Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Караджов Юрій Анатолійович

УДК 517.958

Класифікація форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера

01.01.03 — математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Нікітін Анатолій Глібович
доктор фіз.–мат. наук, член кор.
завідувач відділу
прикладних досліджень

Київ — 2014

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

∂_x	оператор диференціювання за змінною x
W_k'	похідна за змінною x від W_k
$\|\| \cdot \|\|_2$	норма в $L_2(\mathbb{C})$
$\{P, Q\}$	антикомутатор матриць P та Q
$\overline{\varphi}$	комплексно-спряжена величина до φ
$a_k^\dagger$	ермітово-спряжений оператор до a_k
$i = 1..n$	набір значень $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Вступ

Актуальність теми. Одна з основних задач квантової механіки — вивчення спектра власних значень та власних функцій хвильових рівнянь. Для розв'язку реальних фізичних задач найбільш ефективними є наближені методи. Точно розв'язні задачі грають важливу роль початкових, незбурених задач при використанні наближених методів, а часто і самі по собі представляють значний інтерес для дослідників. Тому саме клас точно розв'язних задач є найбільш цікавим як з теоретичної точки зору так і для практичних досліджень.

Деякі хвильові рівняння можуть бути факторизовані, і як наслідок — розв'язані точно. Цей метод, що встановлює зв'язки між власними значеннями та власними функціями, і по суті є методом перетворень Дарбу, використовував ще сам Шрьодінгер для розв'язку своїх рівнянь. В суперсиметричній квантовій механіці запропонованій Вітеном, метод факторизації грає суттєву роль для отримання точних розв'язків хвильових рівнянь. За допомогою дискретної репараметризації потенціалів, названої Генденштайном форм-інваріантністю, можна визначити чи буде розглядувана задача розв'язною в квадратурах за допомогою алгебраїчних методів.

Не зважаючи на те, що форм-інваріантні задачі не вичерпують клас усіх точно розв'язних задач, цей клас є надзвичайно цікавим та важливим для вивчення. Спроби розширити клас відомих форм-інваріантних задач не припиняються і тепер. До цього часу однак кількість відомих форм-інваріантних задач була значно обмеженою. Найбільш дослідженими залишались форм-інваріантні задачі без спіну. Щодо матричних задач, вони були представлені лише поодинокими випадками. Тому розширення класу відомих форм-інваріантних матричних задач є відкритою і актуальною проблемою математичної фізики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі прикладних досліджень Інституту математики НАН України в рамках тем "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098) та "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є класифікація форм-інваріантних систем рівнянь Шрьодінгера.

Об'єктом дослідження є форм-інваріантні системи рівнянь Шрьодінгера.

Предметом дослідження є опис суперпотенціалів, для яких рівняння Шрьодінгера є форм-інваріантними.

Методи дослідження. У роботі використано метод факторизації, вперше запропонований Дарбу, а згодом використаний Шрьодінгером та формалізований Генденштайном.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Проведено класифікацію форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, що мають суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, де k — довільний параметр, а P, Q та R — ермітові матриці розміру $n \times n$, що залежать від змінної x.

2. Отримано вичерпний опис представлених вище матричних суперпотенціалів розмірності 2×2.

3. Для рівнянь, що відповідають суперпотенціалам з матрицею Q пропорційною до одиничної матриці знайдено дискретні рівні спектру та відповідні власні вектори.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язання ряду задач теоретичної фізики, зокрема, квантової механіки.

Особистий внесок здобувача. У роботах [1] та [3] науковому керівнику А.Г. Нікітіну належить визначення загального плану досліджень і уточнення постановки задач. У роботі [1] А.Г. Нікітіним доведено загальний результат про звідність n-вимірної задачі та інтегровність збуджених станів.

Доведення всіх результатів дисертації, винесених на захист, проведено дисертантом самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України (2008–2014, керівник семінару — професор А.Г. Нікітін), на VIII Міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, Україна, 2009), на IX Міжнародному симпозіумі "Lie Theory and Its Applications in Physics" (Варна, Болгарія, 2011), на Міжнародній конференції "Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics" (Йена, Німеччина, 2011), на XII Міжнародній конференції "Mathematics in Technical and Natural Sciences" (Криниця, Польща, 2011), на міжнародному семінарі "Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики (до 75-річчя з дня народження В.І. Фущича)" (Київ, Україна, 2011), на VII Міжнародній конференції "Mathematical Physics Meeting" (Белград, Сербія, 2012), на Міжнародній конференції "Quantum groups and quantum integrable systems" (Київ, Україна, 2013).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у п'яти роботах [1–5] у наукових фахових виданнях, а також у двох збірниках праць конференцій [6] та [7]. З них п'ять робіт опубліковано без співавторів.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, 8-ми розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 60 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 110 сторінок, з них список використаних джерел займає 7 сторінок.

Короткий зміст основної частини роботи. Основна частина роботи складається з 8 розділів. На початку кожного розділу подається короткий зміст даного розділу за підрозділами.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації.

У другому розділі дисертації визначено поняття спектральної задачі для рівняння Шрьодінгера, наведено основні теоретичні відомості щодо поняття форм-інваріантності рівнянь та систем рівнянь Шрьодінгера, визначено поняття інтегровності, а також наведено алгоритм знаходження точних розв'язків. У підрозділі 2.1 наведено поняття спектральної задачі для рівняння Шрьодінгера та систем рівнянь Шрьодінгера, розглянуто поняття розв'язку спектральної задачі. Підрозділ 2.2 є ключовим, у ньому описано поняття форм-інваріантності рівнянь та систем рівнянь Шрьодінгера, дано визначення факторизації, суперпотенціалу та суперпартнера для гамільтоніана. У підрозділі 2.3 визначено поняття інтегрованості, а також наведено алгоритм знаходження точних розв'язків спектральної задачі. У підрозділі 2.4 наведено список скалярних суперпотенціалів, що відповідають форм-інваріантним задачам. Підрозділ 2.5 містить важливий приклад матричного потенціалу, який буде узагальнено в розділі 4. Додаткові відомості щодо матричних перетворень, які будуть корисні при розгляді систем рівнянь, надано у підрозділі 2.6. В цьому підрозділі дано визначення унітарних перетворень та сингулярного розкладу матриці.

У третьому розділі поставлена задача класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, детально досліджено факторизацію гамільтоніана та форм-інваріантність, визначений клас розглядуваних суперпотенціалів. У підрозділі 3.1 розглянуто факторизацію та форм-інваріантність у загальному вигляді. Доведено, що не порушуючи загальності функція від параметру в означенні форм-інваріантності завжди може бути зведена до одиничного зсуву. Також доведено, що факторизація загального вигляду завжди може бути зведена до канонічної форми. У підрозділі 3.2 описані допустимі перетворення еквівалентності для матричних суперпотенціалів. Підрозділ 3.3 є ключовим, у ньому поставлено задачу класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, та сформульовано її у термінах суперпотенціалу. Крім того цю задачу розв'язано для досить вузького класу матричних осциляторів. У цьому ж підрозділі вибрано клас суперпотенціалів в якому поставлену задачу буде розв'язано повністю, введено поняття звідності та незвідності суперпотенціалу. У підрозділі 3.4 знайдено систему визначальних рівнянь на невідомі елементи суперпотенціалу. Знайдену систему розбито на особливі випадки та знайдений взаємозв'язок між ними.

У четвертому розділі поставлену задачу класифікації розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R,$$

де Q пропорційна одиничній матриці, а матриці P та R не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 4.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу класифікації зведено до алгебраїчної матричної проблеми та розв'язку звичайного диференціального рівняння першого порядку. У підрозділі 4.2 знайдено умови звідності для суперпотенціалів вигляду (4.1) та доведено, що будь який суперпотенціал вигляду (4.1) та розмірності $n > 2$ може бути представлений у вигляді прямої суми одновимірних та двовимірних суперпотенціалів. Підрозділ 4.3 є ключовим, у ньому представлено список двовимірних суперпотенціалів та відповідних до них форм-інваріантних потенціалів. У підрозділі 4.4 обговорено феномен дуальної форм-інваріантності, серед списку представленого в підрозділі 4.3 знайдено потенціали, які є дуально форм-інваріантними. Проблема ізоспектральності зі скалярними потенціалами обговорена у підрозділі 4.5. В цьому ж підрозділі знайдено відношення ізоспектральності для наших потенціалів та спеціальні значення параметрів, за яких ці відношення є вірними.

П'ятий розділ дисертації присвячено вивченню класу суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P,$$

де матриці Q та P не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 5.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу зведено до розв'язку системи незачеплених між собою рівнянь Ріккаті, що легко інтегруються. Також у цьому підрозділі показано, як можна позбутись деяких параметрів в системі визначальних рівнянь, спрощено та проінтегровано рівняння на невідому матрицю P. У підрозділі 5.2 знайдено додаткові перетворення еквівалентності, за допомогою яких можна спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють деяким додатковим вимогам. Підрозділ 5.3 є ключовим, у ньому представлено усі суперпотенціали вигляду (5.1), список двовимірних суперпотенціалів представлено у явному вигляді.

У шостому розділі прокласифіковано суперпотенціали вигляду

$$W_k = kQ + \frac{1}{k}R,$$

де матриці Q та R не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 6.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу зведено до розв'язку системи незачеплених між собою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а саме рівнянь Ріккаті, що легко інтегруються, а також перебору спеціальних унітарних матриць, які не мають блочно-діагонального вигляду і задають невідому матрицю R. У підрозділі 6.2 знайдено додаткові перетворення еквівалентності, за допомогою яких можна спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють деяким додатковим вимогам. Підрозділ 6.3 є основним, у ньому представлено усі суперпотенціали вигляду (6.1), список двовимірних суперпотенціалів представлено у явному вигляді.

У сьомому розділі дисертації поставлену задачу класифікації розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R,$$

де матриці P, Q та R є матрицями загального вигляду.

У підрозділі 7.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу зведено до алгебраїчної матричної проблеми. У підрозділі 7.2 запропоновано умови на довільні параметри, за яких алгебраїчна проблема, представлена в попередньому підрозділі, має розв'язок. Також в цьому підрозділі доведено справедливість цих умов у випадку, коли матриця Q не є константною матрицею. У підрозділі 7.3 розглянуто питання про додаткові перетворення еквівалентності. У підрозділі 7.4 ми розбиваємо розгядуваний клас суперпотенціалів на два підкласи - з константною та не константною матрицею Q. У підрозділі 7.4.1 розглянуто суперпотенціали з константною матрицею Q, доведено умови сумісності, представлені у підрозділі 7.2, наведено повний список тривимірних потенціалів. Також доведено, що двовимірних суперпотенціалів даного вигляду не існує, спрощено алгебраїчну задачу та представлено загальну стратегію її розв'язку у n-вимірному випадку. У підрозділі 7.4.2 розглянуто суперпотенціали з неконстантною матрицею Q, наведено повний список двовимірних суперпотенціалів, спрощено та представлено загальну стратегію розв'язку алгебраїчної проблеми для n-вимірного випадку.

У восьмому розділі дисертації відображено практичне застосування результатів, знайдених у попередніх розділах. Кожному з цих потенціалів відповідає система точно розв'язних рівнянь Шрьодінгера. Проаналізовано чи є відповідна система коректно поставленою. А саме, визначено, чи існують квадратично-інтегровні розв'язки рівнянь

$$a_k\psi = 0$$

для основного стану. Також знайдено умови за яких існують усі збуджені стани розглядуваних систем.

Розглянуто приклади суперпотенціалів, що відповідають двовимірним матрицям, причому матриця Q пропорційна до одиничної матриці. Оскільки розглянуто спектральні задачі для системи з двох рівнянь, то хвильова функція ψ є двокомпонентною.

У підрозділі 8.1 проведено аналіз системи рівнянь з двовимірним аналогом суперпотеціалу Кулона

$$W_k = \big((2\mu + 1)\,\sigma^3 - 2k - 1\big)\,\frac{1}{2x} + \frac{\omega}{2k+1}\sigma^1, \quad \mu > -\frac{1}{2}.$$

У підрозділі 8.2 розглянуто двовимірний аналог першого суперпотенціалу Скарфа

$$W_k = \lambda\left(k\tan\lambda x + \mu\sec\lambda x\sigma^3 + \frac{\omega}{k}\sigma^1\right), \quad \mu > 0.$$

У підрозділі 8.3 проаналізовано двовимірний аналог другого суперпотенціалу Скарфа

$$W_k = \lambda\left(-k\tanh\lambda x + \mu\,\mathrm{sech}\,\lambda x\sigma^1 - \frac{\omega}{k}\sigma^3\right), \quad \mu > 0.$$

Підрозділ 8.4 описує двовимірний аналог суперпотенціалу Пешля—Теллера

$$W_k = \lambda\left(-k\coth\lambda x + \mu\,\mathrm{csch}\,\lambda x\sigma^3 - \frac{\omega}{k}\sigma^1\right), \quad \mu < 0.$$

Нарешті у підрозділі 8.5 розглянуто двовимірний аналог суперпотенціалу Морзе

$$W_k = \lambda\left(-k + \exp(-\lambda x)\sigma^1 - \frac{\omega}{k}\sigma^3\right).$$

Для кожного суперпотенціалу відновлено відповідний гамільтоніан, знайдено спектр та основний стан. Підрозділ 8.6 є ключовим, в ньому доведено, що за певних умов на параметри, представлених у попередніх підрозділах, існують усі збуджені стани для розглядуваних систем.

У кінці основної частини дисертації зроблено загальні висновки.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність своєму науковому керівнику Анатолію Глібовичу Нікітіну, невичерпні ентузіазм та творча наснага якого були нескінченним джерелом натхнення під час роботи над дисертацією; Автор також вдячний усім учасникам наукового семінару відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, зокрема, Олені Олександрівні Ванєєвій за цінні зауваження, зроблені під час обговорення результатів.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, присвяченої рівнянням та системам рівнянь Шрьодінгера.

У підрозділі 1.1 виконано огляд робіт присвячених рівнянню Шрьодінгера та спектральній задачі, проаналізовано роботи пов'язані з форм-інваріантністю рівняння Шрьодінгера, зокрема, розглянуто роботи присвячені перетворенню Дарбу та його узагальненням. Підрозділ 1.3 присвячено огляду робіт в яких різними методами досліджувались системи рівнянь Шрьодінгера.

1.1. Рівняння Шрьодінгера та спектральна задача. Форм-інваріантні рівняння Шрьодінгера

Вивчення спектра власних значень та власних функцій квантових гамільтоніанів — одна з основних задач квантової механіки. Як правило, для розв'язку даної задачі для реальних фізичних систем використовують наближені методи. Точно розв'язні задачі, для яких можна явно знайти власні значення та власні функції, грають роль модельних систем для побудови наближених методів. Тому даний клас задач є найбільш цікавим як з теоретичної точки зору так і для практичної побудови розв'язків реальних фізичних задач.

Потужний метод факторизації, вперше застосований Шрьодінгером [8, 9], дає змогу ефективно знаходити розв'язки спектральної задачі. Метод факторизації встановлює зв'язки між власними значеннями та власними функціями і є по суті методом перетворень Дарбу [10]. Суперсиметрична квантова механіка, вперше описана Вітеном [11], використовує перетворення, що переплітають компоненти супергамільтоніану, які є перетворенням Дарбу вихідного рівняння Шрьодінгера. Запропонована Генденштайном властивість дискретної репараметнризації потенціалів [12], відома як форм-інваріантність, дає змогу будувати нескінченну параметризовану серію точно розв'язних задач, починаючи з вихідної задачі, та дає змогу визначити, чи можливо знайти власні значення та власні функції за допомогою алгебраїчних методів.

Хоча форм-інваріантні задачі не вичерпують клас усіх точно розв'язних рівнянь Шрьодінгера [13], задача пошуку нових інтегровних моделей є надзвичайно цікавою. До цього часу було зроблено багато спроб розширити клас форм-інваріантних задач. Широкий клас скалярних форм-інваріантних суперпотенціалів, який досить довго вважався повним зібрано в роботі Купера та ін. [14]. Але в недавній роботі [16] було знайдено новий більш широкий клас форм-інваріантних відносно двох параметрів суперпотенціалів.

1.2. Багатовимірні узагальнення. Системи рівнянь Шрьодінгера

Успішність методу факторизації для розв'зку спектральних задач породило багато узагальнень даного методу. Узагальнення перетворення Дарбу на диференціальні рівняння довільного порядку з матричними коефіцієнтами та відповідних ним еволюційних рівнянь, отримане в [17, 18] дало змогу використовувати такі перетворення для побудови розв'язків нелінійних задач за допомогою пари Лакса [19]. Запропоноване в роботах [20, 21] узагальнення перетворення Дарбу на простори довільної розмірності було детально розглянуто в роботі [22].

Матричні суперпотенціали природно виникають у квантовій механіці при побудові моделей для частинок з ненульовим спіном [23–25] та в системах з сильною багатоканальною взаємодією [36].

Цікавий приклад матричної задачі, яка допускає форм-інваріантне суперсиметричне формулювання, був знайдений Пронько та Строгановим [37], які вивчали поведінку нейтрального нерелятивістського ферміону, що аномально взаємодіє з магнітним полем згенерованим тонким дротом зі струмом. Суперсиметричний підхід до розв'язку задачі Пронько–Строганова був застосований в роботах [38] та [39]. В роботі [40] була знайдена релятивістська версія задачі Пронько–Строганова, яка також виявилась форм-інваріантною.

Конкретні приклади матричних задач, включаючи форм-інваріантні, були представлені в роботах [26, 27, 34, 41]. Матричні потенціали також виникають в деяких суперсиметричних системах кристалічної структури, наприклад в моделі типу Гросса-Неве, дивись роботи [46] та [47]. Матричні потенціали розмірності 2×2, включаючи форм-інваріантні, були розглянуті в роботах [43, 44].

В роботі [54] Фуку розглянув клас матричних форм-інваріантних суперпотенціалів, що лінійно залежать від довільного параметру, однак він обмежився розглядом лише суперпотенціалів представлених матрицями розмірності 2×2.

Таким чином, на відміну від класу скалярних потенціалів, клас відомих матричних потенціалів представлений здебільшого важливими, але окремими випадками.

РОЗДІЛ 2

Основні теоретичні відомості

У даному розділі дисертації визначено поняття спектральної задачі для рівняння Шрьодінгера, наведено основні теоретичні відомості щодо поняття форм-інваріантності рівнянь та систем рівнянь Шрьодінгера, визначено поняття інтегрованості, а також наведено алгоритм знаходження точних розв'язків.

У підрозділі 2.1 наведено поняття спектральної задачі для рівняння Шрьодінгера та систем рівнянь Шрьодінгера, розглянуто поняття розв'язку спектральної задачі. Підрозділ 2.2 є ключовим, у ньому описано поняття форм-інваріантності рівнянь та систем рівнянь Шрьодінгера, дано визначення факторизації, суперпотенціалу та суперпартнера для гамільтоніана. У підрозділі 2.3 визначено поняття інтегрованості, а також наведено алгоритм знаходження точних розв'язків спектральної задачі. У підрозділі 2.4 наведено список скалярних суперпотенціалів, що відповідають форм-інваріантним задачам. Підрозділ 2.5 містить важливий приклад матричного потенціалу, який буде узагальнено в розділі 4. Додаткові відомості щодо матричних перетворень, які будуть корисні при розгляді систем рівнянь, надано у підрозділі 2.6. В цьому підрозділі дано визначення унітарних перетворень та сингулярного розкладу матриці.

2.1. Спектральна задача

Розглянемо наступну спектральну задачу, яку можна отримати, наприклад, при розділенні змінних з рівнянь, що залежать від багатьох змінних

$$H_k\psi = E_k\psi, \tag{2.1}$$

де H_k — гамільтоніан зі скалярним або матричним потенціалом, E_k та ψ — його власні значення та власні функції відповідно, k — параметр.

При цьому ψ, E_k та k визначені так

$$\psi : X \to \mathbb{C}^n, \quad E_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

де n — відповідає кількості рівнянь системи (2.1), а область X відповідає або прямій $\mathbb{R}$ або променю $\mathbb{R}^+$.

Будемо шукати розв'язки цього рівняння (системи) в класі

$$\psi \in H_0^\infty(X, \mathbb{C}^n) \tag{2.3}$$

фінітних квадратично-інтегровних функцій, а саме

$$\forall l \in \mathbb{N}^0, \quad \exists \frac{\partial^l \psi}{\partial x^l} \in L_2(X, \mathbb{C}^n), \quad \left.\frac{\partial^l \psi}{\partial x^l}\right|_{\partial X} = 0, \tag{2.4}$$

де похідну $\frac{\partial^l \psi}{\partial x^l}$ слід інтерпретувати як узагальнену похідну, а похідну нульового порядку $\frac{\partial^0 \psi}{\partial x^0}$ — як саму функцію ψ.

У наступному підрозділі ми розглянемо дуже важливий клас спектральних задач, а саме форм-інваріантні спектральні задачі.

2.2. Форм-інваріантні спектральні задачі для рівняння Шрьодінгера

Серед усіх спектральних задач важливим класом є форм-інваріантні спектральні задачі. Такі задачі корисні тим, що вони можуть бути точно розв'язані за допомогою алгебраїчних методів. Нижче ми розглянемо та дамо означення класу форм-інваріантних спектральних задач для рівняння Шрьодінгера.

Нормувавши спеціальним чином незалежну змінну x, гамільтоніан в рівнянні Шрьодінгера (2.1) можна подати у вигляді

$$H_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_k(x), \tag{2.5}$$

де $V_k(x)$ — скалярний або матричний потенціал, що залежить від дійсного параметра k та дійсної змінної x.

Припустимо, що гамільтоніан можна факторизувати наступним чином

$$H_k = a_k^\dagger a_k + c_k, \tag{2.6}$$

де c_k — скалярна функція від параметра k. Ми будемо підбирати c_k таким чином, що при фіксованому вигляді гамільтоніану він не має вільного члену, що не залежить від x.

Тут і надалі, для того щоб не відокремлювати скалярний та матричний випадки та для спрощення викладок, домовимося опускати позначення одиничної матриці I біля скалярних величин в матричних рівняннях та писати c_k замість $c_k I$.

У рівнянні (2.6) оператори a_k і $a_k^\dagger$ мають вигляду

$$a_k = \frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \quad a_k^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} + W_k(x), \tag{2.7}$$

де W_k — ермітова матриця (в скалярному випадку ермітова матриця розміру 1×1 є дійсною функцією), яку називають суперпотенціалом.

У розділі 3.1 ми детально розглянемо питання про вигляд операторів a_k і $a_k^\dagger$ та доведемо, що кожне представлення може бути зведене до вигляду (2.7). Той факт, що довільний гамільтоніан допускає представлення (2.6) був доведений ще Шрьодінгером для скалярних задач і очевидним чином узагальнюється для матричних.

Окрім гамільтоніана будемо розглядати також суперпартнер гамільтоніана H_k^+, який визначається наступним чином

$$H_k^+ = a_k a_k^\dagger + c_k. \tag{2.8}$$

Припустимо також, що гамільтоніан (2.5) задовольняє умові форм-інваріантності, а саме

$$H_k^+ = H_{k+1}. \tag{2.9}$$

Спектральні задачі з таким гамільтоніаном називають форм-інваріантними спектральними задачами.

2.3. Інтегровність та точні розв'язки

В цьому підрозділі наведено алгоритм розв'язування форм-інваріантних спектральних задач.

Оскільки W_k — ермітова матриця, то оператори a_k та $a_k^\dagger$ — ермітово спряжені, що одразу дає змогу знайти основний стан системи (2.1), розв'язуючи диференціальне рівняння першого порядку. Справді, домножуючи зліва вираз

$$a_k^\dagger a_k \psi = 0 \tag{2.10}$$

на ермітово спряжений спінор $\psi^\dagger$ та інтегруючи отриманий вираз на всій прямій $\mathbb{R}$, отримаємо

$$||a_k \psi||_2 = 0, \tag{2.11}$$

де $||\cdot||_2$ позначає норму в $L_2(\mathbb{C})$. Звідки маємо

$$a_k \psi = 0. \tag{2.12}$$

Квадратично-інтегрована функція $\psi_k^0(x)$, яка є нормованим розв'язком рівняння (2.12), є власною функцією гамільтоніана, що відповідає власному значенню $E_k^0 = c_k$, і називається основним станом системи (2.1).

Нехай основний стан системи $\psi_k^0(x)$. Тоді умова форм-інваріантності дає змогу повністю знайти спектр лише за допомогою алгебраїчних операцій та диференціювання. Справді, використовуючи умову (2.9), легко показати, що функція

$$\psi_k^1(x) = \frac{a_k^\dagger \psi_{k+1}^0(x)}{||a_k^\dagger \psi_{k+1}^0(x)||_2} \tag{2.13}$$

є власною функцією гамільтоніана з власним значенням $E_k^1 = c_{k+1}$. Вона називається першим збудженим станом системи (2.1). Аналогічно, за індукцією доводиться, що функція

$$\psi_k^n(x) = \frac{a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger \cdots a_{k+n-1}^\dagger \psi_{k+n}^0(x)}{||a_k^\dagger a_{k+1}^\dagger \cdots a_{k+n-1}^\dagger \psi_{k+n}^0(x)||_2} \tag{2.14}$$

є власною функцією гамільтоніана з власним значенням $E_k^n = c_{k+n}$. Її називають n-тим збудженим станом системи (2.1).

Умови (2.3), (2.4) накладають додаткові умови на параметр k та інтегральні константи в функції ψ_k^0.

Таким чином, якщо система рівнянь Шрьодінгера (2.1) задовольняє умові форм-інваріантності, вона може бути точно проінтегрована.

2.4. Скалярні суперпотенціали

У цьому підрозділі ми наведемо список добре відомих скалярних суперпотенціалів, що відповідають форм-інваріантним рівнянням Шрьодінгера. У розділі 3 ми відмітимо, що суперпотенціали наведені в цьому підрозділі мають спільні риси.

Представлені нижче суперпотенціали були отримані різним шляхом, а тому мають спеціальні назви, наведені у дужках:

$$W = \mu x, \quad \text{(гармонічний осцилятор)} \tag{2.15}$$

$$W_k = \mu x - \frac{k}{x}, \quad \text{(тривимірний осцилятор)} \tag{2.16}$$

$$W_k = \lambda k \tan \lambda x + \mu \sec \lambda x, \quad \text{(Скарф 1)} \tag{2.17}$$

$$W_k = \lambda k \tanh \lambda x + \mu \,\mathrm{sech}\, \lambda x, \quad \text{(Скарф 2)} \tag{2.18}$$

$$W_k = \lambda k \coth \lambda x + \mu \,\mathrm{csch}\, \lambda x, \quad \text{(Пешле-Теллер)} \tag{2.19}$$

$$W_k = k - \mu \exp(-x), \quad \text{(Морзе)} \tag{2.20}$$

$$W_k = -\frac{k}{x} + \frac{\omega}{k}, \quad \text{(Кулон)} \tag{2.21}$$

$$W_k = \lambda k \tan \lambda x + \frac{\omega}{k}, \quad \text{(Розен-Морзе 1)} \tag{2.22}$$

$$W_k = \lambda k \tanh \lambda x + \frac{\omega}{k}, \quad \text{(Розен-Морзе 2)} \tag{2.23}$$

$$W_k = -\lambda k \coth \lambda x + \frac{\omega}{k}, \quad \text{(Екхарт).} \tag{2.24}$$

У наступному підрозділі ми більш детально розглянемо відомий приклад матричної форм-інваріантної задачі.

2.5. Задача Пронько–Строганова

Задача Пронько–Строганова була обговорена в багатьох роботах, наприклад [37–39]. Тому ми не будемо зупинятись на її фізичному змісті і додаткових розрахунках, а перейдемо одразу до відповідної задачі для радіальних функцій [39], що представлена рівнянням (2.1), де H_k — гамільтоніан з матричним потенціалом, E_k і ψ — його власні функції і власні значення, відповідно. Більш того, ψ — двокомпонентний спінор. З точністю до нормалізації радіальної змінної x гамільтоніан H_k може бути представлений у вигляді

$$H_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k(k - \sigma^3)\frac{1}{x^2} + \sigma^1 \frac{1}{x}, \tag{2.25}$$

де σ^1 і σ^3 — матриці Паулі, а k — натуральне число.

гамільтоніан H_k можна факторизувати таким чином

$$H_k = a_k^\dagger a_k + c_k, \tag{2.26}$$

де

$$a_k = \frac{\partial}{\partial\, x} + W_k, \quad a_k^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} + W_k, \quad c_k = -\frac{1}{(2k+1)^2}$$

і W_k — *матричний суперпотенціал*

$$W_k = \frac{1}{2x}\sigma^3 - \frac{1}{2k+1}\sigma^1 - \frac{2k+1}{2x}. \tag{2.27}$$

Інша гарна властивість гамільтоніану H_k полягає в тому, що його суперпартнер H_k^+ співпадає гамільтоніаном з параметром зсунутим на одиницю, а саме

$$H_k^+ = a_k a_k^\dagger + c_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k+1)(k+1-\sigma^3)\frac{1}{x^2} + \sigma^1 \frac{1}{x} = H_{k+1}.$$

Таким чином рівняння (2.1) з гамільтоніаном (2.25) допускає суперсиметрію з форм-інваріантністю і може бути розв'язане використовуючи стандартну техніку суперсиметричної квантової механіки (розділ 2.3).

2.6. Сингулярний розклад матриці

Для отримання важливого результату щодо розмірності незвідних суперпотенціалів в розділі 4 ми будемо використовувати властивість прямокутної матриці — її сингулярний розклад [59]. Далі буде дано означення та основні властивості сингулярного розкладу матриці.

Означення 2.1. Будь яка дійсна або комплексна матриця розміру $m \times n$ може бути представлена в наступному вигляді

$$M = U\Sigma V^\dagger, \tag{2.28}$$

де U — унітарна матриця розміру $m \times m$, Σ — діагональна матриця з невід'ємними числами на діагоналі, а V — унітарна матиця порядку $n \times n$. Такий розклад називають сингулярним розкладом матриці M. Елементи Σ_{ii} на діагоналі матиці Σ називають сингулярними числами матриці M, а стовпчики матриць U та V називають відповідно лівими та правими сингулярними векторами матриці M.

Звичайно сингулярні числа в матриці Σ розташовують в незростаючому порядку тому матриця Σ (але не матриці U та V) визначається однозначно до матриці M.

Нагадаємо також означення та основні властивості унітарної матриці.

Означення 2.2. Унітарною матрицею називають квадратну матрицю U з комплексними елементами, результат множення якої на ермітово спряжену дорівнює одиничній матриці

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I. \tag{2.29}$$

Інакше, матриця U унітарна тоді і тільки тоді, коли існує обернена до неї матриця, що задовольняє умову

$$U^{-1} = U^\dagger. \tag{2.30}$$

Далі наведено важливі властивості унітарних матриць:

1. Будь яка унітарна матриця є нормальною матрицею, тобто комутує зі своєю ермітово спряженою.

2. Добуток унітарних матриць є також унітарною матрицею.

3. Модуль визначника унітарної матриці дорівнює одиниці.

4. Якщо V — ермітова матриця, тобто $V^\dagger = V$, то матриця $UVU^\dagger$ — також ермітова і її визначник рівний визначнику матриці V.

5. Для кожної прямокутної матриці M існує така унітарна матриця U та верхня (нижня) трикутна матриця T, що $M = TU$.

6. Для кожної ермітової матриці V існує така унітарна матриця U, що $UVU^\dagger$ — дійсна діагональна матриця.

7. Множина усіх унітарних матриць порядку n утворюють утворюють за множенням унітарну групу $U(n)$ — групу Лі над полем дійсних чисел.

Якщо визначник унітарної матриці рівний одиниці, її називають спеціальною унітарною матрицею. Множина усіх спеціальних унітарних матриць порядку n утворюють за множенням спеціальну унітарну групу $SU(n)$.

2.7. Висновки до розділу 2

У розділі 2 наведено основні теоретичні відомості щодо спектральних задач для рівнянь Шрьодінгера, постановки і розв'язання форм-інваріантних спектральних задач, дано означення необхідного надалі сингулярного розкладу матриці. Серед загальновідомих фактів у цьому розділі містяться нові оригінальні результати зі статті [3].

РОЗДІЛ 3

Постановка задачі класифікації

У даному розділі дисертації буде поставлена задача класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, детально досліджено факторизацію гамільтоніана та форм-інваріантність, визначений клас розглядуваних суперпотенціалів.

У третьому розділі поставлена задача класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, детально досліджено факторизацію гамільтоніана та форм-інваріантність, визначений клас розглядуваних суперпотенціалів. У підрозділі 3.1 розглянуто факторизацію та форм-інваріантність у загальному вигляді. Доведено, що не порушуючи загальності функція від параметру в означенні форм-інваріантності завжди може бути зведена до одиничного зсуву. Також доведено, що факторизація загального вигляду завжди може бути зведена до канонічної форми. У підрозділі 3.2 описані допустимі перетворення еквівалентності для матричних суперпотенціалів. Підрозділ 3.3 є ключовим, у ньому поставлено задачу класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, та сформульовано її у термінах суперпотенціалу. Крім того цю задачу розв'язано для досить вузького класу матричних осциляторів. У цьому ж підрозділі вибрано клас суперпотенціалів в якому поставлену задачу буде розв'язано повністю, введено поняття звідності та незвідності суперпотенціалу. У підрозділі 3.4 знайдено систему визначальних рівнянь на невідомі елементи суперпотенціалу. Знайдену систему розбито на особливі випадки та знайдений взаємозв'язок між ними.

3.1. Форм-інваріантність

В підрозділі (2.2) ми навели найбільш уживане означення форм-інваріантності (2.9). Розглянемо тепер більш загальне означення, де суперпартнер гамільтоніана (2.8) співпадає з гамільтоніаном (2.5), що залежить від нового параметра, який є довільною дійсною функцією F від старого параметра k

$$H_k^+ = H_{F_k}. \tag{3.1}$$

Нехай спочатку $F_k = k$, тоді параметр k є несуттєвим тому його можна опускати, і рівняння (3.1) набуває спеціального вигляду

$$H^+ = H. \tag{3.2}$$

Повернемося до його розгляду у підрозділі 3.3.

Покажемо, що за умови $F_k \neq k$, розумно обмежитись розглядом випадку

$$F_k = k + 1. \tag{3.3}$$

Під дією невиродженого перетворення

$$k \to \alpha(k) \tag{3.4}$$

функція $F_k = F(k)$ змінюється за допомогою перетворення подібності

$$F(k) \to \alpha F \alpha^{-1}(k) = \alpha(F(\alpha^{-1}(k))). \tag{3.5}$$

Шукаючи такі перетворення, що зводять функцію F_k до одиничного зсуву (3.3), прийдемо до рівняння

$$F(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(k + 1). \tag{3.6}$$

Це рівняння є добре відомим функціональним рівнянням Абеля, результати щодо розв'язку цього рівняння були отримані в статтях [55–58].

Доведено наступну теорему:

Теорема 3.1 ([56]). *Якщо $F\colon X \to \mathbb{R}$ — така ін'єктивна функція, що для будь якого компакту $K \subset X$ існує таке $p \in \mathbb{N}$, що*
$\forall n, m \in \mathbb{N}^0,\ |n-m| \geq p:$

$$F^n(K) \cap F^m(K) = \emptyset,$$

то існує розв'язок функціонального рівняння Абеля.

Лема 3.1. *Якщо функція F строго монотонна та не має нерухомих точок на X, то вона може бути зведена до одиничних зсувів.*

Твердження леми випливає з того, що така функція задовольняє умовам теореми 3.1. Отже доцільно розглядати одиничні зсуви замість загального вигляду функції F.

Розглянемо тепер більш загальний вигляд операторів $a_k,\ a_k^\dagger$ в рівнянні (2.6). Щоб задовольняти рівняння (2.6) та (2.11) оператор a_k має бути матричним диференціальним оператором першого порядку, а оператор $a_k^\dagger$ — ермітово спряженим до нього. Тому найбільш загальний вигляд цих операторів такий

$$a_k = A_k(x)\frac{\partial}{\partial x} + B_k(x), \quad a_k^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x}A_k^\dagger(x) + B_k^\dagger(x), \tag{3.7}$$

де $A_k(x), B_k(x)$ матриці, що залежать від x, а $A_k^\dagger(x), B_k^\dagger(x)$ — ермітово спряжені до них.

Доведемо наступне твердження.

Твердження 3.1. *Представлення (3.7) операторів a_k та $a_k^\dagger$ є еквівалентним представленню (2.7).*

Підставляючи ці оператори в рівняння (2.6) отримаємо рівняння

$$H_k = -A_k^\dagger A_k\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_k^\dagger A_k - A_k^\dagger B_k - (A_k^\dagger A_k)')\frac{\partial}{\partial x} + B_k^\dagger B_k - (A_k^\dagger B_k)' + c_k, \tag{3.8}$$

яке має бути рівнянням Шрьодінгера у формі (2.5), що дає нам наступні умови

$$\begin{aligned}
&A_k^\dagger A_k = I,\\
&B_k^\dagger A_k - A_k^\dagger B_k - (A_k^\dagger A_k)' = 0,\\
&B_k^\dagger B_k - (A_k^\dagger B_k)' + c_k = V_k.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Якщо ввести нову змінну

$$W_k(x) = A_k^\dagger(x) B_k(x), \tag{3.10}$$

то ці умови набувають вигляду

$$W_k^\dagger = W_k, \tag{3.11}$$

$$V_k = W_k^2 - W_k' + c_k. \tag{3.12}$$

До цього ж результату можна було б прийти використовуючи стандартне представлення операторів (2.7). Тому стандартне (2.7) і узагальнене (3.7) представлення відрізняються лише заміною змінних (3.10).

3.2. Перетворення еквівалентності

Перед тим як перейти до постановки задачі класифікації в термінах суперпотенціалу необхідно визначити як саме ми будемо визначати різні суперпотенціали.

На множині Ω_n усіх суперпотенціалів порядку n, яка є множиною усіх ермітових матриць порядку n, що залежать від змінної x та параметра k, введемо наступне відношення еквівалентності.

Означення 3.1. Будемо казати, що два суперпотенціали $\tilde{W}_k, W_k \in \Omega_n$ еквівалентні $\tilde{W}_k \sim W_k$, якщо існує унітарна матриця U, що не залежить від змінної x така, що

$$\tilde{W}_k = U W_k U^\dagger. \tag{3.13}$$

Використовуючи властивості унітарних матриць представлених в підрозділі 2.6, легко перевірити, що дане відношення справді є відношенням еквівалентності.

Перетворити суперпотенціал таким чином, можна домножуючи рівняння (2.5) з різних боків на U та на $U^\dagger$. Справді з (2.5) та (3.12) маємо

$$H_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_k^2 - W_k' + c_k. \tag{3.14}$$

отже перетворене рівняння буде мати вигляд

$$\tilde{H}_k = UH_kU^\dagger = -U\frac{\partial^2}{\partial x^2}U^\dagger + UW_k^2U^\dagger - UW_k'U^\dagger + c_kUU^\dagger, \qquad (3.15)$$

але оскільки U не залежить від змінної x, а тому комутує з $\frac{\partial}{\partial x}$, та $UU^\dagger = I$ за означенням, ми отримаємо рівняння для еквівалентного суперпотенціалу

$$\tilde{H}_k = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \tilde{W}_k^2 - \tilde{W}_k' + c_k. \qquad (3.16)$$

Таким чином можна спрощувати суперпотенціали за допомогою перетворень еквівалентності (3.13).

3.3. Суперпотенціал

У цьому підрозділі задача класифікації буде переформульована у термінах суперпотенціалу, а також виділений клас суперпотенціалів, в якому дану задачу буде розв'язано.

У підрозділі 3.1 ми довели, що оператори a_k та $a_k^\dagger$ в розкладі (2.6) можуть бути зведені до стандартного вигляду (2.7) за допомогою заміни змінних (3.10). Підставляючи ці оператори в формулу (3.1) отримаємо рівняння

$$W_k^2 + W_k' = W_{F_k}^2 - W_{F_k}' + \delta_k, \qquad (3.17)$$

де

$$\delta_k = c_{F_k} - c_k. \qquad (3.18)$$

Це рівняння описує всі суперпотенціали, що відповідають форм-інваріантним рівнянням Шрьодінгера. Тому щоб описати усі рівняння Шрьодінгера з форм-інваріантністю треба розв'язати рівняння (3.17) і відновити потенціали та гамільтоніани за формулами (3.12) та (2.5), відповідно.

Як було зазначено у попередньому підрозділі, якщо $F_k = k$, то параметр k є не суттєвим. В цьому випадку c_k і c_{F_k} можна визначити як різні константи, тому $\delta_k = 2c$ є деякою константою, і рівняння (3.17) приймає вигляд

$$W^2 + W' = W^2 - W' + 2c. \tag{3.19}$$

Звідки одразу отримаємо

$$W' = c \Rightarrow W = cx + A, \tag{3.20}$$

де A є довільною ермітовою матрицею, що не залежить від змінної x.

Спрощуючи отриманий суперпотенціал за допомогою перетворень (3.13) та використовуючи властивості унітарних матриць представлених в підрозділі 2.6 отримаємо остаточний результат

$$W = cx + D, \tag{3.21}$$

де D — дійсна діагональна матриця. Тобто W є прямою сумою суперпотенціалів $W^i = cx + d_i$, що відповідають одновимірним квантовим осциляторам зі зсувом.

Отже доведено наступну теорему.

Теорема 3.2. *Нехай $F_k = k$, тоді задача класифікації має єдиний розв'язок, а саме пряму суму одновимірних квантових осциляторів зі зсувом (3.21).*

Надалі, доцільно обмежитись розглядом функцію $F = k + 1$ (див. дискусію у підрозділі 3.1).

В цьому випадку формули (3.17) та (3.18) будуть мати вигляд

$$W_k^2 + W_k' = W_{k+1}^2 - W_{k+1}' + \delta_k, \tag{3.22}$$

$$\delta_k = c_{k+1} - c_k. \tag{3.23}$$

Щоб розв'язати рівняння (3.22), доцільно попередньо виділити деякий клас суперпотенціалів. Ми будемо розглядати суперпотенціали вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R, \tag{3.24}$$

де P, Q та R — ермітові матриці, що залежать від x, при цьому не обмежуючи розмірності суперпотенціалу.

Вибір такої форми суперпотенціалу мотивований тим, що досить широкий клас скалярних суперпотенціалів, а також усі досі відомі матричні потенціали мають саме таку форму. Крім того, обмежуючись суперпотенціалами такого вигляду вдається повністю розв'язати поставлену задачу та описати відповідні форм-інваріантні рівняння Шрьодінгера.

Будемо розглядати лише випадки, коли матриці P, Q та R не можуть бути одночасно зведені до блочно-діагонального вигляду. Бо, якщо таке (унітарне) перетворення існує, відповідні матричні суперпотенціали є повністю звідними і рівняння розкладається на пряму суму рівнянь меншої розмірності. Таким чином, будемо вважати набір матриць P, Q, R незвідним.

3.4. Визначальні рівняння

В цьому підрозділі буде отримано рівняння на невідомі матриці P, Q та R за умови, що відповідний суперпотенціал є суперпотенціалом форм-інваріантного рівняння Шрьодінгера.

Підставимо вираз для суперпотенціалу (3.24) в рівняння (3.22) отримаємо

$$l_k(Q' - Q^2) + (2P' - \{Q, P\}) + \frac{1}{m_k}\{R, P\} + \frac{l_k}{m_k}R' + \frac{l_k}{m_k^2}R^2 = \delta_k, \quad (3.25)$$

де $l_k = 2k + 1$, а $m_k = k(k + 1)$.

Останнє рівняння складається з виразів, частина яких залежить лише від змінної x, а частина лише від параметра k, тому це рівняння можна розщепити. Після розщеплення отримаємо систему визначальних рівнянь

$$Q' = Q^2 + \nu, \quad (3.26)$$

$$P' = \frac{1}{2}\{P, Q\} + \mu, \quad (3.27)$$

$$\{P, R\} + \varkappa = 0, \tag{3.28}$$

$$R' = 0, \tag{3.29}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{3.30}$$

$$\delta_k = 2\mu + (2k+1)\nu - \frac{\varkappa}{k(k+1)} + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}, \tag{3.31}$$

де $\nu, \mu, \omega, \varkappa$ — довільні дійсні константи.

Відмітимо, що з рівнянь (3.29) та (3.30) одразу випливає, що R — константна матриця, квадрат якої пропорційний до одиничної матриці. Рівняння (3.31) є визначенням невідомої функції δ_k. Рівняння (3.26)–(3.28) є суттєвими і будуть розв'язані у наступних розділах.

Перед тим, як перейти безпосередньо до розв'язку визначальних рівнянь, відмітимо, що випадки, коли одна з матриць P, Q або R пропорційна одиничній матриці або рівна нулю, є спеціальними.

Випадок, коли дві або більше з цих матриць дорівнюють нулю або пропорційні до одиничної матриці, є вочевидь звідним, оскільки завжди діагоналізується за допомогою деякого унітарного перетворення. Виключенням є скалярний випадок, коли матриці мають розмірність одиниця і не можуть бути розбиті на блоки.

У випадку, коли матриця R пропорційна до одиничної матриці з рівняння (3.28), виявляється, що і матриця P має бути пропорційна одиничній матриці або рівня нулю. Якщо матриця P пропорційна до одиничної матриці, тоді з рівняння (3.27) маємо, що і матриця Q повинна бути пропорційна до одиничної матриці або рівна нулю. Отже випадок, коли одна з двох матриць P або R пропорційна до одиничної матриці, є звідним, оскільки у цьому випадку дві або більше з цих матриць пропорційні до одиничної або рівні нулю.

Випадок $Q = 0$ також є звідним, його буде розглянуто в розділі 4 разом з випадком, коли Q пропорційно до одиничної матриці. У цьому ж розділі буде відновлено частину списку скалярних суперпотенціалів, представлених в підрозділі 2.4, коли всі три матриці пропорційні до одиничної та мають розмірність 1×1.

Решта скалярних суперпотенціалів буде відновлена в розділі 5, де буде розглянуто матричний випадок $R = 0$. У розділі 6 буде розглянуто випадок з $P = 0$. Завершено класифікацію буде в розділі 7, де буде розглянуто загальний випадок.

3.5. Висновки до розділу 3

У розділі 3 доведено нові корисні факти щодо форм-інваріантності та факторизації, а саме, доведено що загальне представлення операторів факторизації (3.7) є еквівалентним стандартному представленню (2.7), також знайдені умови за яких функція F_k в означені форм-інваріантності може бути зведена до одиничного зсуву. Сформульовано задачу класифікації суперпотенціалів, що відповідають точно розв'язним рівнянням Шрьодінгера, отримано систему визначальних рівнянь, розглядуваний клас суперпотенціалів розбито на підкласи які будуть розглянуто в наступних розділах. Також у випадку $F_k = k$ доведено, що задача класифікації має єдиний розв'язок у вигляді прямої суми скалярних квантових осциляторів зі зсувом.

РОЗДІЛ 4

Матричні суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$, де Q пропорційна одиничній матриці

У даному розділі дисертації поставлену задачу класифікації буде розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R, \tag{4.1}$$

де Q пропорційна одиничній матриці, а матриці P та R не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 4.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу класифікації зведено до алгебраїчної матричної проблеми та розв'язку звичайного диференціального рівняння першого порядку. У підрозділі 4.2 знайдено умови звідності для суперпотенціалів вигляду (4.1) та доведено, що будь який суперпотенціал вигляду (4.1) та розмірності $n > 2$ може бути представлений у вигляді прямої суми одновимірних та двовимірних суперпотенціалів. Підрозділ 4.3 є ключовим, у ньому представлено список двовимірних суперпотенціалів та відповідних до них форм-інваріантних потенціалів. У підрозділі 4.4 обговорено феномен дуальна форм-інваріантності, серед списку представленого в підрозділі 4.3 знайдено потенціали, які є дуально форм-інваріантними. Проблема ізоспектральності зі скалярними потенціалами обговорена у підрозділі 4.5. В цьому ж підрозділі знайдено відношення ізоспектральності для наших потенціалів та спеціальні значення параметрів, за яких ці відношення є вірними.

4.1. Попередній аналіз системи визначальних рівнянь

В цьому підрозділі ми проаналізуємо та спростимо систему визначальних рівнянь. Як було зазначено ми будемо розглядати випадок, коли матриця Q пропорційно до одиничної матриці. Позначимо

$$Q = qI, \tag{4.2}$$

де q — дійсна функція, що залежить від x. В цих позначеннях система визначальних рівнянь (3.26)–(3.31) матиме вигляд

$$q' = q^2 + \nu, \tag{4.3}$$

$$P' = qP + \mu, \tag{4.4}$$

$$\{P, R\} + \varkappa = 0, \tag{4.5}$$

$$R' = 0, \tag{4.6}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{4.7}$$

$$\delta_k = 2\mu + (2k+1)\nu - \frac{\varkappa}{k(k+1)} + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}, \tag{4.8}$$

Як вже було зазначено в підрозділі (3.4), з рівнянь (4.6) та (4.7) маємо, що матриця R є константною матрицею, квадрат якої рівний одиничній матриці.

В цьому розділі нам буде зручно спростити вигляд матриці за допомогою перетворень еквівалентності (3.13). Відмітимо, що при таких перетвореннях властивості матриці R не зміняться. Таким чином, використовуючи властивості унітарних матриць, матрицю R можна подати у вигляді

$$R = \omega \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s} \end{pmatrix}, \quad m + s = n, \tag{4.9}$$

де I та 0 — одинична та нульова матриці, відповідно, розмірність яких вказана за допомогою індексів. Не обмежуючи загальності можна вважати $m \leq s$ при необхідності змінивши знак ω.

Зафіксувавши таким чином матрицю R з рівняння (4.5), отримаємо, що матрицю P можна подати у вигляді

$$P = \tilde{P} - \frac{\varkappa}{2\omega^2}R, \tag{4.10}$$

де $\tilde{P}$ — матриця, що антикомутує з матрицею R. Вона має вигляд

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & M_{m\times s} \\ M^{\dagger}_{s\times m} & 0_{s\times s} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

де $M_{m\times s}$ — довільна матриця розмірності $m \times s$, що залежить від x.

Підставляючи (4.9)–(4.11) в визначальне рівняння (4.4) отримаємо наступні рівняння

$$\tilde{P}' = q\tilde{P}, \tag{4.12}$$

$$\mu - \frac{\varkappa q}{2\omega^2}R = 0. \tag{4.13}$$

З рівняння (4.13) одразу отримаємо, що $\mu = 0$.

Припустимо, що $q = 0$, а отже і $Q = 0$, тоді з рівняння (4.12) отримаємо, що $\tilde{P}$ повинна бути константною матрицею. Але у цьому випадку увесь суперпотенціал W_k — є константною матрицею, а отже з властивостей унітарних перетворень, представлених в підрозділі 2.6, випливає, що він може бути діагоналізованим за допомогою перетворень еквівалентності (3.13), а тому є звідним.

Надалі будемо розглядати $q \neq 0$, тоді з рівняння (4.13) отримаємо, що і $\varkappa = 0$. Матричне рівняння (4.12) є системою незалежних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, а тому може бути проінтегроване поелементно. В результаті система визначальних рівнянь (4.3)–(4.8) набуває вигляду

$$q' = q^2 + \nu, \tag{4.14}$$

$$P = \exp\left(\int q dx\right)\tilde{P}, \tag{4.15}$$

$$\{\tilde{P}, R\} = 0, \quad R^2 = \omega^2, \tag{4.16}$$

$$\delta_k = (2k+1)\nu + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}, \tag{4.17}$$

де матриці $\tilde{P}$ та R є константними матрицями.

Таким чином ми звели задачу класифікації матричних форм-інваріантних суперпотенціалів (4.1) до розв'язку звичайного диференціального рівняння першого порядку (4.14) для функції q і алгебраїчної проблеми (4.16) для ермітових константних матриць $\tilde{P}$ та R.

4.2. Умови звідності суперпотенціалу

У цьому підрозділі буде доведено наступну теорему.

Теорема 4.1. *Ермітові матриці $\tilde{P}$ та R розмірності $n \times n$, які задовольняють умову (4.16), можуть бути одночасно зведені до блочно-діагонального вигляду. Більш того, незвідні матриці, що задовольняють умову (4.16), є матрицями Паулі розмірності 2×2 помноженими на константу та матрицями розмірності 1×1 (скалярами), що задовольняють умову $\tilde{P}R = 0$.*

До отриманих в підрозділі 4.1 формул (4.9) та (4.11) застосуємо перетворення еквівалентності

$$\tilde{P} \to \hat{P} = U\tilde{P}U^\dagger, \quad R \to \hat{R} = URU^\dagger, \tag{4.18}$$

де U — така унітарна матриця:

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & \mathcal{V}_{s\times s} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

де як і раніше 0 — нульова матриця, а $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ — унітарні матриці, розмірності яких вказані в індексах.

Таким чином ми отримаємо

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & \hat{M}_{m\times s} \\ \hat{M}^\dagger_{s\times m} & 0_{s\times s} \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = R, \tag{4.20}$$

де матриця $\hat{M}$ має вигляд

$$\hat{M} = \mathcal{U}_{m\times m} M_{m\times s} \mathcal{V}^{\dagger}_{s\times s}. \tag{4.21}$$

Як було зазначено в підрозділі 2.6 матриці $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ можна підібрати таким чином, що $\hat{M}$ буде діагональною матрицею, тобто

$$\hat{M}_{m\times s} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{m\times m} & 0_{m\times(s-m)} \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

де матриця $\tilde{M}$ — дійсна діагональна матриця

$$\tilde{M}_{m\times m} = \mathtt{diag}\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m\}, \quad \mu_i \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

Не втрачаючи загальності можна вважати, що існує r ненульових параметрів $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, де $0 \le r \le m$ — ранг матриці M.

Таким чином формула (4.21) буде сингулярним розкладом (2.1) матриці M.

Але набір матриць R та $\tilde{P}$, заданих формулами (4.9) та (4.20), (4.22), (4.23) є повністю звідним, оскільки за допомогою відповідної перестановки стовпчиків та рядків матриці $\tilde{P}$ та R можуть бути подані у вигляді прямої суми r матриць розмірності 2×2

$$\tilde{P}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \equiv \mu\sigma^1, \quad R_{2\times 2} = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} \equiv \omega\sigma^3, \tag{4.24}$$

де μ приймає значення $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, та $n-2r$ матриць розмірності 1×1

$$\tilde{P}_{1\times 1} = 0, \qquad R_{1\times 1} = \omega, \quad \text{у кількості} \quad \max(m-r, 0) \tag{4.25}$$

$$\tilde{P}_{1\times 1} = 0, \qquad R_{1\times 1} = -\omega, \quad \text{у кількості} \quad \max(s-r, 0) \tag{4.26}$$

що відповідають нульовим значенням μ.

Наведемо алгоритм для знахождення явного вигляду перетворення, що зводить набір матриць $\tilde{P}$ та R до блочно-діагонального вигляду (4.24).

Нагадаємо, що елементарне перетворення, що переставляє рядки та стовпці з номерами i та j відповідає множенню з обох боків на матрицю

$$E^{i,j} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} & i & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} I & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & I & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & I \end{pmatrix} \end{array}. \tag{4.27}$$

Матриця $E^{i,j}$ є унітарною та ермітовою, а тому перестановка рядків та стовпців з номерами i та j є перетворенням еквівалентності (3.13).

Таким чином, щоб звести набір матриць P та R до блочно-діагонального вигляду (4.24), потрібно:

- Розглянути перший діагональний елемент матриці R та знайти відповідний до нього ненульовий елемент під діагоналлю матриці P (нехай, якщо він присутній, він знайдеться в рядку з номером j). Якщо такого елемента не знайшлось, то дана частина матриць P та R вже діагоналізована, повторити алгоритм для підматриць без першого рядка та стовпчика.

- Якщо діагональний елемент дорівнює $-\omega$, переставити перший рядок та стовпчик з j-тим рядком та стовпчиком та повторити алгоритм.

- Якщо діагональний елемент дорівнює ω та $j \neq 2$, переставити другий рядок та стовпчик з j-тим рядком та стовпчиком та повторити алгоритм.

- Якщо діагональний елемент дорівнює ω та $j = 2$, дана частина матриць P та R вже діагоналізована, повторити алгоритм для підматриць без перших двох рядків та стовпчиків.

Після наведеної процедури набір матриць P та R буде приведеним до блочно-діагонального вигляду (4.24), діагоналізуюче унітарне перетворення буде добутком відповідних елементарних перетворень записаних в оберненому порядку. Теорему доведено.

Отже щоб описати всі незвідні матричні потенціали вигляду (4.1) достатньо обмежитись матрицями розмірності 1×1 та 2×2.

4.3. Суперпотенціали та форм-інваріантні потенціали

З точністю до перетворень еквівалентності є всього три випадки незвідних матриць P та R, задані формулами (4.24)–(4.26).

Рівняння що залишилось (4.14) легко інтегрується, тому всі нееквівалентні незвідні суперпотенціали вигляду (4.1) можуть бути знайдені в явному вигляді.

Усього існує шість різних дійсних розв'зків рівняння (4.14)

$$q = 0, \quad \nu = 0, \tag{4.28}$$

і нетривіальні

$$q = -\frac{1}{x}, \quad \nu = 0, \tag{4.29}$$

$$q = \lambda \tan \lambda x, \quad \nu = \lambda^2 > 0, \tag{4.30}$$

$$q = -\lambda \tanh \lambda x, \quad \nu = -\lambda^2 < 0, \tag{4.31}$$

$$q = -\lambda \coth \lambda x, \quad \nu = -\lambda^2 < 0, \tag{4.32}$$

$$q = \pm\lambda, \quad \nu = -\lambda^2 < 0, \tag{4.33}$$

що визначені з точністю до зсуву незалежної змінної $x \to x + \gamma$, де γ — константа інтегрування. Як було зазначено в підрозділі 4.1 тривіальний розв'язок (4.28) приводить до константного суперпотенціалу, тому його ми розглядати не будемо.

Відповідні матриці P та R можуть бути легко знайдені за формулами (4.15), (4.24)–(4.26). Пропускаючи підрахунки одразу перейдемо до списку відповідних матричних суперпотенціалів.

Відмітимо, що формули (4.25) та (4.26) відновлять частину списка скалярних потенціалів представлених в підрозділі 2.4, а саме суперпотенціали (2.21)–(2.24).

Використовуючи формулу (4.24), ми знайдемо список незвідних двовимірних матричних суперпотенціалів представлених формулою (4.1), а саме

$$W_k = \left((2\mu+1)\,\sigma^3 - 2k - 1\right)\frac{1}{2x} + \frac{\omega}{2k+1}\sigma^1, \quad \mu > -\frac{1}{2}, \tag{4.34}$$

$$W_k = \lambda\left(k\tan\lambda x + \mu\sec\lambda x\sigma^3 + \frac{\omega}{k}\sigma^1\right), \quad \mu > 0, \tag{4.35}$$

$$W_k = \lambda\left(-k\tanh\lambda x + \mu\,\mathrm{sech}\,\lambda x\sigma^1 - \frac{\omega}{k}\sigma^3\right), \quad \mu > 0, \tag{4.36}$$

$$W_k = \lambda\left(-k\coth\lambda x + \mu\,\mathrm{csch}\,\lambda x\sigma^3 - \frac{\omega}{k}\sigma^1\right), \quad \mu < 0, \tag{4.37}$$

$$W_k = \lambda\left(-k + \exp(-\lambda x)\sigma^1 - \frac{\omega}{k}\sigma^3\right). \tag{4.38}$$

Усі суперпотенціали визначені з точністю до зсуву незалежної змінної $x \to x + \gamma$ та перетворень еквівалентності, зокрема $U_1 = \sigma^1, U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \mathrm{i}\sigma^2)$ і $U_3 = \sigma^3$. Ці перетворення змінюють знаки μ ($\mu + 1/2$ в (4.34)) та ω, тому не втрачаючи загальності можна вважати, що μ обмежене як у формулах вище, а $\omega > 0$ (нульові значення параметрів ми виключаємо, бо в цьому випадку суперпотенціали стають цілком звідними). Додатково, для зручності, у суперпотенціалі (4.34) зроблено заміну $k \to 2k + 1$.

Отже справедлива наступна теорема.

Теорема 4.2. *Нехай суперпотенціал має вигляд (4.1), тоді список усіх незвідних двовимірних суперпотенціалів даного вигляду з точністю до перетворень еквівалентності представлений формулами (4.34–4.38).*

Відмітимо, що якщо $\mu = 0$ і $\omega = 1$, то суперпотенціал (4.34) співпадає з добре відомим суперпотенціалом (2.27) для задачі Пронько—Строганова, яка описана в підрозділі 2.5. Для $\mu \neq 0$ суперпотенціал (4.34) є новим і його не можна звести до (2.27). Інші знайдені суперпотенціали також є новими і дають змогу сформулювати нові точно розв'язні задачі для рівняння Шрьодінгера з матричним потенціалом.

Відповідні потенціали V_k можуть бути знайдені з (4.34)–(4.37) використовуючи формулу (3.24). В результаті отримаємо наступний список потенціалів

$$V_k = \left(\mu(\mu+1) + k^2 - k(2\mu+1)\sigma^3\right)\frac{1}{x^2} - \frac{\omega}{x}\sigma^1, \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned} V_k = \lambda^2 \big((k(k-1)+\mu^2)\sec^2\lambda x + \quad & 2\omega\tan\lambda x\sigma^1 \\ +\mu(2k-1)\sec\lambda x\tan\lambda x\sigma^3\big)\,, & \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} V_k = \lambda^2 \big((\mu^2 - k(k-1))\operatorname{sech}^2\lambda x + \quad & 2\omega\tanh\lambda x\sigma^3 \\ -\mu(2k-1)\operatorname{sech}\lambda x\tanh\lambda x\sigma^1\big)\,. & \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} V_k = \lambda^2 \big((k(k-1)+\mu^2)\operatorname{csch}^2\lambda x + \quad & 2\omega\coth\lambda x\sigma^1 \\ +\mu(1-2k)\coth\lambda x\operatorname{csch}\lambda x\sigma^3\big)\,, & \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$V_k = \lambda^2\left(\exp(-2\lambda x) - (2k-1)\exp(-\lambda x)\sigma^1 + 2\omega\sigma^3\right), \tag{4.43}$$

Потенціали (4.39), (4.40), (4.41), (4.42) та (4.43) згенеровані суперпотенціалами (4.34), (4.35), (4.36), (4.37) та (4.38) відповідно. Константи c_k з формули (3.12) визначаються так

$$c_k = -\frac{\omega^2}{(2k+1)^2} \tag{4.44}$$

для потенціалу (4.39),

$$c_k = -\lambda^2\left(\frac{\omega^2}{k^2} + k^2\right) \tag{4.45}$$

для потенціалів (4.41), (4.42), (4.43) і

$$c_k = -\lambda^2\left(\frac{\omega^2}{k^2} - k^2\right) \tag{4.46}$$

для потенціалу (4.40).

Усі вищезгадані потенціали є форм-інваріантними і приводять до нових точно розв'язних задач для систем двох зачеплених рівнянь Шрьодінгера, тобто до систем типу Шрьодінгера—Паулі.

4.4. Дуальна форм-інваріантність

Щоб знайти потенціали (4.39)–(4.43), ми вимагаємо, щоб вони були форм-інваріантними відносно зсуву за параметром k. Умова форм-інваріантності разом з припущенням про загальну форму (4.1) відповідного суперпотенціалу дають змогу визначити ці потенціали з точністю до довільних параметрів λ, ω, k і μ.

Починаючи з суперпотенціалів (4.34)–(4.38), ми можемо знайти відповідні поенціали (4.39)–(4.43) єдиним чином за формулою (3.12).

Давайте тепер розглянемо обернену проблему: знайти усі суперпотенціали, що відповідають даним потенціалам, які у даному випадку задаються формулами (4.39)–(4.43). При цьому будемо вимагати, щоб умова форм-інваріантності (2.9) залежала від одного, можливо вже іншого, параметра. Проблеми такого роду є дуже цікавими, оскільки їх розв'язки можуть бути використані для побудови серії ізоспектральних гамільтоніанів.

Оскільки ми вимагаємо незмінності вигляду умови форм-інваріантності (2.9), то дана проблема вирішується у термінах інваріантності потенціалів (4.39)–(4.43) відносно заміни параметрів λ, ω, k та μ.

Щоб знайти вищезгадані додаткові суперпотенціали, ми введемо нові параметри $\tilde{\mu}, \tilde{k}, \tilde{\omega}, \tilde{\lambda}$, які залежать від старих параметрів, і будемо вимагати щоб вони не змінювали потенціали (4.39)–(4.43). Збираючи коефіцієнти біля лінійно незалежних функцій і розв'язуючи рівняння, отримаємо, що $\tilde{\omega} = \omega, \tilde{\lambda} = \lambda$ і

$$\tilde{\mu} = -\mu, \quad \tilde{k} = 1 - k \tag{4.47}$$

для потенціалів (4.40)–(4.42),

$$\tilde{\mu} = \pm\frac{1}{2}(2k - 1), \quad \tilde{k} = \frac{1}{2} \pm \mu \tag{4.48}$$

для потенціалів (4.39), (4.40), (4.42),

$$\tilde{\mu} = 1 - \mu, \quad \tilde{k} = -k \tag{4.49}$$

для потенціалу (4.39) і

$$\tilde{\mu} = \mp\frac{1}{2}\mathrm{i}(2k-1), \quad \tilde{k} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\mu \tag{4.50}$$

для потенціалу (4.41).

Перетворення (4.47) та (4.49) відповідають ковзному віддзеркаленню параметрів k та μ, при цьому $k \to k+1$ перетворюється на $\tilde{k} \to \tilde{k} - 1$. Перетворення (4.50) є комплексним, а тому, оскільки параметр k має бути дійсним, підходить лише для чисто уявних значень параметра $\mu = i\hat{\mu}$ і є аналогічним до перетворення (4.48) для дійсних параметрів k та $\hat{\mu}$.

Найбільш цікавим є перетворення (4.48), тому що разом з форм-інваріантністю відносно зсуву параметра k потенціали (4.39), (4.40) і (4.42) також мають бути форм-інваріантними відносно зсуву був параметра μ. Таким чином $k \to k+1$ перетвориться на $\tilde{\mu} \to \tilde{\mu} \pm 1$. Ми можемо вимагати щоб знак зсуву був додатнім, тобто $\mu \to \mu + 1$, тому що від'ємний знак можна отримати за допомогою перетворень (4.47) та (4.49).

Таким чином справедливе наступне твердження.

Твердження 4.1. *Нехай потенціал V_k є форм-інваріантним, а відповідний суперпотенціал задається однію з формул (4.34), (4.35) і (4.37). Тоді цей суперпотенціал можна отримати також з суперпотенціалу, отриманого з вихідного за допомогою заміни*

$$\mu \to \tilde{\mu} = \frac{1}{2}(2k-1), \quad k \to \tilde{k} = \frac{1}{2} + \mu. \tag{4.51}$$

Отже ми можемо представити потенціали (4.39), (4.40) і (4.42) в наступному вигляді

$$V_\mu = W_\mu^2 - W_\mu' + c_\mu, \tag{4.52}$$

де $V_\mu = V_k$, і

$$W_\mu = \frac{k\sigma^3 - \mu - 1}{x} + \frac{\omega}{2(\mu+1)}\sigma^1, \quad c_\mu = -\frac{\omega^2}{4(\mu+1)^2} \tag{4.53}$$

для потенціалу V_k заданого формулою (4.39),

$$W_\mu = \frac{\lambda}{2}\left((2\mu+1)\tan\lambda x + (2k-1)\sec\lambda x\sigma^3 + \frac{4\omega}{2\mu+1}\sigma^1\right) \tag{4.54}$$

для потенціалу (4.35), і

$$W_\mu = \frac{\lambda}{2}\left(-(2\mu+1)\coth\lambda x + (2k-1)\,\mathrm{csch}\,\lambda x\sigma^3 - \frac{4\omega}{2\mu+1}\sigma^1\right) \tag{4.55}$$

для потенціалу (4.37). Відповідні константи c_μ задаються формулою

$$c_\mu = -\lambda^2\left(\frac{4\omega^2}{(2\mu+1)^2} \pm \frac{1}{4}(2\mu+1)^2\right), \tag{4.56}$$

де знаки "$+$"або "$-$"відповідають суперпотенціалам (4.55) і (4.54).

Наголосимо, що суперпартнери гамільтоніанів, побудованих за допомогою суперпотенціалів W_μ,

$$H_\mu^+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_\mu^2 + W_\mu' + c_\mu, \tag{4.57}$$

задовольняють умову форм-інваріантності, оскільки

$$H_\mu^+ = H_{\mu+1}. \tag{4.58}$$

Таким чином потенціали (4.39), (4.40) і (4.42) допускають дуальну суперсиметрію, тобто, вони є форм-інваріантними відносно зсуву двох параметрів, а саме k та μ. Суперпартнери гамільтоніанів, що відповідають цим потенціалам, можуть бути отримані або зсувом параметра k, або зсувом параметра μ, в той час як одночасний зсув параметрів є недопустимим. Ми називаємо цей феномен — *дуально форм-інваріантність.*

Відмітимо, що потенціали (4.41) та (4.43) не допускають дуальну форм-інваріантності у вищеозначеному сенсі. Потенціал (4.43) не допускає дискретних симетрій при зміні параметрів, в той час як потенціал (4.36) не є інваріантним відносно заміни змінних (4.51). Але, як вже зазначалося вище, у випадку, коли параметр μ є чисто уявним, потенціал (4.36) допускає дискретну симетрію (4.51) для параметрів k та $\hat{\mu}$, а тому є дуально форм-інваріантним. Таким чином ми отримаємо сумісну модель “PT-симетричної квантової механіки“ [60] з дуальною форм-інваріантністю. Обговорення таких моделей лежить за рамками цієї дисертації, ми лише відмітимо, що для $\omega = 0$ відповідний потенціал розпадається на пряму суму потенціалів розглянутих в роботі [61].

4.5. Деякі спеціальні значення параметрів та ізоспектральність

Давайте покажемо, що для деяких значень параметрів μ та k потенціали (4.39)–(4.43) є ізоспектральними з прямою сумою відомих скалярних потенціалів.

Розглядаючи потенціал (4.39) і використовуючи його дуальну форм-інваріантність, стає можливим показати, що для напівцілих та від’ємних значень параметра μ, потенціал V_k може бути перетворений на пряму суму скалярних потенціалів Кулона (2.21). Дійсно, використовуючи умову форм-інваріантності (4.58) відносно параметра μ і суперпотенціал (4.53), отримаємо

$$\begin{gathered} H_{\mu+1} = H_\mu^+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_\mu^2 + W_\mu' + c_\mu = \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left((\mu+1)(\mu+2) + k^2 - k(2\mu+3)\sigma^3\right)\frac{1}{x^2} - \frac{\omega}{x}\sigma^1. \end{gathered} \tag{4.59}$$

Тоді, зсуваючи параметр μ ще на одиницю, отримаємо

$$\begin{gathered} H_{\mu+2} = H_{\mu+1}^+ = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + W_{\mu+1}^2 + W_{\mu+1}' + c_{\mu+1} = \\ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left((\mu+2)(\mu+3) + k^2 - k(2\mu+5)\sigma^3\right)\frac{1}{x^2} - \frac{\omega}{x}\sigma^1. \end{gathered} \tag{4.60}$$

Продовжуючи цей процес таким чином, на n-тому кроці ми отримаємо

$$H_{\mu+n} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4k^2-1}{4x^2} - \frac{\omega}{x}\sigma^1, \tag{4.61}$$

де $n = -\mu - \frac{1}{2}$.

Діагоналізуючи матрицю $\sigma^1 \to \sigma^3$ за допомогою перетворень еквівалентності (3.13), ми представимо потенціал (4.61) у вигляді прямої суми потенціалів Кулона, що відповідають суперпотенціалу (2.21), записаних в радіальних змінних. Це означає, що для від'ємних напівцілих значень μ потенціал (4.39) є ізоспектральним до потенціалу Кулона.

Аналогічно ми можемо показати, що потенціал (4.40) з від'ємними напівцілими k або від'ємними цілими μ є ізоспектральним з потенціалом

$$V_k = \lambda^2 \left(l(l-1) \sec^2 \lambda x + 2\omega \tan \lambda x \sigma^1 \right), \quad l = \frac{1}{2} \pm \mu \quad \texttt{або} \quad l = k, \tag{4.62}$$

який є еквівалентним прямій сумі двох потенціалів Розена—Морзе 1, що відповідають суперпотенціалу (2.22). За тих же умов на параметри μ та k потенціал (4.42) є ізоспектральним до потенціалу вигляду

$$V_k = \lambda^2 \left(l(l-1) \operatorname{csch}^2(\lambda x) + 2\omega \coth \lambda x \sigma^1 \right), \tag{4.63}$$

який є еквівалентним до прямої суми двох потенціалів Екарта, що відповідають суперпотенціалу (2.24). Нарешті потенціал (4.36) є ізоспектральним до потенціалу

$$V_k = \lambda^2 \left(l(l-1) \operatorname{sech}^2 \lambda x + 2\omega \tanh \lambda x \sigma^3 \right), \quad l = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{2}} \tag{4.64}$$

за умов, що k від'ємне напівціле число. Потенціал (4.64) є еквівалентним прямій сумі двох потенціалів Розена—Морзе 2, що відповідають суперпотенціалу (2.23).

Таким чином для деяких спеціальних значень параметрів μ та k ми можемо встановити ізоспектральні відношення між матричними потенціалами (4.39)–(4.42) з добре відомими скалярними потенціалами, що відповідають суперпотенціалам (2.21)–(2.24). Це зауваження також підтверджується прямим порівнянням спектрів, які наведено в розділі 8, зі спектрами для рівнянь Шрьодінгера з потенціалами Кулона, Розена-Морзе та Екхарта які можна знайти, наприклад, в [14].

Відмітимо також, що поклавши $\omega = 0$ в потенціалах (4.34)–(4.38), ми також отримаємо пряму суму двох форм-інваріантних потенціалів, а саме тривимірного осцилятора, Скарфа, узагальненого Пешля—Теллера та Морзе. Але для ненульових значень ω та μ, k, відмінних від тих, що були використані для отримання потенціалів (4.61)–(4.64), знайдені потенціали не можуть бути представленими у вигляді прямої суми скалярних потенціалів, використовуючи послідовні перетворення Дарбу.

4.6. Висновки до розділу 4

У розділі 4 розглянуті суперпотенціали вигляду (4.1) та знайдені усі відповідні форм-інваріантними потенціали. Також у цьому розділі доведено важливі факти щодо звідності матричних суперпотенціалів розглядуваного вигляду, а саме, доведено, що у випадку $n > 2$ суперпотенціали даного вигляду є звідними та еквівалентними прямій сумі скалярних суперпотенціалів зі списку (2.15)–(2.24) та матричних суперпотенціалів розміру 2×2 представлених формулами (4.34)–(4.38). Представлено конструктивний спосіб побудови відповідного перетворення еквівалентності. Для суперпотенціалів (4.34), (4.35) і (4.37) виявлено феномен дуальної форм-інваріантності. Таким чином потенціали (4.39), (4.40) і (4.42) допускають дуальну суперсиметрію, тобто, вони є форм-інваріантними відносно зсуву двох параметрів, а саме k та μ. Суперпартнери гамільтоніанів, що відповідають цим потенціалам, можуть бути отримані або зсувом параметра k, або зсувом параметра μ, в той час як одночасний зсув параметрів є недопустимим. Знайдені відношення ізоспектральності зі скалярними потенціалами та спеціальні значення параметрів, за яких ці відношення є вірними.

РОЗДІЛ 5

Матричні суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P$

У даному розділі дисертації поставлену задачу класифікації буде розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P, \tag{5.1}$$

де матриці Q та P не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 5.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу класифікації зведено до розв'язку системи незачеплених між собою рівнянь Ріккаті, що легко інтегруються. Також у цьому підрозділі показано, як можна позбутись деяких параметрів в системі визначальних рівнянь, спрощено та проінтегровано рівняння на невідому матрицю P. У підрозділі 5.2 знайдено додаткові перетворення еквівалентності, за допомогою яких можна спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють деяким додатковим вимогам. Підрозділ 5.3 є основним, у ньому представлено усі суперпотенціали вигляду (5.1), список двовимірних суперпотенціалів представлено у явному вигляді.

5.1. Попередній аналіз системи визначальних рівнянь

У цьому підрозділі ми проаналізуємо систему визначальних рівнянь та доведемо наступну теорему.

Теорема 5.1. *Невідому матрицю Q, що задовольняє визначальні рівняння, можна діагоналізувати за допомогою перетворень еквівалентності (3.13).*

В даному випадку матриця R рівна нульовій матриці, а тому система визначальних рівнянь спроститься і буде мати вигляд

$$Q' = Q^2 + \nu, \tag{5.2}$$

$$P' = \frac{1}{2}\{Q, P\} - \mu, \tag{5.3}$$

$$\delta_k = (2k+1)\nu - 2\mu, \tag{5.4}$$

де μ та ν — довільні дійсні константи.

Почнемо аналізувати рівняння (5.2) на невідому матрицю Q. Введемо нову змінну

$$M = Q - \varphi, \tag{5.5}$$

де скалярна функція φ визначена наступним чином

$$\varphi = \begin{cases} \lambda \tan(\lambda x + \gamma), & \nu = \lambda^2 > 0 \\ -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma), & \nu = -\lambda^2 < 0 \\ -\frac{1}{x+\gamma}, & \nu = 0 \end{cases}, \tag{5.6}$$

та $\gamma \in \mathbb{R}$ вибрано так, що матриця M не є сингулярною. Тоді рівняння (5.2) перетвориться на рівняння

$$M^{-1}M'M^{-1} = I + 2\varphi M^{-1}. \tag{5.7}$$

Відмітимо, що

$$(M^{-1})' = -M^{-1}M'M^{-1}.$$

Тому, поклавши $N = M^{-1}$, ми отримаємо наступне лінійне диференціальне рівняння

$$N' = -I - 2\varphi N. \tag{5.8}$$

Його загальний розв'язок представляється у вигляді

$$N = -\rho(x)I + \theta(x)C, \tag{5.9}$$

де $\rho(x)$ та $\theta(x)$ дійсні скалярні функції, а C — довільна константна матриця, причому

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda}\sin(2(\lambda x + \gamma)), & \nu = \lambda^2 > 0 \\ \frac{1}{2\lambda}\sinh(2(\lambda x + \gamma)), & \nu = -\lambda^2 < 0 \\ x + \gamma, & \nu = 0 \end{cases},$$
$$\theta = \begin{cases} \cos^2(\lambda x + \gamma), & \nu = \lambda^2 > 0 \\ \cosh^2(\lambda x + \gamma), & \nu = -\lambda^2 < 0 \\ (x + \gamma)^2, & \nu = 0 \end{cases}. \tag{5.10}$$

Матриця Q є ермітовою,тому визначена нами матриця N є також ермітовою. Більш того, якщо унітарна матриця U вибрана так, що $UNU^\dagger$ — діагональна матриця, то $UQU^\dagger$ є також діагональною матрицею. Оскільки ρ та θ є скалярними функціями, то діагоналізуюче перетворення U не залежить від змінної x, а тому є перетворенням еквівалентності (3.13).

Отже, ми довели, що матрицю Q можна діагоналізувати задопомогою перетворень еквівалентності (3.13) і представити у вигляді

$$Q = \mathrm{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}. \tag{5.11}$$

Оскільки ми довели, що матриця Q діагоналізується, то рівняння (5.3) для матриці P розщеплюється і може бути розв'язане поелементно

$$p'_{ij} = \frac{1}{2}(q_i + q_j)p_{ij} - \mu\delta_{ij}, \tag{5.12}$$

де p_{ij} — елементи матриці P, а δ_{ij} — символ Кронекера.

Покажемо, що за допомогою зсуву параметра $k \to k+\beta$ можна прибрати довільний параметр μ у випадку коли $\nu \neq 0$. Наголосимо, що оскільки суперпотенціал (5.1) залежить від параметра k лінійно, то такий зсув не змінює форми суперпотенціалу, а тому є перетворенням еквівалентності.

Зробимо заміну залежних змінних

$$p_{ii} \to \tilde{p}_{ii} = p_{ii} + \beta q_i, \tag{5.13}$$

тоді рівняння (5.12) у випадку коли $i = j$, перейде у рівняння

$$\tilde{p}'_{ii} - \beta q'_i = q_i \tilde{p}_{ii} - \beta q_i^2 - \mu. \tag{5.14}$$

Але в силу рівняння (5.11), вибравши $\beta = \frac{\mu}{\nu}$ у випадку, коли $\nu \neq 0$ отримаємо рівняння

$$\tilde{p}'_{ii} = q_i \tilde{p}_{ii}, \tag{5.15}$$

що не залежить від μ. Але заміна (5.13) як раз і може бути отримана за допомогою зсуву параметра $k \to k + \beta$.

Розв'язавши однорідне рівняння (5.15), легко отримати розв'язок неоднорідного рівняння (5.12) у випадку, коли $i = j$ та $\nu = 0$.

В результаті система визначальних рівнянь (5.2)–(5.4) матиме вигляд

- Якщо $\nu = 0$,

$$q'_i = q_i^2, \quad i = 1...n, \tag{5.16}$$

$$p_{ii} = \left(\varphi_{ii} - \mu \int \exp\left(-\int q_i dx\right) dx\right) \exp\left(\int q_i dx\right), \tag{5.17}$$

$$p_{ij} = \varphi_{ij} \sqrt{\exp\left(\int (q_i + q_j) dx\right)}, \quad i \neq j, \tag{5.18}$$

$$\delta_k = (2k+1)\nu - 2\mu, \tag{5.19}$$

- Якщо $\nu \neq 0$,

$$q'_i = q_i^2 + \nu, \quad i = 1...n, \tag{5.20}$$

$$p_{ij} = \varphi_{ij} \sqrt{\exp\left(\int (q_i + q_j) dx\right)}, \tag{5.21}$$

$$\delta_k = (2k+1)\nu, \tag{5.22}$$

де $\varphi_{ji} = \overline{\varphi_{ij}} \in \mathbb{C}$ — константи інтегрування.

Таким чином ми звели задачу класифікації матричних форм-інваріантних суперпотенціалів (5.1) до розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (5.16) та (5.20) для функцій q_i. Ці системи є системами незачеплених між собою рівнянь Ріккаті, що легко інтегруються.

5.2. Додаткові перетворення еквівалентності

У попередньому підрозділі ми вже використовували перетворення еквівалентності, щоб звести матрицю Q до діагонального вигляду. Водночас діагоналізувати матрицю Q і спростити матрицю P за допомогою перетворень (3.13) взагалі кажучи не можливо. Але у випадку, коли діагональна матриця Q додатково розбивається на блоки пропорційні до одиничної матриці

$$Q = \mathrm{diag}\{q_1 I_{m_1}, \ldots, q_l I_{m_s}\}, \tag{5.23}$$

де розмірності блоків вказані індексами, таке спрощення стає можливим і задається матрицею

$$U = \mathrm{diag}\{\mathcal{U}_{m_1}, \ldots, \mathcal{U}_{m_s}\}, \tag{5.24}$$

де $\mathcal{U}_{m_i}$ — унітарні матриці розмірності m_i. За допомогою цих перетворень можна спрощувати матрицю P. Вважаємо, що хоча б один з блоків має розмірність $m_i \geq 2$ та

$$m_1 + \cdots + m_s = n.$$

Оскільки матриця Q розбивається на блоки, то відповідно матриця P також буде мати блочну структуру

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{m_1 m_1} & \cdots & \mathcal{P}_{m_1 m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{P}_{m_s m_1} & \cdots & \mathcal{P}_{m_s m_s} \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

де $\mathcal{P}_{m_i m_j}$ — матриці розмірності $m_i \times m_j$ та $\mathcal{P}^\dagger_{m_i m_j} = \mathcal{P}_{m_j m_i}$, причому матриці $\mathcal{P}_{m_i m_j}$, коли $i \neq j$ є константними матрицями, помноженими на деяку функцію від змінної x, а матриці $\mathcal{P}_{m_i m_i}$ є сумою константної матриці помноженої на деяку функцію від змінної x, та одиничної матриці, помноженої на іншу функцію від змінної x, у випадку коли $\nu = 0$ та нульової матриці у випадку коли $\nu \neq 0$, окрім того $\mathcal{P}^\dagger_{m_i m_i} = \mathcal{P}_{m_i m_i}$.

Під дією перетворення еквівалентності (5.24) кожна матриця $\mathcal{P}_{m_i m_j}$ перетвориться наступним чином

$$\mathcal{P}_{m_i m_j} \to \tilde{\mathcal{P}}_{m_i m_j} = \mathcal{U}_{m_j} \mathcal{P}_{m_i m_j} \mathcal{U}^\dagger_{m_i}. \tag{5.26}$$

Оскільки $\mathcal{P}_{m_i m_i}$ — ермітові, то з властивостей унітарних перетворень, представлених в підрозділі 2.6, випливає, що ми можемо вибрати відповідні $\mathcal{U}_{m_i}$ так, щоб $\tilde{\mathcal{P}}_{m_i m_i}$ стали діагональними матрицями

$$\tilde{\mathcal{P}}_{m_i m_i} = \mathrm{diag}\{p^i_1, \ldots, p^i_{m_i}\}. \tag{5.27}$$

Якщо власні значення матриці $\mathcal{P}_{m_i m_i}$ вироджені, тобто ця матриця може бути зведена до блочно діагонального вигляду

$$\tilde{\mathcal{P}}_{m_i m_i} = \mathrm{diag}\{p^i_1 I_{l^i_1}, \ldots, p^i_{t_i} I_{l^i_{t_i}}\}, \quad l^i_1 + \cdots + l^i_{t_i} = m_i, \tag{5.28}$$

і перетворення еквівалентності, що відповідає унітарному перетворенню

$$U = \mathrm{diag}\{\mathcal{U}_{l^1_1}, \ldots, \mathcal{U}_{l^s_{t_s}}\}, \tag{5.29}$$

не змінюють матрицю Q та жодну з матриць $\mathcal{P}_{m_i m_i}$, то розбивши матрицю P на менші блоки відповідно до матриці U, ми зможемо діагоналізувати $d = [\frac{1}{2}(t_1 + \cdots + t_s)]$ з них та можливо зробити одну з них трикутною, в залежності чи є вираз під цілою частиною цілим чи ні. Також за допомогою діагональної матриці U можна зробити дійсними n недіагональних елементів матриці P. При цьому необхідно, щоб матриця P мала достатньо ненульових елементів і результуючий суперпотенціал не був звідним.

Взагалі кажучи цей процес не є однозначним і залежить від вибору номерів блоків у матриці P. Можна домовитись завжди вибирати блоки з меншими номерами і зробити цей процес однозначним, тоді ми отримаємо повністю детерміновану процедуру спрощення для будь якого суперпотенціалу вигляду (5.1).

5.3. Суперпотенціали та форм-інваріантні потенціали

У цьому розділі ми перейдемо до безпосереднього розв'язку спрощеної системи визначальних рівнянь (5.16)–(5.22). Рівняння (5.16) та (5.20) легко інтегруються і мають наступні розв'язки

$$
\begin{aligned}
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\frac{1}{x+\gamma_i}, & i = 1..m \\ 0, & i = m{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = 0, \\
&q_i = \lambda \tan(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1..n, \quad \nu = \lambda^2 > 0; \\
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma_i), & i = 1..m \\ -\lambda \coth(\lambda x + \gamma_i), & i = m{+}1..l \\ \pm\lambda, & i = l{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = -\lambda^2 < 0;
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

де $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1..n$ — константи інтегрування.

У випадках $\nu < 0$ та $\nu = 0$ матриця Q складається з блоків розміру $m, l-m+1, n-l+1$ та $m, n-m+1$ відповідно. Деякі з цих блоків можуть не бути присутніми, тобто мати нульовий розмір.

Визначивши елементи матриці Q ми можемо безпосередньо перейти до інтегрування виразів (5.17), (5.18) та (5.21) для різних значень параметра ν. Відмітимо, що у випадках $\nu = 0$ та $\nu < 0$ матриця Q може бути прямою сумою діагональної матриці та матриці пропорційної до одиничної. Тому, застосувавши додаткові перетворення еквівалентності до цих блоків, отримаємо такі розв'язки

- Якщо $\nu = 0$,

$$p_{ii} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\varphi_{ii}}{x+\gamma_i} - \dfrac{\mu}{2}(x+\gamma_i), & i = 1..m \\ -\mu x + \varphi_{ii}, & i = m{+}1..n \end{array} \right. ,$$

$$p_{ij} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{(x+\gamma_i)(x+\gamma_j)}}, & i = 1..m, j = 1..m \\ \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{x+\gamma_i}}, & i = 1..m, j = m{+}1..n \\ 0, & i = m{+}1..n, j = m{+}1..n. \end{array} \right. . \tag{5.31}$$

- Якщо $\nu = \lambda^2 > 0$,

$$\begin{aligned} p_{ii} &= \varphi_{ii} \sec(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1..n \\ p_{ij} &= \varphi_{ij} \sqrt{\sec(\lambda x + \gamma_i) \sec(\lambda x + \gamma_j)}, \quad i = 1..n, j = 1..n \end{aligned} \tag{5.32}$$

- Якщо $\nu = -\lambda^2 < 0$

$$p_{ii} = \left[\begin{array}{ll} \varphi_{ii} \operatorname{sech}(\lambda x{+}\gamma_i), & i = 1..m \\ \varphi_{ii} \operatorname{csch}(\lambda x{+}\gamma_i), & i = m{+}1..l \\ \varphi_{ii} \exp(\pm\lambda x), & i = l{+}1..n \end{array} \right. ,$$

$$p_{ij} = \left[\begin{array}{ll} \varphi_{ij} \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x{+}\gamma_i) \operatorname{sech}(\lambda x{+}\gamma_j)}, & i = 1..m, j = 1..m \\ \varphi_{ij} \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x{+}\gamma_i) \operatorname{csch}(\lambda x{+}\gamma_j)}, & i = 1..m, j = m{+}1..l \\ \varphi_{ij} \sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x{+}\gamma_i) \exp(\pm\lambda x)}, & i = 1..m, j = l{+}1..n \\ \varphi_{ij} \sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x{+}\gamma_i) \operatorname{csch}(\lambda x{+}\gamma_j)}, & i = m{+}1..l, j = m{+}1..l \\ \varphi_{ij} \sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x{+}\gamma_i) \exp(\pm\lambda x)}, & i = m{+}1..l, j = l{+}1..n \\ 0, \quad \text{якщо } q_i q_j > 0, & i = l{+}1..n, j = l{+}1..n \\ \varphi_{ij}, \quad \text{якщо } q_i q_j < 0, & i = l{+}1..n, j = l{+}1..n \end{array} \right. . \tag{5.33}$$

Числа m та l у формулах вище це ті самі числа, що використовуються в (5.30).

Ми довели наступну теорему.

Теорема 5.2. *Усі матриці Q та P, що задають загальний вигляд суперпотенціалу (5.1) представлені формулами (5.30) та (5.32)–(5.31) відповідно.*

Відмітимо, що розглядаючи матриці розмірності 1×1, ми відновимо решту скалярних потенціалів з розділу 2.4, які не були описані в розділі 4.3, а саме (2.15)–(2.20).

На останок, застосуємо отримані результати та випишемо список двовимірних суперпотенціалів вигляду (5.1) та відповідних до них потенціалів. Наголосимо, що дана процедура може бути проведена для суперпотенціалів та потенціалів будь-якої розмірності n у загальному вигляді, але ми її опускаємо через надмірну громіздкість.

Домовимося, що у випадку коли ми маємо дві константи інтегрування γ_1 та γ_2 ми зсунемо незалежну змінну x так, щоб $\gamma_1 = \gamma$ та $\gamma_2 = -\gamma$, а у випадку коли константа інтегрування одна — так, щоб $\gamma_1 = 0$. Окрім того за допомогою додаткових перетворень еквівалентності можна зробити дійсними константи інтегрування $\varphi_{12} = \varphi_{21} = \varphi$. Для зручності будемо позначати $\varphi_{11} = \phi$ та $\varphi_{22} = \eta$. У випадку коли $\nu = 0$ за допомогою зсуву параметра k ми можемо зробити так, щоб $\varphi_{11} = \phi$ та $\varphi_{22} = -\phi$.

Також введемо нові позначення для матриць

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma^0 + \sigma^3), \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\sigma^0 - \sigma^3). \tag{5.34}$$

В результаті отримаємо дев'ять нових двовимірних суперпотенціалів

$$W_k = \left(\frac{\phi - k}{x + \gamma} - \frac{\mu}{2}(x + \gamma)\right)\sigma^+ - \left(\frac{\phi + k}{x - \gamma} + \frac{\mu}{2}(x - \gamma)\right)\sigma^- + \frac{\varphi\sigma^1}{\sqrt{x^2 - \gamma^2}}, \tag{5.35}$$

$$W_k = \left(\frac{\phi - k}{x} - \frac{\mu}{2}x\right)\sigma^+ - (\eta + \mu x)\,\sigma^- + \frac{\varphi\sigma^1}{\sqrt{x}}, \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\sec(\lambda x+\gamma) + k\lambda\tan(\lambda x+\gamma))\sigma^+ + \\ &(\eta\sec(\lambda x-\gamma) + k\lambda\tan(\lambda x-\gamma))\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\sec(\lambda x+\gamma)\sec(\lambda x-\gamma)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\,\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma) - k\lambda\tanh(\lambda x+\gamma))\sigma^+ + \\ &(\eta\,\mathrm{sech}(\lambda x-\gamma) - k\lambda\tanh(\lambda x-\gamma))\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma)\,\mathrm{sech}(\lambda x-\gamma)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\,\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma) - k\lambda\coth(\lambda x+\gamma))\sigma^+ + \\ &(\eta\,\mathrm{csch}(\lambda x-\gamma) - k\lambda\coth(\lambda x-\gamma))\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma)\,\mathrm{csch}(\lambda x-\gamma)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\,\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma) - k\lambda\tanh(\lambda x+\gamma))\sigma^+ + \\ &(\eta\,\mathrm{csch}(\lambda x-\gamma) - k\lambda\coth(\lambda x-\gamma))\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma)\,\mathrm{csch}(\lambda x-\gamma)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\,\mathrm{sech}\,\lambda x - k\lambda\tanh\lambda x)\sigma^+ + (\eta\exp(\pm\lambda x) \pm k\lambda)\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\mathrm{sech}\,\lambda x\exp(\pm\lambda x)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}W_k = &(\phi\,\mathrm{csch}\,\lambda x - k\lambda\coth\lambda x)\sigma^+ + (\eta\exp(\pm\lambda x) \pm k\lambda)\sigma^- + \\ &\varphi\sqrt{\mathrm{csch}\,\lambda x\exp(\pm\lambda x)}\sigma^1,\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$W_k = (\phi\exp\lambda x + k\lambda)\sigma^+ + (\eta\exp(-\lambda x) - k\lambda)\sigma^- + \varphi\sigma^1. \tag{5.43}$$

Отже доведено наступну теорему.

Теорема 5.3. *Список усіх двовимірних суперпотенціалів вигляду (5.1) представлений формулами (5.35)–(5.43).*

Відповідні форм-інваріантні матричні потенціали можуть бути легко отримані за формулою (3.24).

5.4. Висновки до розділу 5

У розділі 5 розглянуті суперпотенціали вигляду (5.1) та знайдені усі відповідні до них форм-інваріантні потенціали. Список двовимірних суперпотенціалів представлений у явному вигляді. Також у цьому розділі доведено факти щодо приведення до діагонального вигляду рівнянь вигляду (5.2). А саме, доведено, що ермітова матриця Q, яка задовольняє рівняння (5.2) може бути діагоналізована за допомогою унітарного пертворення, що не залежить від змінної x. Окрім того знайдені додаткові перетворення еквівалентності, які допомагають спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють додатковим вимогам.

РОЗДІЛ 6

Матричні суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + \frac{1}{k}R$

У даному розділі дисертації поставлену задачу класифікації буде розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + \frac{1}{k}R, \tag{6.1}$$

де матриці Q та R не є спеціальними (тобто не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 6.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу зведено до розв'язку системи незачеплених між собою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, а саме рівнянь Ріккаті, що легко інтегруються, а також перебору спеціальних унітарних матриць, які не мають блочно-діагонального вигляду і задають невідому матрицю R. У підрозділі 6.2 знайдено додаткові перетворення еквівалентності, за допомогою яких можно спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють деяким додатковим вимогам. Підрозділ 6.3 є ключовим, у ньому представлено усі суперпотенціали вигляду (6.1), список двовимірних суперпотенціалів представлено у явному вигляді.

6.1. Попередній аналіз системи визначальних рівнянь

У цьому підрозділі ми проаналізуємо систему визначальних рівнянь та вкажемо спосіб її розв'язку.

В даному випадку матриця P рівна нульовій матриці, а тому система визначальних рівнянь спроститься і буде мати вигляд

$$Q' = Q^2 + \nu, \tag{6.2}$$

$$R' = 0, \tag{6.3}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{6.4}$$

$$\delta_k = (2k+1)\nu + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}. \tag{6.5}$$

Отже, в цьому випадку система складається з незачеплених між собою рівняння (6.2) на матрицю Q, рівнянь (6.3) та (6.4) на матрицю R та рівняння (6.5) для визначення δ_k.

Рівняння (6.2) співпадає з ідентичним рівнянням розглянутим в розділі 5, а тому може бути розглянуто таким самим чином. Отже, як було зазначено в підрозділі 5.1, матриця Q може бути приведена до діагонального вигляду

$$Q = \operatorname{diag}\{q_1, \ldots, q_n\} \tag{6.6}$$

за допомогою унітарного перетворення еквівалентності (3.13).

Рівняння (6.3) та (6.4) на невідому матрицю R були розглянуті в розділі 4, з них випливає, що матриця R має бути константною матрицею, квадрат якої пропорційний до одиничної матриці. В підрозділі 4.1 було помічено, що за допомогою перетворень еквівалентності (3.13) можна звести матрицю R до наступного вигляду

$$\tilde{R} = \omega \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s} \end{pmatrix}, \quad m + s = n, \tag{6.7}$$

де I та 0 — одинична та нульова матриці відповідно розмірність яких вказана за допомогою індексів.

Отже, спрощуючи матриці Q та R, незалежно за допомогою перетворень еквівалентності (3.13) ми можемо звести їх до вигляду (6.6) та (6.7), відповідно. Але, спрощуючи матрицю Q, ми будемо змінювати матрицю R і навпаки, тому одночасні перетворення неможливі.

Нехай спочатку за допомогою деякого перетворення еквівалентності (3.13) ми звели матрицю R до вигляду (6.7), при цьому матриця Q має загальний вигляд. І нехай унітарна матриця U відповідає перетворенню еквівалентності (3.13), яке діагоналізує матрицю Q. Тоді найбільш просто суперпотенціал вигляду (6.1) може бути заданий матрицею Q вигляду (6.6) та матрицею R, заданою формулою

$$R = U\tilde{R}U^{\dagger}, \tag{6.8}$$

де матриця $\tilde{R}$ визначається формулою (6.7).

Відмітимо, що, оскільки ми домножуємо матрицю R на матрицю U з обох боків, то замість унітарної матриці U можна використовувати спеціальну унітарну матрицю $\tilde{U} = U/\det U$. Також, оскільки нас цікавлять лише незвідні суперпотенціали, ми маємо розглядати лише матриці U, які не мають блочно-діагонального вигляду, інакше розглядуваний суперпотенціал є цілком звідним.

Таким чином ми звели задачу класифікації матричних форм-інваріантних суперпотенціалів (6.1) до розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (5.16) та (5.20) для функцій q_i та перебору усіх спеціальних унітарних матриць U, які не мають блочно-діагонального вигляду.

6.2. Додаткові перетворення еквівалентності

У попередньому підрозділі ми відмічали, що у загальному вигляді не можна одночасно спрощувати обидві матриці Q та R. Але у випадку, коли матриця Q розбивається на блоки пропорційні до одиничної матриці, одночасні перетворення стають можливими.

Ми вже розглядали подібну проблему для двох матриць P та Q у підрозділі 5.2, де було описано за яких умов виникають додаткові перетворення еквівалентності і яким чином вони дозволяють спростити загальний вигляд матриці P.

В цьому розділі ми також розглядаємо пару матриць, одна з яких є діагональною і може додатково розбиватися на блоки пропорційні до одиничної матриці. Тому опис додаткових перетворень еквівалентності принципово нічим не відрізняється від того, що представлений в підрозділі 5.2, де замість матриці P скрізь треба розглядати константну матрицю R вигляду (6.8).

Оскільки ми описуємо матриці R за допомогою спеціальних унітарних матриць U, які не мають блочно-діагонального вигляду, то доцільно буде спрощувати не саму матрицю R, а матрицю U за допомогою якої вона задана.

Під дією додаткових перетворень еквівалентності заданих матрицею $\mathcal{U}$ матриця U буде змінюватись наступним чином

$$U \to \tilde{U} = \mathcal{U} \cdot U. \tag{6.9}$$

Таке перетворення відповідає елементарному перетворенню рядків матриці U. Тому, оскільки матриця $\mathcal{U}$ має блочно-діагональну структуру, відповідні блоки матриці U можуть бути зведені до трикутної форми.

6.3. Суперпотенціали та форм-інваріантні потенціали

У цьому розділі ми перейдемо до безпосереднього опису суперпотенціалів вигляду (6.1). Матриця Q задається своїми діагональними елементами q_i, що можуть бути знайдені з рівнянь (5.16) та (5.20), які легко інтегруються і мають наступні розв'язки

$$
\begin{aligned}
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\frac{1}{x+\gamma_i}, & i = 1..m \\ 0, & i = m{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = 0, \\
&q_i = \lambda \tan(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1..n, \quad \nu = \lambda^2 > 0; \\
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma_i), & i = 1..m \\ -\lambda \coth(\lambda x + \gamma_i), & i = m{+}1..l \\ \pm\lambda, & i = l{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = -\lambda^2 < 0;
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

де $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1..n$ — константи інтегрування.

У випадках $\nu < 0$ та $\nu = 0$ матриця Q складається з блоків розміру $m, l{-}m{+}1, n{-}l{+}1$ та $m, n{-}m{+}1$, відповідно. Деякі з цих блоків можуть не бути присутніми, тобто мати нульовий розмір. У випадку, коли Q є константною матрицею, увесь потенціал є константною матрицею, а тому цей випадок не є цікавим.

Як вже і зазначалося матриця R задається спеціальною унітарною матрицею, яка не має блочно-діагонального вигляду.

Отже ми довели наступну теорему.

Теорема 6.1. *Усі матриці Q та R, що задають загальний вигляд суперпотенціалу (6.1) представлені формулами (6.10) та (6.7), (6.8) відповідно.*

На останок застосуємо отримані результати та випишемо список двовимірних суперпотенціалів вигляду (6.1). Наголосимо, що для довільної розмірності n множина усіх суперпотенціалів вигляду (6.1) рівнопотужна множині усіх спеціальних унітарних матриць розмірності n, які не мають блочно-діагонального вигляду. А тому, для довільного нефіксованого n усі суперпотенціали не можуть бути виписані у явному вигляді, хоча для будь якого фіксованого значення n ця процедура є досить простою.

Як і раніше домовимося, що у випадку коли ми маємо дві константи інтегрування γ_1 та γ_2, ми зсунемо незалежну змінну x так, щоб $\gamma_1 = \gamma$

та $\gamma_2 = -\gamma$, а у випадку коли константа інтегрування одна — так, щоб $\gamma_1 = 0$. Окрім того за допомогою додаткових перетворень еквівалентності можна зробити дійсними елементи матриці R так, що вона буде мати вигляд

$$R = \begin{pmatrix} \rho & \varepsilon \\ \varepsilon & -\rho \end{pmatrix} = \varepsilon\sigma^1 + \rho\sigma^3, \tag{6.11}$$

де $\rho^2 + \varepsilon^2 = \omega^2$ та $\varepsilon \neq 0$.

Для зручності будемо використовувати матриці σ^+ та σ^- задані формулою (5.34).

В результаті отримаємо вісім нових двовимірних суперпотенціалів

$$W_k = \left(\frac{\rho}{k} - \frac{k}{x+\gamma}\right)\sigma^+ - \left(\frac{\rho}{k} + \frac{k}{x-\gamma}\right)\sigma^- + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k}, \tag{6.12}$$

$$W_k = \left(\frac{\rho}{k} - \frac{k}{x}\right)\sigma^+ - \frac{\rho\sigma^-}{k} + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k}, \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned} W_k = &\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\tan(\lambda x + \gamma)\right)\sigma^+ + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k} - \\ &\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tan(\lambda x - \gamma)\right)\sigma^-, \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} W_k = &\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh(\lambda x + \gamma)\right)\sigma^+ + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k} - \\ &\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\tanh(\lambda x - \gamma)\right)\sigma^-, \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned} W_k = &\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\coth(\lambda x + \gamma)\right)\sigma^+ + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k} - \\ &\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\coth(\lambda x - \gamma)\right)\sigma^-, \end{aligned} \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned} W_k = &\left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh(\lambda x + \gamma)\right)\sigma^+ + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k} - \\ &\left(\frac{\rho}{k} + k\lambda\coth(\lambda x - \gamma)\right)\sigma^-, \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$W_k = \left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\tanh\lambda x\right)\sigma^+ - \left(\frac{\rho}{k} \pm k\lambda\right)\sigma^- + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k}, \tag{6.18}$$

$$W_k = \left(\frac{\rho}{k} - k\lambda\coth\lambda x\right)\sigma^+ - \left(\frac{\rho}{k} \pm k\lambda\right)\sigma^- + \frac{\varepsilon\sigma^1}{k}. \tag{6.19}$$

Отже доведено наступну теорему.

Теорема 6.2. *Список усіх двовимірних суперпотенціалів вигляду (6.1) представлений формулами (6.12)–(6.19).*

Відповідні форм-інваріантні матричні потенціали можуть бути легко отримані за формулою (3.24).

6.4. Висновки до розділу 6

У розділі 6 розглянуті суперпотенціали вигляду (6.1) та знайдені усі відповідні до них форм-інваріантні потенціали. Список двовимірних суперпотенціалів представлений у явному вигляді. Задачу класифікації суперпотенціалів довільної розмірності n зведено до перебору спеціальних унітарних матриць, які не мають блочно-діагонального вигляду. Окрім того знайдено додаткові перетворення еквівалентності, які допомагають спрощувати отримані суперпотенціали, якщо вони задовольняють додатковим вимогам.

РОЗДІЛ 7

Матричні суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$

У даному розділі дисертації поставлену задачу класифікації буде розв'язано в класі суперпотенціалів вигляду

$$W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R, \tag{7.1}$$

де матриці P, Q та R є матрицями загального вигляду, тобто не є спеціальними (не рівні нулю та не пропорційні до одиничної матриці).

У підрозділі 7.1 проведено попередній аналіз системи визначальних рівнянь, задачу зведено до алгебраїчної матричної проблеми. У підрозділі 7.2 запропоновано умови на довільні параметри, за яких алгебраїчна проблема, представлена в попередньому підрозділі, має розв'язок. Також в цьому підрозділі доведено справедливість цих умов у випадку, коли матриця Q не є константною матрицею. У підрозділі 7.3 розглянуто питання про додаткові перетворення еквівалентності. У підрозділі 7.4 ми розбиваємо розгядуваний клас суперпотенціалів на два підкласи - з константною та не константною матрицею Q. У підрозділі 7.4.1 розглянуто суперпотенціали з константною матрицею Q, доведено умови сумісності, представлені у підрозділі 7.2, наведено повний список тривимірних потенціалів. Також доведено, що двовимірних суперпотенціалів даного вигляду не існує, спрощено алгебраїчну задачу та представлено загальну стратегію її розв'язку у n-вимірному випадку. У підрозділі 7.4.2 розглянуто суперпотенціали з неконстантною матрицею Q, наведено повний список двовимірних суперпотенціалів, спрощено та представлено загальну стратегію розв'язку алгебраїчної проблеми для n-вимірного випадку.

7.1. Попередній аналіз системи визначальних рівнянь

У цьому підрозділі ми проаналізуємо систему визначальних рівнянь та знайдемо спосіб її розв'язку. Оскільки матриці P, Q та R не є спеціальними, ця система має вигляд

$$Q' = Q^2 + \nu, \tag{7.2}$$

$$P' = \frac{1}{2}\{P, Q\} + \mu, \tag{7.3}$$

$$\{P, R\} + \varkappa = 0, \tag{7.4}$$

$$R' = 0, \tag{7.5}$$

$$R^2 = \omega^2, \tag{7.6}$$

$$\delta_k = 2\mu + (2k+1)\nu - \frac{\varkappa}{k(k+1)} + \frac{(2k+1)\omega^2}{k^2(k+1)^2}. \tag{7.7}$$

Відмітимо, що ця система умовно розбивається на дві основні частини — рівняння (7.2), (7.3) та (7.5), (7.6), що пов'язані між собою рівнянням (7.4). Рівняння (7.7) є нічим іншим як визначенням невідомої δ_k.

Кожну з цих частин системи ми вже розглядали в попередніх розділах, так рівняння (7.2), (7.3) були розв'язані в розділі 5, а рівняння (7.5), (7.6) — в розділі 6. Користуючись результатами цих розділів отримаємо наступні результати.

Матриця Q може бути зведена до діагонального вигляду

$$Q = \mathrm{diag}\{q_1, \ldots, q_n\}. \tag{7.8}$$

Її елементи q_i визначаються за формулами

$$
\begin{aligned}
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\frac{1}{x+\gamma_i}, & i = 1..m \\ 0, & i = m{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = 0, \\
&q_i = \lambda \tan(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1..n, \quad \nu = \lambda^2 > 0; \\
&q_i = \left[\begin{array}{ll} -\lambda \tanh(\lambda x + \gamma_i), & i = 1..m \\ -\lambda \coth(\lambda x + \gamma_i), & i = m{+}1..l \\ \pm\lambda, & i = l{+}1..n \end{array}\right., \quad \nu = -\lambda^2 < 0;
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

де $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1..n$ — константи інтегрування.

У випадках $\nu < 0$ та $\nu = 0$ матриця Q складається з блоків однотипних елементів що задаються числами m та l. Деякі з цих блоків можуть не бути присутніми, тобто можуть мати нульовий розмір.

Відповідно до матриці Q матриця $P = \{p_{ij}\}$ визначається з рівняння (7.3) за наступними формулами

- Якщо $\nu = 0$,

$$
\begin{aligned}
&p_{ii} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\varphi_{ii}}{x+\gamma_i} - \dfrac{\mu}{2}(x+\gamma_i), & i = 1..m \\ -\mu x + \varphi_{ii}, & i = m{+}1..n \end{array}\right., \\
&p_{ij} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{(x+\gamma_i)(x+\gamma_j)}}, & i = 1..m, j = 1..m \\ \dfrac{\varphi_{ij}}{\sqrt{x+\gamma_i}}, & i = 1..m, j = m{+}1..n \\ \varphi_{ij}, & i = m{+}1..n, j = m{+}1..n \end{array}\right..
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

- Якщо $\nu = \lambda^2 > 0$,

$$
\begin{aligned}
&p_{ii} = \frac{\mu}{\lambda} \tan(\lambda x + \gamma_i) + \varphi_{ii} \sec(\lambda x + \gamma_i), \quad i = 1..n, \\
&p_{ij} = \varphi_{ij} \sqrt{\sec(\lambda x + \gamma_i) \sec(\lambda x + \gamma_j)}, \quad i = 1..n, j = 1..n.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

- Якщо $\nu = -\lambda^2 < 0$,

$$p_{ii} = \left[\begin{array}{ll} -\frac{\mu}{\lambda}\tanh(\lambda x+\gamma_i)+\varphi_{ii}\,\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma_i), & i=1..m \\ -\frac{\mu}{\lambda}\coth(\lambda x+\gamma_i)+\varphi_{ii}\,\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma_i), & i=m+1..l \\ \pm\frac{\mu}{\lambda}+\varphi_{ii}\exp(\pm\lambda x), & i=l+1..n \end{array}\right.,$$

$$p_{ij} = \left[\begin{array}{ll} \varphi_{ij}\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma_i)\,\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma_j)}, & i=1..m, j=1..m \\ \varphi_{ij}\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma_i)\,\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma_j)}, & i=1..m, j=m+1..l \\ \varphi_{ij}\sqrt{\mathrm{sech}(\lambda x+\gamma_i)\exp(\pm\lambda x)}, & i=1..m, j=l+1..n \\ \varphi_{ij}\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma_i)\,\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma_j)}, & i=m+1..l, j=m+1..l \\ \varphi_{ij}\sqrt{\mathrm{csch}(\lambda x+\gamma_i)\exp(\pm\lambda x)}, & i=m+1..l, j=l+1..n \\ \varphi_{ij}\exp(\pm\lambda x), \quad \text{якщо } q_iq_j>0, & i=l+1..n, j=l+1..n \\ \varphi_{ij}, \quad \text{якщо } q_iq_j<0, & i=l+1..n, j=l+1..n \end{array}\right.. \tag{7.12}$$

де $\varphi_{i,j}, \quad i=1..n, \ j=1..n$ — константи інтегрування.

Числа m та l у формулах вище ті самі, що і у формулах (7.9).

Матриця R — константна матриця, квадрат якої пропорційний одиничній матриці, її буде зручно визначати за допомогою елементів $R=\{r_{ij}\}$, або за допомогою формул, отриманих в розділі 6

$$R = U\tilde{R}U^{\dagger}, \tag{7.13}$$

де U — деяка унітарна матриця, а матриця $\tilde{R}$ визначена наступним чином

$$\tilde{R} = \omega\begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s}\end{pmatrix}, \quad m+s=n. \tag{7.14}$$

Отже, розглянувши дві основні частини системи визначальних рівнянь (7.2)–(7.7), ми визначили досить загальний вигляд невідомих матриць P, Q та R. Ці матриці залежать від інтегральних констант γ_i, p_{ij}, r_{ij} та від констант, що входять до визначальних рівнянь ν, μ, $\varkappa$. Зв'язок між цими константами задається за допомогою рівняння (7.4).

Таким чином ми звели задачу класифікації матричних форм-інваріантних суперпотенціалів (7.1) до алгебраїчної проблеми (7.4), для ермітових константних матриць P та R. Причому загальний вигляд матриць P та R є відомим. Ця алгебраїчна проблема буде розв'язана в наступних розділах.

7.2. Умови сумісності

У цьому розділі ми сформулюємо наступну теорему та доведемо її для випадку, коли матриця Q не є константною матрицею.

Теорема 7.1. *Умова сумісності рівнянь (7.2)–(7.7) має наступний вигляд*

$$\mu = 0, \quad \varkappa = 0. \tag{7.15}$$

Розглянемо елементи антикомутатору $\{P, R\}_{ij}$, де $j = 1..n$, а i відповідають неконстантним елементам q_i матриці Q

$$\begin{gathered} 2\mu r_{ii}\xi_i(x) + \sum_{p=1}^{n}(r_{ip}\overline{\varphi_{ip}} + \overline{r_{ip}}\varphi_{ip})\eta_{ip}(x) = -\varkappa, \\ 2\mu\overline{r_{ij}}(\xi_i(x) + \xi_j(x)) + \sum_{p=1}^{n}(\overline{\varphi_{ip}}r_{jp}\eta_{ip}(x) + \varphi_{jp}\overline{r_{ip}}\eta_{jp}(x)) = 0, \end{gathered} \tag{7.16}$$

де η_{ij} — множники, що залежать від x при φ_{ij} в матриці P; а ξ_i та ξ_j, $j = 1 \dots n$ відповідають елементам матриці Q та визначаються наступним чином

- Якщо $\nu = \lambda^2$,

$$\xi_j(x) = \frac{1}{\lambda}\tan(\lambda x + \gamma_j), \quad \xi_i(x) = \frac{1}{\lambda}\tan(\lambda x + \gamma_i).$$

- Якщо $\nu = -\lambda^2$,

$$\xi_j(x) = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\lambda}\tanh(\lambda x + \gamma_j) \\ -\frac{1}{\lambda}\coth(\lambda x + \gamma_j) \\ \pm\lambda \end{array}\right., \ \xi_i(x) = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\lambda}\tanh(\lambda x + \gamma_i) \\ -\frac{1}{\lambda}\coth(\lambda x + \gamma_i) \end{array}\right. .$$

- Якщо $\nu = 0$,

$$\xi_j(x) = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(x+\gamma_j) \\ -x \end{array}\right., \quad \xi_i(x) = -\frac{1}{2}(x+\gamma_i).$$

Оскільки $\xi_i(x), \eta_{ij}$ та 1 — є лінійно незалежними функціями для кожного $j = 1..n$, то з першого рівняння системи (7.16) одразу отримаємо умову $\varkappa = 0$. Також з цієї системи отримаємо, що множники при $\xi_i(x)$ та $\xi_i(x) + \xi_j(x)$ мають бути рівними нулю, отже маємо

$$\begin{aligned} &\mu r_{ii} = 0, \\ &\mu \overline{r_{ij}} = 0, \quad j = 1..n. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Отже, або $\mu = 0$ і припущення (7.15) доведене, або $r_{ij} = 0,\ j = 1..n$. Але остання умова означає, що матриця R має нульовий рядок, тобто є сингулярною матрицею, що протирічить умові (7.6), а тому припущення (7.15) доведене.

В розділі 7.4.1 ми побачимо, що це припущення також справедливе у випадку, коли Q є константною матрицею. Цей випадок ми розглянемо окремо.

7.3. Додаткові перетворення еквівалентності

В попередніх розділах ми помічали, що у випадку, коли матриця Q складається з блоків пропорційних до одиничної матриці, існують додаткові перетворення еквівалентності, і задача спрощується. В даному випадку, додаткові перетворення еквівалентності також виникають, але блочний вигляд матриці Q ускладнює задачу.

У найбільш загальному випадку матриця Q буде блочно-діагональною з блоками пропорційними до одиничної матриці на діагоналі, а в матриці P відповідні діагональні блоки будуть мати вигляд $\operatorname{diag}\{\varPhi_i, 0\}$. Перетвореннями, що не змінюють матрицю Q, можна буде зробити матриці $\varPhi_i$ —

діагональними. Окрім того залишаться перетворення, які одночасно не змінюють матриці Q та P і відповідають нульовим блокам на діагоналі матриці P. Такі перетворення будуть корисні для спрощення матриці R.

Діагональна унітарна матриця $U = \operatorname{diag}\{u_1, \ldots, u_s\}$, що відповідає блоку $\varPhi_i$ в матриці P, не змінює ані матрицю Q, ані матрицю P, а тому може бути використана для спрощення матриці R. Зокрема, за допомогою такої матриці можна зробити дійсними деякі елементи матриці R.

7.4. Суперпотенціали та форм-інваріантні потенціали

В цьому розділі ми дослідимо алгебраїчну проблему (7.4) та розв'яжемо її у класі розглядуваних суперпотенціалів. Надалі ми будемо широко використовувати властивість лінійної незалежності деяких частин співвідношення (7.4). Тому буде зручно розглянути окремо випадки коли матриця Q є константною матрицею, та випадок, коли матриця Q не є константною.

7.4.1. Суперпотенціали з константною матрицею Q

У випадку, коли матриця Q є константною матрицею, набір матриць P, Q та R має наступний вигляд

$$\begin{aligned} Q &= \lambda \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s} \end{pmatrix}, \qquad\qquad R = (r_{ij}), \\ P &= \begin{pmatrix} \exp(\lambda x)\Phi_{m\times m} & \mathcal{P}^{\dagger}_{s\times m} \\ \mathcal{P}_{s\times m} & \exp(-\lambda x)\Phi_{s\times s} \end{pmatrix} + \tilde{\mu}\lambda \begin{pmatrix} I_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & -I_{s\times s} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.18}$$

де $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\lambda}$, а матриці $\Phi_{m\times m}, \Phi_{s\times s}$ та $\mathcal{P}_{s\times m}$ — константні матриці розмірності яких вказані в індексах.

Оскільки матриця Q складається з двох блоків пропорційних до одиничної матриці, то перетворення

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{m\times m} & 0_{m\times s} \\ 0_{s\times m} & \mathcal{V}_{s\times s} \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

не змінює матрицю Q і може бути вибрано так, щоб матриці $\Phi_{m\times m}$ та $\Phi_{s\times s}$ під його дією перетворювались на діагональні матриці. Будемо позначати діагональні елементи цих матриць $\varphi_i,\ i = 1..n$, а елементи перетвореної матриці $\mathcal{P}$ позначимо $p_{ij},\ i = m+1..n,\ j = 1..s$.

Перепишемо умову (7.4) в цих позначеннях та зберемо коефіцієнти при $\exp(\lambda x),\ \exp(-\lambda x)$ та 1. Оскільки ці функції є лінійно-незалежними і весь вираз рівний нулю, то і кожен з отриманих коефіцієнтів буде дорівнювати нулю

$$r_{ii}\varphi_i = 0, \quad i = 1..n, \tag{7.20}$$

$$r_{ij}(\varphi_i + \varphi_j) = 0, \quad i,j = 1..m \text{ або } i,j = m{+}1..n, \tag{7.21}$$

$$r_{ij}\varphi_i = r_{ij}\varphi_j = 0, \quad i = 1..m,\ j = m{+}1..n, \tag{7.22}$$

$$2\tilde{\mu}r_{ii} + \sum_{p=m+1}^{n}(r_{ip}\overline{p_{ip}} + \overline{r_{ip}}p_{ip}) + \varkappa = 0, \quad i = 1..m, \tag{7.23}$$

$$-2\tilde{\mu}r_{ii} + \sum_{p=1}^{m}(r_{ip}\overline{p_{ip}} + \overline{r_{ip}}p_{ip}) + \varkappa = 0, \quad i = m{+}1..n \tag{7.24}$$

$$2\tilde{\mu}r_{ij} + \sum_{p=m+1}^{n}(r_{ip}\overline{p_{jp}} + \overline{r_{jp}}p_{ip}) = 0, \quad i,j = 1..m,\ i \neq j, \tag{7.25}$$

$$-2\tilde{\mu}r_{ij} + \sum_{p=1}^{m}(r_{ip}\overline{p_{jp}} + \overline{r_{jp}}p_{ip}) = 0, \quad i,j = m{+}1..n,\ i \neq j, \tag{7.26}$$

$$\begin{gathered} p_{ij}(r_{ii} + r_{jj}) + \\ \sum_{p=m+1}^{n} r_{ip}\overline{p_{jp}} + \sum_{p=1}^{m}\overline{r_{jp}}p_{ip} = 0, \end{gathered} \quad i = m{+}1..n,\ j = 1..m \tag{7.27}$$

Якщо усі $\varphi_i = 0,\ i = 1..n$, то суперпотенціал W_k є константною матрицею, а тому цей випадок не є цікавим. Нехай деякий коефіцієнт φ_i біля $\exp(\lambda x)$ не рівний нулю. Нехай i знаходиться між 1 та m (для i з інтервалу $m+1..n$ алгоритм є аналогічним, але усі операції проводяться в іншому блоці), тоді з точністю до перестановки індексів ми можемо покласти $\varphi_1 \neq 0$.

З формул (7.20), (7.22) випливає, що для кожного ненульового φ_i, $i = 1..n$ справедливі формули

$$r_{ii} = 0,$$
$$r_{ij} = 0, \quad j = m+1..n,\ i \neq j.$$

Також з формул (7.21) випливає, що для $j = 1..m$ існує хоча б одне $r_{1j} \neq 0$, а отже і $\varphi_j = -\varphi_1$, бо в іншому разі матриця R має нульовий рядок і є виродженою.

Якщо таке j не єдине $j = j_1, \ldots, j_s$, то відповідні елементи матриці R мають бути рівними нулю $r_{j_1 j_s} = 0$, інакше маємо протиріччя

$$\varphi_{j_1} = -\varphi_1,$$
$$\varphi_{j_s} = -\varphi_1,$$
$$\varphi_{j_s} = -\varphi_{j_1},$$

звідки усі елементи $\varphi_1,\ \varphi_{j_1},\ \varphi_{j_s} = 0$, що за припущенням невірно.

Лема 7.1. *З точністю до перестановки індексів з одного блоку, для кожного ненульового елементу φ_i виконується $\varphi_{i+1} = -\varphi_i, \quad r_{ii+1} \neq 0$ та $r_{ij} = r_{i+1j} = 0, \quad \forall j \neq i, i+1$.*

Ми показали, що кожному ненульовому φ_i відповідає мінімум один ненульовий елемент r_{ij}, $j = 1..m$, а отже і елемент $\varphi_j = -\varphi_i$. Тепер покажемо, що такий елемент всього один.

За допомогою перестановки індексів зберемо розглядувані ненульові елементи матриці P у групи $\varphi_i, -\varphi_i, \ldots, -\varphi_i$ на початку блоку $i = 1..m$, $j = 1..m$ (наголосимо, що такі перестановки не змінюють вигляд матриці Q). Тоді матриця R буде мати вигляд

$$R = \begin{pmatrix} & l_1^\dagger & & & \\ l_1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & l_s^\dagger & \\ & & l_s & & \\ & & & & \mathcal{R} \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

де l_i — вектори стовпчики, що не містять ненульових елементів та відповідають групам елементів $\varphi_i, -\varphi_i, \ldots, -\varphi_i$. Лема стверджує, що розмірність кожного з цих векторів має бути рівна одиниці, а відповідна група елементів матриці P складається лише з двох елементів $\varphi_i, -\varphi_i$.

Дійсно, якщо це не так (не обмежуючи загальності, припустимо, що вектор l_1 має розмірність більше за одиницю), то з рівності (7.6), розглядаючи елемент R^2_{32}, отримаємо

$$l_{1_1} l_{1_2} = 0, \tag{7.29}$$

де l_{1_1}, l_{1_2} — перша та друга компоненти вектора l_1. Остання рівність протирічить тому, що вектор l_1 не має нульових елементів (це так, бо інакше матриця R є виродженою). Отже, лему доведено.

Отримані умови задають вигляд матриць P та R таким чином

$$R = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_1 & 0 & \mathcal{R}_{12}^\dagger \\ 0 & 0 & \Omega_2 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{12} & 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & \mathcal{P}_{12}^{A\,\dagger} & \mathcal{P}_{12}^{B\,\dagger} \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{12}^{C\,\dagger} & \mathcal{P}_{12}^{D\,\dagger} \\ \mathcal{P}_{12}^A & \mathcal{P}_{12}^C & \Phi_2 & 0 \\ \mathcal{P}_{12}^B & \mathcal{P}_{12}^D & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.30}$$

де Ω_1 — блочно-діагональна матриця з блоками $\omega\sigma^1$ на діагоналі, матриця Ω_2 — блочно-діагональна матриця з блоками $-\omega\sigma^1$ на діагоналі, матриця Φ_1 — блочно-діагональна матриця з блоками $\varphi_i\sigma^3 e^{\lambda x} + \tilde{\mu}\lambda$, матриця Φ_2 — блочно-діагональна матриця з блоками $\varphi_i\sigma^3 e^{-\lambda x} - \tilde{\mu}\lambda$, матриці $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$ — ермітові матриці, а $\mathcal{R}_{12}$ — неермітова матриця. Обидві матриці $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$ або матриця $\mathcal{R}_{12}$ можуть бути діагоналізовані за допомогою перетворення еквівалентності.

Користуючись цим результатом, з рівнянь (7.25) та (7.26) отримаємо, що $\tilde{\mu} = 0$, а з рівнянь (7.23), (7.24) отримаємо, що й $\varkappa = 0$. Отже умови сумісності знайдені в підрозділі 7.2 справедливі також для випадку, коли матриця Q є сталою матрицею.

Рівняння (7.4) та (7.6) можна переписати у вигляді

$$\mathcal{R}_1^2 + \mathcal{R}_{12}^\dagger \mathcal{R}_{12} = \omega^2, \tag{7.31}$$

$$\mathcal{R}_2^2 + \mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{12}^\dagger = \omega^2, \tag{7.32}$$

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_{12} = 0, \tag{7.33}$$

$$\mathcal{R}_{12}^\dagger \mathcal{P}_{12}^B = 0, \tag{7.34}$$

$$\mathcal{P}_{12}^C \mathcal{R}_{12}^\dagger = 0, \tag{7.35}$$

$$\mathcal{P}_{12}^{D\dagger} \mathcal{R}_{12} + \mathcal{R}_{12}^\dagger \mathcal{P}_{12}^D = 0, \tag{7.36}$$

$$\mathcal{P}_{12}^D \mathcal{R}_{12}^\dagger + \mathcal{R}_{12} \mathcal{P}_{12}^{D\dagger} = 0, \tag{7.37}$$

$$\mathcal{P}_{12}^D \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \mathcal{P}_{12}^D = 0, \tag{7.38}$$

$$\mathcal{P}_{12}^B \varOmega_1 + \mathcal{R}_2 \mathcal{P}_{12}^B = 0, \tag{7.39}$$

$$\mathcal{P}_{12}^C \mathcal{R}_1 + \varOmega_2 \mathcal{P}_{12}^C = 0, \tag{7.40}$$

$$\mathcal{P}_{12}^A \varOmega_1 + \varOmega_2 \mathcal{P}_{12}^A = 0. \tag{7.41}$$

Наголосимо, що деякі з блоків можуть бути відсутні і описані вище рівняння спростяться. Так необхідно лише, щоб усі φ_i в матриці P не були рівні нулю, а тому хоча б один з блоків, що відповідає матрицям $\varPhi_1$ або $\varPhi_2$, має бути присутнім.

Якщо матриця $\mathcal{R}_{12}$ відсутня, то система (7.31)–(7.41) може бути досить легко розв'язана в загальному вигляді після того як матриця $\mathcal{R}_1$ або матриця $\mathcal{R}_2$ буде діагоналізована за допомогою перетворення еквівалентності. Не будемо зупинятися на розв'язку цих простих випадків, але наведемо загальну стратегію розв'язку цієї системи для найбільш загального випадку.

- Матрицю $\mathcal{R}_{12}$ слід діагоналізувати та переставити рядки та стовпчики так, щоб нульові елементи знаходилися в кінці матриці (такі перетворення не змінюють вигляд матриць P та Q) $R = \mathrm{diag}\{\rho_1, \dots, \rho_s, 0, \dots, 0\}$.

- З рівнянь (7.34) та (7.35) визначаємо, що усім ненульовим елементам матриці $\mathcal{R}_{12}$ відповідають нульові рядки та стовпці матриць $\mathcal{P}_{12}^B$ та $\mathcal{P}_{12}^C$ відповідно.

- Рівняння (7.33) визначає поелементну залежність між матрицями $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$.

- Матриці $\mathcal{R}_1$ та $\mathcal{R}_2$ визначимо з рівяннь (7.31) та (7.32).

- З рівнянь (7.36) та (7.37) отримаємо обмеження на матрицю $\mathcal{P}_{12}^D$. Разом з рівняннями (7.38) та (7.33) прийдемо до умов типу $A + A^\dagger = 0$, де $A = \mathcal{P}_{12}^{D\dagger}\mathcal{R}_2\mathcal{R}_{12}$ та $A = \mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_2\mathcal{P}_{12}^{D\dagger}$. Останні умови приводять до наступних рівностей $\Re e a_{ii} = 0, \quad \Re e a_{ij} = -\Re e a_{ji}, \quad \Im m a_{ij} = \Im m a_{ji}$, де a_{ij} — елементи матриці A.

- З рівняння (7.41) отримаємо, що матриця $\mathcal{P}_{12}^A$ складається з блоків вигляду $\alpha_j\sigma^0 + \beta_j\sigma^1$.

- Необхідно також використати умови сумісності (7.38)–(7.40) для отримання остаточного розв'язку.

Отже було доведено наступну теорему.

Теорема 7.2. *Нехай суперпотенціал незвідний та заданий формулою (7.1) з константною матрицею $Q = \lambda\mathrm{diag}\{I, -I\}$, тоді відповідні матриці P та R задаються формулами (7.30), а їх матричні елементи задовольняють рівняння (7.31)–(7.41).*

Незвідних двовимірних суперпотенціалів вигляду (7.1), де Q — константна матриця не існує.

Наведемо список тривимірних суперпотенціалів. Перший з них задається матрицями:

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} \varphi e^{\lambda x} & 0 & \overline{p_1} \\ 0 & -\varphi e^{\lambda x} & \overline{p_2} \\ p_1 & p_2 & 0 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\omega \end{pmatrix}. \quad (7.42)$$

Тут присутні лише матриці $\varPhi_1$, $\mathcal{P}^B_{12}$, $\varOmega_1$ та $\mathcal{R}_2$, задані таким чином:

$$\varPhi_1 = \varphi e^{\lambda x}\sigma^3, \quad \mathcal{P}^B_{12} = (p_1, p_2), \quad \varOmega_1 = \omega\sigma^1, \quad \mathcal{R}_2 = \pm\omega. \qquad (7.43)$$

Тоді, узгоджуючи рівняння (7.39), ми отримаємо, що $p_2 = \mp p_1$.

Аналогічно отримаємо суперпотенціал заданий такими матрицями:

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p_1} & \overline{p_2} \\ p_1 & \varphi e^{-\lambda x} & 0 \\ p_2 & 0 & -\varphi e^{-\lambda x} \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} \pm\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

де також $p_2 = \mp p_1$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 7.3. *Суперпотенціали (7.42) та (7.44) задають список усіх тривимірних суперпотенціалів вигляду (7.1) з константною матрицею Q.*

7.4.2. Суперпотенціали з неконстантною матрицею Q

Якщо матриця Q є неконстантною матрицею, найбільш загальним є випадок, коли матриця Q складається з діагональних блоків однакових елементів. Матриці P та R також відповідно розіб'ються на блоки. За допомогою перетворень еквівалентності, що не змінять загальный вигляд матриці Q, діагональні блоки матриці P можна буде діагоналізувати. Таким чином матриця P буде мати вигляд

$$P = \begin{pmatrix} \varPhi_1 & 0 & \dots & \mathcal{P}^{A\,\dagger}_{1m} & \mathcal{P}^{B\,\dagger}_{1m} \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{P}^{C\,\dagger}_{1m} & \mathcal{P}^{D\,\dagger}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{P}^{A}_{1m} & \mathcal{P}^{C}_{1m} & \dots & \varPhi_m & 0 \\ \mathcal{P}^{B}_{1m} & \mathcal{P}^{D}_{1m} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7.45}$$

де блоки $\operatorname{diag}\{\varPhi_i, 0\}$ відповідають діагональним блокам однакових елементів матриці Q. Наголосимо, що деякі з блоків можуть бути відсутні, але на відміну від випадку з константною матрицею Q, усі діагональні елементи φ_i в матриці P можуть були нульовими, а тому відповідні блоки $\varPhi_i$ можуть бути відсутні.

Зі співвідношення (7.4), зокрема, отримаємо

$$\begin{aligned} &r_{ii}\varphi_i = 0, \quad i = 1..n, \\ &r_{ij}(\varphi_i + \varphi_j) = 0, \quad \text{для одного блоку} \\ &r_{ij}\varphi_i = r_{ij}\varphi_j = 0, \quad \text{для різних блоків.} \end{aligned} \tag{7.46}$$

Аналізуючи дані співвідношення аналогічно до попереднього розділу, отримаємо такий загальний вигляд матриці R:

$$R = \begin{pmatrix} \varOmega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_1 & \dots & 0 & \mathcal{R}^{\dagger}_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \varOmega_m & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_{1m} & \dots & 0 & \mathcal{R}_m \end{pmatrix}. \tag{7.47}$$

Матриці $\varOmega_i$ — блочно-діагональні матриці з блоками $\pm\omega\sigma^1$ на діагоналі, підматриці $\varPhi_i$ матриці P — блочно-діагональні матриці з блоками $\varphi_i\sigma^3\eta_i(x)$ на діагоналі, матриці $\mathcal{R}_i$ — ермітові матриці, які можна діагоналізувати за допомогою перетворень еквівалентності. Матриці, що залишились мають бути узгоджені за допомогою наступних рівнянь, які ми не будемо розв'язувати для загального випадку

$$\mathcal{R}_j^2 + \sum_{i<j} \mathcal{R}_{ij}^\dagger \mathcal{R}_{ij} + \sum_{i>j} \mathcal{R}_{ij} \mathcal{R}_{ij}^\dagger = \omega^2, \tag{7.48}$$

$$\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_i + \mathcal{R}_j\mathcal{R}_{ij} + \sum \mathcal{R}_{kj}\mathcal{R}_{ik} = 0, \text{ тут } \mathcal{R}_{st} = \mathcal{R}_{ts}^\dagger \text{ коли } s > t, \tag{7.49}$$

$$\mathcal{R}_{ij}^\dagger \mathcal{P}_{ij}^B = 0, \tag{7.50}$$

$$\mathcal{R}_{kj}\mathcal{P}_{ik}^B = 0, \ i < k, \ i \neq j, \quad \mathcal{R}_{kj} = \mathcal{R}_{jk}^\dagger \text{ при } k > j, \tag{7.51}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^C \mathcal{R}_{ij}^\dagger = 0, \tag{7.52}$$

$$\mathcal{P}_{ki}^C \mathcal{R}_{jk} = 0, \ k < i, \ i \neq j, \quad \mathcal{R}_{jk} = \mathcal{R}_{kj}^\dagger \text{ при } j > k, \tag{7.53}$$

$$\mathcal{P}_{ki}^D \mathcal{R}_{kj}^\dagger = 0, \ i \neq j, \text{ тут } \mathcal{P}_{ks}^D = \mathcal{P}_{sk}^{D\dagger} \text{ та } \mathcal{R}_{ks}^\dagger = \mathcal{R}_{sk} \text{ коли } k > s, \tag{7.54}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^{D\dagger} \mathcal{R}_{ij} + \mathcal{R}_{ij}^\dagger \mathcal{P}_{ij}^D = 0, \tag{7.55}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^D \mathcal{R}_{ij}^\dagger + \mathcal{R}_{ij} \mathcal{P}_{ij}^{D\dagger} = 0, \tag{7.56}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^D \mathcal{R}_i + \mathcal{R}_j \mathcal{P}_{ij}^D = 0, \tag{7.57}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^B \mathit{\Omega}_i + \mathcal{R}_j \mathcal{P}_{ij}^B = 0, \tag{7.58}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^C \mathcal{R}_i + \mathit{\Omega}_j \mathcal{P}_{ij}^C = 0, \tag{7.59}$$

$$\mathcal{P}_{ij}^A \mathit{\Omega}_i + \mathit{\Omega}_j \mathcal{P}_{ij}^A = 0. \tag{7.60}$$

Отже було доведено наступну теорему.

Теорема 7.4. *Усі незвідні суперпотенціали задані формулою (7.1) з неконстантною матрицею Q, задаються за допомогою матриць Q (7.9), P (7.45) та R (7.47), елементи яких задовольняють рівняння (7.48)–(7.60).*

На закінчення цього розділу наведемо список усіх двовимірних суперпотенціалів даного вигляду. Як і раніше ми будемо використовувати зсуви незалежної змінної, щоб максимально спростити загальний вигляд суперпотенціалів. Матрицю R за допомогою додаткових перетворень еквівалентності можна звести до вигляду $R = \rho\sigma^3 + \varepsilon\sigma^1$, де ρ та ε — дійсні константи, та $\rho^2 + \varepsilon^2 = \omega^2$.

$$W_k = -k\left(\frac{\sigma^+}{x+c} + \frac{\sigma^-}{x-c}\right) + \frac{\mu\sigma^1}{\sqrt{x^2 - c^2}} + \frac{1}{k}R, \tag{7.61}$$

$$W_k = -\frac{k\sigma^+}{x} + \frac{\mu\sigma^1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{k}R, \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned} W_k &= \lambda k(\sigma^+ \tan(\lambda x + c) + \sigma^- \tan(\lambda x - c)) \\ &\quad + \lambda\mu\sigma^1\sqrt{\sec(\lambda x + c)\sec(\lambda x - c)} + \frac{\lambda}{k}R, \end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned} W_k &= -\lambda k(\sigma^+ \tanh(\lambda x + c) + \sigma^- \tanh(\lambda x - c)) \\ &\quad + \lambda\mu\sigma^1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x + c)\operatorname{sech}(\lambda x - c)} + \frac{\lambda}{k}R, \end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned} W_k &= -\lambda k(\sigma^+ \coth(\lambda x + c) + \sigma^- \coth(\lambda x - c)) \\ &\quad + \lambda\mu\sigma^1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x + c)\operatorname{csch}(\lambda x - c)} + \frac{\lambda}{k}R, \end{aligned} \tag{7.65}$$

$$W_k = -\lambda k(\sigma^+ \tanh(\lambda x) + \sigma^-) + \lambda\mu\sigma^1\sqrt{\operatorname{sech}(\lambda x)e^{\pm\lambda x}} + \frac{\lambda}{k}R, \tag{7.66}$$

$$W_k = -\lambda k(\sigma^+ \coth(\lambda x) + \sigma^-) + \lambda\mu\sigma^1\sqrt{\operatorname{csch}(\lambda x)e^{\pm\lambda x}} + \frac{\lambda}{k}R. \tag{7.67}$$

Отже доведено наступну теорему.

Теорема 7.5. *Усі незвідні двовимірні суперпотенціали вигляду (7.1) з неконстантною матрицею Q представлені формулами (7.61)–(7.67).*

7.5. Висновки до розділу 7

У розділі 7 розглянуті суперпотенціали вигляду (7.1). Даний клас потенціалів було розбито на два підкласи — з константною та не константною матрицею Q. Для першого підкласу представлено повний список тривимірних суперпотенціалів та доведено, що незвідних двовимірних суперпотенціалів даного вигляду не існує. Для другого підкласу представлено повний список двовимірних суперпотенціалів. Для обох підкласів n-вимірна задача зведена до алгебраїчної проблеми та надано загальну стратегію розв'язку цієї проблеми.

РОЗДІЛ 8

Точно розв'язні рівняння Шрьодінгера

У даному розділі дисертації відображено практичне застосування результатів, знайдених у попередніх розділах. Кожному з цих потенціалів відповідає система точно розв'язних рівнянь Шрьодінгера. Однак, необхідно проаналізувати чи є відповідна задача коректно поставленою. А саме, необхідно визначити, чи існують квадратично-інтегровні розв'язки рівнянь (2.12) для основного стану. Також необхідно знайти умови за яких існують усі збуджені стани розглядуваних систем.

Розглянемо суперпотенціали, що відповідають двовимірним матрицям, причому матриця Q пропорційна до одиничної матриці. Оскільки ми будемо розглядати двовимірні спектральні задачі, то хвильова функція ψ буде двокомпонентною.

Алгоритм знаходження спектру, основного та збудженого станів системи наведено в підрозділі 2.3. Надалі будемо позначати основний стан системи таким чином

$$\psi^0_{k,\mu}(x) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Ми виділили залежність від параметра μ, оскільки деякі з суперпотенціалів відповідають дуально форм-інваріантним потенціалам, що було обговорено в підрозділі 4.4.

Отже нам необхідно підставити вираз для розглядуваного суперпотенціалу у рівняння (2.6), щоб знайти гамільтоніан, потім розв'язати рівняння (2.12), щоб знайти основний стан, нарешті скористатися формулою (2.14) для пошуку збуджених станів.

У підрозділі 8.1 проведено аналіз системи рівнянь з двовимірним аналогом суперпотеціалу Кулона (4.34). У підрозділі 8.2 розглянуто двовимірний аналог першого суперпотенціалу Скарфа (4.35). У підрозділі 8.3 проаналізовано двовимірний аналог другого суперпотенціалу Скарфа (4.36). Підрозділ 8.4 описує двовимірний аналог суперпотенціалу Пешля—Теллера (4.37). Нарешті у підрозділі 8.5 розглянуто двовимірний аналог суперпотенціалу Морзе (4.38).

Для кожного суперпотенціалу відновлено відповідний гамільтоніан, знайдено спектр та основний стан. Підрозділ 8.6 є ключовим, в ньому доведено, що за певних умов на параметри, представлених у попередніх підрозділах, існують усі збуджені стани для розглядуваних систем.

8.1. Двовимірний аналог суперпотенціалу Кулона

Розглянемо наступну спектральну задачу для хвильової функції ψ

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\mu(\mu+1) + k^2 - k(2\mu+1)\sigma^3\right)\frac{\psi}{x^2} - \sigma^1\frac{\omega\psi}{x} = E_k\psi. \tag{8.2}$$

Вона є форм-інваріантною спектральною задачею з суперпотенціалом (4.34). Наголосимо, що оскільки потенціалі (4.39) є дуально форм-інваріантним, то спектральна задача (8.2) є також форм-інваріантною з суперпотенціалом (4.53) і умовою форм-інваріантності (4.58).

Рівняння (2.12) для задачі (8.2) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (\mu - k)\frac{\varphi}{x} + \frac{\omega}{2k+1}\xi = 0, \\ &\frac{\partial\xi}{\partial x} - (\mu + k + 1)\frac{\xi}{x} + \frac{\omega}{2k+1}\varphi = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Розв'язавши друге рівняння відносно φ, підставивши розв'язок в перше рівняння та зробивши заміну

$$\xi = y^{k+1}\hat{\xi}(y), \quad y = \frac{\omega x}{2k+1}, \tag{8.4}$$

ми отримаємо рівняння

$$y^2\frac{\partial^2\hat{\xi}}{\partial y^2} + y\frac{\partial\hat{\xi}}{\partial y} - \left(y^2 + \mu^2\right)\hat{\xi} = 0. \tag{8.5}$$

Це рівняння є добре відомим модифікованим рівнянням Бесселя. Його розв'язок — лінійна комбінація модифікованих функцій Бесселя

$$\hat{\xi} = C_1 K_\mu(y) + C_2 I_\mu(y). \tag{8.6}$$

Щоб отримати квадратично-інтегровний розв'язок необхідно у формулі (8.6) покласти $C_2 = 0$, оскільки $I_\mu(y)$ прямує до нескінченності при $x \to \infty$.

Таким чином, підставивши (8.6) в (8.4) і використавши друге рівняння (8.3) ми отримаємо розв'язки системи (8.3) у наступному вигляді

$$\varphi = y^{k+1}K_{\mu+1}(y), \quad \xi = y^{k+1}K_\mu(y), \tag{8.7}$$

де y — змінна, визначена в (8.4) та $\omega x/(2k+1) \geq 0$.

Функції (8.7) будуть квадратично-інтегровними якщо параметр k є додатнім та задовольняє наступну умову

$$k - \mu > 0. \tag{8.8}$$

Якщо дана умова порушується, тобто,

$$k - \mu \leq 0, \tag{8.9}$$

то ми не можемо знайти основний стан системи за допомогою формул (8.7) та суперпотенціалу (4.34), оскільки відповідний розв'язок не буде квадратично-інтегровним. Але, оскільки потенціал (4.39) є дуально форм-інваріантним, стає можливим використати альтернативну факторизацію рівняння (8.2), використовуючи суперпотенціал (4.53) та шукаючи квадратично-інтегровні розв'язки наступного рівняння

$$a_\mu^- \psi_{k,\mu}^0(x) = 0, \tag{8.10}$$

де тут і далі

$$a_\mu^- = \frac{\partial}{\partial x} + W_\mu, \quad a_\mu^+ = -\frac{\partial}{\partial x} + W_\mu. \tag{8.11}$$

Справді, розв'язуючи рівняння (8.10), ми отримаємо основний стан системи у такому вигляді

$$\varphi = y^{\mu+\frac{3}{2}} K_{|\nu|}(y), \quad \xi = y^{\mu+\frac{3}{2}} K_{|\nu-1|}(y), \tag{8.12}$$

де $y = \frac{\omega x}{2(\mu+1)}$ та $\nu = k + 1/2$.

Умови квадратичної інтегровності для розв'язку (8.12) задаються у вигляді

$$k - \mu < 1, \quad \text{якщо} \quad k \geq 0 \tag{8.13}$$

та

$$k + \mu > 1, \quad \text{якщо} \quad k < 0. \tag{8.14}$$

Важливо помітити, що умови (8.9) та (8.13) є сумісними у випадку, коли

$$k > 0, \quad 0 < k - \mu < 1. \tag{8.15}$$

Умови (8.8) та (8.14) не сумісні у жодному з випадків.

Отже, якщо параметри μ та k задовольняють умови (8.9) та (8.13), основний стан рівняння (8.2) має вигляд (8.12). Якщо виконується умова (8.8) але умова (8.13) не виконується, то основний стан системи має вигляд (8.7). Якщо ж виконується умова (8.15), то можливі обидва розв'язки (8.7) та (8.12). В спеціальному випадку $k = \mu + 1/2$ розв'язки (8.7) та (8.12) співпадають.

Значення спектру, що відповідають n-тому збудженому стану визначаються за допомогою формули (4.44) наступним чином

$$E_k^n = -\frac{\omega^2}{4(k + n + \frac{1}{2})^2}, \tag{8.16}$$

для суперпотенціалу (4.34), або за допомогою формули

$$E_\mu^n = -\frac{\omega^2}{4(\mu + n + 1)^2} \tag{8.17}$$

якщо ми використовуємо альтернативну факторизацію (4.53).

Залежність від x відповідної густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ для деяких значень довільних параметрів зображено на графіку (Рис. 8.1).

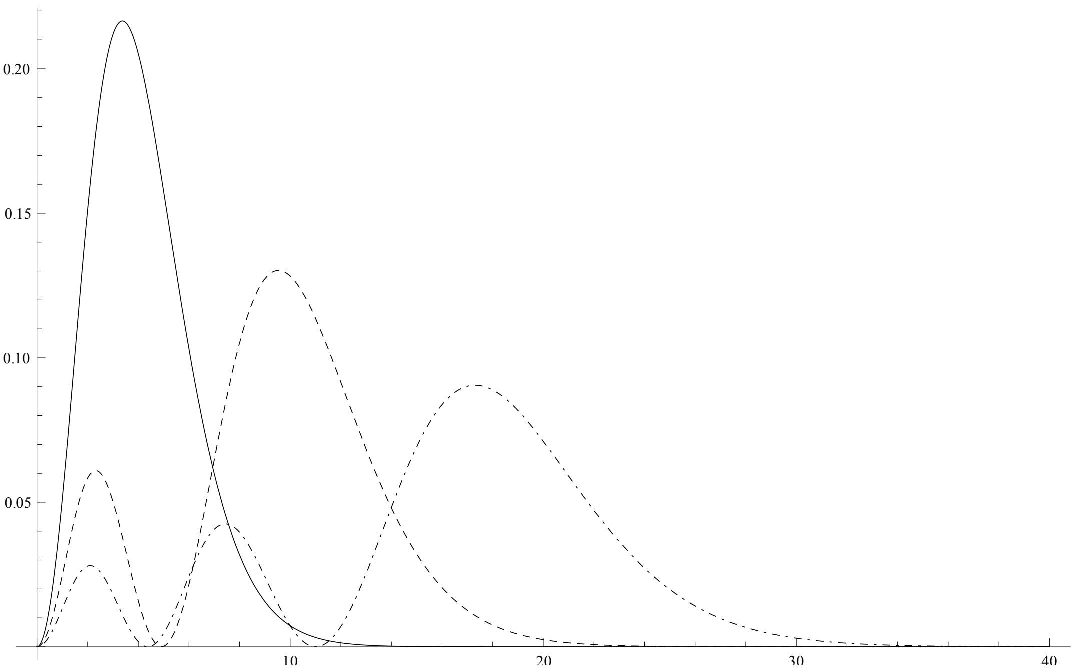

Рис. 8.1: Залежність густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ від x для потенціалу (4.39) з параметрами $\lambda = 1, k = -4, \omega = 2$: $n = 0$ (неперервне), $n = 1$ (пунктир) та $n = 2$ (пунктир з крапкою).

8.2. Двовимірний аналог першого суперпотенціалу Скарфа

Розглянемо наступну спектральну задачу для хвильової функції ψ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda^2 \big(& (k(k-1) + \mu^2)\sec^2\lambda x + 2\omega\tan\lambda x\sigma^1 \\ & +\mu(2k-1)\sec\lambda x\tan\lambda x\sigma^3 \big) = E_k\psi. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Вона є форм-інваріантною спектральною задачею з суперпотенціалом (4.35). Наголосимо, що оскільки потенціал (4.40) є дуально форм-інваріантним, то спектральна задача (8.18) є також форм-інваріантною з суперпотенціалом (4.54) і умовою форм-інваріантності (4.58).

Рівняння (2.12) для задачі (8.18) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda\left(k \tan \lambda x + \mu \sec \lambda x\right)\varphi + \frac{\omega}{k}\xi = 0, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda\left(k \tan \lambda x - \mu \sec \lambda x\right)\xi + \frac{\omega}{k}\varphi = 0. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Розв'язавши перше рівняння відносно ξ, підставивши розв'язок в друге рівняння, зробивши заміну

$$\varphi = y^{\frac{k-\mu}{2}}(1-y)^{\frac{k+\mu}{2}}\hat{\varphi}(y), \quad y = \frac{1}{2}(\sin \lambda x + 1), \quad -\frac{\pi}{2} \le \lambda x \le \frac{\pi}{2} \tag{8.20}$$

та розділивши результат на $\lambda^2 y^{\frac{k-\mu}{2}}(1-y)^{\frac{k+\mu}{2}}$, ми отримаємо рівняння

$$y(1-y)\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial y^2} + (\frac{1}{2} - \mu - y)\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} - \frac{\omega^2}{\lambda^2 k^2}\hat{\varphi} = 0. \tag{8.21}$$

Останнє рівняння є гіпеоргеометричним рівнянням для функції φ. Його розв'язок — лінійна комбінація гіпергеометричних функцій

$$\hat{\varphi} = C_1 \cdot {}_2F_1(a, -a, b, y) + C_2 \cdot y^{1-b}{}_2F_1(1+a-b, 1-a-b, 2-b, y), \tag{8.22}$$

де $a = -\frac{i\omega}{\lambda k}$, $b = \frac{1}{2} - \mu \neq 0$.

Отже, підставивши (8.22) в (8.20) і використавши друге рівняння (8.19), ми отримаємо розв'язки системи (8.19), перший з яких має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = y^{\frac{k-\mu}{2}}(1-y)^{\frac{k+\mu}{2}}{}_2F_1(a, -a, b, y), \\ &\xi_1 = \frac{2\omega}{k(2\mu-1)}y^{\frac{1+k-\mu}{2}}(1-y)^{\frac{1+k+\mu}{2}}{}_2F_1(1+a, 1-a, 1+b, y), \end{aligned} \tag{8.23}$$

а другий розв'язок такий

$$\begin{aligned}
&\varphi_2 = y^{\frac{1+k+\mu}{2}}(1-y)^{\frac{k+\mu}{2}}{}_2F_1(1+a-b, 1-a-b, 2-b, y),\\
&\xi_2 = -\frac{(2\mu+1)k}{2\omega}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\varphi_2 - \\
&\frac{k^2(2\mu+1)^2+4\omega^2}{2\omega k(2\mu+3)}y^{\frac{2+k+\mu}{2}}(1-y)^{\frac{1+k+\mu}{2}}{}_2F_1(2+a-b, 2-a-b, 3-b, y),
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Функції (8.23), (8.24) будуть квадратично-інтегровними, якщо параметри k та μ задовольняють наступні умови

$$k+\mu > 0, \quad k-\mu > 0. \tag{8.25}$$

Якщо дані умови порушуються, то ми не можемо знайти основний стан системи за допомогою формул (8.23), (8.24) та суперпотенціалу (4.35), оскільки відповідний розв'язок не буде квадратично-інтегровним.

Потенціал (4.35) є дуально форм-інваріантним, отже, можна використати альтернативну факторизацію рівняння (8.18), використовуючи суперпотенціал (4.54) та шукаючи квадратично-інтегровні розв'язки рівняння (8.10).

Справді, розв'язуючи рівняння (8.10), ми отримаємо основний стан системи у такому вигляді

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}_1 = y^{\frac{\mu-k+1}{2}}(1-y)^{\frac{k+\mu}{2}}{}_2F_1(\tilde{a}, -\tilde{a}, b, y),\\
&\tilde{\xi}_1 = \frac{4\omega}{(2k-3)(2\mu+1)}y^{\frac{2+\mu-k}{2}}(1-y)^{\frac{1+\mu+k}{2}}{}_2F_1(1+\tilde{a}, 1-\tilde{a}, 1+\tilde{b}, y),
\end{aligned} \tag{8.26}$$

де змінна y визначена в (8.20) та $a = -\frac{2\omega i}{2\mu+1}$, $b = 1-k$.

Другий розв'язок рівняння (8.10) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2, \quad \tilde{\xi}_2 = \xi_2, \tag{8.27}$$

де φ_2 та ξ_2 — функції визначенні рівнянням (8.24), а параметри гіпергеометричної функції ${}_2F_1$ відрізняються від параметрів заданих в (8.24), та мають вигляд $a = k - \frac{2\omega i}{2\mu+1}$, $b = \frac{1}{2}+k$.

Умови квадратичної інтегровності для розв'язків (8.26), (8.27) мають вигляд

$$k + \mu > 0, \quad k - \mu < 1. \tag{8.28}$$

Таким чином ми маємо три типи умов на параметри k та μ, а саме

$$k - \mu \geq 1, \tag{8.29}$$

$$k - \mu \leq 0, \tag{8.30}$$

$$0 < k - \mu < 1, \tag{8.31}$$

де в кожному з випадків $k + \mu > 0$.

За умов (8.29) та (8.30) розв'язки визначаються рівняннями (8.23), (8.24) та (8.26), (8.27), відповідно, в той час як за умови (8.31) підходить будь-який з розв'язків.

Значення спектру, що відповідають n-тому збудженому стану визначаються за допомогою формули (4.46) наступним чином

$$E_k^n = -\lambda^2 \left(\frac{\omega^2}{(k+n)^2} - (k+n)^2 \right) \tag{8.32}$$

для суперпотенціалу (4.35), або за допомогою формули

$$E_\mu^n = -\lambda^2 \left(\frac{4\omega^2}{(2\mu+1)^2} - \frac{1}{4}(2\mu+1)^2 \right), \tag{8.33}$$

якщо ми використовуємо альтернативну факторизацію (4.54).

Залежність від x відповідної густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ для деяких значень довільних параметрів зображено на графіку (Рис. 8.2).

8.3. Двовимірний аналог другого суперпотенціалу Скарфа

Розглянемо наступну спектральну задачу для хвильової функції ψ

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \lambda^2 \big(&(k(k-1) + \mu^2) \operatorname{sech}^2 \lambda x + 2\omega \tanh \lambda x \sigma^3 \\ &-\mu(2k-1) \operatorname{sech} \lambda x \tanh \lambda x \sigma^1 \big) = E_k \psi. \end{aligned} \tag{8.34}$$

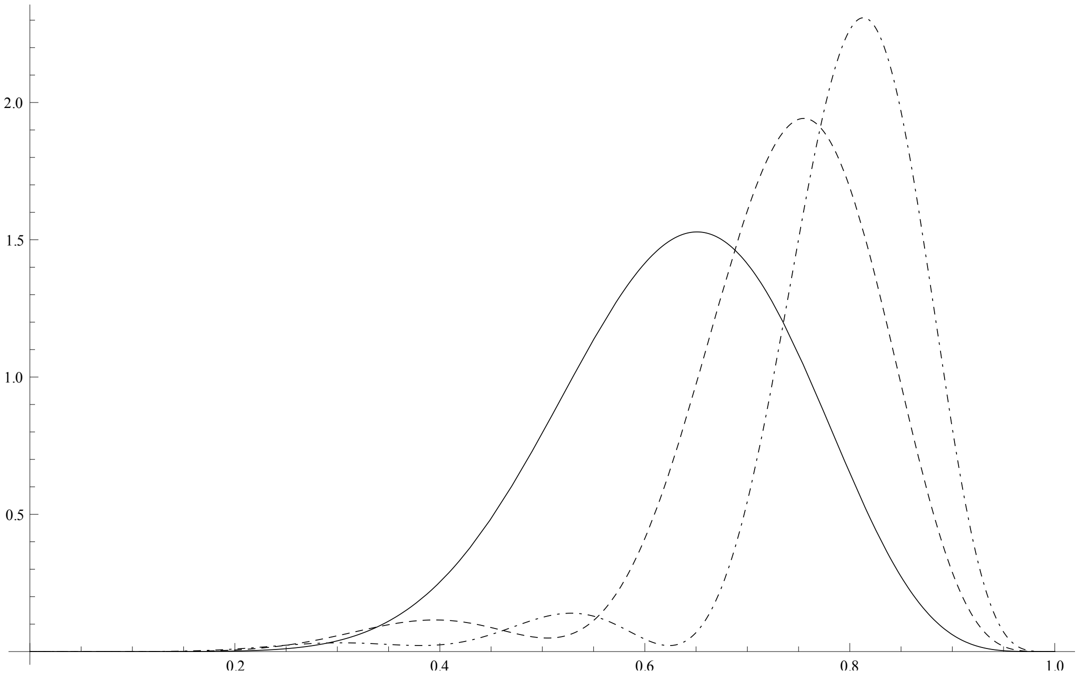

Рис. 8.2: Залежність густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ від x для потенціалу (4.40) з параметрами $\lambda = 1, k = 7, \mu = -2, \omega = -5$: $n = 0$ (неперервне), $n = 1$ (пунктир) та $n = 2$ (пунктир з крапкою).

Вона є форм-інваріантною спектральною задачею з суперпотенціалом (4.36).

Рівняння (2.12) для задачі (8.34) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda\left(k\tanh\lambda x + \frac{\omega}{k}\right)\varphi + \mu\,\mathrm{sech}\,\lambda x\xi = 0,\\ &\frac{\partial\xi}{\partial x} - \lambda\left(k\tan\lambda x - \frac{\omega}{k}\right)\xi + \mu\sec\lambda x\varphi = 0. \end{aligned} \tag{8.35}$$

Розв'язуючи цю систему аналогічно до системи з підрозділу 8.2, отримаємо наступні розв'язки, перший з яких має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = y^{-\frac{k}{2}+\frac{\omega}{2k}}(1-y)^{-\frac{k}{2}-\frac{\omega}{2k}}{}_2F_1(a,-a,b,y),\\ &\xi_1 = -\frac{2\mu k}{2\omega+k}y^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+\frac{\omega}{2k}}(1-y)^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}+\frac{\omega}{2k}}{}_2F_1(1+a,1-a,1+b,y), \end{aligned} \tag{8.36}$$

а другий розв'язок такий

$$
\begin{aligned}
&\varphi_2 = y^{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}-\frac{\omega}{2k}}(1-y)^{-\frac{k}{2}-\frac{\omega}{2k}}{}_2F_1(1+a-b, 1-a-b, 2-b, y),\\
&\xi_2 = \frac{2\omega-k}{2k\mu}y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}\varphi_2-\\
&\frac{(k-2\omega)^2+4\mu^2k^2}{2\mu k(3k-2\omega)}y^{\frac{2k-k^2-\omega}{2k}}(1-y)^{\frac{k-k^2-\omega}{2k}}{}_2F_1(2+a-b, 2-a-b, 3-b, y),
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

де параметри і змінна визначені таким чином

$$
a = -i\mu, \quad b = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{k} \neq 0, \quad y = \frac{1}{2}(\tanh\lambda x + 1). \tag{8.38}
$$

Функції (8.36), (8.37) будуть квадратично-інтегровними якщо параметри k та μ задовольняють наступні умови

$$
k < 0, \quad k^2 > \omega. \tag{8.39}
$$

Якщо дані умови порушуються, то не існує квадратично-інтегровного основного стану системи, оскільки відповідні розв'язки не будуть квадратично-інтегровними.

Значення спектру, що відповідають n-тому збудженому стану визначаються за допомогою формули (4.45) наступним чином

$$
E_k^n = -\lambda^2\left(\frac{\omega^2}{(k+n)^2} + (k+n)^2\right) \tag{8.40}
$$

для суперпотенціалу (4.36).

Залежність від x відповідної густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ для деяких значень довільних параметрів зображено на графіку (Рис. 8.3).

8.4. Двовимірний аналог суперпотенціалу Пешля—Теллера

Розглянемо наступну спектральну задачу для хвильової функції ψ

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda^2\mu(1-2k)\coth\lambda x\,\mathrm{csch}\,\lambda x\sigma^3\psi - \lambda^2\omega\coth\lambda x\sigma^1\psi\\
&+\lambda^2(k(k-1)+\mu^2)\,\mathrm{csch}\,\lambda x\psi = E_k\psi.
\end{aligned}
\tag{8.41}
$$

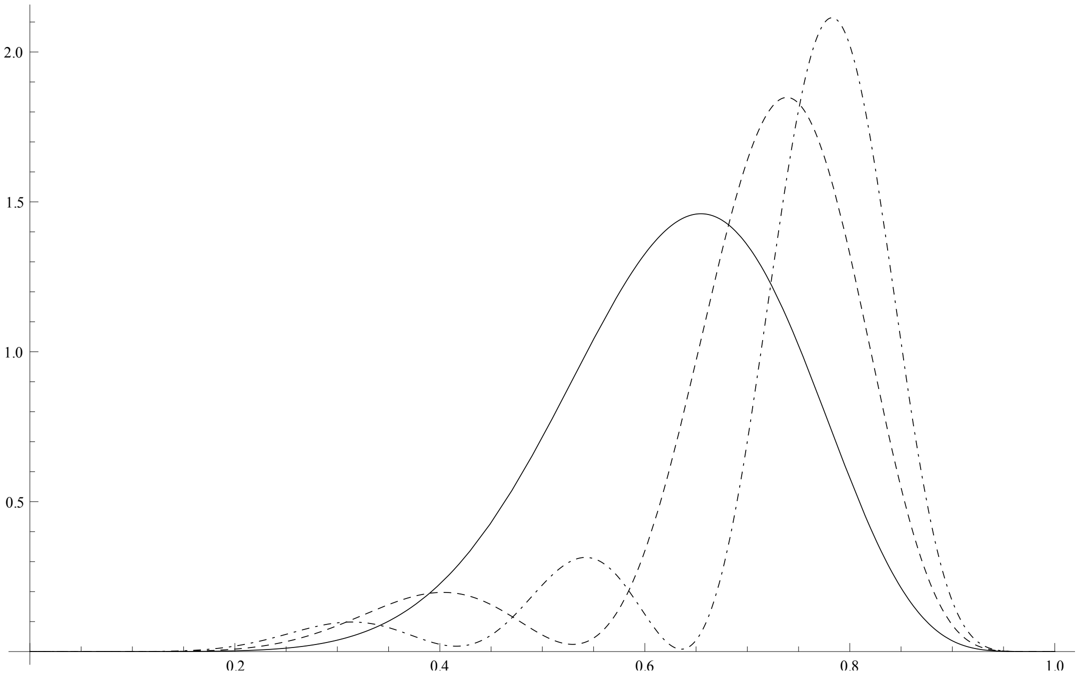

Рис. 8.3: Залежність густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ від x для потенціалу (4.41) з параметрами $\lambda = 1, k = -7, \mu = -2, \omega = -5$: $n = 0$ (неперервне), $n = 1$ (пунктир) та $n = 2$ (пунктир з крапкою).

Вона є форм-інваріантною спектральною задачею з суперпотенціалом (4.37). Наголосимо, що оскільки потенціалі (4.42) є дуально форм-інваріантним, то спектральна задача (8.41) є також форм-інваріантною з суперпотенціалом (4.55) і умовою форм-інваріантності (4.58).

Рівняння (2.12) для задачі (8.41) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \lambda\left(k\coth\lambda x - \mu\,\mathrm{csch}\,\lambda x\right)\varphi + \frac{\lambda\omega}{k}\xi = 0, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial x} - \lambda\left(k\coth\lambda x + \mu\,\mathrm{csch}\,\lambda x\right)\xi + \frac{\lambda\omega}{k}\varphi = 0. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Розв'язавши останнє рівняння аналогічно до рівняння (8.19), отримаємо наступні розв'язки, перший з яких має вигляд

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = (1-y^2)^{\frac{\omega}{k}-k} y^{k-\mu}{}_2F_1(a, b+a, b, y^2), \\ &\xi_1 = -y\varphi_1 + \frac{a+b}{b}(1-y^2)^{\frac{\omega}{k}-k+1} y^{k-\mu+1}{}_2F_1(a+1, b+a+1, b+1, y^2), \end{aligned} \tag{8.43}$$

а другий визначається так

$$\varphi_2 = (1-y^2)^{\frac{\omega}{k}-k} y^{k-\mu+1} {}_2F_1(a+1, b-a, b+1, y^2),$$
$$\xi_2 = \left(\frac{k(2\mu-1)(y^2-1)}{2\omega y} - y\right)\varphi_2 +$$
$$\frac{k(a+1)(b-a)}{\omega(b+1)}(1-y^2)^{\frac{\omega}{k}-k+1} y^{k-\mu+2} {}_2F_1(a+2, b-a+1, b+2, y^2), \tag{8.44}$$

де параметри та змінна визначені наступним чином

$$a = \frac{\omega}{k}, \quad b = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \tanh\frac{\lambda x}{2}. \tag{8.45}$$

Функції (8.43),(8.44) будуть квадратично-інтегровними, якщо параметри k, μ та ω задовольняють умову

$$\mu < k < 0, \quad \omega < k^2. \tag{8.46}$$

Потенціал (4.42) є дуально форм-інваріантним, тому ми також маємо розв'язати рівняння (8.10), використовуючи суперпотенціал (4.55). Явний вигляд розв'язків цього рівняння можна отримати з (8.43), (8.44) за допомогою заміни (4.51). Щоб знайти квадратично-інтегровні розв'язки, замість умови (8.46) необхідне виконання умови

$$\mu < 0, \quad 0 < \omega < \left(\mu + \frac{1}{2}\right)^2. \tag{8.47}$$

Значення спектру, що відповідають n-тому збудженому стану визначаються за допомогою формули (4.45) наступним чином

$$E_k^n = -\lambda^2\left(\frac{\omega^2}{(k+n)^2} + (k+n)^2\right) \tag{8.48}$$

для суперпотенціалу (4.37), або за допомогою формули

$$E_\mu^n = -\lambda^2\left(\frac{\omega^2}{(\mu+\frac{1}{2}+n)^2} + (\mu+\frac{1}{2}+n)^2\right), \tag{8.49}$$

якщо ми використовуємо альтернативну факторизацію (4.55).

Залежність від x відповідної густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ для деяких значень довільних параметрів зображено на графіку (Рис. 8.4).

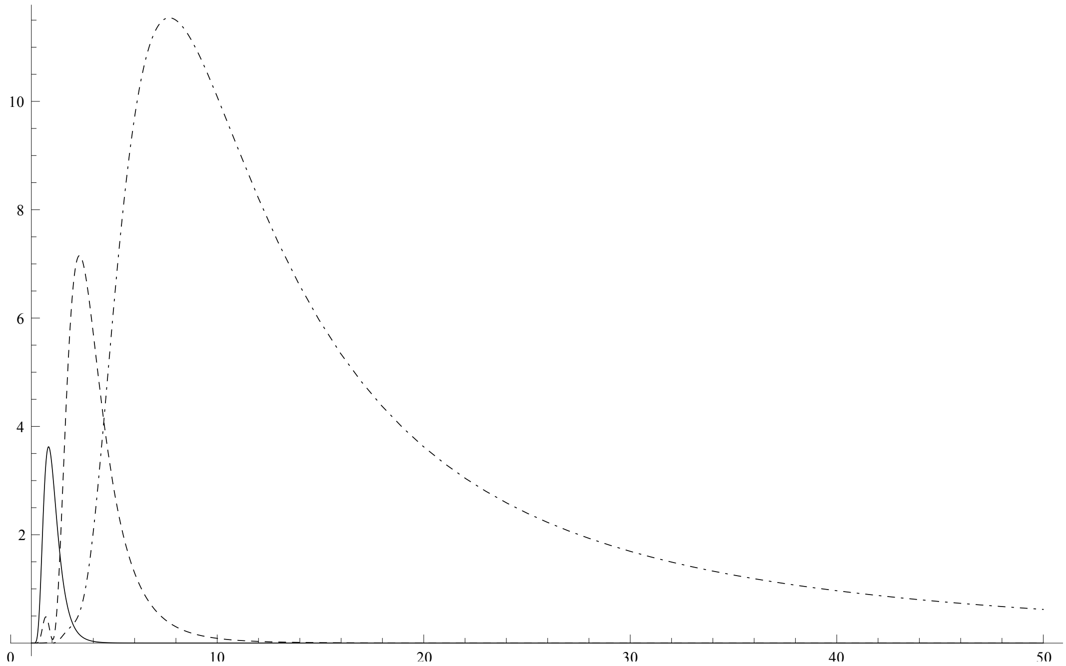

Рис. 8.4: Залежність густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger}\psi_k^n$ від x для потенціалу (4.42) з параметрами $\lambda = 1, k = -8, \mu = 3, \omega = -160,$: $n = 0$ (неперервне), $n = 1$ (пунктир) та $n = 2$ (пунктир з крапкою).

8.5. Двовимірний аналог суперпотенціалу Морзе

Розглянемо наступну спектральну задачу для хвильової функції ψ

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \lambda^2 \left(\exp(-2\lambda x) - (2k-1)\exp(-\lambda x)\sigma^1 + 2\omega\sigma^3\right)\psi = E_k\psi. \quad (8.50)$$

Вона є форм-інваріантною спектральною задачею з суперпотенціалом (4.38).

Рівняння (2.12) для задачі (8.50) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda\left(k + \frac{\omega}{k}\right)\varphi + \lambda\mu\exp(-\lambda x)\xi = 0,\\ &\frac{\partial\xi}{\partial x} - \lambda\left(k - \frac{\omega}{k}\right)\xi + \lambda\mu\exp(-\lambda x)\varphi = 0. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Розв'язавши останнє рівняння аналогічно до рівняння (8.3), отримаємо наступні розв'язки

$$\varphi = y^{\frac{1}{2}-k}K_{|\nu|}(y), \quad \xi = -y^{\frac{1}{2}-k}K_{|\nu-1|}(y), \quad (8.52)$$

де змінні та параметри визначені наступним чином

$$y = \mu \exp(-\lambda x), \quad \nu = \frac{\omega}{k} + \frac{1}{2}, \tag{8.53}$$

а параметри ω та k задовольняють нуступні умови

$$k < 0 \quad \omega < k^2. \tag{8.54}$$

Значення спектру, що відповідають n-тому збудженому стану визначаються за допомогою формули (4.45) та матеріалу з розділу 2.3 наступним чином

$$E_k^n = -\lambda^2 \left(\frac{\omega^2}{(k+n)^2} + (k+n)^2 \right). \tag{8.55}$$

Залежність від x відповідної густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger} \psi_k^n$ для деяких значень довільних параметрів зображено на графіку (Рис. 8.5).

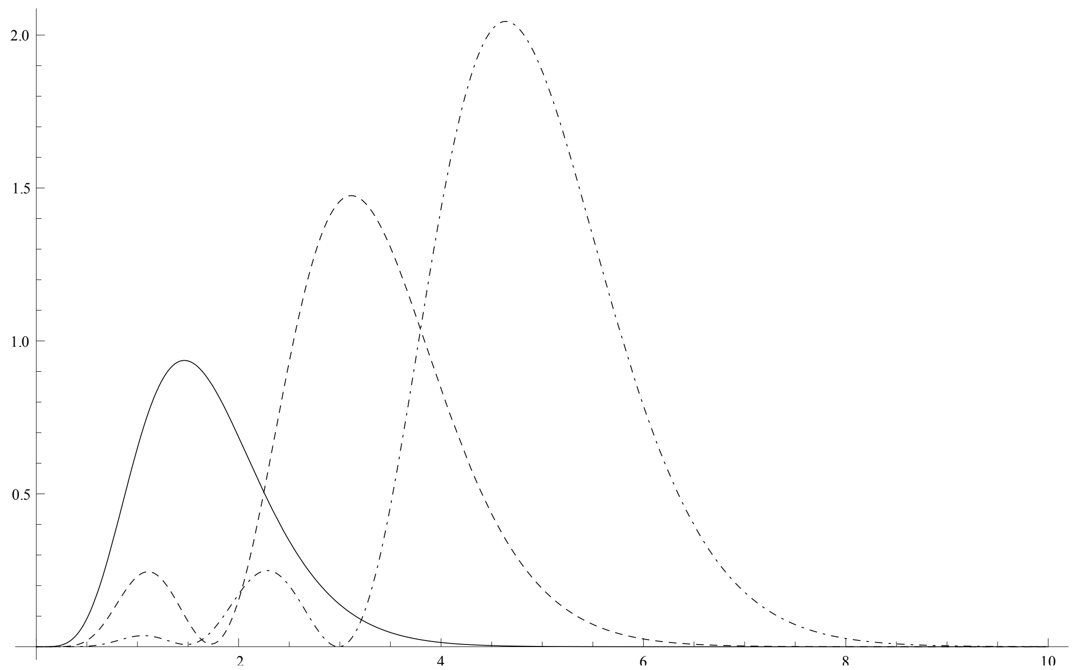

Рис. 8.5: Залежність густини ймовірності $\psi_k^{n\dagger} \psi_k^n$ від x для потенціалу (4.43) з параметрами $\lambda = 1, k = 3, \mu = 2, \omega = 2$: $n = 0$ (неперервне), $n = 1$ (пунктир) та $n = 2$ (пунктир з крапкою).

8.6. Збуджені стани

В попередніх підрозділах ми визначили основні стани для рівнянь Шрьодінгера, визначених потенціалами, що задані формулами (4.39)–(4.43). Розв'язки, що відповідають n-тому збудженному стану, можна знайти з розв'язків для основного стану та формули (2.14). Зауважимо, що для розв'язків, отриманих за допомогою дуальної форм-інваріантності в формулі (2.14), необхідно спочатку зробити заміну (4.51), щоб отримати формулу

$$\psi_k^n(x) = \frac{a_\mu^\dagger a_{\mu+1}^\dagger \cdots a_{\mu+n-1}^\dagger \psi_{\mu+n}^0(x)}{||a_\mu^\dagger a_{\mu+1}^\dagger \cdots a_{\mu+n-1}^\dagger \psi_{\mu+n}^0(x)||_2}. \tag{8.56}$$

Однак необхідно помітити, що розв'язки, отримані за допомогою формул (2.14) та (8.56), мають бути квадратично-інтегровними.

Почнемо з потенціалу (4.39), що допускає дуальну форм-інваріантність. Розглянемо розв'зок для основного стану, що задається формулою (8.7). Його інтегровність майже очевидна, оскільки модифікована функція Бесселя має лише одну особливу точку, а саме $y = 0$, та спадає експотенційно в нескінченності. Більш того, в точці $y = 0$ вона має сингулярність типу $K_\nu \sim \frac{1}{y^\nu}$, що повністю компенсується множником $y^{k\pm 1/2}$ за умови, що k задовольняє (8.8).

Обчислюючи перший збуджений стан (2.13), ми можемо використати співвідношення (2.12), де $k \to k+1$, таким чином

$$\psi_k^1(y) = (W_{k+1} + W_k)\psi_{k+1}^0(y). \tag{8.57}$$

І знову ми не маємо неусувної особливості в точці $y = 0$ оскільки $(W_{k+1} + W_k) \sim \frac{1}{y} + \cdots$ та $\psi_{k+1}^0(y) \sim y\psi_k^0(y)$.

Припустимо, що хвильова функція, яка відповідає n-тому збудженому стану, є регулярною в точці $y = 0$ та має наступний вигляд

$$\psi_k^n(y) = W\psi_{k+n}^0(y), \tag{8.58}$$

де W — матриця, що залежить від y та k. Тоді

$$\begin{aligned}\psi_k^{n+1}(y) &= \left(-\frac{\partial}{\partial y} + W_k\right)\psi_{k+n+1}^{n}(y) \\ &= \left(-\frac{\partial W}{\partial y} + W_k W + W W_{k+n+1}\right)\psi_{k+n+1}^{0}(y).\end{aligned} \tag{8.59}$$

Тут ми викорастали те, що функція $\psi_{k+n+1}^{0}(y)$ є розв'язком рівняння (2.12) при $k \to k+n+1$.

Використовуючи (8.59), не важко показати, що у випадку, коли функція $\psi_{k+1}^{n}(y)$ є квадратично-інтегровною, функція $\psi_k^{n+1}(y)$ буде також квадратично-інтегровною. Справді, в околі особливої точки $y = 0$ функція основного стану веде себе таким чином $\psi_{k+n+1}^{0}(y) \sim y\psi_{k+n}^{0}(y)$, і виконується $\left(-\frac{\partial W}{\partial y} + W_k W + W W_{k+1}\right) \sim \frac{1}{y}W$. Отже, з того, що функція $\psi_k^{n+1}(y)$ є регулярною в точці $y = 0$, випливає, що функція $\psi_k^{n}(y)$ є також регулярною в цій точці. Оскільки для $n = 0, 1$ наше припущення справедливе, ми за допомогою методу математичної індукції доводимо, що хвильова функція $\psi_k^{n}(y)$ є регулярною для будь яких n.

Повторюючи наведені вище міркування, можна довести квадратичну інтегровність основного стану заданого формулою (8.12) та усіх збуджених станів отриманих за допомогою співвідношення (8.56). Єдине, що потрібно, замінити відповідні формули для $\psi_k^{n}(y)$ та W_k на їх вирази для альтернативної факторизації $\psi_\mu^{n}(y)$ та W_μ.

Абсолютно аналогічно ми можемо довести квадратичну-інтегровність збуджених станів у випадку, коли суперпотенціал заданий формулою (4.38). Але у цьому випадку виникає зовсім інша проблема, викликана умовою (8.54). Справа в тому, що розв'язок (8.52) добре визначений для k та μ, що задовольняють умову (8.54) може втратити свою квадратичну інтегровність після заміни $k \to k+n$ для достатньо великих значень параметру n. Тобто, для того щоб отримати квадратично-інтегровний розв'зок $\psi_{k+n}^{0}(x)$ ми маємо вимагати, щоб виконувалась умова $0 < \omega \le (k+n)^2$. Оскільки k — від'ємне, ми маємо наступне обмеження на параметр n:

$$n < |k| - \sqrt{\omega}. \tag{8.60}$$

Легко показати, що у випадку коли функція $\psi^0_{k+n}(x)$ не є квадратично-інтегровною, те саме справедливо і для збуджених станів.

Розглянемо розв'язок для основного стану (8.23) для суперпотенціалу (4.35). Цей розв'язок, як і усі розв'язки, що залишилися, є лінійною комбінацією таких елементів:

$$y^A(1-y)^B {}_2F_1(a,b,c;y), \tag{8.61}$$

де параметри a, b та c, а також A та B задані у підрозділах 8.2—8.4.

Відповідно до її визначення, змінна y належить до проміжку $[0,1]$, тому є дві точки підозрілі на сингулярність, а саме $y = 0$ та $y = 1$. Для того, щоб розв'язок в цих точках був регулярний та рівний нулю, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $A > 0, B > 0$ та $\Re(B + c - a - b) > 0$. Саме ці умови накладають обмеження (8.25) та (8.28) на параметр k і гарантують квадратичну інтегровність основного стану. Це саме справедливо і для усіх інших розв'язків, які можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації елементів вигляду (8.61).

Щоб проаналізувати розв'язки для збуджених станів, ми перепишемо суперпотенціал (4.35) у термінах змінної y:

$$W_k = \lambda\left(k(2y-1) + \frac{\mu}{2}\sqrt{y(1-y)}\sigma^1 + \frac{\omega}{k}\sigma^3\right). \tag{8.62}$$

Ми бачимо, що суперпотенціал W_k є регулярним в точках $y = 0$ та $y = 1$, те саме вірно для суперпотенціалу W_{k+n} для будь-якого натурального числа n. Функції (8.23) залишаються регулярними, якщо ми зробимо заміну $k \to k + n$. Таким чином ми знову зможемо застосувати співвідношення (8.57)–(8.59) щоб довести квадратичну інтегровність відповідних розв'язків для збудженних станів для довільного n.

Абсолютно аналогічно до наведених вище міркувань ми можемо довести квадратичну інтегровність для збуджених станів, що відповідають основним станам (8.24), (8.26), (8.27), (8.36), (8.37), (8.43) та (8.44).

Однак в цих випадках ми знову маємо умову (8.46), яка накладає обмеження (8.60) на параметр n, що нумерує збуджені стани. Таким самим чином, починаючи з умови (8.46), ми приходимо до висновку, що розв'язки для збуджених станів для рівняння Шрьодінгера з потенціалом (4.37) є квадратично-інтегровними у випадку, коли параметр n задовольняє умову

$$n < |\mu| - \sqrt{\omega} - \frac{1}{2}. \tag{8.63}$$

Отже для довільних фіксованих параметрів k, μ та ω рівняння (2.1) з потенціалами (4.41) (4.42) та (4.43) описують системи, що мають скінчену кількість станів для дискретного спектру. Ці стани пронумеровані невід'ємним натуральним числом n, що задовольняє умови (8.60) та (8.63).

Системи з потенціалами (4.39)–(4.43) можуть мати також стани з неперервним спектром. Зокрема у такі стани має переходити система, коли умови (8.60) та (8.63) порушуються. Аналіз станів з неперервним спектром лежить за рамками цієї роботи.

8.7. Висновки до розділу 8

У розділі 8 досліджено інтегровні системи рівнянь Шрьодінгера, що відповідають суперпотенціалам знайденим в розділі 4. Для кожного з цих суперпотенціалів відновлено відповідні гамільтоніани, знайдено спектр, основний стан та усі збуджені стани. Доведено інтегровність основного стану та усіх збуджених станів, коли виконуються спеціальні умови на параметри.

Висновки

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Розроблено метод класифікації форм-інваріантних рівнянь Шрьодінгера, що мають суперпотенціали вигляду $W_k = kQ + P + \frac{1}{k}R$. У вибраному класі класифікацію проведено, результат поданий у явному вигляді, або, коли це не можливо, у вигляді алгоритму, що може бути застосований для будь-якої фіксованої розмірності суперпотенціалу.

2. Отримано вичерпний опис суперпотенціалів даного вигляду представлених матрицями розміру 2×2. Суперпотенціали даного вигляду можуть бути використані для опису задач квантової механіки для частинок зі спіном $\frac{1}{2}$.

3. Для форм-інваріантних проблем, що відповідають двовимірним матрицям, причому матриця Q пропорційна до одиничної матриці, розв'язано спектральну задачу. Знайдено власні значення, основний стан, доведено квадратичну інтегрованість збуджених станів.

Отримані результати є новими і можуть бути використані для розв'язування ряду конкретних задач квантової механіки для частинок з довільним нетривіальним спіном.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Nikitin A.G. Matrix superpotentials / A. G. Nikitin, Yuri Karadzhov // J. Phys. A: Math. Theor. -2011 -44, Issue 30 305204 21.

[2] Karadzhov Y. Matrix superpotential linear in variable parameter / Yuri Karadzhov // CNSNS -2012, 17, Issue -4 1522–1528.

[3] Nikitin A.G. Enhanced classification of matrix superpotentials / A. G. Nikitin, Yuri Karadzhov // J. Phys. A: Math. Theor. -2011 -44, Issue 44 445202.

[4] Караджов Ю. Тривимірні матричні суперпотенціали / Юрій Караджов // ISSN 1027-3190. Укр. мат. журн. -2012, 64, №12 1641-1653

[5] Караджов Ю. Матричні суперпотенціали спеціального вигляду / Юрій Караджов // Нелінійні коливання -2013, 16, 496-501

[6] Karadzhov Y. Matrix superpotentials / Yuri Karadzhov // V. Dobrev (Ed.), Springer Proc. Math. Stat. V36 Lie Theory and Its Applications in Physics -2013, 477-483

[7] Karadzhov Y. Matrix superpotentials of the special form / Yuri Karadzhov // B. Dragovich, Z. Rakić (Eds.), P'roc. 7th Math. Phys. Meeting: Summer School and Conf. on Modern Math. Phys. (September 9-19, 2012, Belgrade, Serbia), 223-228

[8] Schrödinger E. A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 46 (1940), 9–16.

[9] Schrödinger E. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization / E. Schrödinger // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 46 (1941), 183–206.

[10] Darboux G. Sur un proposition relative aux equations lineares / G. Darboux // C. R. Acad. Sci. Paris 94 (1882), 1456–1459.

[11] Witten E. Dynamical breaking of supersymmetry / E. Witten // Nuclear Phys. B 185 (1981), 513–554.

[12] Gendenshtein L.E. Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by means of SUSY / L.E. Gendenshtein // JETP Lett. 38 (1983), 356–359.

[13] Ui H. Supersymmetric Quantum Mechanics and Fermion in a Gauge Field of (1+2) Dimension / H. Ui // Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 192.

[14] Cooper F. Supersymmetry and quantum mechanics // F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme / Phys. Rep. -1995. -251, No. 5-6. -P. 267-385.

[15] Cooper F. Aspects of supersymmetric quantum mechanics / F. Cooper, B. Freedman //Annals of Physics. – 1983. – T. 146. – №. 2. – C. 262-288.

[16] Quesne C. Novel enlarged shape invariance property and exactly solvable rational extensions of the Rosen-Morse II and Eckart potentials / C. Quesne //SIGMA. – 2012. – T. 8. – №. 080. – C. 080.

[17] Matveev V.B. Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev-Petviaschvily equation, depending on functional parameters / V.B. Matveev // -Lett. Math. Phys, 1979, 3, 213-216.

[18] Matveev V.B. Some comments on the rational solutions of the Zakharov-Schabat equations / V.B. Matveev // -Lett. Math. Phys, 1979, 3, 503-512.

[19] Matveev V.B. Differential-difference evolution equations. II (Darboux transformation for the Toda lattice) / V.B. Matveev, M.A. Salle // -Lett. Math. Phys, 1979, 3, 425-429.

[20] Андрианов А.А. Всесоюзная конференция по теории систем нескольких частиц с сильным взаимодействием / А.А. Андрианов,

Н.В. Борисов, М.В. Иоффе // Тезисы докладов. Л.: ЛГУ. – 1983. – С. 69.

[21] Андрианов А.А. Квантовые Системы с одинаковыми спектрами энергии / А.А. Андрианов, Н.В. Борисов, М.В. Иоффе // -Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, No 2, 78-81.

[22] Andrianov A.A. SUSY quantum mechanics with complex superpotentials and real energy spectra / A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, F. Cannata//International Journal of Modern Physics A. – 1999. – Т. 14. – №. 17. – С. 2675-2688.

[23] Andrianov A.A. From supersymmetric quantum mechanics to a parasupersymmetric one / A.A. Andrianov, M.V. Ioffe // Physics Letters B. – 1991. – Т. 255. – №. 4. – С. 543-548.

[24] Andrianov A.A. Parasupersymmetry and truncated supersymmetry in quantum mechanics/ A.A. Andrianov, M.V. Ioffe, V.P. Spiridonov, L. Vinet // Physics Letters B. – 1991. – Т. 272. – №. 3. – С. 297-304.

[25] Andrianov A.A. Matrix Hamiltonians: SUSY approach to hidden symmetries/ A.A. Adrianov, F. Cannata, M.V. Ioffe, D.N. Nishnianidze // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1997. – Т. 30. – №. 14. – С. 5037.

[26] Andrianov A.A. Supersymmetric mechanics: A new look at the equivalence of quantum systems / A.A. Andrianov, N.V. Borisov, M.V. Ioffe, M.I. Eides // Teoret. Mat. Fiz., 1984, 61, 17–28

[27] Andrianov A.A. Factorization method and Darboux transformation for multidimensional Hamiltonians / A.A. Andrianov, N.V. Borisov, M.V. Ioffe // Teoret. Mat. Fiz., 1984, 61:2, 183–198

[28] Andrianov A.A. Nonlinear supersymmetry in quantum mechanics: algebraic properties and differential representation / A.A. Andrianov, A.V. Sokolov //Nuclear Physics B. – 2003. – Т. 660. – №. 1. – С. 25-50.

[29] Andrianov A.A. Nonlinear supersymmetry for spectral design in quantum mechanics / A.A. Adrianov, F. Cannata //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2004. – T. 37. – №. 43. – C. 10297.

[30] Andrianov A.A. Systems with higher-order shape invariance: spectral and algebraic properties / A.A. Adrianov, F. Cannata, M. Ioffe, D.N. Nishnianidze //Physics Letters A. – 2000. – T. 266. – №. 4. – C. 341-349.

[31] Andrianov A.A. Classical integrable two-dimensional models inspired by SUSY quantum mechanics / A.A Adrianov, M.V. Ioffe, D.N. Nishnianidze //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1999. – T. 32. – №. 25. – C. 4641.

[32] Andrianov A.A. Non-linear supersymmetry for non-Hermitian, non-diagonalizable Hamiltonians: I. General properties / A.A. Adrianov, F. Cannata, A.V. Sokolov //Nuclear Physics B. – 2007. – T. 773. – №. 3. – C. 107-136.

[33] Andrianov A.A. Nonlinear supersymmetric quantum mechanics: concepts and realizations / A.A. Adrianov, M.V. Ioffe //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2012. – T. 45. – №. 50. – C. 503001.

[34] Ioffe M.V. SUSY approach to Pauli Hamiltonians with an axial symmetry / M.V. Ioffe, Ş. Kuru, J. Negro, L.M. Nieto // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2006. – T. 39. – №. 22. – C. 6987.

[35] Ioffe M.V. SUSY intertwining relations of third order in derivatives / M.V. Ioffe, D.N. Nishnianidze //Physics Letters A. – 2004. – T. 327. – №. 5. – C. 425-432.

[36] Pupasov A.M. Eigenphase preserving two-channel SUSY transformations / A.M. Pupasov, B.F. Samsonov, J.M. Sparenberg, D. Baye //

Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Т. 43. – №. 15. – С. 155201.

[37] Pron'ko G.P. A new example of a quantum mechanical problem with a hidden symmetry / G.P. Pron'ko, Y.G. Stroganov // Sov. Phys. JETP 45 (1977) 1075

[38] Voronin A.I. Neutron in the magnetic field of a linear conductor with current as an example of the two-dimensional supersymmetric problem / A.I. Voronin // Phys. Rev. A 43 (1991) 29.

[39] Hau L.V. Supersymmetry and the binding of a magnetic atom to a filamentary current / L.V. Hau, J.A. Golovchenko, M.M. Burns // Physical review letters. – 1995. – Т. 74. – №. 16. – С. 3138.

[40] Ferraro E. Exactly solvable relativistic model with the anomalous interaction / E. Ferraro, A. Messina, A.G. Nikitin // Physical Review A. – 2010. – Т. 81. – №. 4. – С. 042108.

[41] de Lima Rodrigues R. An application of supersymmetric quantum mechanics to a planar physical system / R. de Lima Rodrigues, V.B. Bezerra, A.N. Vaidya // Physics Letters A. – 2001. – Т. 287. – №. 1. – С. 45-49.

[42] de Lima Rodrigues R. SUSY QM and solitons from two coupled scalar fields in two dimensions / R. de Lima Rodrigues, P.B. de Silva Filho, A.N. Vaidya //Physical Review D. – 1998. – Т. 58. – №. 12. – С. 125023.

[43] Tkachuk V.M. Supersymmetry of a spin-1/2 particle on the real line / V.M. Tkachuk P. Roy // Physics Letters A. – 1999. – Т. 263. – №. 4. – С. 245-249.

[44] Tkachuk V.M. Motion of a spin-1/2 particle in shape invariant scalar and magnetic fields / V.M. Tkachuk P. Roy // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2000. – Т. 33. – №. 22. – С. 4159.

[45] Sokolov A.V. Polynomial supersymmetry for matrix Hamiltonians / A.V. Sokolov //Physics Letters A. – 2013. – Т. 377. – №. 9. – С. 655-662.

[46] Correa F. The Bogoliubov-de Gennes system, the AKNS hierarchy, and nonlinear quantum mechanical supersymmetry / F. Correa, G.V. Dunne and M.S. Plyushchay // Ann. Phys. 324 (2009) 2522-2547.

[47] Correa F. Self-isospectrality, special supersymmetry, and their effect on the band structure / F. Correa, V. Jakubský, L.M. Nieto, M.S. Plyushchay //Physical review letters. – 2008. – Т. 101. – №. 3. – С. 030403.

[48] Correa F. Self-isospectral tri-supersymmetry in PT-symmetric quantum systems with pure imaginary periodicity F. Correa, M.S. Plyushchay //Annals of Physics. – 2012. – Т. 327. – №. 6. – С. 1761-1783.

[49] Correa F. Hidden superconformal symmetry of the spinless Aharonov–Bohm system / F. Correa, H. Falomir, V. Jakubský //Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Т. 43. – №. 7. – С. 075202.

[50] Jakubský V. Applications of the potential algebras of the two-dimensional Dirac-like operators / V. Jakubský //Annals of Physics. – 2013. – Т. 331. – С. 216-235.

[51] Klishevich S.M. Nonlinear supersymmetry on the plane in magnetic field and quasi-exactly solvable systems / S.M. Klishevich, M.S. Plyushchay //Nuclear Physics B. – 2001. – Т. 616. – №. 3. – С. 403-418.

[52] Plyushchay M.S. Hidden nonlinear supersymmetries in pure parabosonic systems / M.S. Plyushchay //International Journal of Modern Physics A. – 2000. – Т. 15. – №. 23. – С. 3679-3698.

[53] Plyushchay M.S. Self-isospectrality, mirror symmetry, and exotic nonlinear supersymmetry / M.S. Plyushchay, L.M. Nieto //Physical Review D. – 2010. – Т. 82. – №. 6. – С. 065022.

[54] Fukui T. Shape-invariant potentials for systems with multi-component wave functions / T. Fukui //Physics Letters A. – 1993. – Т. 178. – №. 1. – С. 1-6.

[55] Korkine A. Sur un problème d'interpolation (Extraitd'une lettre à M. Hermite) / A. Korkine // Bull. sci. math. (2) (1882) 228-242.

[56] Belitskii G. The Abel equation and total solvability of linear functional equations / G. Belitskii, Y. Lyubich // Studia Mathematica. – 1998. – Т. 127. – №. 1. – С. 81-97.

[57] Belitskii G. The real-analytic solutions of the Abel functional equation / G. Belitskii, Y. Lyubich // Studia Mathematica. – 1999. – Т. 134. – №. 2. – С. 135-141.

[58] Laitochová J. Group iteration for Abel's functional equation / J. Laitochová // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2007. – Т. 1. – №. 1. – С. 95-102.

[59] Golub G.H. Matrix computations / G.H. Golub, C.F. Van Loan // Johns Hopkins University, Press, Baltimore, MD, USA. – 1996. – С. 374-426.

[60] Bender C.M. PT-Symmetric Quantum Mechanics / C.M. Bender, S. Boettcher, P.N. Meisinger // 1999 J. Math. Phys. 40 2201

[61] Lévai G. The interplay of supersymmetry and PT symmetry in quantum mechanics: a case study for the Scarf II potential / G. Lévai, M. Znojil // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2002. – Т. 35. – №. 41. – С. 8793.