 + \dot u_1)\partial_{\dot u_2}. \end{aligned}$$

Перше продовження інфінітезимального оператора Q має вигляд

$$Q^{(1)} = Q + (\dot\alpha_{ab}(t)u_b + \alpha_{ab}(t)\dot u_b + \dot\beta_a(t) - \dot u_a\dot\varphi(t))\partial_{\dot u_a}.$$

З рівнянь, отриманих з умови (2.11) для $s=1$, дістаємо

$$\alpha_{11}=\varkappa_{11}+\gamma_2 t+\frac{\nu\gamma_3}{2}t^2,\quad \alpha_{12}=\varkappa_{12}-\gamma_3 t,$$
$$\alpha_{21}=\varkappa_{21}+\gamma_3 t,\quad \alpha_{22}=\varkappa_{22}+\gamma_2 t+\frac{\nu\gamma_3}{2}t^2,$$
$$\varphi=\varkappa_0+\gamma_1 t,\quad \gamma_a=\mathrm{const},\quad \beta_a=\mathrm{const}.$$

Розглянувши умову (2.11) для $s=2,3$ маємо, що

$$\beta_a=0,\quad \varkappa_{11}=\varkappa_{22},\quad \varkappa_{12}=-\varkappa_{21}.$$

Отже, інфінітезимальний оператор Q є лінійною комбінацією інфінітезимальних операторів

$$\partial_t,\quad u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2},\quad t(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2})-u_2\partial_{u_1}+u_1\partial_{u_2},$$
$$t\partial_t,\quad -u_2\partial_{u_1}+u_1\partial_{u_2},\quad \frac{\nu t^2}{2}(u_1\partial_{u_1}+u_2\partial_{u_2})+t(-u_2\partial_{u_1}+u_1\partial_{u_2}).$$

Перші три інфінітезимальні оператори є операторами ліївської симетрії системи (2.12). Тому групи перетворень, які відповідають цим інфінітезимальним операторам, не змінюють систему. Останній інфінітезимальний оператор є неліївським, але породжує перетворення з групи еквівалентності.

Інфінітезимальний оператор $t\partial_t$ відповідає групі масштабних перетворень змінної t. Групу масштабних перетворень можна розширити за допомогою дискретних перетворень заміною знаку t на протилежний. За допомогою перетворення $t\to\nu t$, можна звести константу ν до 1. Тоді система (2.12) набуде вигляду

$$\begin{aligned}\dot u_1&=u_1\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}+\tilde C_1u_1+\tilde C_2u_2,\\ \dot u_2&=u_2\operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}+\tilde C_1u_2-\tilde C_2u_1,\end{aligned}\tag{2.14}$$

де $\tilde C_a=\nu^{-1}C_a$.

Інфінітезимальний оператор $-u_2\partial_{u_1}+u_1\partial_{u_2}$ відповідає групі поворотів залежних змінних. Поворот

$$u_1\to u_1\cos\tilde C_1+u_2\sin\tilde C_1,\quad u_2\to u_2\cos\tilde C_1-u_1\sin\tilde C_1$$

відображає систему (2.14) у систему такого ж вигляду, де $\tilde{C}_1 = 0$.

Розглянемо тепер інфінітезимальний оператор $\frac{\nu t^2}{2}(u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + t(-u_2\partial_{u_1} + u_1\partial_{u_2})$. Йому відповідає однопараметрична група перетворень залежних змінних

$$u_1 \to e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}}(u_1 \cos\varepsilon t - u_2 \sin\varepsilon t), \quad u_2 \to e^{\frac{\varepsilon t^2}{2}}(u_2 \cos\varepsilon t + u_1 \sin\varepsilon t).$$

Перетворення довільних елементів ν, C_a класу (2.12) задаються формулами $\nu \to \nu$, $C_1 \ \to \ C_1$, $C_2 \to C_2 - \varepsilon$. Якщо вибрати параметр $\varepsilon = \tilde{C}_2$, то система рівнянь (2.14) зведеться до вигляду:

$$\dot{u}_1 = u_1 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}, \quad \dot{u}_2 = u_2 \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}. \tag{2.15}$$

Отже, з точністю до отриманих перетворень еквівалентності замість класу систем (2.12) достатньо розглянути їх простий представник (2.15), що не включає довільних сталих. Таким же чином можна звести до більш простих й інші системи наведені у підрозділі 2.1.2, але ми надали перевагу заданню систем у більш загальній формі (2.10).

2.1.4. Інтегрування систем, що допускають групові перетворення. Якщо система звичайних диференціальних рівнянь допускає тривимірну алгебру Лі, то вона може бути проінтегрована у квадратурах з використанням стандартного алгоритму Лі. Системи, що допускають двовимірні алгебри Лі, можна звести до напівзачепленої системи, яка також інтегрується у квадратурах. Процедура інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, які допускають алгебри ліївських симетрії, відома і описана в монографіях [15, 18, 68]. Наведемо приклад її використання.

Розглянемо систему (2.12), що допускає інфінітезимальні оператори ліївської симетрії (2.13).

Введемо нові змінні $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(u_1, u_2)$ та $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(u_1, u_2)$ таким чином, щоб інфінітезимальні оператори X_1 і X_2 перетворилися на інфінітезимальні оператори зсувів по новим змінним. Такі змінні є розв'язками наступної системи рівнянь:

$$X_1\tilde{u}_1 = 1, \quad X_1\tilde{u}_2 = 0, \quad X_2\tilde{u}_1 = 0, \quad X_2\tilde{u}_2 = 1,$$

звідки $\tilde{u}_1 = \frac{1}{2}\ln(u_1^2 + u_2^2) - \nu t \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}$, $\tilde{u}_2 = \operatorname{arctg}\frac{u_2}{u_1}$. Тоді система рівнянь (2.12) та інфінітезимальні оператори (2.13) приймають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\dot{\tilde{u}}_1 = C_1 + C_2\nu t, \quad \dot{\tilde{u}}_2 = -C_2,\\
&\tilde{X}_1 = \partial_{\tilde{u}_2}, \quad \tilde{X}_2 = \partial_{\tilde{u}_1}.
\end{aligned}$$

Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь можна легко проінтегрувати:

$$\tilde{u}_1 = C_1 t + \frac{C_2\nu}{2}t^2 + C_3, \quad \tilde{u}_2 = -C_2 t + C_4.$$

Повертаючись до функцій u_1 та u_2 отримуємо розв'язок системи (2.12):

$$\begin{aligned}
&u_1 = e^{-\frac{C_2\nu}{2}t^2 + (C_4\nu + C_1)t + C_3}\cos(C_2 t - C_3),\\
&u_2 = -e^{-\frac{C_2\nu}{2}t^2 + (C_4\nu + C_1)t + C_3}\sin(C_2 t - C_3).
\end{aligned}$$

Аналогічним чином інтегруються всі системи з переліку (2.10).

2.2. Системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі

2.2.1. Диференціальні інваріанти. Задача опису диференціальних рівнянь, інваріантних відносно деякої алгебри Лі, еквівалентна знаходженню диференціальних інваріантів відповідної групи, оскільки довільна функція від таких інваріант задає диференціальне рівняння. Розглянемо r-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів з базисними інфінітезимальними операторами

$$e_i = \xi_i(t,x,y)\partial_t + \eta_i(t,x,y)\partial_x + \zeta_i(t,x,y)\partial_y.$$

Продовжену алгебру $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$ породжують диференціальні оператори

$$e_i^{(n)} = \xi_i(t,x,y)\partial_t + \eta_i(t,x,y)\partial_x + \zeta_i(t,x,y)\partial_y + \\ + \sum_{k=1}^{n} \left(\eta_i^k(t,x_{(k)},y_{(k)})\partial_{x^{(k)}} + \zeta_i^k(t,x_{(k)},y_{(k)})\partial_{y^{(k)}}\right).$$

Тут і надалі $n \geq 0$, $i = 1,\dots,r$, символи $x_{(k)}$ та $y_{(k)}$ позначають набори $(x, x', \dots, x^{(k)})$ та $(y, y', \dots, y^{(k)})$ із залежних змінних x, y та їх похідних по t порядків не вище k.

Означення 2.1. Гладку функцію $I = I(t,x_{(n)},y_{(n)})\colon \mathbb{R}^{(2n+3)} \to \mathbb{R}$ називають *диференціальним інваріантом* порядку n алгебри Лі $\mathfrak{g}$, якщо $e_i^{(n)} I(t,x_{(n)},y_{(n)}) = 0$ для продовженого базису $\{e_i^{(n)}\}$ алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$.

Розглянемо ранги

$$r_k = \mathrm{rank}\{(\xi_i, \eta_i, \eta_i^1, \dots, \eta_i^k, \zeta_i, \zeta_i^1, \dots, \zeta_i^k),\ i = 1,\dots,r\}.$$

Оскільки послідовність $\{r_k\}$ не спадає, обмежена значенням r та досягає його, то існує число $\nu = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \,|\, r_k = r\}$ та мають місце співвідношення $r_\nu = r_{\nu+1} = \dots = r$.

Важливість диференціальних інваріантів пояснюється наступним фактом. Нехай система звичайних диференціальних рівнянь інваріантна відносно алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді локально її можна зобразити як об'єднання рівнянь, записаних у термінах диференціальних інваріантів $\mathfrak{g}$ ("регулярна" частина системи) та умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів ("сингулярна" частина).

Природнім є питання чи можна вибрати мінімальний набір диференціальних інваріантів, який дозволяє отримати усі диференціальні інваріанти заданого порядку за допомогою скінченої кількості визначених операцій. Відповідь на це питання позитивна.

Означення 2.2. Максимальний набір I_n функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку не вище n (тобто інваріантів продовженої алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$) називається *універсальним диференціальним інваріантом* порядку n алгебри $\mathfrak{g}$.

У випадку однієї незалежної та двох залежних змінних розмірність простору потоків порядку n дорівнює $2n+3$. Отже кількість функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ обчислюється за формулою

$$d_n = 2n + 3 - r_n.$$

Будь-який диференціальний інваріант I порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ з необхідністю є диференціальним оператором порядку $n+l$ цієї ж алгебри, $l \geq 0$. Отже, універсальний диференціальний інваріант I_{n+l} можна отримати доповненням універсального диференціального інваріанта I_n диференціальними інваріантами вищих порядків.

Необхідним етапом вивчення регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку є побудова універсальних диференціальних інваріантів другого порядку відповідних алгебр. Зокрема, виникає проблема: коли інваріантну регулярну систему двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку можна записати в нормальному вигляді

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{2.16}$$

Наступна теорема дає необхідний і достатній критерій існування систем (2.16), інваріантної відносно заданої алгебри Лі.

Теорема 2.5. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу* (2.16) *тоді і тільки тоді, коли* $r_1 = r_2$.

Доведення. Нехай для алгебри Лі $\mathfrak{g}$ виконується рівність $r_1 = r_2$. Тоді (оскільки $d_2 - d_1 = 2$) універсальний диференціальний інваріант другого порядку I_2 містить рівно два диференціальні інваріанта $\tilde{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$ та $\hat{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$, які явно залежать від других похідних. Іншими словами $I_2 = \{I_1, \tilde{I}, \hat{I}\}$ та для функціональної незалежності вищевказаного набору має виконуватися наступна умова

$$\det \begin{pmatrix} \tilde{I}'_{\ddot{x}} & \hat{I}'_{\ddot{x}} \\ \tilde{I}'_{\ddot{y}} & \hat{I}'_{\ddot{y}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.17}$$

Помітимо, що регулярна система другого порядку, інваріантна відносно даної алгебри Лі, запишеться у вигляді

$$F(I_1,\tilde{I},\hat{I})=0,\quad G(I_1,\tilde{I},\hat{I})=0.$$

Умова (2.17) гарантує, що система локально може бути розв'язана відносно змінних $\ddot{x}$ та $\ddot{y}$

$$\ddot{x}=f(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),\quad \ddot{y}=g(t,x,y,\dot{x},\dot{y}),$$

останнє доводить достатність.

Навпаки, нехай регулярна система, інваріантна відносно алгебри Лі $\mathfrak{g}$, має вигляд (2.16), тоді функції $\tilde{I}=\ddot{x}-F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ і $\hat{I}=\ddot{y}-G(t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ є диференціальними інваріантами другого порядку, причому видно, що для цих інваріантів виконується умова (2.17). Так, $d_2-d_1=2$ та, беручи до уваги, що у випадку двох залежних та однієї незалежної змінних $d_2-d_1=(2+r_1-r_2)$, ми отримуємо $r_1=r_2$, що і треба було довести. □

Для повного опису диференціальних інваріантів фіксованої реалізації алгебри Лі досить побудувати функціональний базис диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання. Базиси диференціальних інваріантів можна знайти як частину універсального інваріанта порядку $(\nu+1)$. Конструктивна процедура побудови операторів інваріантного диференціювання виводиться безпосередньо з умови їх комутування з формально нескінченно продовженими елементами алгебри (див. [15]).

У даному розділі використано реалізації низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі не більше трьох змінних, які є частиною класифікації отриманої у [92]. Залежні та незалежну змінні було вибрано з міркувань максимального спрощення обчислень та зовнішнього вигляду систем звичайних диференціальних рівнянь. Системи, які відповідають різним виборам залежних і незалежної змінних у фіксованій реалізації, еквівалентні з точністю до перетворень годографа та перепозначення змінних.

Зауважимо також, що не всі інваріантні регулярні системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку можуть бути представлені у нормальній формі. Для відокремлення таких випадків була використана теорема 2.5.

Підсумовуючи вище сказане, запишемо алгоритм побудови систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно низькорозмірних алгебр Лі. Він складається з наступних етапів:

- Будуємо продовжені базисні елементи для алгебри, яка розглядається. Оскільки необхідно побудувати системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, то шукаємо другі продовження базисних елементів.

- Шукаємо інваріанти отриманої алгебри, тобто диференціальні інваріанти до другого порядку включно для вихідної алгебри.

- Використовуючи отримані диференціальні інваріанти, записуємо відповідну регулярну систему двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При цьому отримана система або може бути записана в нормальній формі, якщо виконується умова теореми 2.5, або не може бути записана в нормальній формі, якщо ця умова не виконується. Такі випадки розглянуті в дисертації окремо.

- Щоб записати сингулярну інваріантну систему для даної реалізаціїї, необхідно розглянути умови виродження рангів відповідних продовжених генераторів. Розв'язуючи ці умови, отримуємо шукані сингулярні системи.

2.2.2. Реалізації низькорозмірних алгебр Лі. У даному підрозділі представимо потрібну нам частину класифікації реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі трьох змінних отриманої в роботі [92]. Відповідні алгебри записані в термінах незалежної змінної t та двох залежних змінних x, y.

Реалізації одно- та двовимірних дійсних алгебр Лі. Існує три такі алгебри: одновимірна алгебра A_1 та двовимірні $2A_1$ та $A_{2.1}$. Тут і надалі nA є прямою сумою n однакових алгебр A. Алгебра $2A_1$ абелева, а $A_{2.1}$ характеризується наступним нетривіальним комутаційним співвідношенням $[e_1, e_2] = e_1$. Відповідні реалізації можуть бути задані наступними диференціальними операторами:

$$
\begin{aligned}
&A_1\colon \quad 1)\quad \partial_t;\\
&2A_1\colon \quad 1)\quad \partial_t, \quad \partial_x;\\
&\qquad\quad\ \ 2)\quad \partial_t, \quad x\partial_t;\\
&A_{2.1}, \quad [e_1, e_2] = e_1\colon\\
&\qquad\quad\ \ 1)\quad \partial_t, \quad t\partial_t + \partial_x;\\
&\qquad\quad\ \ 2)\quad \partial_t, \quad t\partial_t.
\end{aligned}
$$

Далі ми наводимо нетривіальні комутаційні співвідношення базисних елементів три- та чотиривимірних алгебр та їх реалізації.

Нетривіальні комутатори базисних елементів тривимірних розв'язних алгебр Лі та їх реалізації.

$$
\begin{aligned}
&3A_1, \ \text{нетривіальних комутаторів немає:}\\
&\qquad\quad 1)\quad \partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y;\\
&\qquad\quad 2)\quad \partial_t, \quad \partial_x, \quad y\partial_t + \varphi(y)\partial_x;\\
&\qquad\quad 3)\quad \partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t;\\
&\qquad\quad 4)\quad \partial_t, \quad x\partial_t, \quad \varphi(x)\partial_t;\\
&A_{2.1} \oplus A_1, \quad [e_1, e_2] = e_1\colon\\
&\qquad\quad 1)\quad \partial_t, \quad t\partial_t + \partial_y, \quad \partial_x;\\
&\qquad\quad 2)\quad \partial_t, \quad t\partial_t + y\partial_x, \quad \partial_x;\\
&\qquad\quad 3)\quad \partial_t, \quad t\partial_t, \quad \partial_x;
\end{aligned}
$$

4) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad x\partial_t;$

$A_{3.1}, \quad [e_2, e_3] = e_1$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + y\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t;$

$A_{3.2}, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (t+x)\,\partial_t + x\partial_x + \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (t+x)\,\partial_t + x\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t - \partial_x;$

$A_{3.3}, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x + \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t + \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t;$

$A^a_{3.4}, \quad |a| \le 1, \quad a \ne 0, 1, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = ae_2$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + ax\partial_x + \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + ax\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t + (1-a)x\partial_x;$

$A^b_{3.5}, \quad b \ge 0, \quad [e_1, e_3] = be_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + be_2$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (bt + x)\partial_t + (-t + bx)\partial_x + \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (bt + x)\partial_t + (-t + bx)\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad (b - x)t\partial_t - (1 + x^2)\partial_x.$

Нетривіальні комутатори базисних елементів дійсних нерозв'язних тривимірних алгебр Лі та їх реалізації.

$sl(2, \mathbb{R}), \quad [e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_2$:

1) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad (t^2 - x^2)\partial_t + 2tx\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad (t^2+x^2)\partial_t + 2tx\partial_x;$

4) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad t^2\partial_t + 2tx\partial_x;$

5) $\partial_t, \quad t\partial_t, \quad t^2\partial_t;$

$so(3), \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2, \quad [e_1, e_2] = e_3\colon$

1) $-\sin t \operatorname{tg} x\partial_t - \cos t\partial_x, \quad -\cos t \operatorname{tg} x\partial_t + \sin t\partial_x, \quad \partial_t;$

2) $-\sin t \operatorname{tg} x\partial_t - \cos t\partial_x + \sin t \sec x\partial_y,$

$-\cos t \operatorname{tg} x\partial_t + \sin t\partial_x + \cos t \sec x\partial_y, \quad \partial_t.$

Нетривіальні комутатори базисних елементів дійсних розкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі та їх реалізації.

$4A_1$, нетривіальних комутаторів немає:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad y\partial_t + \varphi(y)\partial_x, \quad \theta(y)\partial_t + \psi(y)\partial_x;$

2) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad \theta(x,y)\partial_t;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \varphi(x)\partial_t, \quad \psi(x)\partial_t;$

$A_{2.1} \oplus 2A_1, \quad [e_1, e_2] = e_1\colon$

1) $\partial_t, \quad t\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad t\partial_t + y\partial_y, \quad \partial_x, \quad y\partial_t;$

3) $\partial_t, \quad t\partial_t + \varphi(y)\partial_x, \quad \partial_x, \quad y\partial_x;$

4) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t;$

$2A_{2.1}, \quad [e_1, e_2] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_3\colon$

1) $\partial_t, \quad t\partial_t + \partial_y, \quad \partial_x, \quad x\partial_x + C\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad t\partial_t + y\partial_x, \quad \partial_x, \quad x\partial_x + y\partial_y;$

3) $\partial_t, \quad t\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_x;$

4) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad x\partial_t, \quad -x\partial_x + \partial_y;$

5) $\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad x\partial_t, \quad -x\partial_x;$

$A_{3.1} \oplus A_1, \quad [e_2, e_3] = e_1\colon$

1) $\partial_t, \quad \partial_y, \quad y\partial_t, \quad \partial_x;$

2) $\partial_t, \quad \partial_y, \quad y\partial_t+\varphi(x)\partial_y, \quad x\partial_t;$

$A_{3.2}\oplus A_1, \quad [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_1+e_2\colon$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (t+x)\partial_t+x\partial_x, \quad \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (t+x)\partial_t+x\partial_x+\partial_y, \quad e^y(y\partial_t+\partial_x);$

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (t+x)\partial_t+x\partial_x+\partial_y, \quad e^y\partial_t;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t-\partial_x, \quad \partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t-\partial_x, \quad ye^{-x}\partial_t;$

6) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t-\partial_x, \quad e^{-x}\partial_t;$

$A_{3.3}\oplus A_1, \quad [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_2\colon$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+x\partial_x+\partial_y, \quad e^y\partial_t;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t+\partial_y, \quad \varphi(x)\partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t+\partial_y, \quad e^y\partial_t;$

$A^a_{3.4}\oplus A_1, \quad |a|\leq 1, \quad a\neq 0,1, \quad [e_1,e_3]=e_1, \quad [e_2,e_3]=ae_2\colon$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+ax\partial_x, \quad \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+ax\partial_x+\partial_y, \quad e^y\partial_t+e^{ay}\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+ax\partial_x+\partial_y, \quad e^y\partial_t;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t+(1-a)x\partial_x, \quad \partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t+(1-a)x\partial_x, \quad y|x|^{\frac{1}{1-a}}\partial_t;$

6) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t+(1-a)x\partial_x, \quad |x|^{\frac{1}{1-a}}\partial_t;$

якщо $a\neq -1\colon$

7) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t+ax\partial_x+\partial_y, \quad e^{ay}\partial_x;$

$A^b_{3.5}\oplus A_1, \quad b\geq 0, \quad [e_1,e_3]=be_1-e_2, \quad [e_2,e_3]=e_1+be_2\colon$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (bt+x)\partial_t+(-t+bx)\partial_x, \quad \partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad (bt+x)\partial_t+(-t+bx)\partial_x+\partial_y,$
$e^{by}(\cos y\partial_t-\sin y\partial_x);$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad (b-x)t\partial_t-(1+x^2)\partial_x, \quad \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad (b-x)t\partial_t-(1+x^2)\partial_x,$
$y\sqrt{1+x^2}\,e^{-b\operatorname{arctg}x}\partial_t;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad (b-x)t\partial_t-(1+x^2)\partial_x,$
$\sqrt{1+x^2}\,e^{-b\operatorname{arctg}x}\partial_t.$

Нетривіальні комутатори базисних елементів дійсних нерозв'язних чотиривимірних алгебр Лі та їх реалізації.

$sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1, \quad [e_1,e_2]=e_1, \quad [e_2,e_3]=e_3, \quad [e_1,e_3]=2e_2:$

1) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad t^2\partial_t+2tx\partial_x+x\partial_y,$
$x\partial_t+2xy\partial_x+(y^2+c)\partial_y, \quad c\in\{-1;0;1\};$

2) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad (t^2+x^2)\partial_t+2tx\partial_x, \quad \partial_y;$

3) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad (t^2-x^2)\partial_t+2tx\partial_x, \quad \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad t^2\partial_t+2tx\partial_x, \quad \partial_y;$

5) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad t^2\partial_t+2tx\partial_x, \quad xy\partial_x;$

6) $\partial_t, \quad t\partial_t+x\partial_x, \quad t^2\partial_t+2tx\partial_x, \quad x\partial_x;$

7) $\partial_t, \quad t\partial_t, \quad t^2\partial_t, \quad \partial_x;$

$so(3)\oplus A_1, \quad [e_2,e_3]=e_1, \quad [e_3,e_1]=e_2, \quad [e_1,e_2]=e_3:$

1) $-\sin t\operatorname{tg}x\partial_t-\cos t\partial_x,$
$-\cos t\operatorname{tg}x\partial_t+\sin t\partial_x, \quad \partial_t, \quad \partial_y;$

2) $-\sin t\operatorname{tg}x\partial_t-\cos t\partial_x+\sin t\sec x\partial_y,$
$-\cos t\operatorname{tg}x\partial_t+\sin t\partial_x+\cos t\sec x\partial_y, \quad \partial_t, \quad \partial_y.$

Нетривіальні комутатори базисних елементів дійсних нерозкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі та їх реалізації.

$A_{4.1}, \quad [e_2,e_4]=e_1, \quad [e_3,e_4]=e_2:$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad x\partial_t+y\partial_x;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad -\dfrac{1}{2}y^2\partial_t+y\partial_x, \quad x\partial_t-\partial_y;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad xy\partial_t - \partial_x;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad -\partial_x - x\partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \frac{1}{2}x^2\partial_t, \quad -\partial_x;$

$A^b_{4.2}, \quad b \neq 0, \quad [e_1, e_4] = be_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3:$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad bt\partial_t + (x + y)\partial_x + y\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad y\partial_x, \quad bt\partial_t + x\partial_x - \partial_y;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad (bt + xy)\partial_t + (b - 1)x\partial_x + y\partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad bt\partial_t + (b - 1)x\partial_x + ((b - 1)y - x)\partial_y;$

якщо $b \neq 1$:

5) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad e^{(1-b)y}\partial_t + y\partial_x, \quad bt\partial_t + x\partial_x - \partial_y;$

6) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \frac{x}{1-b}\ln|x|\partial_t, \quad bt\partial_t + (b - 1)x\partial_x;$

$A_{4.3}, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2:$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad t\partial_t + y\partial_x;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \varepsilon e^{-y}\partial_t + y\partial_x, \quad t\partial_t - \partial_y;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad (t + xy)\partial_t + x\partial_x;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x + (y - x)\partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad -x\ln|x|\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x;$

$A_{4.4}, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3:$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad (t + x)\partial_t + (x + y)\partial_x + y\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad -\frac{1}{2}y^2\partial_t + y\partial_x, \quad (t + x)\partial_t + x\partial_x - \partial_y;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad (t + xy)\partial_t - \partial_x + y\partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad t\partial_t - \partial_x - x\partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \frac{1}{2}x^2\partial_t, \quad t\partial_t - \partial_x;$

$A^{a,b,c}_{4.5}, \quad abc \neq 0, \quad [e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2, \quad [e_3, e_4] = ce_3:$

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad at\partial_t + bx\partial_x + cy\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t, \quad at\partial_t + (a-b)x\partial_x + (a-c)y\partial_y;$

якщо $a = b = c = 1$:

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad y\partial_t + \varphi(y)\partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \varphi(x)\partial_t, \quad t\partial_t + \partial_y;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \varphi(x)\partial_t, \quad t\partial_t;$

якщо $a = b = 1, \quad c \neq 1$:

6) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad t\partial_t + cy\partial_y;$

7) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad e^{(1-c)y}\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x + \partial_y;$

якщо $-1 \leq a < b < c = 1, \quad b > 0$ при $a = -1$:

8) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \varepsilon_1 e^{(a-1)y}\partial_t + \varepsilon_2 e^{(b-1)y}\partial_x, \quad at\partial_t + bx\partial_x + \partial_y;$

9) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad \partial_y, \quad at\partial_t + (a-b)x\partial_x + y\partial_y,$

10) $\partial_t, \quad e^{(a-b)x}\partial_t, \quad e^{(a-1)x}\partial_t, \quad at\partial_t + \partial_x;$

$A^{a,b}_{4.6}$, $a > 0, \quad [e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_y, \quad at\partial_t + (bx + y)\partial_x + (-x + by)\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad \varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg} y}\sqrt{1+y^2}\partial_t + y\partial_x,$

$$\left(at - \varepsilon x e^{(b-a)\operatorname{arctg} y}\sqrt{1+y^2}\right)\partial_t + (b-y)x\partial_x - (1+y^2)\partial_y;$$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t,$

$$at\partial_t + ((a-b)x + y)\partial_x + (-x + (a-b)y)\partial_y;$$

4) $\partial_t, \quad e^{(a-b)x}\cos x\partial_t, \quad -e^{(a-b)x}\sin x\partial_t, \quad at\partial_t + \partial_x;$

$A_{4.7}$, $\quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2, \quad [e_3, e_4] = e_2 + e_3$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + \partial_y, \quad (2t + \frac{1}{2}y^2)\partial_t + (x+y)\partial_x + y\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + y\partial_x, \quad 2t\partial_t + x\partial_x - \partial_y;$

3) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad -\partial_x, \quad (2t - \frac{1}{2}x^2)\partial_t + x\partial_x + \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad -\partial_x, \quad (2t - \frac{1}{2}x^2)\partial_t + x\partial_x;$

$A^b_{4.8}$, $\quad |b| \leq 1, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1+b)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$

$[e_3, e_4] = be_3$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + \partial_y, \quad (1+b)t\partial_t + x\partial_x + by\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + y\partial_x, \quad (1+b)t\partial_t + x\partial_x + (1-b)y\partial_y;$

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t, \quad (1+b)t\partial_t + x\partial_x + \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t, \quad (1+b)t\partial_t + x\partial_x;$

якщо $b = -1$:

5) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t, \quad y\partial_t + x\partial_x;$

якщо $b \neq \pm 1$:

6) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad -\partial_x, \quad (1+b)t\partial_t + bx\partial_x + \partial_y;$

7) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad -\partial_x, \quad (1+b)t\partial_t + bx\partial_x;$

якщо $b = 0$:

8) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + \partial_y, \quad t\partial_t + x\partial_x + C\partial_y;$

$A^a_{4.9}, \quad a \geq 0, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = 2ae_1, \quad [e_2, e_4] = ae_2 - e_3,$
$[e_3, e_4] = e_2 + ae_3$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + \partial_y,$
$$\frac{1}{2}(4at + y^2 - x^2)\partial_t + (ax + y)\partial_x + (-x + ay)\partial_y;$$

2) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad x\partial_t + y\partial_x,$
$$(2at - \frac{1}{2}x^2)\partial_t + (a - y)x\partial_x - (1 + y^2)\partial_y;$$

$A_{4.10}, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1$:

1) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x + \partial_y, \quad x\partial_t - t\partial_x + C\partial_y;$

2) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t + \partial_y, \quad -tx\partial_t - (1 + x^2)\partial_x;$

3) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad x\partial_t - t\partial_x + \partial_y;$

4) $\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad x\partial_t - t\partial_x;$

5) $\partial_t, \quad x\partial_t, \quad t\partial_t, \quad -tx\partial_t - (1 + x^2)\partial_x.$

Саме ці реалізації будуть використані далі для побудови систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

2.2.3. Система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантна відносно реалізації $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$. Розглянемо детально дійсну нерозв'язну алгебру Лі $sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1$, породжену базисними елементами

$$\begin{aligned}
&e_1 = \partial_t, \quad e_2 = t\partial_t + x\partial_x, \quad e_3 = t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y,\\
&e_4 = x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y, \quad c \in \{-1,\ 0,\ 1\}.
\end{aligned}$$

Для знаходження системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку інваріантної відносно цієї реалізації, знайдемо диференціальні інваріанти до другого порядку включно. Оскільки $r_0 = 3$, то інваріантів нульового порядку у даному випадку не має.

Розглянемо другі продовження базисних операторів:

$$\begin{aligned}
&e_1^{(2)} = \partial_t, \quad e_2^{(2)} = t\partial_t + x\partial_x - \dot{y}\partial_{\dot{y}} - \ddot{x}\partial_{\ddot{x}} - 2\ddot{y}\partial_{\ddot{y}},\\
&e_3^{(2)} = t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y + 2x\partial_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})\partial_{\dot{y}} +\\
&\qquad + (2\dot{x} - 2t\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (\ddot{x} - 2\dot{y} - 4t\ddot{y})\partial_{\ddot{y}},\\
&e_4^{(2)} = x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)\partial_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}\partial_{\dot{y}} +\\
&\qquad + (2\ddot{x}y + 4\dot{x}\dot{y} + 2x\ddot{y} - 3\dot{x}\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} - 2\dot{x}\ddot{y})\partial_{\ddot{y}}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що $r_1 = r_2 = 4 = r_l$, $l \geq 3$, крім того $d_1 = 5 - 4 = 1$ і $d_2 = 7 - 4 = 3$. Отже, існує один функціонально незалежний інваріант першого порядку та три функціонально незалежні інваріанти другого порядку, причому серед останніх міститься рівно один інваріант першого порядку. Звідси випливає, що критерій теореми 1 виконується і для даної реалізації існує інваріантна система вигляду (2.16).

Універсальний диференціальний інваріант I_1 породжується єдиною функцією $I = I(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Остання визначається умовами $e_i^{(1)} I = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, які еквівалентні перевизначеній системі диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$I_t = 0, \quad tI_t + xI_x - \dot{y}I_{\dot{y}} = 0,$$

$$t^2 I_t + 2txI_x + xI_y + 2xI_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})I_{\dot{y}} = 0,$$
$$xI_t + 2xyI_x + (y^2 + c)I_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)I_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}I_{\dot{y}} = 0.$$

Набір функціонально незалежних інтегралів відповідної характеристичної системи складається з однієї функції

$$I = \frac{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}}.$$

Знайдемо розширення універсального інваріанту I_1 до універсального інваріанту другого порядку I_2. Для цього досить знайти два будь-які функціонально незалежні диференціальні інваріанти $\tilde{I}(t, x, y, \dot{x},\ \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$ та $\hat{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$, що явно залежать від других похідних.

Слід зазначити, що задача знаходження розв'язків системи

$$e_i^{(2)} \tilde{I} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{2.18}$$

та застосування методу рухомого реперу є надзвичайно складними і громіздкими, тому для знаходження одного з диференціальних інваріантів другого порядку подіємо оператором інваріантного диференціювання на інваріант I.

Оператор інваріантного диференціювання знаходиться у вигляді $X = \lambda(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})D_t$, де функція λ знаходиться у неявному вигляді $\varphi(\lambda, t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ з системи $(e_i^{(1)} + \lambda D_t(\xi_i)\partial_\lambda)\varphi = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Для даної реалізації алгебри Лі оператор інваріантного диференціювання має вигляд:

$$X = \frac{x}{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c} D_t.$$

Подіявши цим оператором на знайдений вище інваріант першого порядку I, отримаємо один з шуканих інваріантів другого порядку

$$\hat{I} = \frac{(\ddot{x} - 2\dot{y})x(x\dot{y}(\dot{x} - 4y) + \dot{x}(y^2 + c)) - \ddot{y}x^2(\dot{x}^2 - 2(x\dot{y} + y\dot{x}) + 2(y^2 + c))}{(4x\dot{y} - \dot{x}^2)^2},$$

який використовуємо для знаходження іншого інваріанта $\tilde{I}$ другого порядку. З перших трьох рівнянь системи (2.18) отримаємо $\tilde{I} = \tilde{I}(J_1, J_2, J_3, J_4)$, де

$$
\begin{aligned}
&J_1 = 2y - \dot{x}, \quad J_2 = 4x\dot{y} - \dot{x}^2,\\
&J_3 = x(\ddot{x} - 2\dot{y}), \quad J_4 = x^2\ddot{y} - xy(\ddot{x} - 2\dot{y}).
\end{aligned}
$$

Перепишемо четверте рівняння системи (2.18) та інваріанти I, $\hat{I}$ в термінах J_1, J_2, J_3, J_4:

$$
\begin{aligned}
&2(J_1^2 - J_2 + 4c)\tilde{I}_{J_1} + 8J_1J_2\tilde{I}_{J_2} + 4(3J_1J_3 + 2J_4)\tilde{I}_{J_3} + \\
&+ (2J_1J_4 - J_1^2J_3 - J_2J_3 - 4cJ_3)\tilde{I}_{J_4} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

$$
I = \frac{J_1^2 + J_2 + 4c}{\sqrt{J_2}}, \quad \hat{I} = \frac{2J_4(J_1^2 - J_2 + 4c) + J_1J_3(J_1^2 + J_2 + 4c)}{J_2^2}.
$$

Скориставшись тим, що I та $\hat{I}$ є розв'язками рівняння (2.19), знаходимо третій функціонально незалежний з ними розв'язок цього рівняння:

$$
\tilde{I} = \frac{2J_1(2J_4(J_1^2 - J_2 + 4c) + J_1J_3(J_1^2 + J_2 + 4c)) - J_3((J_1^2 + J_2 + 4c)^2 - 16cJ_2)}{(J_1^2 - J_2 + 4c)\sqrt{J_2}((J_1^2 + J_2 + 4c)^2 - 16cJ_2)}.
$$

Повернувшись до вихідних змінних, отримаємо другий шуканий диференціальний інваріант реалізації $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$, що містить другі похідні:

$$
\tilde{I} = \frac{\ddot{x}x(y^2 - x\dot{y} + c) + \ddot{y}x^2(\dot{x} - 2y) + 2x\dot{y}(x\dot{y} - y^2 - c)}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}((x\dot{y} + y^2 - y\dot{x} + c)^2 - c(4x\dot{y} - \dot{x}^2))}.
$$

Отже, узагальнений диференціальний інваріант другого порядку може бути записаний у вигляді $I_2 = \left\{I, \hat{I}, \tilde{I}\right\}$. Відповідна інваріантна система наведена у підрозділі 2.2.6, дивись рівняння (2.23).

Запишемо сингулярну систему рівнянь для даної реалізації. Як вже зазначалося, сингулярна частина системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку одержується з умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів. Оскільки $r_0 = 3$, а $r_1 = r_2 = 4$, сингулярну частину системи ми можемо одержати коли $r_1 = r_2 = 3$. Для того, щоб остання умова виконувалась, треба щоб всі мінори четвертого порядку матриці коефіцієнтів продовжених генераторів дорівнювали 0. Звідси ми одержимо систему:

$$
\begin{aligned}
&x^2(2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2 - 2y^2 - 2c) = 0,\\
&4x^2y\dot{y} - x^2\dot{x}\dot{y} - x\dot{x}y^2 - cx\dot{x} = 0,\\
&4x^2\dot{x}\dot{y} + 4x^2y\ddot{x} - 3x^2\dot{x}\ddot{x} + 2x^3\ddot{y} - 2xy^2\dot{x} - 2cx\dot{x} = 0,\\
&2x^2\dot{y}^2 - x^2\dot{y}\ddot{x} + 6x^2y\ddot{y} - 2x^2\dot{x}\ddot{y} + 2xy^2\dot{y} + 2cx\dot{y} - xy^2\ddot{x} - cx\ddot{x} = 0.
\end{aligned}
$$

Розв'язуючи її маємо наступну сингулярну інваріантну систему:

$$\ddot{x} = 2\dot{y}, \quad \ddot{y} = 0.$$

Аналогічна процедура була використана для кожної реалізації алгебр Лі зі списку, наведеному у підрозділі 2.2.2.

2.2.4. Системи з одно- та двовимірною алгеброю інваріантності.

У даному підрозділі представлені системи двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних одно- та двовимірних алгебр Лі.

Регулярні системи. Кожна регулярна інваріантна система записується у нормальній формі та містить дві параметр-функції $F(\overline{\omega})$ і $G(\overline{\omega})$, де кортеж $\overline{\omega}$ містить три або чотири диференціальних інваріанта першого порядку ω_1, ω_2, ω_3 та ω_4.

Регулярні системи, які можуть бути представлені в нормальній формі наведено у наступному переліку, де вказані також відповідні алгебри зі списку на сторінці 40:

$R(A_1, 1)$: $\omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = \dot{x}$, $\omega_4 = \dot{y}$,

$$\ddot{x} = F(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad \ddot{y} = G(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4).$$

$R(2A_1, 1)$: $\omega_1 = y$, $\omega_2 = \dot{x}$, $\omega_3 = \dot{y}$,

$$\ddot{x} = F(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad \ddot{y} = G(\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

$R(2A_1,2)$: $\omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = \frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^3 F(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \ddot y = \dot x^2 \dot y F(\omega_1,\omega_2,\omega_3) + \dot x^2 G(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

$R(A_{2.1},1)$: $\omega_1 = y$, $\omega_2 = \dot x e^x$, $\omega_3 = \frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^2 F(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \ddot y = \dot x^2 G(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

$R(A_{2.1},2)$: $\omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = \frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^2 F(\omega_1,\omega_2,\omega_3), \quad \ddot y = \dot x^2 G(\omega_1,\omega_2,\omega_3).$$

Серед систем, інваріантних відносно одно- та двовимірних алгебр Лі не має регулярних систем, що не можуть бути записані у нормальній формі.

Сингулярні системи. Для реалізацій $R(A_1,1)$, $R(2A_1,1)$, $R(A_{2.1},1)$ нетривіальних сингулярних систем не має.

Єдина сингулярна система, що існує відповідає реалізаціям $R(2A_1,2)$, $R(A_{2.1},2)$, має наступний вигляд:

$$\ddot x = 0, \quad \ddot y = 0. \tag{2.20}$$

2.2.5. Системи з тривимірною алгеброю інваріантності. У цьому підрозділі наведено повний перелік систем двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних тривимірних алгебр Лі.

Регулярні системи. Кожна регулярна інваріантна система містить дві параметр-функції $F(\overline{\omega})$ і $G(\overline{\omega})$, де кортеж $\overline{\omega}$ містить два або три диференціальні інваріанти першого порядку ω_1, ω_2 та ω_3. Решта функцій, що зустрічаються у цьому підрозділі є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

Регулярні системи, які можуть бути представлені в нормальній формі наведено у наступному списку, де вказані також відповідні алгебри з підрозділу 2.2.2.

$R(3A_1,1)$: $\omega_1 = \dot x$, $\omega_2 = \dot y$,

$$\ddot x = F\left(\omega_1,\omega_2\right), \quad \ddot y = G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(3A_1,2)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{x}-\dot{\varphi}(y)}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}\ddot{\varphi}(y), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,1)$: $\quad \omega_1 = \dot{x}e^y,\, \omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2). \tag{2.21}$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,2)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} + \ln\dot{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}\dot{y} G(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,3)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,4)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{y}x}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},1)$: $\quad \omega_1 = y - \frac{1}{\dot{x}},\, \omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y} F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},2)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{x}^2-2\dot{y}}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(\dot{x}^2 - \dot{y}\right) F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^3 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.1},3)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y} F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},1)$: $\quad \omega_1 = y - \frac{1}{\dot{x}},\, \omega_2 = \frac{\dot{y}e^y}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},2)$: $\quad \omega_1 = y,\, \omega_2 = \frac{\dot{y}e^{\frac{1}{\dot{x}}}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.2},3)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 e^{-x} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{-x} F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},1)$: $\quad \omega_1 = \dot{x}$, $\omega_2 = \dot{y}e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},2)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{3.3},3)$: $\quad \omega_1 = x$, $\omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 e^{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{y} F(\omega_1,\omega_2) + \dot{x}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^a_{3.4},1)$: $\quad \omega_1 = \dot{x}e^{(1-a)y}$, $\omega_2 = \dot{y}e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^a_{3.4},2)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \dot{x}\dot{y}^{a-1}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^a_{3.4},3)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{x\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^b_{3.5},1)$: $\quad \omega_1 = y + \operatorname{arctg}\dot{x}$, $\omega_2 = \frac{\dot{y}^2 e^{2by}}{1+\dot{x}^2}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1+\dot{x}^2\right) F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^b_{3.5},2)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{1+\dot{x}^2}{\dot{y}^2} e^{2b\operatorname{arctg}\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1+\dot{x}^2\right) F(\omega_1,\omega_2), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega_1,\omega_2) + \dot{y}^2 G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A^b_{3.5},3)$: $\quad \omega_1 = y$, $\omega_2 = \frac{\dot{y}\left(1+x^2\right)}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 \left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-b\operatorname{arctg}x} F(\omega_1,\omega_2),$$

$$\ddot{y}=\frac{\dot{x}\dot{y}^2e^{-b\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{y}^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)-\frac{2x\dot{x}\dot{y}}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),1)$: $\omega_1=2y-\dot{x}$, $\omega_2=4x\dot{y}-\dot{x}^2$,

$$\ddot{x}=\frac{1}{x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+2\dot{y},\quad \ddot{y}=\frac{y}{x^2}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\frac{1}{x^2}G\left(\omega_1,\omega_2\right). \tag{2.22}$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2+1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega_1,\omega_2)-\frac{1+\dot{x}^2}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2(\dot{x}F(\omega_1,\omega_2)+G(\omega_1,\omega_2))-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),3)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2-1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega_1,\omega_2)-\frac{\dot{x}^2-1}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2(\dot{x}F(\omega_1,\omega_2)+G(\omega_1,\omega_2))-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),4)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=x\dot{y}$,

$$\ddot{x}=\frac{1}{2x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\frac{\dot{x}^2}{2x},\quad \ddot{y}=\frac{1}{x^2}G\left(\omega_1,\omega_2\right)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(so(3),1)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot{x}^2+\cos^2x}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{\dot{y}^3}{\cos x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)-2\dot{x}^2\operatorname{tg}x-\sin x\cos x,$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\cos x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{y}^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)-2\dot{x}\dot{y}\operatorname{tg}x.$$

$R(so(3),2)$: $\omega_1=y-\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\cos x}$, $\omega_2=\frac{\dot{x}^2+\cos^2x}{(\dot{y}+\sin x)^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{\left(\dot{x}^2+\cos^2x\right)}{\cos x}\left((\dot{y}+\sin x)F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot{y}\right)-\dot{x}^2\operatorname{tg}x,$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{x}(\dot{y}+\sin x)^2}{\cos x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{y}+\sin x)}{\cos x}+$$
$$+(\dot{y}+\sin x)^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)-\dot{x}\cos x-\dot{x}(\dot{y}+\sin x)\operatorname{tg}x.$$

Для реалізацій $R(3A_1,3)$, $R(3A_1,4)$, $R(A_{3.3},4)$ та $R(sl(2,\mathbb{R}),5)$ регулярні інваріантні системи, що не можуть бути записані у нормальній формі, мають вигляд:

$$\ddot{y}=\omega_3\ddot{x}+\dot{x}^2F\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right),\quad G\left(\omega_1,\omega_2,\omega_3\right)=0,$$

де $\omega_1=x$, $\omega_2=y$, $\omega_3=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Сингулярні системи. Для реалізацій $R(3A_1,1)$, $R(A_{3.1},1)$, $R(A_{3.2},1)$, $R(A_{2.1}\oplus A_1,1)$, $R(A_{3.3},1)$, $R(A^a_{3.4},1)$, $R(A^b_{3.5},1)$, $R(A^b_{3.5},2)$, $R(sl(2,\mathbb{R}),1)$, $R(sl(2,\mathbb{R}),2)$, $R(sl(2,\mathbb{R}),4)$, $R(so(3),1)$ та $R(so(3),2)$ нетривіальних сингулярних систем не має.

Сингулярні системи для решти розглядуваних реалізацій дійсних тривимірних алгебр Лі мають вигляд (2.20).

2.2.6. Системи з алгеброю інваріантності розмірності чотири. Даний підрозділ присвячено системам двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантним відносно дійсних чотиривимірних алгебр Лі. Як і у випадку тривимірних алгебр, інваріантні системи записуються у нормальній формі та містять дві параметр-функції $F(\overline{\omega})$ і $G(\overline{\omega})$, де кортеж $\overline{\omega}$ містить один, два або три диференціальні інваріанти першого порядку ω_1, ω_2 та ω_3. Решта функцій, що позначені грецькими літерами є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

Регулярні системи. Регулярні системи, які можуть бути представлені в нормальній формі, наведено у наступному переліку:

$R(4A_1,1)$: $\quad \omega=y,$

$$\ddot{x}=\frac{\dot{y}\,(\theta'\varphi''-\psi''+\theta''\dot{x})\,(\dot{y}G(\omega)+\theta''(\dot{x}-\varphi'))}{\theta''(\varphi'\theta'-\psi')}+\frac{\dot{y}^2F(\omega)}{\theta''}+\dot{y}\varphi'',$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{y}^3G(\omega)+\dot{y}^2\theta''(\dot{x}-\varphi')}{\varphi'\theta'-\psi'},$$

де вектор-функції $(y,\varphi(y))$ і $(\theta(y),\psi(y))$ — лінійно незалежні, а штрихами позначено похідні за змінною y.

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,1)$: $\quad \omega=\frac{\dot{y}}{\dot{x}},$

$$\ddot{x}=\dot{x}^2F\left(\omega\right), \quad \ddot{y}=\dot{y}^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,2)$: $\quad \omega=\frac{\dot{y}}{y\dot{x}},$

$$\ddot{x}=\dot{x}^2F\left(\omega\right)+\dot{x}^2\dot{y}G\left(\omega\right), \quad \ddot{y}=\dot{x}\dot{y}^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 3)$: $\quad \omega = y,$

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega) + \dot{x}\dot{y} G(\omega) - \dot{y}^2 \varphi'' \ln \dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ — довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(2A_{2.1}, 1)$: $\quad \omega = \dot{y}\dot{x}^{-\frac{C}{1+C}} e^{\frac{y}{1+C}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G\left(\omega\right).$$

$R(2A_{2.1}, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{y} e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}},$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}^2}{y}\left(F\left(\omega\right) - G\left(\omega\right) \ln \frac{\dot{y}}{y}\right), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{y} G\left(\omega\right).$$

$R(2A_{2.1}, 3)$: $\quad \omega = y,$

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(2A_{2.1}, 4)$: $\quad \omega = \frac{x\dot{y}}{\dot{x}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^y F\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^y F\left(\omega\right) + \dot{y}^2 G\left(\omega\right).$$

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},$

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F\left(\omega\right) + \dot{x}\dot{y}^2 G\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 G\left(\omega\right).$$

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = x,$

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 G(\omega) - \frac{\dot{x}^2 \dot{y}}{\varphi'} F(\omega) - \frac{\dot{x}\dot{y}^2 \varphi''}{2\varphi'^2},$$
$$\ddot{y} = \left(\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\varphi'}\right) F(\omega) + \dot{x}^2 \dot{y} G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'} - \frac{\dot{y}^3 \varphi''}{2\varphi'^2},$$

де $\varphi(x)$ — довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{\frac{1}{\dot{x}}},$

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} F\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F\left(\omega\right) + \dot{y}^2 G\left(\omega\right).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = \frac{y\dot{x} + \dot{x} - 1}{\dot{y}} e^{-y},$

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^y (1 - y\dot{x}) F\left(\omega\right) + e^y \dot{x}\dot{y}^2 G\left(\omega\right) - \dot{x}^2 \dot{y},$$

$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G\left(\omega\right) - y\dot{y}^3 e^y F\left(\omega\right) - \dot{x}\dot{y}^2 - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x})F\left(\omega\right) + \dot{x}^2\dot{y}G\left(\omega\right) - \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x}),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G\left(\omega\right) - y\dot{x}\dot{y}^2 F\left(\omega\right) - \dot{y}^2(1 - y\dot{x}).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 e^{-x} F\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y}e^{-x} F\left(\omega\right) + \dot{x}^2 G\left(\omega\right).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F\left(\omega\right) + \dot{x}^2\dot{y}G\left(\omega\right) - \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G\left(\omega\right) - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y} \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega) + \dot{x}^2 G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'},$$

де $\varphi(x)$ — довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \dot{x}\dot{y}^{a-1}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F\left(\omega\right), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G\left(\omega\right).$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}e^{ay+y}}{\dot{x}e^y - ae^{ay}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{ay} F\left(\omega\right) + \dot{x}\dot{y}^2 e^y G\left(\omega\right) + (a-1)\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G\left(\omega\right) - \dot{y}^2.$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}e^{ay}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F\left(\omega\right) + \dot{x}\dot{y}^2 e^y G\left(\omega\right) - \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G\left(\omega\right) - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.4}^a \oplus A_1, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}x}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.4}^a \oplus A_1, 7)$: $\quad \omega = \dot{y}e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{ay} F(\omega) + \dot{x}\dot{y} G(\omega) + a\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.5}^b \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}^2+1}{\dot{y}^2} e^{2b \operatorname{arctg} \dot{x}}$,

$$\ddot{x} = (\dot{x}^2 + 1)\dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.5}^b \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}(b\cos y - \sin y) + b\sin y + \cos y}{\dot{y}e^{by}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{by} \left(F(\omega)(\sin y + \dot{x}\cos y) + G(\omega)(\dot{x}\sin y - \cos y)\right) - \dot{y}(1 + \dot{x}^2),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^{by} \left(F(\omega)\cos y + G(\omega)\sin y\right) - \dot{y}^2(b + \dot{x}).$$

$R(A_{3.5}^b \oplus A_1, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}(x^2+1)}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}^2 \sqrt{x^2+1}\; e^{-b \operatorname{arctg} x} F(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 \sqrt{x^2+1}\; e^{-b \operatorname{arctg} x} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) - \frac{2x\dot{x}\dot{y}}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$: $\quad \omega = \frac{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}}$,

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{x}\left(1 - \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{2(x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c)}\right) F(\omega) + \\ &\quad + \frac{(\dot{x} - 2y)(4x\dot{y} - \dot{x}^2)}{2x(\omega^2 - c)} G(\omega) + 2\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{2x^2(\dot{x} - 2y)}\left(4x\dot{y} - 2y\dot{x} + \frac{(4x\dot{y} - \dot{x}^2)(y^2 - x\dot{y} - c)}{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}\right) F(\omega) - \\ &\quad - \frac{(4x\dot{y} - \dot{x}^2)(y^2 - x\dot{y} + c)}{2x^2(\omega^2 - c)} G(\omega).\end{aligned} \tag{2.23}$$

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 2)$: $\quad \omega = \frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2 - 1}$,

$$\ddot{x} = x^2\dot{y}^3 F(\omega) - \frac{\dot{x}^2 - 1}{x}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 \left(\dot{x}F(\omega) + G(\omega)\right) - \frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,3)$: $\quad \omega=\frac{x^2\dot y^2}{\dot x^2+1}$,

$$\ddot x = x^2\dot y^3 F(\omega) - \frac{\dot x^2+1}{x}, \quad \ddot y = \dot y^2\left(\dot x F(\omega)+G(\omega)\right) - \frac{2\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,4)$: $\quad \omega = x\dot y$,

$$\ddot x = \frac{1}{2x}F(\omega)+\frac{\dot x^2}{2x}, \quad \ddot y = \frac{1}{x^2}G(\omega) - \frac{\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,5)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot x = \frac{x\dot y^2}{2y^2}\big(F(\omega)+2G(\omega)\ln(x\dot y)+\ln^2(x\dot y)\big)+\frac{\dot x^2}{2x},$$
$$\ddot y = \frac{\dot y^2}{y}\left(G(\omega)+\ln(x\dot y)\right) - \frac{\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,6)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot x = \frac{x\dot y^2}{2}F(\omega)+\frac{\dot x^2}{2x}, \quad \ddot y = \dot y^2 G(\omega) - \frac{\dot x\dot y}{x}.$$

$R(so(3)\oplus A_1,1)$: $\quad \omega = \frac{\dot x^2+\cos^2 x}{\dot y^2}$,

$$\ddot x = \frac{\dot y^3}{\cos x}F(\omega) - 2\dot x^2\operatorname{tg} x - \sin x\cos x,$$
$$\ddot y = \frac{\dot x\dot y^2}{\cos x}F(\omega)+\dot y^2 G(\omega) - 2\dot x\dot y\operatorname{tg} x.$$

$R(so(3)\oplus A_1,2)$: $\quad \omega = \frac{\dot x^2+\cos^2 x}{(\dot y+\sin x)^2}$,

$$\ddot x = \frac{(\dot x^2+\cos^2 x)^{3/2}}{\cos x}F(\omega)+\frac{\dot y(\dot x^2+\cos^2 x)}{\cos x} - \dot x^2\operatorname{tg} x,$$
$$\ddot y = (\dot y+\sin x)^2\left(\frac{\dot x}{\cos x}F(\omega)+G(\omega)\right)+\frac{\dot x(\dot y^2-1)}{\cos x}.$$

$R(A_{4.1},1)$: $\quad \omega = \frac{\dot y^2}{2\dot y-\dot x^2}$,

$$\ddot x = \dot y(\dot y-\dot x^2)F(\omega)+\dot x\dot y^2 G(\omega), \quad \ddot y = \dot y^3 G(\omega) - \dot x\dot y^2 F(\omega).$$

$R(A_{4.1},2)$: $\quad \omega = \frac{y\dot x+1}{\dot y}$,

$$\ddot x = \dot y^2(1+\dot x y)F(\omega)+\dot x\dot y^2 G(\omega)+\dot x^2\dot y,$$

$$\ddot{y} = \dot{y}^3 y F(\omega) + \dot{y}^3 G(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.1}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\dot{x}^3 x^2 F(\omega) + \frac{1}{2}\dot{x}^3 G(\omega) + 2x\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{x}^2\left(1 + \frac{1}{2}x^2\dot{y}\right)F(\omega) + \frac{1}{2}\dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + 2x\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^b_{4.2}, 1)$: $\quad \omega = \dot{y}e^{\frac{(b-1)\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}}F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^{\frac{b}{b-1}}G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}}G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2}, 2)$: $\quad \omega = \dot{y}e^{-by}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{-y}F(\omega) + \dot{x}\dot{y}G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}x^{\frac{b-2}{b-1}}$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2\dot{y}}{b-1}\left(\ln x F(\omega) + (b-1)G(\omega) - 2\ln x\right),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}\left(\frac{\dot{y}\ln x}{b-1} - \frac{1}{x}\right)F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) - \frac{2\dot{x}\dot{y}^2\ln x}{b-1}.$$

$R(A^b_{4.2}, 5)$: $\quad \omega = \frac{e^y(b-1)\dot{x} + e^{by}}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{-y}F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{-by}G(\omega) + (b-1)\dot{x}\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^{-by}G(\omega) + (b-1)\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.3}, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} + \ln\dot{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega) + \dot{x}\dot{y}G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.3}, 2)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$: $\quad \omega = \frac{\varepsilon x + e^y}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{-y}G(\omega) + \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^{-y}G(\omega) + \dot{y}^2.$$

$R(A_{4.3}, 3)$: $\quad \omega = \frac{x\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = x\dot{x}\dot{y}^2\left(F(\omega) - G(\omega)\ln x\right) - 2\dot{x}^2\dot{y}\ln x,$$

$$\ddot{y} = x\dot{y}^3 F(\omega) + \dot{y}^2(1 - x\dot{y}\ln x)G(\omega) - 2\dot{x}\dot{y}^2\ln x.$$

$R(A_{4.4}, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}^2-2\dot{y}}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}}{e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}}\left(\left(\dot{y}-\dot{x}^2\right)F(\omega)+\dot{x}\dot{y}G(\omega)\right), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}}\left(\dot{y}G(\omega)-\dot{x}F(\omega)\right).$$

$R(A_{4.4}, 2)$: $\quad \omega = \frac{1+y\dot{x}}{\dot{y}}e^y$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}^2}{e^y}\left((1+y\dot{x})F(\omega)+\dot{x}G(\omega)\right)+\dot{x}^2\dot{y}, \quad \ddot{y}= \frac{\dot{y}^3}{e^y}\left(yF(\omega)+G(\omega)\right)+\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.4}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}e^x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y}F(\omega) + \frac{1}{2}x^2\dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + 2x\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2F(\omega) + \dot{x}\dot{y}\left(1 + \frac{1}{2}x^2\dot{y}\right)G(\omega) + 2x\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,c}, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}^{b-a}}{\dot{x}^{c-a}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^{\frac{b-2a}{b-a}}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^{\frac{c-2a}{c-a}}G(\omega).$$

$R(A_{4.5}^{1,1,1}, 3)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(\dot{x}-\varphi'\right)\left(F(\omega)+\dot{x}G(\omega)\right)+\dot{y}\varphi'', \quad \ddot{y} = \dot{y}^2\left(\dot{x}-\varphi'\right)G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ — довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(A_{4.5}^{1,1,c}, 6)$, $c \neq 1$: $\quad \omega = x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{1/c}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{1/c}F(\omega) + \dot{x}\dot{y}G(\omega).$$

$R(A_{4.5}^{1,1,c}, 7)$, $c \neq 1$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + (c-1)\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2G(\omega) + (c-1)\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,1}, 8)$, $-1 \leq a < b < 1$; $b > 0$ при $a = -1$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$:

$$\omega = \dot{y}^{-1}(\varepsilon_1(a-1)e^{-by}\dot{x} + \varepsilon_2(b-1)e^{-ay}),$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{y}e^{by}}{\varepsilon_1(a-1)}\left(\dot{y}F(\omega) - \varepsilon_2(b-1)(a-b)e^{-ay}\right) + \dot{x}\dot{y}^2e^{ay}G(\omega),$$

$$\ddot{y}=\dot{y}^3e^{ay}G\left(\omega\right)-(a-1)\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,1},9), -1\le a<b<1;\ b>0$ при $a=-1$: $\quad \omega=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}x^{\frac{a-b-1}{a-b}}$,

$$\ddot{x}=\dot{x}^2\dot{y}x^{\frac{b-1}{a-b}}F\left(\omega\right),\quad \ddot{y}=\dot{x}\dot{y}^2x^{\frac{b-1}{a-b}}F\left(\omega\right)+\dot{y}^2x^{\frac{1}{b-a}}G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.6}^{a,b},1)$: $\quad \omega=\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)e^{2(a-b)\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x}=e^{-a\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}(\dot{y}F\left(\omega\right))+\dot{x}G\left(\omega\right)),\ \ddot{y}=e^{-a\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}(\dot{y}G\left(\omega\right)-\dot{x}F\left(\omega\right)).$$

$R(A_{4.6}^{a,b},2)$: $\quad \omega=\frac{\dot{x}\varepsilon e^{b\operatorname{arctg}y}(b-a+y)\sqrt{1+y^2}-(1+y^2)e^{a\operatorname{arctg}y}}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x}=\frac{\dot{y}^2e^{-b\operatorname{arctg}y}}{(1+y^2)^{3/2}}F\left(\omega\right)+\frac{\dot{x}\dot{y}^2e^{-a\operatorname{arctg}y}}{(1+y^2)^2}(G(\omega)-\varepsilon yF(\omega))+$$
$$+\frac{2y\dot{x}\dot{y}}{1+y^2}-\frac{\dot{x}^2\dot{y}\varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg}y}(y^2+1+(b-a+y)^2)}{(1+y^2)^{3/2}},$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{y}^3e^{-a\operatorname{arctg}y}}{(1+y^2)^2}\left(G\left(\omega\right)-\varepsilon yF\left(\omega\right)\right)+\frac{2y\dot{y}^2}{1+y^2}-$$
$$-\frac{\dot{x}\dot{y}^2\varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg}y}\left(y^2+1+(b-a+y)^2\right)}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

$R(A_{4.7},1)$: $\quad \omega=\frac{\dot{y}}{y\dot{x}-1}e^{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x}=\dot{x}\dot{y}^2F\left(\omega\right)+\dot{y}^2(y\dot{x}-1)e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}G\left(\omega\right)-\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y}=\dot{y}^3F\left(\omega\right)+\dot{y}^3ye^{-\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}G\left(\omega\right)-\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.7},2)$: $\quad \omega=\frac{\dot{x}^2-2\dot{y}}{\dot{y}^2}e^{2y}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}e^{-y}\left(\dot{y}-\dot{x}^2\right)F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2e^{-2y}G(\omega),\ \ddot{y}=\dot{y}^3e^{-2y}G(\omega)-\dot{x}\dot{y}^2e^{-y}F(\omega).$$

$R(A_{4.7},3)$: $\quad \omega=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}e^{y}$,

$$\ddot{x}=\dot{x}^3F\left(\omega\right)+y\dot{x}^3,\quad \ddot{y}=\dot{x}^2\dot{y}F\left(\omega\right)+\dot{y}^2G\left(\omega\right)+y\dot{x}^2\dot{y}.$$

$R(A_{4.7},4)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot{x}=\dot{x}^3F(\omega)-\dot{x}^3\ln\frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad \ddot{y}=\dot{x}^2\dot{y}F(\omega)+\dot{y}^2G(\omega)-\dot{x}^2\dot{y}\ln\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

$R(A_{4.8}^b,1)$: $\quad \omega=\left(y-\frac{1}{\dot x}\right)\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^{\frac{b}{1-b}}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot y F(\omega),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F(\omega)+\frac{\dot x\dot y^2}{y\dot x-1}G(\omega).$$

$R(A_{4.8}^b,2)$: $\quad \omega=\frac{\dot x^2-2\dot y}{\dot y^2}y^{\frac{2b}{b-1}}$,

$$\ddot x=\dot y y^{\frac{2b-1}{1-b}}\left(\dot y-\dot x^2\right)F\left(\omega\right)+\dot x\dot y^2y^{\frac{3b-1}{1-b}}G\left(\omega\right),$$
$$\ddot y=\dot y^3y^{\frac{3b-1}{1-b}}G\left(\omega\right)-\dot x\dot y^2y^{\frac{2b-1}{1-b}}F\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.8}^b,3)$: $\quad \omega=\frac{\dot y}{\dot x}e^y$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot y e^{by}F\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2e^{by}F\left(\omega\right)+\dot y^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.8}^b,4)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot x=\dot x^{b+2}\dot y^{1-b}F(\omega),\quad \ddot y=\dot x^{b+1}\dot y^{2-b}F(\omega)+\dot y^2G(\omega).$$

$R(A_{4.8}^{-1},5)$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot x=\dot x\dot y^2\left(F(\omega)+G(\omega)\ln\frac{\dot y}{\dot x}\right),\quad \ddot y=\dot y^3F(\omega)+\dot y^2\left(1+\dot y\ln\frac{\dot y}{\dot x}\right)G(\omega).$$

$R(A_{4.8}^b,6), b\neq\pm1$: $\quad \omega=\frac{\dot y}{\dot x}e^{by}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot y e^{y}F\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2e^{y}F\left(\omega\right)+\dot y^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.8}^b,7), b\neq\pm1$: $\quad \omega=y$,

$$\ddot x=\dot x^{\frac{2b+1}{b}}\dot y^{\frac{b-1}{b}}F\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot x^{\frac{b+1}{b}}\dot y^{\frac{2b-1}{b}}F\left(\omega\right)+\dot y^2G\left(\omega\right).$$

$R(A_{4.8}^0,8)$: $\quad \omega=\frac{\dot y}{\dot x}e^{\frac{y\dot x-1}{C\dot x}}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot y F\left(\omega\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega\right)+\dot y^2G\left(\omega\right),\quad C\neq0.$$

$R(A_{4.9}^a,1)$: $\quad \omega=\frac{y\dot x-1}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2}}e^{a\,\mathrm{arctg}\,\frac{\dot y}{\dot x}}$,

$$\ddot x=\dot x\left(\dot x^2+\dot y^2\right)F(\omega)+\dot y\left(\dot x^2+\dot y^2\right)G(\omega)-\dot x^2\dot y,$$

$$\ddot{y} = \dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) F(\omega) + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\left(\dot{x} + y\dot{y}^2\right)}{y\dot{x} - 1} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^a_{4.9}, 2)$: $\quad \omega = \frac{2\dot{y} - \dot{x}^2}{\dot{y}^2}(1 + y^2)e^{2a \operatorname{arctg} y}$,

$$\ddot{x} = \frac{2\dot{y} - \dot{x}^2}{1 + y^2}\left(\frac{(\dot{y} - \dot{x}^2)}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + \dot{x}G(\omega) + y\dot{x}\right),$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}(2\dot{y} - \dot{x}^2)}{1 + y^2}\left(G(\omega) - \frac{\dot{x}}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + y\right).$$

$R(A_{4.10}, 1)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y} e^{y + C \operatorname{arctg} \dot{x}}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 2)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\left(1 + x^2\right)$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^3 e^y}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{1 + x^2}\left(\frac{\dot{x}e^y}{(1 + x^2)^{1/2}} F(\omega) + G(\omega) - 2x\right).$$

$R(A_{4.10}, 3)$: $\quad \omega = y + \operatorname{arctg} \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 4)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{y}\left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

Регулярні системи, що не можуть бути записані у нормальній формі:

$R(4A_1, 2)$; $R(4A_1, 3)$; $R(A^{1,1,1}_{4.5}, 5)$: $\quad \omega_1 = x$, $\omega_2 = y$, $\omega_3 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{y} = \omega_3 \ddot{x} + \dot{x}^2 F(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad G(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 0.$$

$R(A_{2.1} \oplus 2A_1, 4)$: $\quad \omega_1 = \frac{y}{x}$, $\omega_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{y} = \omega_2 \ddot{x} + \frac{\dot{x}^2}{x} F(\omega_1, \omega_2), \quad G(\omega_1, \omega_2) = 0.$$

$R(2A_{2.1},5)$; $R(A^a_{3.4}\oplus A_1,5)$; $R(A^a_{3.4}\oplus A_1,6)$; $R(A^b_{4.2},6)$; $R(A_{4.3},5)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot y x}{\dot x}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A_{3.2}\oplus A_1,5)$; $R(A_{3.2}\oplus A_1,6)$; $R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,7)$; $R(A_{4.1},5)$; $R(A_{4.4},5)$; $R(A^{a,b}_{4.6},4)$; $R(A^{-1,b,1}_{4.5},10)$, $b>0$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot y=\omega_2\ddot x+\dot x^2F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A_{3.3}\oplus A_1,4)$; $R(A^{1,1,1}_{4.5},4)$: $\omega_1=x$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot y=\omega_2\ddot x+\dot x^2F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A^b_{3.5}\oplus A_1,4)$; $R(A^b_{3.5}\oplus A_1,5)$; $R(A_{4.10},5)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot y(1+x^2)}{\dot x}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)-\frac{2x\dot x^2\dot y}{1+x^2},\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A_{4.1},4)$; $R(A_{4.4},4)$: $\omega_1=x^2-2y$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}-x$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\dot x^3F(\omega_1,\omega_2),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A^b_{4.2},4)$: $\omega_1=\frac{y(b-1)}{x}+\ln x$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}-\frac{y}{x}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\frac{\dot x^3}{x}F(\omega_1,\omega_2),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A_{4.3},4)$: $\omega_1=\frac{y}{x}+\ln x$, $\omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}-\frac{y}{x}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\frac{\dot x^3}{x}F(\omega_1,\omega_2),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A^{a,b,c}_{4.5},2)$: $\omega_1=\frac{y^{a-b}}{x^{a-c}}$, $\omega_2=\frac{x\dot y}{y\dot x}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\dot x^3x^{\frac{2b-a-c}{a-b}}F(\omega_1,\omega_2),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

$R(A^{a,b}_{4.6},3)$: $\omega_1=(x^2+y^2)e^{2(a-b)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}$, $\omega_2=\frac{x\dot x+y\dot y}{y\dot x-x\dot y}$,

$$\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=(\dot x^2+\dot y^2)^{3/2}e^{(a-b)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}F(\omega_1,\omega_2),\quad G(\omega_1,\omega_2)=0.$$

Сингулярні системи. Для реалізацій $R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 1)$; $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 3)$; $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 4)$; $R(so(3) \oplus A_1, 1)$; $R(so(3) \oplus A_1, 2)$ та $R(A_{4.10}, 1)$ нетривіальних сингулярних систем немає. Але такі системи існують для наступних алгебр:

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$:

$$\ddot{x} = 2\dot{y}, \quad \ddot{y} = 0.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 5)$ та $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 6)$:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^2}{2x}, \quad \ddot{y} = 0.$$

Сингулярні системи для решти розглядуваних реалізацій дійсних чотиривимірних алгебр Лі мають вигляд (2.20).

2.3. Висновки до розділу 2

У підрозділі 2.1 проведено повну групову класифікацію систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (2.1) відносно допустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних u_1 та u_2, причому незалежна змінна може допускати довільні, у тому числі і нелінійні перетворення. Знайдені рівняння допускають дво- або тривимірні алгебри симетрій. Важливість знайдених списків полягає в тому, що вони задають всі нееквівалентні рівняння вигляду (2.1), які інтегруються в квадратурах з використанням їх симетрій. Алгоритм побудови таких розв'язків добре відомий та реалізований в пакетах прикладних програм Maple та Mathematica.

У підрозділі 2.2 отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей не вище за чотири. В тому числі отримано 5 таких систем, інваріантних відносно одно- та двовимірних алгебр Лі, які можуть бути записані у нормальній формі, 27 систем, інваріантних відносно тривимірних алгебр Лі та 72 системи, інваріантних відносно чотиривимірних алгебр Лі. Усі ці системи можуть бути спрощені з використанням їх симетрії, а у випадку чотиривимірних алгебр Лі система може бути зведена до алгебраїчної.

Решта інваріантних систем або є сингулярними, тобто включають умови виродження рангів других продовжень генераторів алгебри Лі, або не можуть бути записані у нормальній формі. Таких систем ми отримали 3 та 12 відповідно.

Як обгрунтування важливості отриманих результатів наведемо декілька фізично цікавих систем, що містяться серед побудованих у підрозділі 2.2.

Приклад 2.1. У полярних координатах класична задача Кеплера може бути переписана у вигляді системи двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0, \\ &r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Ця система є частковим випадком знайденої системи (2.21), що інваріантна відносно реалізації $R(A_{2.1} \oplus A_1, 1)$.

Приклад 2.2. Узагальнена система Єрмакова

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \frac{1}{x^3} F\left(\frac{y}{x}\right), \\ &\ddot{y} = \frac{1}{y^3} G\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2, \mathbb{R})$, еквівалентної реалізації $R(sl(2, \mathbb{R}), 1)$, дивись (2.22).

Приклад 2.3. Двовимірна задача з центральною силою

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mu}{(x^2 + y^2)^2} - \epsilon\right) \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \mu, \epsilon > 0, \quad \boldsymbol{r} = (x, y)$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$, еквівалентної реалізації $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 1)$ та в полярних координатах може бути переписана у вигляді системи типу (2.23)

$$\begin{aligned}&\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{r^3} - \varphi r = 0,\\&r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.\end{aligned}$$

Усі системи, знайдені у підрозділі 2.2, можуть бути проінтегровані з використанням їх симетрії.

Основні результати розділу 2 опубліковані в роботах [4, 10, 55].

РОЗДІЛ 3

Груповий аналіз та точні розв'язки моделі Фрьоліха–Пайерлса

Даний розділ присвячено пошуку точних розв'язків моделі Фрьоліха–Пайерлса. У роботі Д.Я. Петрини [90] отримані рівняння для рівноважних та нерівноважних станів цієї моделі. В одновимірному випадку нерівноважні стани описуються системою зачеплених рівнянь.

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(t,x) + \omega_0^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(t,x) = -4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(t,x)|^2, \tag{3.1}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = \left(-\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \mu\right)\Psi(t,x) + W(t,x)\Psi(t,x), \tag{3.2}$$

де ω_0, m, μ, α — дійсні параметри.

Хвильова функція $\Psi(t,x)$ задовольняє рівняння Шрьодінгера з залежним від часу потенціалом, що задається дійсною функцією $W(t,x)$, яка є розв'язком неоднорідного рівняння Даламбера з правою частиною $-4\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\Psi(t,x)|^2$.

Д.Я. Петрина знайшов частинний розв'язок рівнянь (3.1)–(3.2) [90]. Це розв'язок солітонного типу, що задається наступними функціями:

$$W(t,x) = \frac{-16\alpha\widetilde{\eta}^2}{\omega_0^2 - V^2}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{u}{2}(x-vt-x_0)},$$

$$\Psi(t,x) = 2i\widetilde{\eta}\frac{\exp i\left(vmx - \left(\frac{v^2}{2}m - \frac{u^2}{8m} - \mu\right)t - \varphi_0\right)}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}(x-vt-x_0)},$$

де

$$v = -4\widetilde{\xi}\sqrt{\frac{\alpha}{(\omega_0^2 - V^2)m}}, \quad u = 4\widetilde{\eta}\sqrt{\frac{4\alpha m}{\omega_0^2 - V^2}}, \quad \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, x_0, \varphi_0 \text{ — сталі.}$$

У підрозділі 3.1 проведено груповий аналіз моделі Фрьоліха–Пайерлса. У підрозділі 3.2 знайдені відповідні одновимірні підалгебри знайденої алгебри інваріантності. У підрозділі 3.3 отримано широкий клас точних розв'язків системи (3.1)–(3.2). У підрозділі 3.4 підсумовуються отримані результати.

3.1. Груповий аналіз моделі Фрьоліха–Пайерлса

Очевидно, що система рівнянь (3.1)–(3.2) не буде мати широкі симетрії, оскільки ліва частина рівняння (3.1) інваріантна відносно перетворення Лоренца, а ліва частина рівняння (3.2) інваріантна відносно перетворень Галілея. Проте симетрія цієї системи є нетривіальною та дозволяє знайти досить широкий клас розв'язків.

Перед тим, як шукати симетрії системи рівнянь (3.1)–(3.2) ми віднормували коефіцієнти, зробивши заміну:

$$W(t,x) = \widetilde{W}(t,\tilde{x}), \quad \Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}} e^{i\mu t}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \frac{x}{\omega_0}, \tag{3.3}$$

яка зводить нашу систему до наступного вигляду:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widetilde{W}(t,\tilde{x}) + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\widetilde{W}(t,\tilde{x}) = -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}|\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x})|^2, \tag{3.4}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x}) = -\frac{1}{2m\omega_0^2}\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\widetilde{\Psi}(t,\tilde{x}) + \widetilde{W}(t,\widetilde{x})\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}). \tag{3.5}$$

Виразимо комплексну функцію $\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x})$ через амплітуду і фазу:

$$\widetilde{\Psi}(t,\widetilde{x}) = \rho(t,\widetilde{x})e^{i\varphi(t,\widetilde{x})}$$

та зводимо систему (3.4)–(3.5) до наступного вигляду:

$$\widetilde{W}_{tt} - \widetilde{W}_{\tilde{x}\tilde{x}} = 2\left(\rho_{\tilde{x}}^2 + \rho\rho_{\tilde{x}\tilde{x}}\right), \tag{3.6}$$

$$\rho_t = -\frac{1}{2m\omega_0^2}\left(2\rho_{\tilde{x}}\varphi_{\tilde{x}} + \rho\varphi_{\tilde{x}\tilde{x}}\right), \tag{3.7}$$

$$\rho\varphi_t = \frac{1}{2m\omega_0^2}\left(\rho_{\tilde{x}\tilde{x}} - \rho\varphi_{\tilde{x}}^2\right) - \widetilde{W}\rho. \tag{3.8}$$

Використовуючи стандартний алгоритм Лі [11, 15, 18] ми знайшли, що інфінітезимальний оператор групи інваріантності системи (3.6)–(3.8) є лінійною комбінацією наступних операторів:

$$
\begin{aligned}
&e_1 = -\partial\varphi, \quad e_2 = -\partial_{\widetilde{W}} + t\partial\varphi, \quad e_3 = t\partial_{\widetilde{W}} - \frac{1}{2}t^2\partial_\varphi, \\
&e_4 = \partial_t, \quad e_5 = \partial_{\tilde{x}}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Знайшовши їх комутатори:

$$
[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_4] = e_2,
$$

(решта комутаторів дорівнюють нулю) приходимо до висновку, що отримані оператори утворюють алгебру $A_{4.1} \oplus A_1$ за класифікацією Мубаракзянова [13].

Переписавши оператори (3.9) в термінах $\widetilde{W}$ та $\widetilde{\Psi}$ приходимо до наступного твердження.

Теорема 3.1. *Система рівнянь* (3.4), (3.5) *допускає п'ятивимірну алгебру Лі, базисні елементи якої можна вибрати у вигляді:*

$$
\begin{aligned}
&e_1 = -i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right), \quad e_2 = -\partial_{\widetilde{W}} + it\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right), \\
&e_3 = t\partial_{\widetilde{W}} - \frac{i}{2}t^2\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right), \quad e_4 = \partial_t, \quad e_5 = \partial_{\tilde{x}}.
\end{aligned}
$$

Наступним кроком є знаходження всіх одновимірних підалгебр знайденої алгебри інваріантності.

3.2. Одновимірні підалгебри алгебри $A_{4.1} \oplus A_1$

Нехай $e = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5$ — елемент алгебри $A_{4.1} \oplus A_1$, який ми будемо намагатися спростити, використовуючи приєднані представлення.

Щоб обчислити приєднані представлення, скористаємося рядами Лі [18]:

$$
\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e))e_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(\mathrm{ad}\, e)^n(e_i) = e_i - \varepsilon[e, e_i] + \frac{\varepsilon^2}{2}[e, [e, e_i]] - \cdots .
$$

Наприклад,

$$\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e_3))e_4 = e_4 - \varepsilon[e_3, e_4] + \frac{\varepsilon^2}{2}[e_3, [e_3, e_4]] - \cdots = e_4 - \varepsilon e_2.$$

Аналогічно знаходимо дію приєднаного представлення, що відповідає кожному базисному елементу на всі інші базисні елементи алгебри. Результати цієї дії наведені у таблиці:

Таблиця 3.1.

Ad	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
e_2	e_1	e_2	e_3	$e_4 - \varepsilon e_1$	e_5
e_3	e_1	e_2	e_3	$e_4 - \varepsilon e_2$	e_5
e_4	e_1	$e_2 + \varepsilon e_1$	$e_3 + \varepsilon e_2$	e_4	e_5
e_5	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5

Тут на (i, j)-му місці вказано $\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon e_i))e_j$.

Використовуючи приєднані представлення з таблиці 3.1 знаходимо всі нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри $A_{4.1} \oplus A_1$.

Припустимо спочатку, що $a_4 \neq 0$. Тоді, не зменшуючи загальності, можна покласти $a_4 = 1$. У відповідності з таблицею 3.1, якщо на такий вектор подіяти перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(a_1 e_2))$, ми можемо зробити коефіцієнт при e_1 нулем:

$$e' = \mathrm{Ad}(\exp(a_1 e_2))e = a_2' e_2 + a_3' e_3 + e_4 + a_5' e_5,$$

де a_2', a_3', a_5' — деякі числа, що залежать від a_1, a_2, a_3, a_5.

Далі, ми діємо на вектор e' перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(a_2' e_3))$, щоб перетворити на нуль коефіцієнт при e_2. Це приводить до вектора $e'' = a_3'' e_3 + e_4 + a_5'' e_5$.

Іншими словами, кожна одновимірна підалгебра, породжена вектором e з $a_4 \neq 0$, еквівалентна підалгебрі, породженої вектором $p e_3 + e_4 + \varkappa e_5$.

Решта одновимірних підалгебр породжуються векторами вказаного вище вигляду з $a_4 = 0$. Якщо $a_3 \neq 0$, ми можемо розтягом зробити

$a_3 = 1$, а потім подіяти на вектор e перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(-a_2 e_4))$, так що вектор e еквівалентний вектору $e' = a_1' e_1 + e_3 + a_5' e_5$.

Отже, всяка одновимірна підалгебра, породжена вектором e з $a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$, еквівалентна підалгебрі, породженої вектором $qe_1 + e_3 + \varkappa e_5$.

Решта одновимірних підалгебр породжуються векторами вказаного вище вигляду з $a_3 = a_4 = 0$. Якщо $a_2 \neq 0$, ми можемо розтягом зробити $a_2 = 1$, а потім подіяти на вектор e перетворенням $\mathrm{Ad}(\exp(-a_1 e_4))$, так що вектор e еквівалентний вектору $e' = e_2 + \varkappa e_5$. Аналогічно можна показати, що в інших випадках ($a_2 = a_3 = a_4 = 0$) вектор e еквівалентний або $e_1 + \varkappa e_5$ ($a_1 \neq 0$), або e_5 ($a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$).

Отже, ми знайшли оптимальну систему одновимірних підалгебр, яка описується наступною теоремою.

Теорема 3.2. *З точністю до групи внутрішніх автоморфізмів існує п'ять нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $A_{4.1} \oplus A_1$, базисні елементи яких можуть бути вибрані в наступному вигляді:*

$$Q_1 = pe_3 + e_4 + \varkappa e_5 = \partial_t + \varkappa\partial_{\tilde{x}} + pt\partial_{\widetilde{W}} - \frac{p}{2}t^2 i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),$$

$$Q_2 = qe_1 + e_3 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} + t\partial_{\widetilde{W}} - \left(\frac{1}{2}t^2 + q\right) i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),$$

$$Q_3 = e_2 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} - \partial_{\widetilde{W}} + ti\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),$$

$$Q_4 = e_1 + \varkappa e_5 = \varkappa\partial_{\tilde{x}} - i\left(\widetilde{\Psi}\partial_{\widetilde{\Psi}} - \widetilde{\Psi}^*\partial_{\widetilde{\Psi}^*}\right),$$

$$Q_5 = e_5 = \partial_{\tilde{x}}.$$

3.3. Точні розв'язки моделі Фрьоліха–Пайерлса

Для кожної з отриманих одновимірних підалгебр можна знайти відповідну заміну змінних, яка редукує рівняння (3.6)–(3.8). В якості нових змінних ми вибираємо інваріанти відповідних груп перетворень.

Розглянемо детально випадок однопараметричної групи, що породжується інфінітезимальним оператором Q_1. На першому кроці здійснюємо побудову базису інваріантів цієї алгебри. Для цього розв'язуємо рівняння

$$(p\tilde{e}_3 + \tilde{e}_4 + \varkappa\tilde{e}_5)(F(t, \tilde{x}, \widetilde{W}, \rho, \varphi)) = 0,$$

чи відповідні характеристичні рівняння

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\tilde{x}}{\varkappa} = \frac{d\widetilde{W}}{pt} = \frac{d\varphi}{-\frac{p}{2}t^2}.$$

Ця система має такі перші інтеграли:

$$\tilde{x} - \varkappa t = C_1, \quad \widetilde{W} - \frac{pt^2}{2} = C_2, \quad \rho = C_3, \quad \varphi + \frac{p}{6}t^3 = C_4.$$

Отже, базис інваріантів в даному випадку складають функції

$$\omega = \tilde{x} - \varkappa t, \quad u = \widetilde{W} - \frac{pt^2}{2}, \quad v = \rho, \quad y = \varphi + \frac{p}{6}t^3,$$

а тому покладемо

$$u = f(\omega), \quad v = h(\omega), \quad y = g(\omega),$$

звідки маємо

$$\widetilde{W} = f(\omega) + \frac{pt^2}{2}, \quad \rho = h(\omega), \quad \varphi = g(\omega) - \frac{p}{6}t^3, \quad \omega = \tilde{x} - \varkappa t. \quad (3.10)$$

Підстановка отриманих виразів для функцій $\widetilde{W}$, ρ, φ у рівняння системи (3.6)–(3.8) приводить до системи

$$\ddot{f}(\varkappa^2 - 1) + p - 2(\dot{h}^2 + h\ddot{h}) = 0, \quad (3.11)$$

$$\ddot{g} + \frac{2\dot{h}}{h}(\dot{g} - m\omega_0^2\varkappa) = 0, \quad (3.12)$$

$$\ddot{h} - h\dot{g}^2 + 2m\omega_0^2 h\,(\varkappa\dot{g} - f) = 0, \quad (3.13)$$

де $\ddot{f} = \dfrac{d^2f}{d\omega^2}, \quad \dot{h} = \dfrac{dh}{d\omega}, \quad \ddot{h} = \dfrac{d^2h}{d\omega^2}, \quad \dot{g} = \dfrac{dg}{d\omega}, \quad \ddot{g} = \dfrac{d^2g}{d\omega^2}.$

Таким чином, рівняння (3.6)–(3.8) редукуються до системи звичайних диференціальних рівнянь.

Таблиця 3.2.

Інфінітезимальний оператор	Інваріанти	Редуковані рівняння
$Q_1 = pe_3+e_4+\varkappa e_5$	$\widetilde{W} = f(\omega) + \frac{pt^2}{2}$, $\rho = h(\omega)$, $\varphi = g(\omega) - \frac{p}{6}t^3$, $\omega = \tilde{x} - \varkappa t$	$\ddot{f}(\varkappa^2-1)+p-2(\dot{h}^2+h\ddot{h})=0$, $\ddot{g} + \frac{2\dot{h}}{h}(\dot{g} - m\omega_0^2\varkappa) = 0$, $\ddot{h}-h\dot{g}^2+2m\omega_0^2 h\,(\varkappa\dot{g}-f)=0$
$Q_2 = qe_1+e_3+\varkappa e_5$	$\widetilde{W} = f(\omega) + \frac{t\tilde{x}}{\varkappa}$, $\rho = h(\omega)$, $\omega = t$, $\varphi=g(\omega)-\left(\frac{1}{2}t^2+q\right)\frac{\tilde{x}}{\varkappa}$	$\dot{f} = 0$, $\dot{h} = 0$, $\dot{g}+\frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2}\left(\frac{1}{2}\omega^2+q\right)^2+f=0$
$Q_3 = e_2 + \varkappa e_5$	$\widetilde{W} = f(\omega) - \frac{\tilde{x}}{\varkappa}$, $\rho = h(\omega)$, $\omega = t$, $\varphi = g(\omega) + \frac{t\tilde{x}}{\varkappa}$	$\dot{f} = 0$, $\dot{h} = 0$, $\dot{g} + \frac{\omega^2}{2m\omega_0^2\varkappa^2} + f = 0$
$Q_4 = e_1 + \varkappa e_5$	$\widetilde{W} = f(\omega)$, $\rho = h(\omega)$, $\varphi = g(\omega) - \frac{\tilde{x}}{\varkappa}$, $\omega = t$	$\dot{f} = 0$, $\dot{h} = 0$, $\dot{g} + \frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2} + f = 0$
$Q_5 = e_5$	$\widetilde{W} = f(\omega)$, $\rho = h(\omega)$, $\varphi = g(\omega)$, $\omega = t$	$\dot{f} = 0$, $\dot{h} = 0$, $\dot{g} + f = 0$

У таблиці 3.2 для кожної із одновимірних підалгебр подано відповідні анзаци та редуковані рівняння.

Інші чотири редуковані системи, наведені у таблиці 3.2, дають нам наступні точні розв'язки:

1) $$W(t,x) = C_1 t + \frac{tx}{\varkappa\omega_0},$$
$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\left(\mu-\frac{q^2}{2m\omega_0^2\varkappa^2}-C_2\right)t-\frac{t^5}{40m\omega_0^2\varkappa^2}-\frac{qt^3}{6m\omega_0^2\varkappa^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{C_1}{2}t^2-\left(\frac{1}{2}t^2+q\right)\frac{x}{\varkappa\omega_0}\right);$$

2) $$W(t,x) = C_1 t - \frac{x}{\varkappa\omega_0},$$
$$\Psi(t,x) = \frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\frac{tx}{\varkappa\omega_0}-\frac{t^3}{6m\omega_0^2\varkappa^2}-\frac{C_1}{2}t^2+(\mu-C_2)\,t\right);$$

3) $$W(t,x) = C_1 t,$$
$$\Psi(t,x) = \frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left(\left(\mu-\frac{1}{2m\omega_0^2\varkappa^2}-C_2\right)t-\frac{C_1}{2}t^2-\frac{x}{\varkappa\omega_0}\right);$$

4) $$W(t,x) = C_1 t,$$

$$\Psi(t,x)=\frac{C_3\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\exp i\left((\mu-C_2)\,t-\frac{C_1}{2}t^2\right).$$

Ми бачимо, що в цих розв'язках амплітуда є константою, а фаза має вигляд полінома від t порядка не вище п'ятого.

Для системи (3.11)–(3.13), яку проінтегрувати в загальному вигляді нам поки не вдалося, були знайдені частинні розв'язки. З рівняння (3.11) та (3.12) можна знайти:

$$(\varkappa^2-1)f+\frac{p}{2}\omega^2+\frac{C_1}{2}\omega+\frac{C_2}{2}=h^2, \tag{3.14}$$

$$g=m\omega_0^2\varkappa\omega+C_3\int\frac{d\omega}{h^2}+C_4, \tag{3.15}$$

де $C_1,\ldots,C_4$ — сталі інтегрування.

Підставивши отримані вирази у рівняння (3.13) дістанемо:

$$(\varkappa^2-1)\ddot{h}+m\omega_0^2h\big(p\omega^2+2C_1\omega+2\eta\big)-2m\omega_0^2h^3-\frac{C_3^2(\varkappa^2-1)}{h^3}=0, \tag{3.16}$$

де $\eta=C_2+\frac{1}{2}m\omega_0^2\varkappa^2(\varkappa^2-1)$, $C_1p=0$. Частинні розв'язки цього рівняння вдається отримати для наступних значень параметрів:

1) $\varkappa^2-1=0$;

2) $\varkappa^2-1\neq 0,\quad C_1=p=0$;

3) $\varkappa^2-1\neq 0,\quad C_3=p=\eta=0$.

1) Розглянемо випадок $\varkappa=1$. Тоді розв'язки рівнянь (3.1)–(3.2):
1.1. При $C_1^2-2pC_2>0$:

$$W(t,x)=\frac{\left(2pC_2-C_1^2-4C_3^2\right)\omega_0^2}{2m(p(x-t\omega_0)^2+2C_1\omega_0(x-t\omega_0)+2C_2\omega_0^2)^2}+\frac{m\omega_0^2+pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{p}{2}(x-t\omega_0)^2+C_1\omega_0(x-t\omega_0)+C_2\omega_0^2}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0x+t(\mu-m\omega_0^2)-\frac{pt^3}{6}+$$
$$+\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2-2pC_2}}\ln\left|\frac{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0-\omega_0\sqrt{C_1^2-2pC_2}}{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0+\omega_0\sqrt{C_1^2-2pC_2}}\right|\Bigg).$$

1.2. При $C_1^2 - 2pC_2 = 0$:

$$W(t,x) = -\frac{2C_3^2 p^2 \omega_0^2}{m\left(p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0\right)^4} + \frac{m\omega_0^2 + pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{|p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0|}{2\sqrt{2p\alpha}} \exp i\biggl(m\omega_0 x + t(\mu - m\omega_0^2) - \frac{pt^3}{6} - \\ - \frac{2C_3\omega_0}{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0}\biggr).$$

1.3. При $C_1^2 - 2pC_2 < 0$:

$$W(t,x) = \frac{\left(2pC_2 - C_1^2 - 4C_3^2\right)\omega_0^2}{2m(p(x-t\omega_0)^2 + 2C_1\omega_0(x-t\omega_0) + 2C_2\omega_0^2)^2} + \frac{m\omega_0^2 + pt^2}{2},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{p}{2}(x-t\omega_0)^2 + C_1\omega_0(x-t\omega_0) + C_2\omega_0^2} \times \\ \times \exp i\biggl(m\omega_0 x + t(\mu - m\omega_0^2) - \frac{pt^3}{6} + \\ + \frac{2C_3}{\sqrt{2pC_2 - C_1^2}} \operatorname{arctg}\frac{p(x-t\omega_0)+C_1\omega_0}{\omega_0\sqrt{2pC_2 - C_1^2}}\biggr).$$

Випадок $\varkappa = -1$ розглядається аналогічно.

2) Розглянемо випадок $\varkappa^2 - 1 \neq 0$, а $C_1 = p = 0$. Тоді рівняння (3.16) набуває вигляду:

$$\ddot{h} - \frac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2 - 1}h^3 + \frac{2\eta m\omega_0^2 h}{\varkappa^2 - 1} - \frac{C_3^2}{h^3} = 0. \tag{3.17}$$

Позначимо $\dfrac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2 - 1} = a$, $\dfrac{2\eta m\omega_0^2}{\varkappa^2 - 1} = b$, тоді рівняння (3.17) перепишеться наступним чином:

$$\ddot{h} - ah^3 + bh - \frac{C_3^2}{h^3} = 0.$$

Помноживши це рівняння на $\dot{h}$, отримаємо рівняння вигляду

$$\dot{h}\ddot{h} - ah^3\dot{h} + bh\dot{h} - \frac{C_3^2}{h^3}\dot{h} = 0.$$

Проінтегрувавши його, маємо рівняння

$$\frac{\dot{h}^2}{2} - \frac{ah^4}{4} + \frac{bh^2}{2} + \frac{C_3^2}{2h^2} = \frac{k}{8}.$$

Помножимо останнє рівняння на $h^2 = V$ отримуємо рівняння Вейєрштрасса:

$$\dot{V}^2 = 2aV^3 - 4bV^2 + kV - 4C_3^2.$$

Зробимо підстановку $V = U + \frac{2b}{3a}$:

$$\frac{1}{2a}\dot{U}^2 = U^3 + \left(\frac{k}{2a} - \frac{4b^2}{3a^2}\right)U + \left(\frac{bk}{3a^2} - \frac{16b^3}{27a^3} - \frac{2C_3^2}{a}\right).$$

Нехай $\tilde{p} = \frac{k}{2a} - \frac{4b^2}{3a^2}$, $\widetilde{q} = \frac{bk}{3a^2} - \frac{16b^3}{27a^3} - \frac{2C_3^2}{a}$, тоді:

$$\frac{1}{2a}\dot{U}^2 = U^3 + \tilde{p}U + \tilde{q}. \tag{3.18}$$

Розглянемо п'ять якісно різних випадки [45]:

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 = 0, \quad \tilde{q} > 0, \tag{3.19}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 = 0, \quad \tilde{q} < 0, \tag{3.20}$$

$$\tilde{p} = \tilde{q} = 0, \tag{3.21}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 < 0, \tag{3.22}$$

$$27\tilde{q}^2 + 4\tilde{p}^3 > 0. \tag{3.23}$$

Для умов (3.19)–(3.21) розв'язки (3.18) можуть бути виражені через елементарні функції, тоді як умови (3.22)–(3.23) породжують розв'язки в еліптичних функціях.

Розглянувши всі ці випадки, отримали наступні розв'язки системи (3.1)–(3.2):

2.1. $$W(t,x) = \frac{4\nu^2}{\varkappa^2 - 1}\left(\operatorname{tg}^2\left(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t)\right) + \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2 - 1)},$$

$$\Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{4\nu^2\left(\operatorname{tg}^2\left(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t)\right) + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta\times}$$
$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x - \varkappa\omega_0 t) + \mu t + \frac{3C_3\left(x - \varkappa\omega_0 t\right)}{2\omega_0\left(\eta - 2\nu^2\right)} -$$
$$- \frac{3\sqrt{3}C_3 \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}\nu \operatorname{tg}(2\nu\xi(x - \varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{8\nu^2 + 2\eta}}}{4\omega_0\xi\left(\eta - 2\nu^2\right)\sqrt{8\nu^2 + 2\eta}}\Bigg),$$

де $\quad \xi = \sqrt{\dfrac{m}{\varkappa^2 - 1}}$.

2.2. $$W(t,x) = \frac{2\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{th}^2\Big(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\Big) - \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{2\nu^2\left(\operatorname{th}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta} \times$$
$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t) + \mu t + \frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(\nu^2+\eta)} +$$
$$+ \frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{3}\operatorname{th}\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)}{\sqrt{\eta-2\nu^2}}}{2\omega_0\xi(\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-4\nu^2}}\Bigg).$$

2.3. $$W(t,x) = \frac{2\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{cth}^2\Big(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\Big) - \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{2\nu^2\left(\operatorname{cth}^2\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta} \times$$
$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t) + \mu t + \frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(\nu^2+\eta)} +$$
$$+ \frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\nu\sqrt{3}\operatorname{cth}\left(\nu\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)}{\sqrt{\eta-2\nu^2}}}{2\omega_0\xi(\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-4\nu^2}}\Bigg).$$

2.4. $$W(t,x) = \frac{4\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\operatorname{cth}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{\eta - 2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$
$$\Psi(t,x) = \frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{4\nu^2\left(\operatorname{cth}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right) - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\eta} \times$$
$$\times \exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t) + \mu t + \frac{3C_3\,(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0(2\nu^2+\eta)} +$$
$$+ \frac{3C_3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\nu\sqrt{3}\operatorname{cth}(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{2\eta-8\nu^2}}}{2\omega_0\xi(2\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-8\nu^2}}\Bigg).$$

$$2.5.\quad W(t,x)=\frac{4\nu^2}{\varkappa^2-1}\left(\mathrm{th}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$

$$\Psi(t,x)=\sqrt{4\nu^2\left(\mathrm{th}^2\left(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t)\right)-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3\left(x-\varkappa\omega_0 t\right)}{2\omega_0(2\nu^2+\eta)}+$$
$$+\frac{3C_3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\nu\sqrt{3}\,\mathrm{th}(2\nu\xi(x-\varkappa\omega_0 t))}{\sqrt{2\eta-8\nu^2}}}{2\omega_0\xi(2\nu^2+\eta)\sqrt{2\eta-8\nu^2}}\Bigg).$$

$$2.6.\quad W(t,x)=\frac{1}{\xi^2\left(\varkappa^2-1\right)\left(x-\varkappa\omega_0 t\right)^2}+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)},$$

$$\Psi(t,x)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{1}{\xi^2\left(x-\varkappa\omega_0 t\right)^2}+\frac{2}{3}\eta}\times$$
$$\times\exp i\Bigg(m\omega_0\varkappa(x-\varkappa\omega_0 t)+\mu t+\frac{3C_3(x-\varkappa\omega_0 t)}{2\omega_0\eta}-$$
$$-\frac{3\sqrt{3}C_3\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}\xi\sqrt{6\eta}\left(x-\varkappa\omega_0 t\right)}{2\omega_0\xi\eta\sqrt{2\eta}}\Bigg).$$

2.7. Для випадків (3.22) та (3.23) потенціал має наступний вигляд:

$$W(t,x)=\frac{2}{\varkappa^2-1}\wp\left(\xi\sqrt{2}(x-\varkappa\omega_0 t)\right)+\frac{\eta-2C_2}{3(\varkappa^2-1)}-$$
$$-\frac{p}{2(\varkappa^2-1)}\left(\frac{x}{\omega_0}-\varkappa t\right)^2-\frac{C_1}{\varkappa^2-1}\left(\frac{x}{\omega_0}-\varkappa t\right)+\frac{pt^2}{2},$$

де $\wp$ — двоякоперіодична функція Вейєрштрасса (див., наприклад, [21]), яка мероморфна на всій комплексній площині. Відповідно функцію $\Psi(t,x)$ можна знайти з рівняння (3.2).

3) Розглянемо випадок $\varkappa^2-1\neq 0$, $C_3=p=\eta=0$. Тоді рівняння (3.16) набуває вигляду:

$$\ddot{h}=\frac{2m\omega_0^2}{\varkappa^2-1}(h^3-C_1\omega h). \tag{3.24}$$

Рівняння (3.24) є рівнянням Пенлеве II, а відповідно функція h — функцією Пенлеве II. Підставивши цю функцію у (3.14) та (3.15), отримаємо розв'язок редукованої системи, а використовуючи заміни (3.3) та (3.10), дістанемо і явні вирази функцій $W(t,x)$ та $\Psi(t,x)$.

Усі розв'язки, отримані в даному підрозділі, можна розмножити перетвореннями зсувів за змінними t та x.

3.4. Висновки до розділу 3

Таким чином, ми знайшли всі можливі редукції для системи рівнянь, що описує нерівноважні стани моделі Фрьоліха–Пайерлса, які можна було отримати класичними груповими методами. Відповідні розв'язки включають частинний точний розв'язок, отриманий Д.Я. Петриною, а також багато інших розв'язків, які перераховані у підрозділі 3.3. Серед нових розв'язків є широкий клас солітоноподібних розв'язків, які задаються формулами 2.2–2.5 у підрозділі 3.3. Також ми отримали розв'язки, які виражаються через функції Вейєрштрасса та Пенлеве II.

Основні результати розділу 3 опубліковані в роботах [9, 61].

РОЗДІЛ 4

Груповий аналіз та точні розв'язки рівнянь аксіонної електродинаміки

У даному розділі представлена групова класифікація моделей аксіонної електродинаміки з самодією аксіонного поля. Відповідні рівняння руху наведені у підрозділі 4.1 та включають довільну функцію взаємодії. У підрозділі 4.2 прокласифіковано такі функції взаємодії, що відповідають нееквівалентним групам симетрії та знайдені ці симетрії. У підрозділі 4.3 обговорюються закони збереження для цих моделей. Використовуючи тривимірні підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре, які наведені у підрозділі 4.4, отримано широкий клас точних розв'язків для електромагнітного та аксіонного полів. Ці розв'язки можуть включати багато довільних параметрів і навіть довільних функцій. Найбільш загальні з отриманих розв'язків містять шість таких функцій. Повний перелік інваріантних розв'язків наводиться у підрозділі 4.5. У підрозділі 4.6 підсумовуються отримані результати.

4.1. Рівняння аксіонної електродинаміки

Розглянемо наступний узагальнений лагранжіан аксіонної електродинаміки:

$$L = \frac{1}{2}p_\mu p^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - V(\theta). \tag{4.1}$$

Тут $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, A_μ — вектор-потенціал електромагнітного поля, $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, θ — аксіонне поле, $p_\mu = \partial_\mu\theta$, $V(\theta)$ — функція від θ та κ — безрозмірна константа.

Рівняння Ейлера–Лагранжа, які відповідають лагранжіану (4.1) мають наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = \kappa \mathbf{p} \cdot \mathbf{B},\\
&\partial_0 \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = \kappa (p_0 \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}),\\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,\\
&\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

$$
\Box \theta = -\kappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + F. \tag{4.3}
$$

Тут $\mathbf{B}$ та $\mathbf{E}$ — вектори магнітного та електричного полів, які наступним чином пов'язані з компонентами тензора електромагнітного поля: $E^a = F^{0a}$, $B^a = -\frac{1}{2}\varepsilon^{0abc}F_{bc}$ та $F = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\Box = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$, $\nabla^a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = \overline{1,3}$.

З точністю до масштабних перетворень параметр κ, який вважається ненульовим може бути зведений до $\kappa = 1$.

Система (4.2), (4.3) містить сім залежних функцій B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3, θ, чотири незалежних зміні x_0, x_1, x_2, x_3 та один довільний елемент F, який залежить від θ. Групова класифікація таких систем є досить складною і цікавою задачею.

Далі буде знайдено симетрії рівнянь (4.2), (4.3) з довільною функцією $F(\theta)$ відносно неперервних груп перетворень, а також їх точні розв'язки, які можливо знайти, використовуючи ці симетрії.

4.2. Групова класифікація

Рівняння (4.3) містить довільну функцію $F(\theta)$, тому ми можемо передбачити, що симетрії цієї системи будуть залежати від явного вигляду F.

Згідно класичного алгоритму Лі (див., наприклад, [83]), щоб знайти симетрії системи (4.2), (4.3) відносно неперервної групи перетворень

$$
\mathbf{B} \to \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}', \quad \theta \to \theta', \quad x_\mu \to x'_\mu,
$$

розглянемо інфінітезимальний оператор

$$Q = \xi^{\mu}\partial_{\mu} + \eta^{j}\partial_{B^j} + \zeta^{j}\partial_{E^j} + \sigma\partial_{\theta} \tag{4.4}$$

та його продовження

$$Q_{(2)} = Q + \eta_i{}^{j}\frac{\partial}{\partial B_i^j} + \zeta_i{}^{j}\frac{\partial}{\partial E_i^j} + \sigma_i\partial_{\theta_i} + \sigma_{ik}\partial_{\theta_{ik}}, \tag{4.5}$$

де $B_i^j = \partial_i B^j$, $E_i^j = \partial_i E^j$, $\theta_i = \partial_i\theta$, $\theta_{ik} = \partial_i\theta_k$ та функції η_i^j, ζ_i^j, σ_i, σ_{ik} можуть бути виражені через ξ^i, η^j, ζ^j, σ, з використанням наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} &\eta_i{}^{j} = D_i(\eta^j) - B_k^j D_i(\xi^k), \quad \zeta_i{}^{j} = D_i(\zeta^j) - E_k^j D_i(\xi^k),\\ &\sigma_i = D_i(\sigma) - \theta_k D_i(\xi^k), \quad \sigma_{ik} = D_k(\sigma_i) - \theta_{il} D_k(\xi^l), \end{aligned} \tag{4.6}$$

де $D_i = \partial_i + B_i^j\partial_{B^j} + E_i^j\partial_{E^j} + \theta_i\partial_\theta + \theta_{ik}\partial_{\theta_k}$.

Використовуючи (4.5), умову інваріантності для системи (4.2), (4.3) можна записати в наступному вигляді:

$$Q_{(2)}\mathcal{F}|_{\mathcal{F}=0} = 0, \tag{4.7}$$

де $\mathcal{F}$ — многовид заданий співвідношеннями (4.2), (4.3). Цей многовид заданий у евклідовому просторі, базис якого створюють залежні і незалежні змінні системи рівнянь (4.2), (4.3), а також похідні від залежних змінних. Обраховуючи функції (4.6), підставляючи результат у (4.7) і прирівнюючи коефіцієнти при лінійно-незалежних функціях E^j, B^j, θ та їх похідних, ми отримаємо наступну визначальну систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів ξ^μ, η^j, ζ^j та σ:

$$\begin{aligned} &\xi^{\mu}_{B^a} = 0, \quad \xi^{\mu}_{E^a} = 0, \quad \xi^{\mu}_{\theta} = 0,\\ &\xi^{\mu}_{x^\mu} = \xi^{\nu}_{x^\nu}, \quad \xi^{\mu}_{x^\nu} + \xi^{\nu}_{x^\mu} = 0, \quad \mu \neq \nu, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\sigma_{E^a} = 0, \quad \sigma_{B^a} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0, \tag{4.9}$$

$$\Box\sigma + \left(\sigma_\theta - 2\xi^0_{x^0}\right)(F + kE^aB^a) - \kappa(B^a\zeta^a + E^a\eta^a) - \sigma F_\theta = 0, \tag{4.10}$$

$$\Box\xi^{\mu} - 2\sigma_{\theta x^\mu} = 0, \tag{4.11}$$

$$
\begin{aligned}
&\xi^a_{x^b} + \eta^b_{B^a} = 0, \quad \xi^a_{x^b} + \zeta^b_{E^a} = 0,\\
&\xi^a_{x^0} - \varepsilon_{abc}\eta^c_{E^b} = 0, \quad \xi^a_{x^0} - \varepsilon_{abc}\zeta^c_{B^b} = 0,\\
&\partial_a\eta^a = 0, \quad \partial_a\zeta^a + B^a\partial_a\sigma = 0,\\
&\eta^a_{x^0} + \varepsilon_{abc}\zeta^c_{x^b} = 0, \quad \zeta^a_{x^0} + B^a\sigma_{x^0} - \varepsilon_{abc}(\eta^c_{x^b} + E^b\sigma_{x^c}) = 0,\\
&\eta^a + B^a\sigma_\theta + \zeta^a_\theta - B^b\zeta^a_{E^b} + \varepsilon_{abc}E^b\xi^0_{x^c} = 0,\\
&\zeta^a - \eta^a_\theta + E^a\sigma_\theta - E^b\zeta^a_{E^b} - \varepsilon_{abc}B^b\xi^c_{x^0} = 0,\\
&\eta^a_{B^a} - \eta^b_{B^b} = 0, \quad \eta^a_{B^a} - \zeta^b_{E^b} = 0, \qquad \zeta^a_{E_a} - \zeta^b_{E_b} = 0,\\
&\eta^a_\theta - B^a\eta^b_{E^b} = 0, \quad \zeta^a_\theta - E^a\eta^b_{E^b} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Тут нижні індекси позначають похідні відносно відповідних змінних: $\xi^\mu_{B^a} = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial B^a}$, і т.д., та в останніх двох рядках не відбувається сумування по індексам, що повторюються.

Згідно з рівнянням (4.8) функції ξ^μ не залежать від B^a, E^a, θ та є векторами Кіллінга у просторі незалежних змінних. Їх загальний вигляд задається наступними формулами:

$$
\xi^\mu = 2x^\mu f^\nu x_\nu - f^\mu x_\nu x^\nu + c^{\mu\nu}x_\nu + dx^\mu + e^\mu, \tag{4.13}
$$

де f^μ, d, e^μ та $c^{\mu\nu} = -c^{\nu\mu}$ — довільні константи.

З (4.9) випливає, що $\sigma = \varphi_1\theta + \varphi_2$, де φ_1 та φ_2 — функції від x_μ. Підставляючи цей вираз в (4.10), отримуємо наступне рівняння:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1\theta F_\theta + \varphi_2 F_\theta + 2\left(\xi^0_{x_0} - \varphi_1\right)F + 2\kappa\left(\xi^0_{x_0} - \varphi_1\right)E_aB_a\\
&+ \kappa(B_a\zeta^a + E_a\eta^a) - \theta\Box\varphi_1 - \Box\varphi_2 - 2p^\mu\partial_\mu\varphi_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Нехай члени

$$
\theta F_\theta, \quad F_\theta, \quad F, \quad \text{та} \quad 1 \tag{4.15}
$$

є лінійно незалежними. Тоді з (4.14) випливає, що

$$
\varphi_1 = \varphi_2 = \xi^0_{x_0} = 0, \; B^a\zeta^a + E^a\eta^a = 0 \tag{4.16}
$$

і, тим самим $\sigma = 0$. Підставляючи (4.16) та (4.13) в (4.11), отримуємо умову $f^\nu = 0$, тому (4.13) редукується до вигляду

$$
\xi^\mu = c^{\mu\nu}x_\nu + e^\mu. \tag{4.17}
$$

Тоді з (4.12), (4.16) та (4.17) випливає, що

$$\eta^a = c^{ab}B^b + \varepsilon^{abc}c^{0b}E^c, \quad \zeta^a = c^{ab}E^b - \varepsilon^{abc}c^{0b}B^c. \tag{4.18}$$

Підставляючи (4.17) та (4.18) в (4.4) і використовуючи умову $\sigma = 0$, ми отримаємо лінійну комбінацію наступних інфінітезимальних операторів:

$$\begin{aligned} &P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \\ &J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + B^a\partial_{B^b} - B^b\partial_{B^a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a}, \\ &J_{0a} = x_0\partial_a + x_a\partial_0 + \varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{B^c} - B^b\partial_{E^c}\right), \end{aligned} \tag{4.19}$$

де ε_{abc} — одиничний антисиметричний тензор, $a, b, c = 1, 2, 3$.

Оператори (4.19) утворюють базис алгебри Лі p(1,3) групи Пуанкаре P(1,3).

Знайдена симетрія розширяється у тих випадках, коли члени (4.15) є лінійно залежними. А саме, існує три випадки, коли це відбувається. При цьому довільна функція F у рівнянні (4.3) набуває одну з наступних форм: $F = 0$, $F = c$ та $F = b\mathrm{e}^{a\theta}$, де c, a та b — ненульові константи. Відповідні додаткові базисні елементи алгебри інваріантності мають вигляд:

$$\begin{aligned} &P_4 = \partial_\theta, \quad D = x_0\partial_0 + x_i\partial_i - B^i\partial_{B^i} - E^i\partial_{E^i}, \quad \text{якщо} \quad F(\theta) = 0, \\ &P_4 = \partial_\theta, \quad \text{якщо} \quad F(\theta) = c, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$X = aD - 2P_4, \quad \text{якщо} \quad F(\theta) = b\mathrm{e}^{a\theta}. \tag{4.21}$$

Оператор P_4 відповідає зсувам залежної змінної θ, D — оператор дилатації, який генерує відповідні масштабні перетворення залежних та незалежних змінних, та X — відповідає комбінації зсувів і масштабних перетворень. Відмітимо, що довільні параметри a, b та c можна звести до постійних значень $a = \pm 1$, $b = \pm 1$ та $c = \pm 1$ за допомогою масштабних перетворень залежних та незалежних змінних.

Отримані результати можуть бути сформульовані у вигляді наступного твердження.

Теорема 4.1. *Максимальною неперервною групою інваріантності системи (4.2), (4.3) з довільною функцією $F(\theta)$ є група Пуанкаре. У випадках, вказаних у (4.20) та (4.21) ця симетрія задається розширеними 11-параметричними групами Пуанкаре, у той час як для тривіального F група симетрії є 12-параметричною.*

Відмітимо, що інфінітезимальні оператори (4.19) можуть бути записані в термінах потенціальних змінних A^μ і $A^4 = \theta$. При цьому ці оператори приймають більш компактну форму:

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + A_\mu \partial_{A_\nu} - A_\nu \partial_{A_\mu}. \tag{4.22}$$

Саме це представлення буде використовуватися при дослідженні законів збереження.

4.3. Закони збереження

Система (4.2), (4.3) допускає лагранжеве формулювання. Згідно з теоремою Нетер це означає, що симетрії, знайдені раніше, генерують закони збереження. Оскільки у ролі польових змінних у лагранжіані (4.1) виступає вектор-потенціал A^μ, то для знаходження законів збереження необхідно представити знайдені вище оператори симетрії в термінах цих варіаційних змінних:

$$Q = \xi^\mu \partial_\mu + \varphi^\tau \partial_{A^\tau}, \tag{4.23}$$

де сумування відбувається по індексам $\tau = 0, 1, 2, 3, 4$ та $\mu = 0, 1, 2, 3$. Явні вирази для коефіцієнтів ξ^μ та φ^τ легко отримати, порівнявши (4.22) з (4.23).

Струм, який відповідає симетрії (4.23), може бути представлений як [83]:

$$J_\sigma = \varphi_\tau \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)} + \xi^\sigma L - \xi^\nu \partial_\nu A^\tau \frac{\partial L}{\partial(\partial_\sigma A^\tau)}. \tag{4.24}$$

Так побудовані величини дійсно відповідають законам збереження, оскільки для них виконуються рівняння неперервності $\partial_\mu J^\mu = 0$.

Найбільш важливою з фізичної точки зору величиною, що зберігається у часі є тензор енергії-імпульсу, який відповідає симетріям P_μ. У цьому випадку у формулі (4.23)

$$\varphi^\tau \equiv 0 \quad \text{і} \quad \xi_\mu = 1, \tag{4.25}$$

де μ послідовно приймає значення 0,1,2,3. Підставляючи (4.1) і (4.25) у (4.24) та використовуючи тривимірні позначення

$$F_{0a} = E_a, \quad F_{ab} = \varepsilon_{abc} B_c,$$

знаходимо компоненти цього тензору в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + p_0^2 + \mathbf{p}^2) + V(\theta), \\ T^{0a} &= T^{a0} = \varepsilon_{abc} E_b B_c + p^0 p^a, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$T^{ab} = -E^a E^b - B^a B^b + p^a p^b + \frac{1}{2}\delta^{ab}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + p_0^2 - \mathbf{p}^2 - 2V(\theta)). \tag{4.27}$$

Тензор $T^{\mu\nu}$ симетричний та задовольняє рівнянню неперервності $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Його компоненти T^{00} та T^{0a} задають густину енергії та імпульсу відповідно.

Важливо відзначити, що тензор енергії-імпульсу не залежить від параметра κ, тобто член $\frac{\kappa}{4}\theta F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$, присутній у лагранжіані (4.1), на нього не впливає. Насправді цей тензор не що інше, як сума тензорів енергії-імпульсу для вільного електромагнітного поля і вільного скалярного поля. Взаємодія цих полів між собою не дає внесок у тензор енергії-імпульсу.

Відзначимо також, що для випадку $V(\theta)$, тобто, $V(\theta) = \frac{1}{2}m^2\theta^2$, густина енергії T^{00} (4.26) додатньо визначена. Саме цей випадок відповідає стандартним рівнянням аксіонної електродинаміки.

Існування тензору, що зберігається, (4.26), (4.27) викликано симетрією лагранжіана (4.1) відносно зсувів незалежних змінних x_μ. Симетрії відносно поворотів та перетворення Лоренца призводять до збереження наступного тензора:

$$G^{\alpha\nu\mu} = x^{\alpha}T^{\mu\nu} - x^{\nu}T^{\mu\alpha}, \tag{4.28}$$

який задовольняє рівнянню неперервності відносно індекса μ. Зокрема, для $\alpha, \nu = 1, 2, 3$ рівняння (4.28) з $T^{\mu\nu}$ заданими в (4.26), (4.27) представляє тензор кутового моменту.

Тензори (4.26)–(4.28) вичерпують величини, що зберігаються, існування яких обумовлене симетріями Лі рівнянь (4.2), (4.3) з довільною функцією $F(\theta)$.

4.4. Оптимальні підалгебри

Таким чином, ми виконали перший крок алгоритму, викладеного у підрозділі 1.4 і знайшли максимальну алгебру інваріантності досліджуваних рівнянь. Другим кроком алгоритму є побудова оптимальної системи тривимірних підалгебр цієї алгебри. Підалгебри алгебри $p(1,3)$, визначені з точністю до групи внутрішніх автоморфізмів, знайдені вперше в роботі [2]. Пізніше ці результати були переотримані у роботах [86, 88]. Відповідно до [86, 88] існує 30 нееквівалентних тривимірних підалгебр $A_1, A_2, \ldots, A_{30}$ алгебри $p(1,3)$, які ми представимо нижче, вказавши їх базисні елементи:

$$
\begin{aligned}
&A_1: \ \langle P_0, P_1, P_2\rangle; \quad A_2: \ \langle P_1, P_2, P_3\rangle; \quad A_3: \ \langle P_0 - P_3, P_1, P_2\rangle;\\
&A_4: \langle J_{03}, P_1, P_2\rangle; \quad A_5: \ \langle J_{03}, P_0 - P_3, P_1\rangle; \quad A_6: \ \langle J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3\rangle;\\
&A_7: \ \langle J_{03} + \alpha P_2, P_0 - P_3, P_1\rangle; \quad A_8: \ \langle J_{12}, P_0, P_3\rangle;\\
&A_9: \ \langle J_{12} + \alpha P_0, P_1, P_2\rangle; \quad A_{10}: \ \langle J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2\rangle;\\
&A_{11}: \ \langle J_{12} - P_0 + P_3, P_1, P_2\rangle; \quad A_{12}: \ \langle G_1, P_0 - P_3, P_2\rangle;\\
&A_{13}: \ \langle G_1, P_0 - P_3, P_1 + \alpha P_2\rangle; \quad A_{14}: \ \langle G_1 + P_2, P_0 - P_3, P_1\rangle\\
&A_{15}: \ \langle G_1 - P_0, P_0 - P_3, P_2\rangle; \quad A_{16}: \ \langle G_1 + P_0, P_1 + \alpha P_2, P_0 - P_3\rangle;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{17}: \ \langle J_{03}+\alpha J_{12}, P_0, P_3\rangle; \quad A_{18}: \ \langle \alpha J_{03}+J_{12}, P_1, P_2\rangle; \\
&A_{19}: \ \langle J_{12}, J_{03}, P_0-P_3\rangle; \quad A_{20}: \ \langle G_1, G_2, P_0-P_3\rangle; \\
&A_{21}: \ \langle G_1+P_2, G_2+\alpha P_1+\beta P_2, P_0-P_3\rangle; \\
&A_{22}: \ \langle G_1, G_2+P_1+\beta P_2, P_0-P_3\rangle; \quad A_{23}: \ \langle G_1, G_2+P_2, P_0-P_3\rangle; \\
&A_{24}: \ \langle G_1, J_{03}, P_2\rangle; \quad A_{25}: \ \langle J_{03}+\alpha P_1+\beta P_2, G_1, P_0-P_3\rangle; \\
&A_{26}: \ \langle J_{12}-P_0+P_3, G_1, G_2\rangle; \quad A_{27}: \ \langle J_{03}+\alpha J_{12}, G_1, G_2\rangle; \\
&A_{28}: \ \langle G_1, G_2, J_{12}\rangle; \quad A_{29}: \ \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle; \quad A_{30}: \ \langle J_{12}, J_{23}, J_{31}\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Тут P_μ та $J_{\mu\nu}$ — генератори, задані співвідношеннями (4.19), $G_1 = J_{01} - J_{13}$, $G_2 = J_{02} - J_{23}$, α та β — довільні параметри.

Використовуючи підалгебри (4.29), ми можемо отримати точні розв'язки для системи (4.2), (4.3). Нагадаємо, що для редукцій цієї системи ми можемо використати тільки такі підалгебри, базисні елементи яких задовольняють умову (1.2). Цю умову задовольняють базисні елементи алгебр A_1–A_{27}, але не задовольняють базисні елементи алгебр A_{28}, A_{29}, A_{30} та A_6 при $\alpha = 0$. Проте, останні симетрії також можуть бути застосовані для генерації точних розв'язків з використанням умови слабкої трансверсальності, запропонованої у роботі [59]. В окремих випадках ми будемо використовувати більш загальний підхід.

У наступних розділах ми представимо повний перелік редукцій та знайдемо точні розв'язки для системи (4.2), (4.3), які можуть бути отримані, використовуючи редукції відносно підгруп групи Пуанкаре. Ми знайдемо також деякі розв'язки, існування яких обумовлено симетрією цієї системи відносно розширеної групи Пуанкаре.

4.5. Повний перелік інваріантних розв'язків

У цьому розділі ми представимо всі точні розв'язки для рівнянь (4.2), (4.3), які можна було отримати, використовуючи симетрії відносно тривимірних підалгебр алгебри Пуанкаре. Базисні елементи цих підалгебр задані співвідношеннями (4.29).

Ми будемо розглядати рівняння (4.2), (4.3) з $F = -m^2\theta$, що відповідає стандартній аксіонній електродинаміці. Крім цього, з точністю до масштабування залежних змінних, ми можемо обмежитися випадком $\kappa = 1$. Відповідну систему (4.2), (4.3) можна переписати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbf{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{B}, \\ &\partial_0 \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = (p_0 \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}), \\ &\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \partial_0 \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\Box\theta = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - m^2\theta. \tag{4.31}$$

Нижче ми представимо точні розв'язки для рівнянь (4.30), (4.31) для ненульового та нульового m.

Компоненти векторів $\mathbf{B}$ та $\mathbf{E}$ ми будемо позначати як $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ та $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$.

Отримані нами точні розв'язки можна поділити на класи за типом редукцій, а саме:

- редукції до алгебраїчних рівнянь;
- редукції до лінійних звичайних диференціальних рівнянь;
- редукції до нелінійних звичайних диференціальних рівнянь;
- редукції до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

4.5.1. Редукції до алгебраїчних рівнянь. Розглянемо підалгебри A_{11}, A_{12}, A_{20}–A_{23}, A_{26} та покажемо, що використовуючи їх інваріанти, система (4.30), (4.31) може бути зведена до алгебраїчних рівнянь.

Алгебра A_{11}: $\langle J_{12} - P_0 + P_3, P_1, P_2 \rangle$.

Інваріанти I відповідної групи Лі є функціями залежних і незалежних змінних, що входять в систему (4.30), (4.31), які задовольняють таким умовам

$$P_1 I = P_2 I = 0, \quad (J_{12} - P_0 + P_3) I = 0. \tag{4.32}$$

Система (4.32) є невиродженою. Таким чином, маємо три незалежних рівняння для одинадцяти змінних, які визначають вісім інваріантів. Ці інваріанти можуть бути вибрані в наступному вигляді:

$$
\begin{gathered}
I_1 = E_1 \sin\zeta - E_2 \cos\zeta,\ I_2 = E_2 \sin\zeta + E_1 \cos\zeta, \\
I_3 = B_1 \sin\zeta - B_2 \cos\zeta,\ I_4 = B_2 \sin\zeta + B_1 \cos\zeta, \\
I_5 = E_3,\ I_6 = B_3,\ I_7 = \theta,\ I_8 = \omega = x_0 + x_3,
\end{gathered}
\tag{4.33}
$$

де $\zeta = \frac{1}{2}(x_3 - x_0)$ та I_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 7$ — довільні функції від ω. Розв'язуючи (4.33) для E_a, B_a та θ і використовуючи (4.30), ми отримаємо

$$
E_1 = B_2 = c_1 \sin\zeta + c_2 \cos\zeta, \quad E_2 = -B_1 = c_2 \sin\zeta - c_1 \cos\zeta, \tag{4.34}
$$

$$
E_3 = c_3\theta + c_4, \quad B_3 = c_3, \tag{4.35}
$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні дійсні константи та θ — функція від ω, яка, відповідно до (4.31), повинна задовольняти наступним лінійним алгебраїчним співвідношенням:

$$
(c_3^2 + m^2)\theta + c_3 c_4 = 0. \tag{4.36}
$$

Таким чином,

$$
\theta = -\frac{c_3 c_4}{c_3^2 + m^2},
$$

якщо сума в дужках відмінна від нуля, та θ є довільною постійної за умови $c_3 = m = 0$.

Цікаво відмітити, що розв'язок (4.34)–(4.36) може бути узагальнений до наступного вигляду:

$$
E_1 = B_2 = f(\zeta),\ E_2 = -B_1 = g(\zeta),\ E_3 = c_3\theta + c_4,\ B_3 = c_3, \tag{4.37}
$$

де $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ — довільні функції та θ знову визначається за формулою (4.36). Проте, розв'язок (4.37) не може бути отриманий за допомогою симетрійної редукції.

Аналогічним чином отримуємо розв'язки, які відповідають підалгебрам A_{12}, $A_{20} - A_{23}$ та A_{26}.

Алгебра A_{12}: $\langle G_1, P_0 - P_3, P_2\rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{c_1 x_1}{\omega^2} + \varphi_1, \quad B_2 = -E_1 = -\frac{c_1 x_1 \theta + c_2 x_1}{\omega^2} + \varphi_2,$$
$$B_3 = \frac{c_1}{\omega}, \quad E_3 = \frac{c_1\theta + c_2}{\omega},$$

де φ_i — довільні функції від $\omega = x_0 + x_3$,

$$\theta = \varphi_3(\omega), \quad \text{якщо} \quad c_1 = m = 0,$$
$$\theta = -\frac{c_1 c_2}{c_1^2 + m^2\omega^2}, \quad \text{якщо} \quad m \neq 0.$$

Алгебра A_{20}: $\langle G_1, G_2, P_0 - P_3\rangle$.

$$B_1 = E_2 - \frac{c_2}{\omega} = \frac{-2c_1x_1x_2 + c_2(x_1^2 - x_2^2) + 2c_3x_1 + 2c_3x_2\theta + 2c_4x_2}{2\omega^3} + \varphi_1,$$
$$B_2 = -E_1 + \frac{c_1}{\omega} = \frac{c_1(x_1^2 - x_2^2) + 2c_2x_1x_2 + 2c_3x_2 - 2c_3x_1\theta - 2c_4x_1}{2\omega^3} + \varphi_2,$$
$$B_3 = \frac{-c_1x_2 + c_2x_1 + c_3}{\omega^2}, \quad E_3 = \frac{-c_1x_1 - c_2x_2 + c_3\theta + c_4}{\omega^2},$$

де φ_i — довільні функції від $\omega = x_0 + x_3$,

$$\theta = -\frac{(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)\omega^3 + c_3c_4}{c_3^2 + m^2\omega^4}, \quad \text{якщо} \quad c_3^2 + m^2 > 0;$$
$$\theta = \varphi_3, \quad c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0, \quad \text{якщо} \quad c_3^2 + m^2 = 0.$$

Алгебра A_{21}: $\langle G_1 + P_2, G_2 + \alpha P_1 + \beta P_2, P_0 - P_3\rangle$.

Для $\alpha = 1$:

$$B_1 = E_2 = \frac{c_1(x_1(\omega+\beta) - x_2) + (c_1\theta - c_2)(x_2\omega - x_1)}{(\omega(\omega+\beta) - 1)^2} + \varphi_2,$$
$$B_2 = -E_1 = \frac{c_1(x_2\omega - x_1) - (c_1\theta - c_2)(x_1(\omega+\beta) - x_2)}{(\omega(\omega+\beta) - 1)^2} + \varphi_3,$$
$$B_3 = \frac{c_1}{\omega(\omega+\beta) - 1}, \quad E_3 = \frac{c_1\theta - c_2}{\omega(\omega+\beta) - 1},$$
$$\theta = \varphi_3, \quad \text{якщо} \quad c_1 = m = 0;$$
$$\theta = \frac{c_1c_2}{c_1^2 + m^2(\omega(\omega+\beta) - 1)^2}, \quad \text{якщо} \quad c_1^2 + m^2 \neq 0.$$

Для $\alpha \neq 1$:

$$B_1 = E_2 = \frac{(\alpha-1)(x_1(\omega+\beta)-\alpha x_2)+(2\omega+\beta)(\omega x_2 - x_1)}{(\alpha-1)(\omega(\omega+\beta)-\alpha)}\varphi_3 +$$
$$+\frac{\omega x_2 - x_1}{\alpha-1}\dot{\varphi}_3 + \varphi_1,$$
$$B_2 = -E_1 = \frac{(\alpha-1)(\omega x_2 - x_1)-(2\omega+\beta)(x_1(\omega+\beta)-\alpha x_2)}{(\alpha-1)(\omega(\omega+\beta)-\alpha)}\varphi_3 +$$
$$+\frac{x_1(\omega+\beta)-\alpha x_2}{\alpha-1}\dot{\varphi}_3 + \varphi_2,$$
$$B_3 = \varphi_3, \quad E_3 = \frac{(2\omega+\beta)\varphi_3 + (\omega(\omega+\beta)-\alpha)\dot{\varphi}_3}{\alpha-1},$$
$$\theta = \varphi_4, \quad \varphi_3 = \frac{c}{\omega(\omega+\beta)-\alpha}, \quad \text{якщо} \quad m = 0;$$
$$\theta = \frac{(2\omega+\beta)\varphi_3^2 + (\omega^2+\beta\omega-\alpha)\varphi_3\dot{\varphi}_3}{m^2(1-\alpha)}, \quad \text{якщо} \quad m \neq 0.$$

Алгебра A_{22}: $\langle G_1, G_2 + P_1 + \beta P_2, P_0 - P_3\rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{x_1(\omega+\beta) - x_2 - (2\omega+\beta)\omega x_2}{\omega(\omega+\beta)}\varphi_3 - \omega x_2\dot{\varphi}_3 + \varphi_1,$$
$$B_2 = -E_1 = \frac{\omega x_2 + (2\omega+\beta)(x_1(\omega+\beta)-x_2)}{\omega(\omega+\beta)}\varphi_3 +$$
$$+ (x_1(\omega+\beta)-x_2)\dot{\varphi}_3 + \varphi_2,$$
$$B_3 = \varphi_3, \quad E_3 = -(2\omega+\beta)\varphi_3 - \omega(\omega+\beta)\dot{\varphi}_3,$$
$$\theta = \frac{(2\omega+\beta)\varphi_3^2 + \omega(\omega+\beta)\dot{\varphi}_3\varphi_3}{m^2}, \quad \text{якщо} \quad m \neq 0$$
$$\theta = \varphi_4, \quad \varphi_3 = \frac{c}{\omega(\omega+\beta)}, \quad \text{якщо} \quad m = 0.$$

Алгебра A_{23}: $\langle G_1, G_2 + P_2, P_0 - P_3\rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{c_1 x_1(\omega+1) + x_2\omega(c_1\theta + c_2)}{\omega^2(\omega+1)^2} + \varphi_2,$$
$$B_2 = -E_1 = \frac{c_1 x_2\omega - x_1(\omega+1)(c_1\theta+c_2)}{\omega^2(\omega+1)^2} + \varphi_3,$$
$$B_3 = \frac{c_1}{\omega(\omega+1)}, \quad E_3 = \frac{c_1\theta + c_2}{\omega(\omega+1)},$$

$$\theta = \varphi_1, \quad \text{якщо} \quad c_1 = m = 0,$$
$$\theta = -\frac{c_1 c_2}{c_1^2 + m^2\omega^2(\omega+1)^2}, \quad \text{якщо} \quad c_1^2 + m^2 \neq 0.$$

Алгебра $\boldsymbol{A_{26}}$: $\boldsymbol{\langle J_{12} - P_0 + P_3, G_1, G_2\rangle}$.

$$B_1 = \frac{c_1 x_1 x_2}{\omega^3}\cos\zeta + \frac{c_2 x_2}{\omega^3} + \frac{c_1\Big((\dot\theta - 2)\omega^2 + 2(x_1^2 - x_2^2)\Big)}{4\omega^3}\sin\zeta,$$
$$B_2 = \frac{c_1 x_1 x_2}{\omega^3}\sin\zeta + \frac{c_1\Big((\dot\theta - 2)\omega^2 - 2(x_1^2 - x_2^2)\Big)}{4\omega^3}\cos\zeta,$$
$$B_3 = \frac{c_1 x_1}{\omega^2}\sin\zeta - \frac{c_2 x_1}{\omega^3} + \frac{c_1 x_2}{\omega^2}\cos\zeta, \quad E_1 = -B_2 - \frac{c_1}{\omega}\cos\zeta,$$
$$E_2 = B_1 + \frac{c_1}{\omega}\sin\zeta, \quad E_3 = \frac{c_1 x_2}{\omega^2}\sin\zeta + \frac{c_2}{\omega^2} + \frac{c_1 x_1}{\omega^2}\cos\zeta,$$
$$\theta = 0, \quad \text{якщо} \quad m \neq 0, \quad \theta = \varphi(\omega), \quad \text{якщо} \quad m = 0,$$

де $\zeta = \frac{x^2}{\omega} + \frac{\theta}{2}$, $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ та $\varphi(\omega)$ — довільна функція від $\omega = x_0 + x_3$.

4.5.2. Редукції до лінійних звичайних диференціальних рівнянь. Наступний клас розглядуваних підалгебр включає A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_{15}, A_{16} та A_{25}. З їх допомогою систему (4.30), (4.31) можна звести до лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Знайдемо розв'язки системи (4.2), (4.3), які інваріантні відносно підалгебр A_1, A_2 та A_3.

Базисні елементи всіх цих підалгебр можуть бути представлені в наступному загальному вигляді

$$\boldsymbol{A}\colon \ \langle \boldsymbol{P_1, P_2, kP_0 + \varepsilon P_3}\rangle, \tag{4.38}$$

де ε та k — параметри. Дійсно, підставивши в (4.38) $\varepsilon = -k$, ми прийдемо до алгебри A_3, для $\varepsilon^2 < k^2$ або $k^2 < \varepsilon^2$ алгебра (4.38) еквівалентна A_1 чи A_2 відповідно.

Щоб знайти відповідні інваріантні розв'язки, ми повинні знайти інваріанти груп, породжених алгебрами (4.38). Ці інваріанти включають залежні змінні E_a, B_a, θ $(a = 1, 2, 3)$ та незалежну змінну $\omega = \varepsilon x_0 - kx_3$. Будемо шукати розв'язки системи (4.2), (4.3), які є функціями від ω. Тоді рівняння (4.2) зводиться до наступної системи:

$$\begin{aligned} &\dot{B}_3 = 0, \quad \dot{E}_3 = \dot{\theta} B_3, \quad k\dot{E}_2 = -\varepsilon \dot{B}_1, \quad k\dot{E}_1 = \varepsilon \dot{B}_2, \\ &\varepsilon \dot{E}_1 - k\dot{B}_2 = \dot{\theta}(kE_2 + \varepsilon B_1), \quad k\dot{B}_1 + \varepsilon \dot{E}_2 = \dot{\theta}(\varepsilon B_2 - kE_1), \end{aligned} \tag{4.39}$$

де $\dot{B}_3 = \frac{\partial B_3}{\partial \omega}$.

Система (4.39) легко інтегрується. Якщо $\varepsilon^2 = k^2 \neq 0$, то

$$E_1 = \frac{\varepsilon}{k} B_2 = F_1, \quad E_2 = -\frac{\varepsilon}{k} B_1 = F_2, \quad E_3 = c\theta + b, \quad B_3 = c,$$

де F_1 та F_2 — довільні функції від ω, у той час як c та b — довільні дійсні числа. Відповідне рівняння (4.3) редукується до вигляду $e^2\theta = F(\theta) - be$, тобто θ пропорційне до $F(\theta) - be$, якщо $e \neq 0$. Якщо і e, і F дорівнюють нулю, то θ — довільна функція від ω.

Для $\varepsilon^2 \neq k^2$ розв'язки системи (4.39) мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &B_1 = kc_1\theta - kb_1 + \varepsilon c_2, \quad B_2 = kc_2\theta - kb_2 - \varepsilon c_1, \quad B_3 = c_3, \\ &E_1 = \varepsilon c_2\theta - \varepsilon b_2 - kc_1, \quad E_2 = -\varepsilon c_1\theta + \varepsilon b_1 - kc_2, \\ &E_3 = c_3\theta - b_3(\varepsilon^2 - k^2), \end{aligned} \tag{4.40}$$

де b_a та c_a $(a = 1, 2, 3)$ — довільні константи. Відповідне рівняння (4.3) має вигляд

$$\ddot{\theta} = -b\theta + c + \widetilde{F}, \tag{4.41}$$

де $b = \left(c_1^2 + c_2^2 + \frac{c_3^2}{\varepsilon^2 - k^2}\right)$, $\widetilde{F} = \frac{F}{(\varepsilon^2 - k^2)}$ та $c = c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3$.

Якщо $F = 0$ або $F = -m^2\theta$, то (4.41) редукується до лінійного рівняння:

$$\ddot{\theta} = -a\theta + c, \tag{4.42}$$

де $a = c_1^2 + c_2^2 + \frac{c_3^2 + m^2}{\varepsilon^2 - k^2}$. Таким чином,

$$\theta = a_\mu \cos \mu\omega + b_\mu \sin \mu\omega + \frac{c}{\mu^2}, \qquad \text{якщо} \quad a = \mu^2 > 0, \tag{4.43}$$

$$\theta = a_\sigma \mathrm{e}^{\sigma\omega} + b_\sigma \mathrm{e}^{-\sigma\omega} - \frac{c}{\sigma^2}, \quad \text{якщо} \quad a = -\nu^2 < 0, \tag{4.44}$$

$$\theta = \frac{1}{2}c\omega^2 + c_1\omega + c_2, \quad \text{якщо} \quad a = 0, \tag{4.45}$$

де a_μ, b_μ, a_σ, b_σ c_1 та c_2 — довільні константи.

Розглянемо **алгебру $\boldsymbol{A_5}$** з базисними елементами $\langle \boldsymbol{J_{03}, P_0 - P_3, P_1} \rangle$. Відповідні інваріантні розв'язки (4.30), (4.31) мають такий вигляд:

$$B_1 = E_2 = (x_0 + x_3)\left(c_1\theta + c_2\right), \quad B_2 = -E_1 = c_1(x_0 + x_3),$$
$$B_3 = -c_3\theta + c_4, \quad E_3 = c_3, \; c_1c_2 = 0.$$

Функція $\theta = \varphi(\omega)$ залежить від єдиної змінної $\omega = x_2$ та задовольняє рівнянню (4.42), де $a = c_3^2 - m^2, \; c = c_3c_4$. Таким чином, її можливі форми задаються рівняннями (4.43)–(4.45).

Алгебра $\boldsymbol{A_7}$: $\langle \boldsymbol{J_{03} + \alpha P_2, P_0 - P_3, P_1} \rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{-c_1\theta + c_2}{x_0 + x_3}, \quad B_2 = -E_1 = \frac{-\alpha c_3\theta + \alpha c_4 - c_1}{x_0 + x_3},$$
$$B_3 = -c_3\theta + c_4, \quad E_3 = c_3.$$

Можливі функції $\theta = \varphi(\omega)$ знову задаються рівняннями (4.43)–(4.45), де $a = c_3^2 - m^2, c = c_3c_4$ та $\omega = x_2 - \alpha \ln|x_0 + x_3|$.

Алгебра $\boldsymbol{A_{15}}$: $\langle \boldsymbol{G_1 - P_0, P_0 - P_3, P_2} \rangle$.

$$B_1 = E_2 = -c_2(x_0 + x_3)\theta - c_1(x_0 + x_3), \quad B_3 = c_2\theta + c_1,$$
$$B_2 = -E_1 = c_3(2\omega - x_1) + c_2(x_0 + x_3), \quad E_3 = c_3(x_0 + x_3) + c_2,$$

де $\omega = x_1 + \frac{1}{2}(x_0 + x_3)^2$. Вирази для θ задаються рівняннями (4.44), (4.45), де $\sigma^2 = m^2 + c_2^2, \; c = c_1c_2$.

Алгебра $\boldsymbol{A_{16}}$: $\langle \boldsymbol{G_1 + P_0, P_1 + \alpha P_2, P_0 - P_3} \rangle$.

$$B_1 = (x_0 + x_3)(c_3\theta - c_4) + \frac{1}{2}c_1(x_0 + x_3)^2 + \frac{c_5}{1 + \alpha^2}(\theta - \alpha) + c_2,$$
$$B_2 = c_1(\omega - \frac{\alpha}{2}(x_0 + x_3)^2) + c_3(x_0 + x_3) + \frac{c_5}{1 + \alpha^2}(\alpha\theta + 1) + \alpha c_2,$$
$$B_3 = -c_3\theta - c_1(x_0 + x_3) + c_4, \; E_1 = -B_2 - \alpha c_1,$$

$$E_2 = B_1 + c_1, \qquad E_3 = -\alpha c_1(x_0 + x_3) + c_3,$$

де $\omega = x_2 - \alpha x_1 - \frac{\alpha}{2}(x_0 + x_3)^2$,

$$\theta = \frac{1}{\alpha^2 + 1}\left(\frac{c_1^2}{6}\omega^3 + \frac{1}{2}(c_3c_4 + c_1c_5)\omega^2\right) + c_7\omega + c_8, \text{ якщо } c_3^2 = m^2,$$

$$\theta = \varphi + \frac{c_1^2\omega}{c_3^2 - m^2}, \text{ якщо } c_3^2 \neq m^2.$$

Тут φ є функцією від ω, яка задається рівняннями (4.43)–(4.45), де $\mu^2 = -\sigma^2 = \frac{c_3^2 - m^2}{\alpha^2+1}$, $c = \frac{c_3c_4 + c_1c_5}{\alpha^2+1}$.

Алгебра A_{25}: $\langle J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2, G_1, P_0 - P_3\rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{c_3 + (c_3\theta + c_2)\zeta}{x_3 + x_0}, \quad B_2 = -E_1 = \frac{\beta c_3\theta + c_1 + c_3\zeta}{x_3 + x_0},$$
$$B_3 = c_3\theta + c_2, \quad E_3 = -c_3,$$

де $\zeta = x_1 - \alpha \ln|x_3 + x_0|$ та $\theta = \varphi(\omega)$ — функції від $\omega = x_2 - \beta \ln|x_3 + x_0|$ задані рівняннями (4.43)–(4.45) з $c = -c_2c_3$ та $\mu^2 = -\sigma^2 = c_3^2 - m^2$.

Розглянемо тепер редукції, які можуть бути зроблені з використанням інваріантів підалгебр A_4, A_8, A_{19}, A_{24} та A_{27}. При цьому система (4.30), (4.31) буде зводитись до лінійних звичайних диференціальних рівнянь, які, однак, відрізняються від (4.42).

Алгебра A_4: $\langle J_{03}, P_1, P_2\rangle$.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-c_2x_3\theta + c_6x_3 - c_1x_0}{\omega^2}, \\ B_2 &= \frac{-c_1x_3\theta + c_5x_3 + c_2x_0}{\omega^2}, \quad B_3 = c_3, \\ E_1 &= \frac{-c_1x_0\theta + c_5x_0 + c_2x_3}{\omega^2}, \\ E_2 &= \frac{c_2x_0\theta + c_1x_3 - c_6x_0}{\omega^2}, \quad E_3 = c_3\theta + c_4, \end{aligned} \tag{4.46}$$

де $c_1, \ldots, c_6$ — довільні константи, $\theta = \theta(\omega)$ та $\omega^2 = x_0^2 - x_3^2$. Підставляючи (4.46) в (4.31) отримуємо:

$$\omega^2\ddot{\theta} + \omega\dot{\theta} + (\nu^2 + \mu^2\omega^2)\theta = \delta + \alpha\omega^2, \tag{4.47}$$

де $\nu^2 = c_1^2 + c_2^2,\ \mu^2 = c_3^2 + m^2,\ \delta = c_1c_5 + c_2c_6, \alpha = c_3c_4$ та $\dot{\theta} = \partial\theta/\partial\omega$.

Загальний дійсний розв'язок рівняння (4.47) для $x_0^2 > x_3^2$:

$$\begin{aligned} \theta &= c_7 \left(\mathrm{J}_{\mathbf{i}\nu}(\mu\omega) + \mathrm{J}_{-\mathbf{i}\nu}(\mu\omega)\right) + c_8 \left(\mathrm{Y}_{\mathbf{i}\nu}(\mu\omega) + \mathrm{Y}_{-\mathbf{i}\nu}(\mu\omega)\right) \\ &+\frac{\delta\pi}{2\nu}\left(\mathrm{cth}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) J_{\mathrm{i}\nu}(\mu\omega) + \mathrm{i}E_{\mathrm{i}\nu}(\mu\omega)\right) + \frac{\alpha}{\mu^2} L_s(1, \mathrm{i}\nu, \mu\omega), \end{aligned} \tag{4.48}$$

де $\omega = \sqrt{x_0^2 - x_3^2}$, $\mathrm{J}_{\mathbf{i}\nu}(\mu\omega)$ та $\mathrm{Y}_{\mathbf{i}\nu}(\mu\omega)$ є функціями Бесселя першого і другого роду, $L_s(1, \mathrm{i}\nu, \mu\omega)$ — s функція Ломмеля, $J_{\mathrm{i}\nu}(\mu\omega)$ та $E_{\mathrm{i}\nu}(\mu\omega)$ — функції Ангера та Вебера.

Якщо $\mu\nu = 0$ та $x_0^2 > x_3^2$, то розв'язки (4.47) зводяться до наступного вигляду:

$$\theta = c_7 \sin(\nu \ln \omega) + c_8 \cos(\nu \ln \omega) + \frac{\delta}{\nu^2} + \frac{\alpha\omega^2}{\nu^2 + 4}, \tag{4.49}$$

якщо $\mu = 0,\ \nu \neq 0$;

$$\theta = \frac{1}{4}\alpha\omega^2 + \frac{\delta}{2}\ln^2(\omega) + c_7 \ln(\omega) + c_8, \quad \text{якщо} \quad \mu = \nu = 0; \tag{4.50}$$

$$\theta = c_7\mathrm{J}_0(\mu\omega) + c_8\mathrm{Y}_0(\mu\omega) + \frac{\alpha}{\mu^2}, \quad \text{якщо} \quad \nu = \delta = 0,\ \mu \neq 0. \tag{4.51}$$

Ми не будемо наводити громіздкі загальні розв'язки рівняння (4.47) для $x_0^2 - x_3^2 < 0$, але обмежимося окремим випадком, коли $\alpha = \frac{\mu^2}{\nu^2}\delta$. Тоді

$$\theta = c_7 \left(\mathrm{I}_{\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega}) + \mathrm{I}_{-\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega})\right) + c_8 \left(\mathrm{K}_{\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega}) + \mathrm{K}_{-\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega})\right) + \frac{\delta}{\nu^2},$$

де $\tilde{\omega} = \sqrt{x_3^2 - x_0^2}$, $\mathrm{I}_{\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega})$ та $\mathrm{K}_{\mathrm{i}\nu}(\mu\tilde{\omega})$ є модифікованими функціями Бесселя першого і другого роду.

Алгебра $\boldsymbol{A_8}$: $\langle \boldsymbol{J_{12}, P_0, P_3} \rangle$.

$$\begin{aligned} &B_1 = \frac{c_2x_2\theta + c_1x_1 - c_6x_2}{\omega^2}, \\ &B_2 = \frac{-c_2x_1\theta + c_1x_2 + c_6x_1}{\omega^2},\ B_3 = -c_3\theta + c_4, \\ &E_1 = \frac{c_1x_1\theta + c_5x_1 - c_2x_2}{\omega^2}, \quad E_2 = \frac{c_1x_2\theta + c_5x_2 + c_2x_1}{\omega^2}, \quad E_3 = c_3, \end{aligned}$$

де $\omega^2 = x_1^2 + x_2^2$ та θ є розв'язком рівняння (4.47) з

$$\nu^2 = c_1^2 - c_2^2, \quad \mu^2 = c_3^2 - m^2, \quad \delta = c_1c_5 + c_2c_6, \quad \alpha = c_3c_4. \tag{4.52}$$

Якщо $c_1^2 \geq c_2^2$ та $c_3^2 \geq m^2$, то θ визначається співвідношеннями (4.48)–(4.51), де μ, ν та δ — константи, задані в (4.52).
Якщо $c_1^2 - c_2^2 = -\lambda^2 < 0,\ m^2 < c_3^2$ та $\alpha(\alpha\lambda^2 + \delta\mu^2) = 0$, то

$$\theta = c_7\mathrm{J}_\lambda(\mu\omega) + c_8\mathrm{Y}_\lambda(\mu\omega) - \frac{\delta\pi}{2\lambda}\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)J_\lambda(\mu\omega) + E_\lambda(\mu\omega)\right) + \frac{\alpha}{\mu^2}.$$

Крім того,

$$\theta = c_7\omega^\lambda + c_8\omega^{-\lambda} - \frac{\delta}{\lambda^2} - \frac{\alpha}{\lambda^4},\ \lambda^2 = c_2^2 - c_1^2,$$

якщо $c_2^2 > c_1^2$, $c_3^2 = m^2$;

$$\theta = c_7\mathrm{I}_\lambda(\kappa\omega) + c_8\mathrm{K}_\lambda(\kappa\omega) + f, \tag{4.53}$$

якщо $m^2 - c_3^2 = \kappa^2 > 0$, $c_2^2 \geq c_1^2$, де

$$\begin{aligned} &f = -\frac{\delta}{\kappa^2}, \quad \text{якщо} \ \ \delta = \alpha\frac{\kappa^2}{\lambda^2}, \quad \lambda \neq 0, \\ &f = \frac{4\alpha}{m^4x^2} - \frac{\alpha}{m^2}, \quad \text{якщо} \ \ \lambda = 2,\ \delta = 0, \\ &f = -\frac{\alpha}{2\kappa}, \quad \text{якщо} \ \ \delta = \lambda = 0. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Розв'язки (4.53) справедливі і для параметрів δ та λ, які не задовольняють умови, представлені в (4.54). Відповідна функція f в (4.53) може бути виражена через функції Бесселя і гіпергеометричні функції, але ми не будемо наводити відповідні громіздкі вирази.

Алгебра $\boldsymbol{A_{19}}$: $\langle \boldsymbol{J_{12}, J_{03}, P_0 - P_3} \rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{c_1(x_1 + x_2\theta)}{(x_3 + x_0)(x_1^2 + x_2^2)}, \quad B_2 = -E_1 = \frac{c_1(x_2 - x_1\theta)}{(x_3 + x_0)(x_1^2 + x_2^2)},$$
$$B_3 = -c_3\theta + c_2, \quad E_3 = c_3,$$

де θ є функцією від $\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, яка розв'язує рівняння (4.47) з $\nu = \delta = 0$, $\mu^2 = c_3^2 - m^2$, $\alpha = c_2c_3$. Її явний вигляд задається рівняннями (4.49) та (4.53), де $\delta = 0$.

Алгебра A_{24}: $\langle G_1, J_{03}, P_2\rangle$.

$$B_1 = -x_3\varphi, \quad B_2 = -\frac{c_2 x_0}{\omega^3} - \frac{c_1}{x_0+x_3}, \quad B_3 = x_1\varphi,$$
$$E_1 = -\frac{c_2 x_3}{\omega^3} + \frac{c_1}{x_0+x_3}, \quad E_2 = x_0\varphi, \quad E_3 = \frac{c_2 x_1}{\omega^3},$$

де $\omega = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_3^2}$, $\varphi = \varphi(\omega)$. Функції φ та θ повинні задовольняти наступним рівнянням:

$$\omega\dot{\varphi} + 3\varphi + \left(\frac{c_1}{\omega} + \frac{c_2}{\omega^2}\right)\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{\omega} - \left(c_1 + \frac{c_2}{\omega}\right)\varphi + m^2\theta = 0.$$

Якщо $c_1c_2 = 0$, то ця система може бути проінтегрована в елементарних або спеціальних функціях:

$$c_1 = 0: \quad \varphi = -\frac{c_2\theta + c_3}{\omega^3};$$
$$\theta = c_4 \operatorname{sh}\frac{c_2}{\omega} + c_5 \operatorname{ch}\frac{c_2}{\omega}, \quad \text{якщо} \quad m = 0, \quad c_2 \neq 0,$$
$$\theta = \frac{1}{\omega}(c_4 \sin m\omega + c_5 \cos m\omega), \quad \text{якщо} \quad m \neq 0, \quad c_2 = 0 \quad \text{та}$$
$$\theta = \frac{\mathrm{D}}{\omega}\left(c_4 + \int \frac{1}{\mathrm{D}^2\omega}\left(c_5 + c_2c_3\int\frac{\mathrm{D}dx}{\omega^{5/2}}\right)dx\right), \quad \text{якщо } m \neq 0, \quad c_2 \neq 0,$$

де $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0, m_-, n, m_+, f(\omega))$ є подвійно виродженою функцією Гойна з

$$m_\pm = m^2 + c_2^2 \pm \frac{1}{4}, \; n = 2(m^2 - c_2^2), \; f(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^2-1}.$$

Нехай $c_2 = 0$, $c_1 \neq 0$, тоді

$$\varphi = \frac{1}{c_1}\left(\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\theta}}{\omega} + m^2\theta\right),$$
$$\theta = c_3G_1(c_1,\omega) + c_4(G_2(c_1,\omega) + G_2^*(c_1,\omega)) + \mathrm{i}c_5(G_2(c_1,\omega) - G_2^*(c_1,\omega)),$$

де

$$G_1(c_1,\omega) = F\left(\frac{3+\mathrm{i}c_1}{2}, \frac{3-\mathrm{i}c_1}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{m^2\omega^2}{4}\right),$$
$$G_2(c_1,\omega) = F\left(1+\mathrm{i}c_1, 1-\mathrm{i}c_1; 1+\frac{\mathrm{i}c_1}{2}; -\frac{m^2\omega^2}{4}\right)\omega^{-1+\mathrm{i}c_1},$$

$F(a, b; c; x)$ — гіпергеометрична функція, зірочка означає комплексне спряженя.

Алгебра $\boldsymbol{A_{27}}$: $\langle \boldsymbol{J_{03} + \alpha J_{12}, G_1, G_2} \rangle$.

$$B_1 = \frac{\varphi_1}{x_0 + x_3} + \frac{(x_0 + x_3)^2 - x_1^2 + x_2^2}{2(x_0 + x_3)\omega^4}\varphi_3 - \frac{x_1 x_2}{(x_0 + x_3)\omega^4}\varphi_4,$$
$$B_2 = \frac{\varphi_2}{x_0 + x_3} + \frac{(x_0 + x_3)^2 + x_1^2 - x_2^2}{2(x_0 + x_3)\omega^4}\varphi_4 - \frac{x_1 x_2}{(x_0 + x_3)\omega^4}\varphi_3,$$
$$E_1 = -B_2 + \frac{\varphi_3(x_0 + x_3)}{\omega^4}, \quad E_2 = B_1 - \frac{\varphi_3(x_0 + x_3)}{\omega^4},$$
$$E_3 = \frac{x_2\varphi_3 - x_1\varphi_4}{\omega^4}, \quad B_3 = -\frac{x_1\varphi_3 + x_2\varphi_4}{\omega^4},$$
$$\theta = \frac{1}{\omega}\left(c_1 \mathrm{J}_1(m\omega) + c_2 \mathrm{Y}_1(m\omega)\right), \text{ якщо } m \neq 0, \ \omega^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 > 0,$$
$$\theta = \frac{1}{\tilde{\omega}}\left(c_1 \mathrm{I}_1(m\tilde{\omega}) + c_2 \mathrm{K}_1(m\tilde{\omega})\right), \text{ якщо } m \neq 0, \quad \tilde{\omega}^2 = -\omega^2 > 0,$$
$$\theta = c_1 + \frac{c_2}{\omega^2}, \quad \text{якщо} \quad m = 0,$$
$$\varphi_1 = c_2 \cos(\alpha \ln(x_0 + x_3)) + c_3 \sin(\alpha \ln(x_0 + x_3)),$$
$$\varphi_2 = c_2 \sin(\alpha \ln(x_0 + x_3)) - c_3 \cos(\alpha \ln(x_0 + x_3)),$$
$$\varphi_3 = c_4 \sin\left(\alpha \ln \frac{\omega^2}{x_0 + x_3}\right) + c_5 \cos\left(\alpha \ln \frac{\omega^2}{x_0 + x_3}\right),$$
$$\varphi_4 = c_4 \cos\left(\alpha \ln \frac{\omega^2}{x_0 + x_3}\right) - c_5 \sin\left(\alpha \ln \frac{\omega^2}{x_0 + x_3}\right),$$
$$(c_3^2 + c_2^2)(c_5^2 + c_4^2) = 0.$$

4.5.3. Редукції до нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Використовуючи підалгебри A_6, A_9, A_{10}, A_{13}, A_{14}, A_{17} та A_{18} ми можемо звести систему (4.30), (4.31) до системи звичайних диференціальних рівнянь, які є нелінійними.

Алгебра $\boldsymbol{A_6}$: $\langle \boldsymbol{J_{03} + \alpha P_2, P_0, P_3} \rangle$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

$$B_1 = \varphi_1 \operatorname{ch}\frac{x_2}{\alpha} - \varphi_2 \operatorname{sh}\frac{x_2}{\alpha}, \quad B_2 = \alpha\dot{\varphi}_2 \operatorname{ch}\frac{x_2}{\alpha} - \alpha\dot{\varphi}_1 \operatorname{sh}\frac{x_2}{\alpha},$$
$$B_3 = -c_1\theta + c_2,$$
$$E_1 = \alpha\dot{\varphi}_1 \operatorname{ch}\frac{x_2}{\alpha} - \alpha\dot{\varphi}_2 \operatorname{sh}\frac{x_2}{\alpha}, \quad E_2 = \varphi_1 \operatorname{sh}\frac{x_2}{\alpha} - \varphi_2 \operatorname{ch}\frac{x_2}{\alpha}, \quad E_3 = c_1,$$

де $\theta,\ \varphi_1$ та φ_2 — функції від $\omega = x_1$, які задовольняють наступну систему нелінійних рівнянь:

$$\alpha\dot{\theta}\varphi_2 = \alpha^2\ddot{\varphi}_2 + \varphi_2,\ \varphi_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\varphi_2 = c_3 \tag{4.55}$$

та

$$\ddot{\theta} = (m^2 - c_1^2)\theta + \alpha(\dot{\varphi}_1\varphi_1 - \dot{\varphi}_2\varphi_2) + c_1c_2.$$

Ми змогли знайти лише частинні розв'язки цієї складної системи, яким відповідають деякі спеціальні значення довільних параметрів. Спочатку представимо розв'язки лінійні по ω:

$$\theta = \frac{\omega}{\alpha} - \frac{c_1c_2}{m^2 - c_1^2} \pm \mu c_5, \quad \varphi_1 = c_4\varphi_2, \quad \varphi_2 = \pm\frac{\omega}{\mu} + c_5, \tag{4.56}$$

де $\mu = \sqrt{\frac{|m^2-c_1^2|}{|1-c_4^2|}}$, $c_4^2 \neq 1$, $c_1^2 \neq m^2$. Якщо $c_1^2 = m^2$ та $\varphi_1 = \varphi_2$, тоді θ задається рівнянням (4.45) з $c = -c_1c_2$, тоді як φ_2 є лінійною комбінацією функцій Ейрі:

$$\varphi_2 = c_7\mathrm{Ai}\left(\lambda(\omega - \nu)\right) + c_8\mathrm{Bi}\left(\lambda(\omega - \nu)\right),$$

де $\lambda = \left(\frac{c_1c_2}{\alpha}\right)^3,\ \nu = \frac{1}{\alpha c_1c_2}, \quad \alpha c_1c_2 \neq 0.$

Якщо $c_1^2 = m^2, c_2 = 0, c_3 \neq 0$, то ми знайдемо частинний розв'язок:

$$\theta = \left(\alpha\mu^2 + \frac{1}{\alpha}\right)x_1 + c_5, \quad \varphi_2 = c_6\,\mathrm{ch}\,\mu x_1 + c_7\,\mathrm{sh}\,\mu x_1, \quad \varphi_1 = \frac{1}{\mu}\dot{\varphi}_2,$$

де $\mu = \frac{c_3}{c_7^2 - c_6^2}$ та $c_7^2 \neq c_6^2$.

Якщо $c_1^2 = m^2$ та $\varphi_1 = c_4\varphi_2$, $c_4 \neq 1, c_2 = 0$, то

$$\theta = \alpha\lambda\int\varphi_2^2 d\omega + \frac{c_5}{\alpha}\omega + c_6, \tag{4.57}$$

де $\lambda = \frac{1}{2}(c_4^2 - 1)$ та φ_2 є еліптичною функцією, яка є розв'язком рівняння

$$\ddot{\varphi}_2 = \lambda\varphi_2^3 - \kappa\varphi_2, \tag{4.58}$$

де $\kappa = \frac{1-c_5}{\alpha^2}$. Крім того, рівняння (4.58) допускає частинні розв'язки в елементарних функціях:

$$\varphi_2 = \pm\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\omega + c_7\right), \quad \text{якщо} \quad c_5 < 1, \quad c_4^2 > 1, \tag{4.59}$$

$$\varphi_2 = \pm\sqrt{\frac{\kappa}{\lambda}}\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{-\kappa}{2}}\omega + c_7\right), \quad \text{якщо} \quad c_5 > 1, \quad c_4^2 < 1, \tag{4.60}$$

$$\varphi_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}\omega}, \quad \text{якщо} \quad c_5 = 1, \quad c_4 > 1. \tag{4.61}$$

Якщо $c_1^2 = m^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ та $\varphi_1 = \pm\sqrt{1+c_4^2}\varphi_2$, тоді

$$\theta = \alpha c_4 \varphi_2 + c_1 c_2 \alpha^2$$

та φ_2 повинна задовольняти наступному рівнянню

$$\ddot{\varphi}_2 - c_4 \dot{\varphi}_2 \varphi_2 + \frac{1}{\alpha^2}\varphi_2 = 0.$$

Його розв'язки можуть бути знайдені в неявному вигляді:

$$\omega = c_4 \alpha^2 \int_0^{\varphi_2} \frac{dt}{W\left(c_5^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}c_4^2\alpha^2 t^2}\right) + 1} + c_6,$$

де W — функція Ламберта, тобто аналітичний в точці $y = 0$ розв'язок рівняння $W(y)\mathrm{e}^{W(y)} = y$.

Нарешті, для $c_1^2 \neq m^2$ та $\varphi_1 = \varphi_2$ ми знаходимо наступні розв'язки:

$$\begin{aligned} &\theta = \frac{1}{2}\left(2\nu c_5 \,\mathrm{sh}\, 2\nu\omega + c_6 \,\mathrm{ch}\, 2\nu\omega\right) - \frac{c_1 c_2}{4\nu^2}, \quad 2\nu = \sqrt{m^2 - c_1^2}, \\ &\varphi_2 = \mathrm{D}\left(0, m_+, n, m_-, \mathrm{th}\,\nu\omega\right)\left(c_7 + c_8 \int \frac{dx_1}{\mathrm{D}^2\left(0, m_+, n, m_-, \mathrm{th}\,\nu\omega\right)}\right), \end{aligned} \tag{4.62}$$

де $\mathrm{D}(0, m_+, n, m_-, \mathrm{th}\,\nu\omega)$ є подвійною виродженою функцією Гойна з $m_\pm = \frac{c_5}{\alpha} \pm \frac{1}{\nu^2\alpha^2}$, $n = \frac{c_6}{\alpha\nu}$. Якщо в (4.62) $c_5 = \frac{c_6}{2\nu}$ і $\frac{c_6}{\nu\alpha} = -\frac{\kappa^2}{2} < 0$, то

$$\varphi_2 = c_7 \mathrm{J}_{\frac{\mathrm{i}}{\nu\alpha}}\left(\kappa \mathrm{e}^{\nu\omega}\right) + c_8 \mathrm{Y}_{\frac{\mathrm{i}}{\nu\alpha}}\left(\kappa \mathrm{e}^{\nu\omega}\right).$$

Алгебра $\boldsymbol{A_9}$: $\boldsymbol{\langle J_{23} + \alpha P_0, P_2, P_3\rangle}$, $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$.

$$E_1 = c_1\theta + c_2, \quad E_2 = \varphi_1 \cos\frac{x_0}{\alpha} - \varphi_2 \sin\frac{x_0}{\alpha},$$

$$E_3 = \varphi_1 \sin\frac{x_0}{\alpha} + \varphi_2 \cos\frac{x_0}{\alpha},$$
$$B_1 = c_1, \quad B_2 = -\alpha\dot{\varphi}_1 \cos\frac{x_0}{\alpha} + \alpha\dot{\varphi}_2 \sin\frac{x_0}{\alpha},$$
$$B_3 = -\alpha\dot{\varphi}_1 \sin\frac{x_0}{\alpha} - \alpha\dot{\varphi}_2 \cos\frac{x_0}{\alpha},$$

де φ_1, φ_2 та θ — функції від $\omega = x_1$, які задовольняють рівняння (4.55) та наступне рівняння:

$$\ddot{\theta} = (c_1^2 + m^2)\theta - \alpha(\dot{\varphi}_1\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\varphi_2) + c_1c_2.$$

Частинним розв'язком цієї системи є $\varphi_1 = c_4\varphi_2$, а θ, φ_2 задаються рівнянням (4.56), де $c_1^2 \to -c_1^2$.

Якщо $c_1^2 + m^2 = 0$, тоді отримаємо розв'язки, задані рівняннями (4.57), (4.58), (4.60) (4.61), де $\lambda = -\frac{1}{2}(c_4^2 + 1)$, та наступні розв'язки:

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = c_6 \cos\mu\omega + c_7 \sin\mu\omega, \quad \varphi_2 = c_6 \sin\mu\omega - c_7 \cos\mu\omega, \\ &\theta = \left(\tfrac{1}{\alpha} - \alpha\mu^2\right)\omega + c_5, \end{aligned} \tag{4.63}$$

де $\mu = \frac{c_3}{c_6^2 + c_7^2}$.

Алгебра A_{10}: $\langle J_{12} + \alpha P_3, P_1, P_2\rangle$, $\alpha \neq 0$.

$$B_1 = \varphi_1 \cos\frac{x_3}{\alpha} - \varphi_2 \sin\frac{x_3}{\alpha}, \quad B_2 = \varphi_1 \sin\frac{x_3}{\alpha} + \varphi_2 \cos\frac{x_3}{\alpha}, \quad B_3 = c_1,$$
$$E_1 = \alpha\dot{\varphi}_1 \cos\frac{x_3}{\alpha} - \alpha\dot{\varphi}_2 \sin\frac{x_3}{\alpha}, \quad E_2 = \alpha\dot{\varphi}_1 \sin\frac{x_3}{\alpha} + \alpha\dot{\varphi}_2 \cos\frac{x_3}{\alpha},$$
$$E_3 = c_1\theta + c_2,$$

де φ_1, φ_2 та θ — функції від $\omega = x_0$, які задовольняють (4.55) та наступне рівняння:

$$\ddot{\theta} = -(c_1^2 + m^2)\theta - \alpha(\dot{\varphi}_1\varphi_1 + \dot{\varphi}_2\varphi_2) - c_1c_2.$$

Якщо $c_1^2 + m^2 = 0$, ми знову отримаємо розв'язки (4.63) та розв'язки, задані рівняннями (4.57), (4.58), (4.60) (4.61), де $\lambda = -\frac{1}{2}(c_4^2 + 1)$.

Алгебра A_{13}: $\langle G_1, P_0 - P_3, P_1 + \alpha P_2\rangle$.

$$B_1 = E_2 = (\alpha x_1 - x_2)\varphi_1 \mathrm{e}^{-\omega} + \varphi_2, \quad B_3 = \varphi_1, \quad E_3 = -\alpha(\dot{\varphi}_1 + \varphi_1),$$

$$B_2 = -E_1 = (\alpha x_1 - x_2)(\dot{\varphi}_1 + \alpha\varphi_1)\mathrm{e}^{-\omega} + \varphi_3,$$

де φ_2 і φ_3 — довільні функції від $\omega = \ln(x_0 + x_3)$, у той час як $\varphi_1 = \varphi_1(\omega)$ і $\theta = \theta(\omega)$ повинні задовольняти наступні рівняння:

$$m\theta = \alpha(\dot{\varphi}_1\varphi_1 + \varphi_1^2), \quad \dot{\theta}\varphi_1 + \alpha\ddot{\varphi}_1 + 2\alpha\dot{\varphi}_1 + (\alpha^2 + 1)\varphi_1 = 0. \tag{4.64}$$

Якщо $m = 0$, то $\varphi_1 = \pm\sqrt{c_1 + c_2 rme^{-2\omega}}$ і

$$\theta = -\frac{\alpha}{2}\ln\left(c_1\mathrm{e}^{2\omega} + c_2\right) + \frac{\alpha c_2}{2\left(c_1\mathrm{e}^{2\omega} + c_2\right)} + (\alpha - 1 - \alpha^2)\omega + c_3.$$

Здається, що розв'язати рівняння (4.64) в квадратурах при ненульових m неможливо. Тим не менше, ці рівняння допускають частинні (тривіальні) розв'язки $\varphi_1 = \theta = 0$.

Алгебра $\boldsymbol{A_{14}}$: $\boldsymbol{\langle G_1 + P_2, P_0 - P_3, P_1\rangle}$.

$$B_1 = E_2 = x_2\varphi_1 + \varphi_2, \quad B_2 = -E_1 = -x_2\dot{\varphi}_1 + \varphi_3,$$
$$B_3 = \varphi_1, \quad E_3 = \dot{\varphi}_1,$$

де φ_i — функції від $\omega = x_0 + x_3$. Крім того, φ_2 і φ_3 є довільними, у той час як φ_1 і θ задовольняють наступні рівняння:

$$\ddot{\varphi}_1 + \varphi_1 = \dot{\theta}\varphi_1, \quad m^2\theta = -\dot{\varphi}_1\varphi_1. \tag{4.65}$$

Якщо $m \neq 0$, то розв'язки рівнянь (4.65) можуть бути представлені в наступній формі:

$$\omega = \pm\int_0^{\varphi_1}\left(\frac{t^2 - m^2}{c_1 + m^2t^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt + c_2.$$

Якщо $m = 0$, то ми отримаємо два розв'язки:

$$\theta = c_1\omega + c_2, \quad \varphi_1 = c_1 \ \text{ та } \ \theta = \frac{1}{2\omega} + \omega + c_1, \quad \varphi_1 = c_2\sqrt{\omega}.$$

Алгебра $\boldsymbol{A_{17}}$: $\boldsymbol{\langle J_{03} + \alpha J_{12}, P_0, P_3\rangle,\ \alpha \neq 0}$.

$$B_1 = (\alpha\dot{\varphi}_2x_2 - \varphi_2x_1)\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\alpha}-\omega} + (x_1\varphi_1 + \alpha\dot{\varphi}_1x_2)\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\alpha}-\omega},$$

$$B_2 = -(\alpha\dot{\varphi}_2 x_1 + \varphi_2 x_2)\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\alpha}-\omega} - (\alpha\dot{\varphi}_1 x_1 - \varphi_1 x_2)\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\alpha}-\omega},$$
$$B_3 = -c_1\theta + c_2,$$
$$E_1 = (\alpha\dot{\varphi}_2 x_1 + \varphi_2 x_2)\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\alpha}-\omega} - (x_1\alpha\dot{\varphi}_1 - \varphi_1 x_2)\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\alpha}-\omega},$$
$$E_2 = (\alpha\dot{\varphi}_2 x_2 - \varphi_2 x_1)\mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{\alpha}-\omega} - (\alpha\dot{\varphi}_1 x_2 + \varphi_1 x_1)\mathrm{e}^{\frac{\zeta}{\alpha}-\omega}, \quad E_3 = c_1,$$

де $\omega = \frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)$, $\zeta = \mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}$. Функції $\varphi_1 = \varphi_1(\omega)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\omega)$ та $\theta = \theta(\omega)$ повинні задовольняти (4.55) та наступне рівняння:

$$\mathrm{e}^{-2\omega}\ddot{\theta} + (m^2 - c_1^2)\theta + 2\alpha(\dot{\varphi}_1\varphi_2 + \varphi_1\dot{\varphi}_2) + c_1c_2 = 0. \tag{4.66}$$

Ця досить складна система має такі частинні розв'язки для $c_1 = \pm m$:

$$\theta = \frac{1}{a}\omega + c_4,\ \varphi_1 = c_5,\ \varphi_2 = c_6; \tag{4.67}$$

$$\theta = \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha k^2\right)\omega + c_4, \quad \varphi_1 = c_5\mathrm{e}^{\kappa\omega},\ \varphi_2 = c_6\mathrm{e}^{-\kappa\omega},$$

якщо $2c_5c_6k + c_3 = 0$;

$$\theta = -\frac{1}{4}c_1c_2\mathrm{e}^{2\omega} + c_4\omega + c_5, \quad \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = c_6\mathrm{J}_\mu\left(k\mathrm{e}^{\omega}\right) + c_7\mathrm{Y}_\mu\left(k\mathrm{e}^{\omega}\right),$$
$$\mu = \frac{1}{\alpha}\sqrt{c_4\alpha - 1}, \quad \text{якщо } \frac{c_1c_2}{2\alpha} = k^2 > 0$$

та

$$\varphi_1 = \kappa\varphi_2,\ \theta = \varphi_2\mathrm{e}^{\omega}, \quad \varphi_2 = 2\mu\,\mathrm{tg}\left(\mu\mathrm{e}^{\omega}\right) + c_4, \tag{4.68}$$

якщо $\kappa = \frac{1}{2\alpha}$, $c_1c_2 = 4\mu^2 > 0$, $\alpha = \pm 1$. В (4.68) ми обмежимося конкретним значенням α, щоб отримати найбільш компактні вирази для точних розв'язків.

Точний розв'язок рівнянь (4.55), (4.66) для $m^2 - c_1^2 = 4\lambda^2 > 0$ та $c_2 = 0$ задається наступним рівнянням:

$$\theta = \frac{\mathrm{e}^{4\mu(1+\alpha^2)\omega + 2\lambda^2\mathrm{e}^{2\omega}}}{\int \mathrm{e}^{4\mu(1+\alpha^2)\omega + 2\lambda^2\mathrm{e}^{2\omega}}d\omega + c_4}, \quad \varphi_2 = \theta\mathrm{e}^{\omega}, \quad \varphi_1 = \mu\varphi_2, \tag{4.69}$$

де λ, μ та α — довільні дійсні числа.

Алгебра A_{18}: $\langle \alpha J_{03} + J_{12}, P_1, P_2 \rangle$, $\alpha \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \mathrm{e}^{-2\omega}\left((\varphi_1 x_0 - \alpha\dot\varphi_2 x_3)\cos\zeta - (\varphi_2 x_0 + \alpha\dot\varphi_1 x_3)\sin\zeta\right),\\
&B_2 = \mathrm{e}^{-2\omega}\left((x_0\varphi_1 - \alpha\dot\varphi_2 x_3)\sin\zeta + (x_0\varphi_2 + \alpha\dot\varphi_1 x_3)\cos\zeta\right), \quad B_3 = c_1,\\
&E_1 = \mathrm{e}^{-2\omega}\left((-\alpha\dot\varphi_2 x_0 + \varphi_1 x_3)\sin\zeta + (\alpha\dot\varphi_1 x_0 + \varphi_2 x_3)\cos\zeta\right),\\
&E_2 = \mathrm{e}^{-2\omega}\left((\alpha\dot\varphi_2 x_0 - \varphi_1 x_3)\cos\zeta + (\alpha\dot\varphi_1 x_0 + \varphi_2 x_3)\sin\zeta\right),\\
&E_3 = c_1\theta - c_2,
\end{aligned}
$$

де $\omega = \frac{1}{2}\ln(x_0^2 - x_3^2)$, $\alpha\zeta = \ln(x_0 + x_3) - \ln(x_0 - x_3)$, φ_1, φ_2 та θ є функціями від ω, які повинні розв'язувати систему, що включає (4.55) і наступне рівняння:

$$
\mathrm{e}^{-2\omega}\ddot\theta = -(m^2 + c_1^2)\theta + \alpha(\dot\varphi_1\varphi_1 + \dot\varphi_2\varphi_2) + c_1 c_2.
$$

Частинні розв'язки цієї системи для $m^2 + c_1^2 = 0$:

$$
\theta = \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha k^2\right)\omega + c_4, \quad \varphi_1 = c_5\sin(k\omega), \ \varphi_2 = c_6\cos(k\omega), \quad \kappa = -\frac{c_3}{c_5 c_6}.
$$

Крім того, маємо розв'язки (4.67), (4.68) та (4.69), де $\omega \to \ln(x_0^2 - x_3^2)$.

4.5.4. Редукції до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Нарешті, виконаємо редукції системи (4.30), (4.31), використовуючи підалгебри, що залишилися, тобто A_6 з $\alpha = 0$ та A_{28}–A_{30}. Базисні елементи цих алгебр не задовольняють умову (1.2) і тому використання класичного підходу симетрійної редукції виявляється неможливим. Проте, щоб зробити редукції, ми можемо накласти такі додаткові умови на залежні змінні, при яких рівняння (1.2) виконується.

Ця ідея використовується в підході слабкої трансверсальності, запропонованому у роботі [59]. Відповідні додаткові умови є просто алгебраїчними наслідками умови (1.2).

Ми будемо використовувати також ще слабші додаткові умови. А саме, замість прямого використання алгебраїчної умови (1.2) ми будемо брати до уваги їх диференціальні наслідки. Як буде показано нижче, це дозволяє знаходити такі точні розв'язки, які в принципі не можуть бути знайдені у підході, запропонованому у роботі [59].

Почнемо з **алгебри $\boldsymbol{A_6}$ з $\boldsymbol{\alpha = 0}$**. Набір зв'язаних базисних елементів $\langle \boldsymbol{P_0, P_3, J_{03}} \rangle$ не задовольняє умову (1.2). Відповідні матриці $\Xi_1 = \{\xi_i^\mu\}$ та $\Xi_2 = \{\xi_i^\mu, \varphi_i^k\}$ мають наступний вигляд:

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix},$$

$$\Xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & x_0 & -E_2 & E_1 & 0 & B_2 & -B_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги матриць Ξ_1 та Ξ_2 дорівнюють 2 та 3 відповідно, тобто умова (1.2) не виконується. Якщо розглядати цю умову як додаткове алгебраїчне рівняння для розв'язків (4.30), (4.31), то компоненти векторів $\mathbf{E}$ та $\mathbf{B}$ повинні відповідати таким співвідношенням:

$$E_1 = E_2 = B_1 = B_2 = 0. \tag{4.70}$$

Підставляючи (4.70) в (4.30) і припускаючи, що E_3, B_3 та θ залежать від інваріантних змінних x_1 та x_2, ми можемо знайти відповідні точні розв'язки. Але ми отримаємо більш загальні розв'язки, використовуючи наступне спостереження.

Щоб добитися виконання співвідношення (1.2), можна застосувати додаткові умови, слабкіші ніж (4.70). Зокрема, ми можемо накласти наступні обмеження:

$$E_1 = f_1(B_1, B_2), \quad E_2 = f_2(B_1, B_2),$$

де $f_1(B_1, B_2)$ та $f_2(B_1, B_2)$ — диференційовні функції E_1, E_2. Ці умови повинні бути сумісні з рівняннями поля (4.30), (4.31) і гарантувати рівність нулю члена $E_1\partial_{B_2} - E_2\partial_{B_1} - B_1\partial_{E_2} + B_2\partial_{E_1}$ в J_{03}. Цей член стає тривіальним за умови

$$f_1\frac{\partial f_1}{\partial B_2}-f_2\frac{\partial f_1}{\partial B_1}+B_2=0;\quad f_1\frac{\partial f_2}{\partial B_2}-f_2\frac{\partial f_2}{\partial B_1}-B_1=0. \tag{4.71}$$

Умова сумісності є набагато складнішою. Але вона задовольняється принаймні для лінійних функцій $f_1(B_1,B_2)$ та $f_2(B_1,B_2)$:

$$E_1=f_1=a_1B_1+a_2B_2,\quad E_2=f_2=a_3B_1+a_4B_2. \tag{4.72}$$

При цьому відповідні диференціальні наслідки (4.71) приймають вигляд:

$$a_2f_1-a_1f_2+B_2=0;\quad a_4f_1-a_3f_2-B_1=0. \tag{4.73}$$

З точністю до перетворення Лоренца можна обмежитись наступними лінійними умовами (4.72):

$$E_1=0,\ E_2=0; \tag{4.74}$$

$$E_1=0,\ B_2=0; \tag{4.75}$$

$$E_1=B_1,\ E_2=B_2. \tag{4.76}$$

Нехай $B_2,\ B_3,\ E_1,\ E_3,\ \theta$ залежать від інваріантних змінних x_1 та x_2 та задовольняють співвідношення (4.74). Тоді системі (4.30), (4.31) задовольняють наступні вектори:

$$E_1=E_2=0,\ E_3=c_3,\ B_1=\frac{\partial\phi}{\partial x_2},\ B_2=-\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\ B_3=-c_3\theta+c_2 \tag{4.77}$$

за умови, що функція $\theta=\theta(x_1,x_2)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2}=(m^2-c_3^2)\theta+c_1c_2 \tag{4.78}$$

та $\phi=\phi(x_1,x_2)$ є розв'язками рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}=0. \tag{4.79}$$

Частинний розв'язок рівняння (4.78) має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\theta = X(x_1)Y(x_2) + \frac{c_1c_2}{c_1^2 - m^2}, \quad \text{якщо} \quad c_1^2 \neq m^2,\\
&\theta = X(x_1)Y(x_2) + \frac{c_1c_2}{2}(x_1^2 + x_2^2), \quad \text{якщо} \quad c_1^2 = m^2,
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&X(x_1) = c_{3,\mu}\mathrm{e}^{k_\mu x_1} + c_{4,\mu}\mathrm{e}^{-k_\mu x_1},\\
&Y(x_2) = c_{5,\mu}\cos(n_\mu x_2) + c_{6,\mu}\sin(n_\mu x_2).
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Тут $k_\mu^2 = m^2 + \mu^2$, $n_\mu = c_1^2 + \mu^2$ та $c_{s,\mu}$, $s = 3, 4, 5, 6$ — довільні константи. Загальний розв'язок рівняння (4.78) може бути виражений як сума (інтеграл) функцій (4.80) по всіх можливих значеннях μ.

Розв'язок (4.77) включає довільну гармонійну функцію ϕ. Слід відмітити, що за допомогою підходу слабкої трансверсальності [59] можна отримати тільки частинний випадок цього розв'язку $\phi = \mathrm{const}$.

Аналогічно, вводячи умову (4.75) отримаємо наступні розв'язки:

$$
E_1 = 0,\ E_3 = c_1,\ B_2 = 0,\ B_3 = -c_1\theta + c_2 \tag{4.82}
$$

та

$$
\begin{aligned}
&E_2 = c_3\mathrm{e}^{\frac{1}{\mu}(c_4\mathrm{e}^{\mu x_2} - c_5\mathrm{e}^{-\mu x_2})} + c_6\mathrm{e}^{\frac{1}{\mu}(c_5\mathrm{e}^{-\mu x_2} - c_4\mathrm{e}^{\mu x_2})},\\
&B_1 = c_3\mathrm{e}^{\frac{1}{\mu}(c_4\mathrm{e}^{\mu x_2} - c_5\mathrm{e}^{-\mu x_2})} - c_6\mathrm{e}^{\frac{1}{\mu}(c_5\mathrm{e}^{-\mu x_2} - c_4\mathrm{e}^{\mu x_2})},\\
&\theta = x_1(c_4\mathrm{e}^{\mu x_2} + c_5\mathrm{e}^{-\mu x_2}) + c_7\mathrm{e}^{\mu x_2} + c_8\mathrm{e}^{-\mu x_2} + \frac{c_1c_2}{c_1^2 - m^2},\\
&\text{якщо} \quad c_1^2 - m^2 = \mu^2 > 0;\\
&E_2 = c_3\mathrm{e}^{\frac{1}{\nu}(c_4\cos\nu x_2 - c_5\sin\mu x_2)} + c_6\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}(c_4\cos\nu x_2 - c_5\sin\mu x_2)},\\
&B_1 = c_3\mathrm{e}^{\frac{1}{\nu}(c_4\cos\nu x_2 - c_5\sin\mu x_2)} - c_6\mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}(c_4\cos\nu x_2 - c_5\sin\mu x_2)},\\
&\theta = x_1(c_4\sin\mu x_2 + c_5\cos\mu x_2) + c_8\sin\mu x_2 + c_9\cos\mu x_2 + \frac{c_6c_7}{c_6^2 - m^2},\\
&\text{якщо} \quad c_6^2 - m^2 = -\nu^2 < 0;\\
&E_2 = c_3\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}c_4x_2^2 + c_5x_2\right) + c_6\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}c_4x_2^2 + c_5x_2\right),
\end{aligned}
$$

$$B_1 = c_6 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}c_4x_2^2 + c_5x_2\right) + c_3 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}c_4x_2^2 + c_5x_2\right),$$

$$\theta = x_1(c_4x_2 + c_5) - \frac{1}{2}c_1c_2x_2^2 + c_7x_2 + c_8, \quad \text{якщо} \quad c_1^2 = m^2.$$

Якщо накладаються умови (4.76), то отримуються розв'язки

$$E_\alpha = B_\alpha = \partial_\alpha\phi, \ \alpha = 1, 2, \ E_3 = c_1, \ B_3 = -c_1\theta + c_2,$$

де ϕ — функція, яка задовольняє (4.79), θ є розв'язком наступного рівняння:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x_2^2} = (m^2 - c_1^2)\theta + c_1c_2 + (\partial_1\phi)^2 + (\partial_2\phi)^2.$$

Інший розв'язок, який відповідає (4.76), має вигляд рівнянь (4.70) для B_1, B_2, E_1, E_2 та $E_3 = c_1, \ B_3 = -c_1\theta + c_2$, а θ задається рівнянням (4.80).

Ми бачимо, що додаткові умови (4.72) та їх диференціальні наслідки (4.73) дозволяють знаходити набагато більш широкий клас розв'язків, ніж умови, запропоновані у [59]. Використане нами узагальнення методу слабкої трансверсальності полягає у тому, що умова (1.2) не розглядається як алгебраїчна. Для її виконання на розв'язки рівнянь (4.2), (4.3) накладаються лінійні зв'язки (4.72) та використовуються їх диференціальні наслідки (4.73).

Алгебра $\boldsymbol{A_{28}}$: $\langle \boldsymbol{G_1, G_2, J_{12}} \rangle$.

$$B_1 = E_2 = \frac{1}{(x_0 + x_3)^3}\left(c_1x_1 - x_2(c_1\theta + c_2)\right),$$

$$B_2 = -E_1 = \frac{1}{(x_0 + x_3)^3}\left(c_1x_2 + x_1(c_1\theta + c_2)\right),$$

$$B_3 = \frac{c_1}{(x_0 + x_3)^2}, \quad E_3 = -\frac{(c_1\theta + c_2)}{(x_0 + x_3)^2}, \quad \theta = \frac{\varphi}{x_0 + x_1},$$

де φ є функцією від двох змінних $\omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}{2(x_0 + x_3)}$ та $\zeta = x_0 + x_3$, які задовольняють наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega\partial\zeta} = \left(\frac{c_1^2}{\zeta^4} - m^2\right)\varphi + \frac{c_1c_2}{\zeta^3}. \tag{4.83}$$

Нехай $m = c_1 = 0$, тоді $\varphi = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\zeta)$, де φ_1 та φ_2 є довільними функціями. Для $c_1 = 0, m^2 \neq 0$ рівняння (4.83) допускає розв'язки в розділених змінних:

$$\begin{aligned}\varphi = \sum_\mu &(a_\mu \sin(\nu_\mu \xi_+) \sin(\mu\xi_-) + b_\mu \cos(\nu_\mu\xi_+)\cos(\mu\xi_-)\\ &+ c_\mu \cos(\nu_\mu\xi_+)\sin(\mu\xi_-) + d_\mu \sin(\nu_\mu\xi_+)\cos(\mu\xi_-),\end{aligned} \tag{4.84}$$

де $\xi_\pm = \omega \pm \zeta$, $\nu_\mu^2 = m^2 + \mu^2$, а μ, S_μ, a_μ, b_μ, c_μ та d_μ — довільні константи.

Для $c_1 \neq 0$ ми отримаємо:

$$\varphi = \frac{c_1 c_2 \zeta}{c_1^2 - m^2\zeta^4} + \sum_\mu R_\mu \mathrm{e}^{\mu\omega - \frac{3m\zeta^4 + c_1^2}{3\mu\zeta^3}}.$$

Алгебра A_{29}: $\langle J_{01}, J_{02}, J_{12}\rangle$.

$$B_1 = \frac{x_2(c_1\theta + c_2)}{\omega^3}, \quad B_2 = -\frac{x_1(c_1\theta + c_2)}{\omega^3}, \quad B_3 = \frac{c_1 x_0}{\omega^3},$$
$$E_1 = -\frac{c_1 x_2}{\omega^3}, \quad E_2 = \frac{c_1 x_1}{\omega^3}, \quad E_3 = \frac{x_0(c_1\theta + c_2)}{\omega^3}, \quad \theta = \frac{\varphi}{\omega},$$

де $\omega^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ та φ — функція від ω та x_3, яка задовольняє наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} = \left(\frac{c_1^2}{\omega^4} + m^2\right)\varphi + \frac{c_1c_2}{\omega^3}, \quad \text{якщо} \quad x_0^2 > x_1^2 + x_2^2, \tag{4.85}$$

де $\omega = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}$, та

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tilde\omega^2} = \left(m^2 - \frac{c_1^2}{\tilde\omega^4}\right)\varphi - \frac{c_1c_2}{\tilde\omega^3}, \quad \text{якщо} \quad x_0^2 < x_1^2 + x_2^2, \tag{4.86}$$

де $\tilde\omega = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_0^2}$.

Нехай $c_1 = m = 0$, тоді загальний розв'язок рівняння (4.85): $\varphi = \varphi_1(\omega + x_3) + \varphi_2(\omega - x_3)$, де φ_1 та φ_2 — довільні функції. Розв'язки, які відповідають $c_1 = 0, m \neq 0$ можуть бути отримані з (4.84) заміною $\xi_+ \to x_3$, $\xi_- \to \omega$. Якщо $c_1 \neq 0$ та $m \neq 0$, то

$$\varphi = \sum_\mu \mathrm{D}_\mu \left(\left(a_\mu + b_\mu \int \frac{d\omega}{\omega \mathrm{D}_\mu^2}\right)\sin(\mu x_3) + \left(c_\mu + d_\mu \int \frac{d\omega}{\omega\mathrm{D}_\mu^2}\right)\cos(\mu x_3)\right)$$

$$-c_1c_2\int\left(\frac{1}{\omega \mathrm{D}_0^2}\int\frac{\mathrm{D}_0 d\omega}{\omega^{5/2}}\right)d\omega, \tag{4.87}$$

де $\mathrm{D}_\mu = \mathrm{D}(0, k_\mu^-, s, k_\mu^+, f(\omega))$ є подвійно виродженою функцією Гойна з $k_\mu^\pm = m^2 - \mu^2 + c_1^2 \pm \frac{1}{4},\ s = 2(m^2 - \mu^2 - c_1^2),\ f(\omega) = \frac{\omega^2+1}{\omega^2-1},\ \mu, a_\mu, b_\mu, c_\mu$ та d_μ — довільні константи.

Розв'язки рівняння (4.86) також можуть бути представлені у вигляді (4.87), де $\omega \to \tilde{\omega}$ та

$$k_\mu^\pm = \mu^2 - m^2 + c_1^2 \pm \frac{1}{4},\ s = 2(\mu^2 - m^2 - c_1^2),\ f(\omega) = \frac{\tilde{\omega}^2+1}{\tilde{\omega}^2-1}.$$

Алгебра $\boldsymbol{A_{30}}$: $\langle \boldsymbol{J_{12}, J_{23}, J_{31}} \rangle$.

$$B_a = \frac{c_1 x_a}{r^3}, \quad E_a = \frac{(c_1\theta - c_2)x_a}{r^3}, \ \ \theta = \frac{\varphi}{r},$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ та φ є функцією від r та x_0, яка задовольняє наступне рівняння:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_0^2} = \left(\frac{c_1^2}{r^4} + m^2\right)\varphi - \frac{c_1c_2}{r^3}. \tag{4.88}$$

Розв'язки цього рівняння можуть бути представлені у вигляді (4.87), де $\omega = r$, $x_3 \to x_0$ та $\mathrm{D}_\mu = \mathrm{D}(0, k_\mu^-, s, k_\mu^+, f(\omega))$ є подвійною виродженою функцією Гойна з $k_\mu^\pm = -(m^2 + \mu^2 + c_1^2) \pm \frac{1}{4},\ s = 2(c_1^2 - m^2 - \mu^2),\ f(\omega) = f(r) = \frac{r^2+1}{r^2-1}$.

Спеціальний розв'язок рівняння (4.88), який відповідає $c_2 = 0$ та нульовій постійній поділу змінних наведено в (4.91).

4.5.5. Вибрані радіальні та циліндричні розв'язки. Наведемо декілька точних розв'язків рівнянь (4.2), (4.3), які можуть бути цікаві з фізичної точки зору.

Спочатку розглянемо розв'язки, які включають поле точкового заряду, тобто

$$E_a = q\frac{x_a}{r^3}, \quad a = 1, 2, 3, \tag{4.89}$$

де $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, а q є константою. Масштабуванням залежних змінних x_a можна звести параметр q до 1. Відповідний вектор B_a є тривіальним, тобто $B_a=0$, а для θ існує два розв'язки:

$$\theta=\frac{c_a x_a}{r^3} \quad \text{та} \quad \theta=\frac{1}{r}\left(\varphi_1(x_0+r)+\varphi_2(x_0-r)\right), \tag{4.90}$$

де φ_1 та φ_2 — довільні функції від x_0+r та x_0-r відповідно, c_a — довільні константи та сумування відбувається по індексам, що повторюються $a=1,2,3$. Ці розв'язки відповідають тривіальним нелінійним членам в (4.2), (4.3).

Радіальні розв'язки, які породжуються нетривіальними умовами в правій частині рівнянь (4.2), (4.3) з $F=-m^2\theta$ можна знайти в такому вигляді:

$$B_a=\frac{qx_a}{r^3}, \quad E_a=\frac{q\theta x_a}{r^3}, \quad \theta=c_1\sin(mx_0)\mathrm{e}^{-\frac{q}{r}}, \tag{4.91}$$

де c_1 та $q>0$ — довільні параметри. Компоненти магнітного поля B_a є особливими при $r=0$, у той час як E_a та θ обмежені для $0\le r\le\infty$.

Розв'язки (4.89)–(4.91) були отримані з використанням інваріантів алгебри A_{30}.

Наведемо розв'язки, які залежать від двох просторових змінних. Позначимо $x=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, тоді функції

$$\begin{aligned} &E_1=-B_2=\frac{x_1}{x^3}, \quad E_3=0, \quad B_1=E_2=\frac{x_2}{x^3}, \quad B_3=b,\\ &\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right), \end{aligned} \tag{4.92}$$

де b — число, розв'яжемо рівняння (4.2), (4.3) з $\kappa=1$ та $F=0$.

Особливістю розв'язків (4.92) є те, що, відповідне електричне поле зменшується з ростом x як поле точкового заряду у тривимірному просторі, у той час як відповідна ефективна задача є двовимірною.

4.5.6. Найбільш загальні розв'язки. Розв'язки, які розглядаються вище, включають довільні параметри, а в деяких випадках навіть довільні функції. Наприкінці нашого аналізу будуть представлені розв'язки, які залежать від шести довільних функцій. Цей клас охоплює всі редукції, які можуть бути отримані за допомогою підалгебр A_{12}–A_{14} та A_{20}–A_{23}. Всі ці розв'язки мають багато спільних властивостей, а саме: в якості незалежної змінної виступає один і той же інваріант $\omega = x_0 + x_3$, компоненти векторів E та B пов'язані умовами $B_1 = E_2$, $B_2 = -E_1$, а B_3 та E_3 залежать тільки від інваріантної змінної ω. Це викликає бажання записати всі ці розв'язки в єдиній універсальній формі. Нам вдалося це зробити наступним чином:

$$\begin{aligned}
&B_1 = E_2 = \psi_1(x_1, x_2, \omega) - x_1\dot{\varphi}_1(\omega) - x_2\left(\dot{\varphi}_4(\omega) - \varphi_5(\omega)\dot{\theta}(\omega)\right), \\
&B_2 = -E_1 = \psi_2(x_1, x_2, \omega) - x_2\dot{\varphi}_5(\omega) + x_1\left(\dot{\varphi}_2(\omega) - \varphi_1(\omega)\dot{\theta}(\omega)\right), \\
&B_3 = \varphi_1(\omega) + \varphi_5(\omega), \quad E_3 = \varphi_2(\omega) + \varphi_4(\omega),
\end{aligned} \tag{4.93}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ та ψ_1, ψ_2 є функціями від $\omega = x_0 + x_3$ та x_1, x_2, ω відповідно, та

$$\begin{aligned}
&\theta = -\frac{(\varphi_1 + \varphi_5)(\varphi_2 + \varphi_4)}{m^2}, \text{ якщо } F = -m^2\theta, \quad m^2 \neq 0, \\
&\theta = \varphi_3(\omega), \ (\varphi_1 + \varphi_5)(\varphi_2 + \varphi_4) = 0, \text{ якщо } F = 0.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Відповідно до обмеження, представленого в (4.94), функції φ_1, φ_2 і φ_3 є довільними, у той час як ψ_1 та ψ_2 повинні задовольняти умови Коші–Рімана щодо змінних x_1 та x_2:

$$\partial_1\psi_1 + \partial_2\psi_2 = 0, \quad \partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1 = 0. \tag{4.95}$$

Легко перевірити, що анзац (4.93), (4.94) дійсно розв'язує рівняння (4.30), (4.31). Таким чином, будь-який розв'язок рівняння Коші–Рімана (4.95) залежне від параметра ω та п'ять довільних функції $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\varphi_3(\omega)$, $\varphi_4(\omega)$, $\varphi_5(\omega)$, що задовольняють (4.94) породжують розв'язок (4.93) системи (4.30), (4.31).

4.6. Висновки до розділу 4

Основною метою цього розділу було знайти сім'ї точних розв'язків рівнянь поля аксіонної електродинаміки, використовуючи їх симетрії відносно групи Пуанкаре $P(1,3)$. Для досягнення цієї мети ми класифікували та знайшли всі можливі редукції цих рівнянь, які можуть бути зроблені з використанням трипараметричних підгруп групи $P(1,3)$. Повний список редукцій, які можуть бути зроблені за допомогою інваріантів цих підгруп разом з отриманими розв'язками представлені у підрозділі 4.5. Серед них є розв'язки, які включають довільні параметри та довільні функції. Зауважимо, що можна отримати більш широкі сім'ї точних розв'язків, застосовуючи до знайдених неоднорідні перетворення Лоренца.

Для таких підалгебр, чиї базисні елементи не задовольняють умові трансверсальності (1.2), ми застосували умову слабкої трансверсальності та узагальнену умову слабкої трансверсальності. У результаті ми отримали розв'язки (4.77)–(4.82), які не можуть бути знайдені при застосуванні стандартної умови слабкої трансверсальності, що обговорювалися в [59].

Виконуючи редукції рівнянь (4.2), (4.3), ми обмежилися функціями F лінійними по θ. Насправді, такі редукції можливі для довільних функцій F. Щоб отримати відповідні редуковані рівняння, досить просто скрізь замінити $m^2\theta \to -F(\theta)$ або навіть $m^2\theta \to -F(\theta, p_\mu p^\mu)$.

У випадку $J = F = 0$ рівняння (4.2) та (4.3) зводяться до рівнянь Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі. Редукції останніх рівнянь з використанням тривимірних підалгебр $p(1,3)$ були зроблені в роботі [62].

Розв'язки, представлені в підрозділі 4.5 можуть мати різні корисні застосування. Цінність точних розв'язків, навіть і частинних, може бути досить великою. По-перше, вони представляють певну інформацію про ті чи інші властивості моделі. По-друге, вони можуть розв'язати важливі частинні крайові задачі, відомим прикладом такого роду є розв'язок Баренблатта для рівняння дифузії [30]. Крім того, частинні точні розв'язки можуть бути використані для перевірки точності різних наближених підходів.

Знайдені розв'язки, особливо ті, які включають довільні функції, є хорошими кандидатами для застосування в різних початкових і крайових задачах аксіонної електродинаміки. Деякі з цих розв'язків, наприклад, (4.40) і (4.43) з $\mu = 1$ та $c_1^2 + c_2^2 > 1$, описують поширення хвиль з груповою швидкістю, яка перевищує швидкість світла. Крім того, ці розв'язки є гладкими і обмеженими функціями, які відповідають невід'ємній визначеній та обмеженій густині енергії [81]. Але ці розв'язки є причинними, оскільки відповідна швидкість переносу енергії не перевищує швидкості світла [81].

Існування розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними, які задовольняють принципу суперпозиції, є дуже цікавим явищем. Ми вказали деякі частинні розв'язки аксіонної електродинаміки, які задовольняють цьому принципу.

Для точних розв'язків, представлених в підрозділі 4.5 можна знайти й інші цікаві застосування. Зокрема, розв'язки, які відповідають алгебрам A_9, A_1, A_{17}, A_{18} та A_{28}, породжують динамічний внесок у масу аксіона. Крім того, як було зазначено в [44], вектори електричного і магнітного полів, що описуються співвідношеннями (4.92) відповідають точно розв'язуваним рівнянням Дірака для зарядженої частинки, яка аномально взаємодіє з цими полями.

Основні результати розділу 4 опубліковані в роботах [78, 79, 81, 82].

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

- Проведено групову класифікацію систем двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку в нормальній формі відносно допустимих груп лінійних перетворень для залежних змінних та нелінійних перетворень для незалежної змінної.
- Отримано вичерпний опис систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі, розмірності яких не вищі за чотири. Цей результат може виявитись першим кроком до повної групової класифікації таких систем без обмежень на розмірності їх алгебр симетрій.
- Проведено груповий аналіз моделі Фрьоліха–Пайерлса для електронів, що взаємодіють з фононами при певних дискретних модах. Знайдено всі можливі редукції для системи рівнянь, що описує нерівноважні стани цієї моделі, та побудовано відповідні точні розв'язки. Серед них є фізично цікаві розв'язки солітонного типу.
- Проведено групову класифікацію та знайдено точні розв'язки моделей аксіонної електродинаміки, що відповідають усім нееквівалентним тривимірним підалгебрам алгебри Пуанкаре. Найбільш загальний із знайдених розв'язків включає шість довільних функцій і тому може застосовуватись до широкого класу крайових задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ахатов И.Ш. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / И.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Итоги пауки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — Т.Ё34. — С. 3–83.

[2] Белько И.В. Подгруппы группы Лоренца–Пуанкаре / И.В. Белько // Изв. Акад. Наук Бел. ССР. — 1971. — № 1. — С. 5–13.

[3] Биркгоф Г. Гидродинамика / Г. Биркгоф — Москва: Из-во иностр. лит., 1963. — 400 с.

[4] Гапонова О.В. Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі / О.В. Гапонова, М.О. Нестеренко // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 71–91.

[5] Жданов Р.З. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1;2)$, $P(2;2)$ / Р.З. Жданов, В.И. Лагно // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 4. — С. 447–462.

[6] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. — Москва: Знание, 1989. — 48 с.

[7] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений / Н.Х. Ибрагимов. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.

[8] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. — Москва: Наука, 1983. — 280 с.

[9] Курікша О.В. Груповий аналіз та точні розв'язки моделі Фрьоліха–Пайерлса / О.В. Курікша // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2007. — Т. 4, № 3. — С. 123–135.

[10] Курікша О.В. Системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантні відносно лінійних реалізацій алгебр Лі / О.В. Курікша // Доп. НАН України. — 2009. — № 10. — С. 7–14.

[11] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 360 с. (Праці Ін-ту матем. НАН України — Т. 45).

[12] Лутфуллін М.В. Реалізації алгебр Лі невисоких розмірностей та інваріантні системи нелінійних диференціальних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 / М.В. Лутфуллін. — Київ, Ін-т матем. НАН України, 2004.

[13] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка / Г.М. Мубаракзянов // Изв. высш. уч. завед. Математика. — 1963. — Т. 34, № 3. — С. 99–106.

[14] Нестеренко М.О. Контракції та реалізації алгебр Лі : дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 / М.О. Нестеренко. — Київ, Ін-т матем. НАН України, 2006.

[15] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — Москва: Наука, 1978. — 400 с.

[16] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

[17] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина / Л.В. Овсянников // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 3. — С. 126–145.

[18] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.

[19] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. — Москва: Наука, 1966. — 495 с.

[20] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. — Москва: Наука, 1967. — 440 с.

[21] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа II: Трансцендентные функции / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. — Москва: Физматгиз, 1963. — 516 с.

[22] Фущич В.И. Как расширить симетрию дифференциальных уравнений? / В.И. Фущич // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. — С. 4–16.

[23] Фущич В.И. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения / В.И. Фущич, Р.З. Жданов. — Киев: Наук. думка, 1992. — 288 с.

[24] Фущич В.И. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений / В.И. Фущич, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник. — Киев: Наук. думка, 1991. — 304 с.

[25] Фущич В.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[26] Фущич В.И. Симметрия уравнений квантовой механики / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. — Москва: Наука, 1990. — 400 с.

[27] Фущич В.И. Симметрия уравнений Максвелла / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с.

[28] Amaldi U. Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario, part I / U. Amaldi // Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane. — 1901. — T. 39. — P. 273—316.

[29] Amaldi U. Contributo alla determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario, part II / U. Amaldi // Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane. — 1902. — T. 40. — P. 105–141.

[30] Barenblatt G.I. Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics / G.I. Barenblatt — Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1996. — 386 pp.

[31] Basarab-Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations / P. Basarab-Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov // Acta Appl. Math. — 2001. — T. 69, № 1. — P. 43–94.

[32] Bluman G.W. The general similarity solution of the heat equation / G.W. Bluman, J.D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.

[33] Bluman G.W. Simitarity Methods for Differential Equations / G.W. Bluman, J. Cole. — Berlin: Springer. — 1974. — 332 p.

[34] Bourlioux A. Difference schemes with point symmetries and their numerical tests / A. Bourlioux, C. Cyr-Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — T. 39. — P. 6877–6896.

[35] Carinena J.F. Some physical applications of systems of differential equations admitting a superposition rule / J.F. Carinena, J. Grabowski, G. Marmo // Rep. Math. Phys. — 2001. — T. 48. — P. 47—58.

[36] CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. — 429 p.

[37] CRC handbook of Lie group analysis of differential equations: In 3 volumes / [Ed. N.H. Ibragimov]. — Boca Raton: CRC Press, 1994. — Vol. 2: Applications in engineering and physical sciences. — 546 p.

[38] Damianou P.A. Symmetries of Hamiltonian systems with two degrees of freedom / P.A. Damianou, C. Sophocleous // J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 40, № 1. — P. 210–235.

[39] De Montigny M. Galilei invariant theories: I. Constructions of indecomposable finite-dimensional representations of the homogeneous

Galilei group: directly and via contractions / M. de Montigny, J. Niederle and A.G. Nikitin // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39, № 29. — P. 9365–9385.

[40] Doubrov B.M. Contact Lie algebras of vector fields on the plane / B.M. Doubrov, B.P. Komrakov // Geometry and Topology. — 1999. — Vol. 3. — P. 1—20.

[41] Fels M. Moving coframes: I. A practical algorithm / M. Fels, P. Olver // Acta Appl. Math. — 1998. — Vol. 51, № 2. — P. 161–213.

[42] Fels M. Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations / M. Fels, P. Olver // Acta Appl. Math. — 1999. — Vol. 55, № 2. — P. 127–208.

[43] Feroze T. The connection between isometries and symmetries of geodesic equations of the underlying spaces / T. Feroze, F.M. Mahomed, A. Qadir, to appear.

[44] Ferraro E. Exactly solvable relativistic model with the anomalous interaction / E. Ferraro, N. Messina, A.G. Nikitin // Phys. Rev. A — 2010. — Vol. 81, № 4. — Paper 042108, 8 pp.

[45] Fushchich W.I. Higher symmetries and exact solutions of linear and nonlinear Schrodinger equation / W.I. Fushchich and A.G. Nikitin // J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 38, № 11. — P. 5944–5959.

[46] Fushchych W.I. Nonlinear representations for Poincarŕe and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic field / W.I. Fushchych, I.M. Tsyfra, V.M. Boyko // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 2. — P. 210–221.

[47] Fushchych W.I. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry / W.I. Fushchych, I.M. Tsyfra // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20, № 2. — P. L45–L48.

[48] Fushchych W.I. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincarŕe groups in the class of Lie vector fields / W.I. Fushchych,

R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 3. — P. 295–308.

[49] Fushchych W.I. On nonlinear representations of the conformal algebra $AC(2;2)$ / W.I. Fushchych, V.I. Lahno, R.Z. Zhdanov // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1993. — Vol. 9. — P. 44–47.

[50] Fushchych W.I. Symmetries of nonlinear Dirac equations / W.I. Fushchych, R.Z. Zhdanov. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers. — 1997. — 383 pp.

[51] Fushchych W.I. Symmetry Analisys and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathimatical Physics / W.I. Fushchych, W.M. Shtelen, N.I. Serov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 460 pp.

[52] Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. I / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — Vol. 1, № 1. — P. 75–113.

[53] Fushchych W.I. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. II / W.I. Fushchych, R.O. Popovych // J. Nonlinear Math. Phys. — 1994. — 1, № 2. — P. 158–188.

[54] Gagnon L. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A. — 1993. — Vol. 26, № 23. — P. 7061–7076.

[55] Gaponova O. Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras / O. Gaponova, M. Nesterenko // Phys. AUC. — 2006. — V. 16(II). — P. 238–256.

[56] Gonzalez-Lopez A. Lie algebras of differential operators in two complex variables / A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran, P.J. Olver // American J. Math. — 1992. — Vol. 114. — P. 1163—1185.

[57] Gonzalez-Lopez A. Lie algebras of vector fields in the real plane / A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran, P.J. Olver // Proc. London Math. Soc. — 1992. — Vol. 64. — P. 339—368.

[58] Gorringe V.M. Lie point symmetries for systems of 2nd order linear ordinary differential equations / V.M. Gorringe, P.G.L. Leach // Quaest. Math. — 1988. — V. 11, № 1. — P. 95–117.

[59] Grundland M.A. Weak transversality and partially invariant solutions / M.A. Grundland, P. Tempesta, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 2003. — Vol. 44, № 6. — P. 2704–2722.

[60] Kantor I.L. A construction of transitively differential groups of degree 3 / I.L. Kantor, J. Patera // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35, № 1. — P. 443–458.

[61] Kuriksha O. Exact solutions for Fröhlich–Peierls Hamiltonian model via reduction method / O. Kuriksha // Proceedings of 5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics (July 6–17, 2008, Belgrade, Serbia). Editors: B. Dragovich and Z. Rakić. — Institute of Physics, Belgrade, Serbia, 2009. — P. 233–241.

[62] Lahno H.O. Subgroups of extended Poincaré group and new exact solutions of Maxwell equations / H.O. Lahno, V.F. Smalij // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2002. — Т. 43, ч. 1. — С. 162–166.

[63] Lahno V. Towards a classification of realizations of the Euclid algebra $e(3)$ / V. Lahno, R. Zhdanov // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2000. – Т. 30. — С. 146–150.

[64] Lie S. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche, endliche Gruppe gestatten / S. Lie // Math. Ann. — 1885. — T. 25, № 1. — P. 71–151.

[65] Lie S. Gruppenregister / S. Lie // Gesammetle Abhandlungen, Leipzig: B.G. Teubner. — 1924. — Vol. 5. — P. 767–773.

[66] Lie S. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // Arch. Math. Naturv. — 1883. — Vol. 9. — P. 371–393.

[67] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / S. Lie // Math. Ann. — 1880. — Vol. 16. — P. 441–528; див. також Gesammetle Abhandlungen, Leipzig: B.G. Teubner. — 1927. — Vol. 6. — P. 1–94.

[68] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / S. Lie. — Leipzig: B.G. Teubner. — Vol. 1–3. — 1888, 1890, 1893. — 645 s., 568 s., 830 s.

[69] Lie S. Über Differentiation / S. Lie // Math. Ann. — 1884. — T. 24. — P. 537–578.

[70] Lutfullin M. On covariant realizations of the Poincarŕe group $P(1;3)$ / M. Lutfullin // Rep. Math. Phys. — 2002. — Vol. 50, № 1. — P. 195–209.

[71] Lutfullin M. Realization of the Euclidian algebra within the class of complex Lie vector field / M. Lutfullin // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2000. — Т. 30. — С. 151–156.

[72] Lutfullin M. Realizations of real 4-dimensional solvable decomposable Lie algebras / M. Lutfullin, R. Popovych // Праці Ін-ту матем. НАН України. — 2002. — Т. 43, ч. 2. — С. 466–468.

[73] Mahomed F.M. Invariant criteria for a system of geodesic equations corresponding to spaces of constant nonzero curvature / F.M. Mahomed, A. Qadir, to appear.

[74] Mahomed F.M. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations / F.M. Mahomed and P.G.L. Leach // J. Math. Phys. — 1989. — Vol. 30, № 12. — P. 2770–2777.

[75] Nesterenko M. Transformation groups on real plane and their differential invariants / M. Nesterenko // Int. J. Math. Math. Sci. — 2006. — 2006, Article ID 17410. — 17 pages.

[76] Nesterenko M. Realizations of indecomposable solvable 4- dimensional real Lie algebras / M. Nesterenko, V. Boyko // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 43, ч. 2. — С. 474–477.

[77] Nesterenko M. Realizations of real unsolvable lowdimensional Lie algebras / M. Nesterenko, R. Popovych // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 55. — С. 163–168.

[78] Niederle J. Maxwell–Chern–Simons models: their symmetries, exact solutions and non-relativistic limits / J. Niederle, A.G. Nikitin, O. Kuriksha // Acta Polytechnica. — 2010. — Vol. 50, No 3. — P. 96–101.

[79] Nikitin A.G. Group analysis of equations of axion electrodynamics / A.G. Nikitin, O. Kuriksha // Proceedings of the 5th International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus). Editors: N.M. Ivanova, P.G.L. Leach, R.O. Popovych, C. Sophocleous and P.A. Damianou. — University of Cyprus, Nicosia, 2011. — P. 152–163.

[80] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Landau-Ginzburg equations / A.G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 324, № 1. — P. 615–628.

[81] Nikitin A.G. Invariant solutions for equations of axion electrodynamics / A.G. Nikitin, O. Kuriksha // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2012. — Vol. 17. — P. 4585–4601.

[82] Nikitin A.G. Symmetries of field equations of axion electrodynamics / A.G. Nikitin, O. Kuriksha // Phys. Rev. D. — 2012. — Vol. 86, No 2. – 025010, 12 pp.

[83] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations / P.J. Olver. — New York: Springer-Verlag, 1986. — 497 p.

[84] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations / P. Olver // Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1, № 1. — P. 177–192.

[85] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry / P. Olver. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — 525 pp.

[86] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1614.

[87] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups / J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 18, № 12. — P. 2259–2288.

[88] Patera J. Subgroups of the Poincaré group and their invariants / J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, H. Zassenhaus // Ibid. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–985.

[89] Peccei R.D. CP conservation in the presence of pseudoparticles / R.D. Peccei, H.R. Quinn // Phys. Rev. Lett. — 1977. — Vol. 38, № 25. — P. 1440–1443.

[90] Petrina D.Ya. Equilibrium and nonequilibrium states of model Fröhlich–Peierls Hamiltonian / D.Ya. Petrina // Ukr. Math. J. — 2003. — Vol. 55, № 8. — P. 1069–1087.

[91] Popovych R. Differential invariants and application to Riccati-type systems / R. Popovych, V. Boyko // Праці Ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 43. — С. 184–193.

[92] Popovych R.O. Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R.O. Popovych, V.M. Boyko, M.O. Nesterenko, M.W. Lutfullin // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36, № 26. — P. 7337–7360.

[93] Popovych R. Realizations of real low-dimensional Lie algebras / R. Popovych, V. Boyko, M. Nesterenko, M. Lutfullin // math-ph/0301029v7. — 2005. — 39 pages.

[94] Post G. A class of graded Lie algebras of vector fields and first order differential operators / G. Post // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35, № 12. — P. 6838–6856.

[95] Post G. On the structure of graded transitive Lie algebras / G. Post // J. Lie Theory — 2002. — Vol. 12, № 1. — P. 265–288.

[96] Post G. On the structure of transitively differential algebras / G. Post // J. Lie Theory — 2001. — Vol. 11, № 1. — P. 111–128.

[97] Qi X-L. Topological field theory of time-reversal invariant insulators / X-L. Qi, T.L. Hughes, S-C. Zhang // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78, № 19. — Paper 195424, 43 pp.

[98] Raffelt G.G. Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena / G.G. Raffelt // Phys. Rep. — 1990. — Vol. 198, № 1–2. — P. 1–113.

[99] Rideau G. Evolution equations invariant under twodimensional space-time Schrödinger group / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1993. — Vol. 34, № 2. — P. 558–570.

[100] Schmucker A. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations / A. Schmucker and G. Czichowski // J. Lie. Theory. — 1998. — Vol. 8, № 1. — P. 129–137.

[101] Shnider S. Nonlinear equations with superposition principles and the theory of transitive primitive Lie algebras / S. Shnider, P. Winternitz // Lett. Math. Phys. — 1984. — Vol. 8. — P. 69–78.

[102] Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ / A. Tresse // S. Hirzel, Leiptzig. — 1896.

[103] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations / A. Tresse // Acta Math. — 1894. — Vol. 18. — P. 1–88.

[104] Wafo Soh C. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations / C. Wafo Soh, F.M. Mahomed // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — Vol. 34. — P. 2883–2911.

[105] Wafo Soh C. Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations / C. Wafo Soh, F.M. Mahomed // Internat. J. Non-Linear Mech. — 2001. — Vol. 36. — P. 671–677.

[106] Wafo Soh C. Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations / C. Wafo Soh, F.M. Mahomed // Nonlinear Dynamics — 2000. — Vol. 22. — P. 121–133.

[107] Weinberg S. A new light boson? / S. Weinberg // Phys. Rev. Lett. — 1978. — Vol. 40, № 4. — P. 223–226.

[108] Wilczek F. Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1978. — Vol. 40, № 5. — P. 279–282.

[109] Wilczek F. Two applications of axion electrodynamics / F. Wilczek // Phys. Rev. Lett. — 1987. — Vol. 58, № 18. — P. 1799–1802.

[110] Yehorchenko I.A. Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations / I.A. Yehorchenko // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kyiv: Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukraine. — 1992. — P. 62–66.

[111] Zhdanov R.Z. Conditional symmetry of a porous medium equation / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // Phys. D. — 1998. — Vol. 122, № 1–4. — P. 178–186.

[112] Zhdanov R.Z. On covariant realizations of the Euclid group / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno, W.I. Fushchych // Comm. Math. Phys. — 2000. — Vol. 212. — P. 535–556.