Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики

До 70-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фущича

Інститут математики
Національної академії наук України

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Головний редактор: *А.М. Самойленко*

Редакційна рада: *Ю.М. Березанський, М.Л. Горбачук, В.С. Королюк, В.М. Кошляков, І.О. Луковський, В.Л. Макаров, Ю.О. Митропольський, А.Г. Нікітін, Д.Я. Петрина, М.І. Портенко, А.В. Ройтер, А.В. Скороход, О.І. Степанець, П.М. Тамразов, О.М. Шарковський*

Інститут математики
Національної академії наук України

Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики

Київ — 2006

УДК 517.95:517.958:512.816(06)

Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: Збірник статтей / Відп. ред. А.Г. Нікітін // Зб. праць Інституту математики НАН України. Т. 3, № 2. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — 400 с.

ISSN 1815–2910

Цей збірник присвячено 70-річчю від дня народження член-кореспондента НАН України Вільгельма Ілліча Фущича (1936–1997), відомого українського вченого в області теоретико-групових методів математичної фізики. Представлено статі з сучасних проблем групового і симетрійного аналізу диференціальних рівнянь та алгебраїчних методів математичної фізики. Збірник також містить спогади учнів та колег про В.І. Фущича.

Розраховано на наукових працівників, аспірантів, які цікавляться застосуваннями теорії груп і алгебр Лі в теорії диференціальних рівнянь та математичній фізиці.

This collection of papers is devoted to the 70-th birthday anniversary of Corresponding Member of NAS of Ukraine Wilhelm Fushchych (1936–1997) who was a famous Ukrainian scientist in the field of group-theoretical methods in mathematical physics. Papers on modern problems of group and symmetry analysis of differential equations and on algebraic methods in mathematical physics are presented in the volume. The book contains also memoirs of students and colleagues of W.I. Fushchych.

The volume is intended for scientists and post-graduate students interested in applications of Lie groups and algebras in the theory of differential equations and mathematical physics.

Редакційна колегія: *В.М. Бойко, А.Г. Нікітін (відп. ред.), Р.О. Попович*

Рецензенти: доктор фіз.-мат наук, професор *Є.Д. Білоколос*,
академік НАН України *О.І. Луковський*

Свідоцтво про державну реєстрацію – серія КВ № 8459,
видане 19 лютого 2004

© Інститут математики НАН України, 2006

Вільгельм Ілліч Фущич (до 70-річчя від дня народження)

А.Г. НІКІТІН

У цьому році виповнюється 70 років з дня народження Вільгельма Ілліча Фущича – відомого вченого, засновника української школи групового аналізу. На жаль, невдовзі по цьому виповнюється також десята річниця його смерті. Доля розпорядилась так, що цей талановитий математик прожив лише шістдесят років, але за своє відносно коротке життя він встиг зробити у науці стільки, що цього вистачило б на великий науковий колектив чи навіть інститут. Досить згадати про дев'ять монографій та майже 350 наукових праць, що належать його перу, і великий загін учнів, серед яких 13 докторів та 47 кандидатів наук, які плідно працюють в університетах та науково-дослідницьких установах України і багатьох інших держав.

Вільгельм Ілліч Фущич народився 18 грудня 1936 року в селі Сільце Закарпатської області. Закінчив Ужгородський університет (1958) і аспірантуру Інституту математики (1963). У 1964 році захистив кандидатську, а у 1971 році – докторську дисертацію. Після закінчення аспірантури працював в Інституті математики НАН України, а з 1978 року по 1997 рік був завідувачем відділу прикладних досліджень цього ж інституту. У 1987 році обраний член-кореспондентом НАН України. У 1996 році, після повернення з закордонного відрядження, зробив свою останню доповідь на Вченій раді Інституту, присвяченій його 60-річчю. Невдовзі після цього він тяжко захворів і помер 7 квітня 1997 року. У 2001 році В.І. Фущича (посмертно) нагороджено Державною премією України в галузі науки і техніки. Зусиллями учнів створено інтернет-сторінку `http://www.imath.kiev.ua/~fushchych/`, присвячену пам'яті вчителя, на якій можна знайти його розширену біографію, список та електронні версії робіт, а також численні фотографії.

Дитинство його припало на роки, що були дуже важкими для нашої країни і особливо для Закарпаття, яке було об'єктом зазіхань відразу кількох держав і неодноразово переходило з одних рук у інші. Легко уявити, як непросто було в таких умовах дістати якісну середню освіту, а згодом вступити до університету та аспірантури, і кінець-кінцем досягти вершин світової науки. Але, мабуть, правдою є те, що справжній талант здатний прокласти собі дорогу за будь-яких умов, і життя та творчість Вільгельма Ілліча є прекрасним прикладом цього.

Вагомі наукові досягнення Вільгельма Ілліча добре відомі науковій спільноті і неодноразово висвітлювалися у наукових журналах та монографіях. (Дивись, наприклад, збірник його вибраних праць, виданий у 2005 році.) Тому поруч з переліком деяких досягнень і коротким описом життєвого шляху Вільгельма Ілліча мені б хотілося згадати про його чисто людські якості, спогади про які назавжди залишились в серцях його учнів. Спробую сказати тільки про головне, багато цікавого про цю людину можна знайти у цьому збірнику в розділі "Спогади".

Відомо, що по-справжньому талановита людина часто обдарована всебічно. Поруч з видатними здібностями до науково-дослідницької роботи Вільгельм Ілліч мав спортивні таланти і з успіхом займався багатьма видами спорту. Серед них особливе місце займав футбол. У роки юності Вільгельму Ілліччу довелося робити непростий вибір між футболом і математикою. Перемогла математика, але любов до футболу збереглася на все життя. Численним учням Вільгельма Ілліча доводилось час від часу здавати суворі іспити вчителю на футбольних майданчиках. Причому сам Вільгельм Ілліч виступав у ролі швидкого форварда таранного типу, з яким було тяжко впоратися навіть кільком (причому набагато молодшим!) захисникам.

Але безумовно головне місце у житті Вільгельма Ілліча займала наука. Він був великим трудівником, що віддав науці буквально все життя. І наука щиро віддячила йому, подарувавши світове визнання, відчуття змістовно і корисно прожитого життя, повагу і любов численних учнів.

Вільгельм Ілліч виховав багато науковців і викладачів. Навіть виходячи лише з кількісних показників, можна стверджувати, що він створив свою школу в науці. Він любив і вмів працювати з учнями, ставився до них як до рівноправних партнерів, які, можливо, є менше обізнаними, але безумовно здатні швидко навчитися. Причому вчитися доводилось під час роботи над конкретною і чітко сформульованою задачею, вчитися для того, щоб бути спроможним цю задачу розв'язати. А це, беззаперечно, найбільш ефективний шлях у навчанні, і більшість його учнів (багато з яких мали за собою освіту у провінційному ВУЗі і значно поступалися тим, хто мав диплом столичного університету) встигали захистити дисертації вчасно

або навіть достроково. У школі Фущича готувалися педагогічні кадри вищої кваліфікації для багатьох університетів країни. Його учні працюють у Києві, Полтаві, Житомирі, Вінниці, Миколаєві, Львові. Особливо відмітимо Полтаву, де в різний час працювали або працюють чотири доктори та п'ять кандидатів наук. Без перебільшення можна сказати, що провідні викладачі математики у полтавських університетах вийшли зі школи Фущича.

Хочеться сказати "на жаль", але я утримаюсь від цих слів, помітна частина учнів Вільгельма Ілліча постійно працює за кордоном. А саме, п'ять докторів наук працюють у Польщі, два – у Сполучених Штатах Америки. Поруч з очевидними втратами для української науки і системи вищої освіти, цей факт має певні корисні аспекти: він є свідченням визнання високого рівня підготовки наших фахівців, які не втрачають зв'язків з київськими колегами і прямо чи опосередковано приймають участь у наших наукових дослідженнях.

Працюючи в Інституті математики, Вільгельм Ілліч організував відділ прикладних досліджень, який очолював до останніх хвилин свого життя. Цей відділ утворено у 1978 році рішенням Вченої ради Інституту математики як складову сектора прикладної математики.

Саме завдяки зусиллям Вільгельма Ілліча відділ досить швидко став загальноукраїнським центром з дослідження симетрії диференціальних рівнянь. Згодом цей центр отримав світове визнання, про що свідчать візити іноземних фахівців до Києва і численні запрошення співробітників відділу до закордонних наукових центрів, широке цитування робіт, виконаних у відділі, у провідних наукових журналах. Детальну інформацію про відділ, його співробітників та їх наукові результати можна знайти на інтернет-сторінці `http://www.imath.kiev.ua/~appmath/`.

У 1994 році Вільгельм Ілліч заснував міжнародний часопис *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, який швидко став відомим серед фахівців. Слід зауважити, що це був перший англомовний математичний журнал, що видавався в Україні. Журнал має непоганий індекс цитування і зараз видається закордоном.

В.І. Фущичем започатковано серію міжнародних конференцій *Симетрія в нелінійній математичній фізиці*. Ці конференції стали регулярними і проводяться у Києві кожні два роки (1995, 1997, 1999, 2001, 2003 і 2005 рр.). Популярність їх постійно зростає. У Шостій конференції в 2005 році взяли участь 286 учасників з 39 країн. Детальну інформацію про конференцію розміщено на інтернет-сторінці http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html. Ці конференції є ще одним свідченням високого наукового авторитету В.І. Фущича у світі. Багато учасників конференцій пам'ятають Вільгельма Ілліча чи знають його роботи.

Вільгельм Ілліч передчасно залишив нас, але його ідеї, його доробки, його справи залишаються з нами. Одним з доказів цього є вихід збірника праць, присвячених його пам'яті, який Ви тримаєте в руках.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 9–30

УДК 517.912:512.816

Preliminary group classification of the general quasi-linear wave equation

P. BASARAB-HORWATH †, ***V. LAHNO*** ‡

† *Linköping University, Linköping, Sweden*
E-mail: pehor@mai.liu.se

‡ *Poltava State Pedagogical University, Ukraine*
E-mail: lvi@pdpu.poltava.ua

Розпочато групову класифікацію квазілінійного хвильового рівняння другого порядку найбільш загальної форми. Знайдено канонічні форми операторів симетрії, які генерують групу інваріантності рівняння, описано перетворення еквівалентності та рівняння, що допускають одно- та двовимірні групи інваріантності.

We begin the group classification of quasi-linear second-order wave equations of the most general form. We find the canonical forms for the symmetry operators which generate the invariance group of the equation, as well as the equivalence group, and we describe those equations which admit one- and two-dimensional invariance groups.

1. Introduction. The group classification of partial differential equations of mathematical physics occupies an important place among the fundamental problems of modern group analysis of differential equations [1–3]. The solution of this problem is of particular interest because one is able to exploit the powerful methods of Lie groups and algebras for the analysis and construction of solutions of equations that model physical processes and which possess non-trivial symmetry properties. The problem derives its importance from the need to choose a differential equation from some general class of differential equations modelling a process, which admit a non-trivial group symmetry. The history of the solution of the problem of group classification of differential equations begins with the work of Sophus Lie. The first article of Lie on this problem was [4]. The modern form of the group classification problem was formulated by Ovsiannikov in his article [5], in which he proposed a procedure for its solution (which we shall call the Lie–Ovsiannikov method) and where he obtained a complete classification of the non-linear heat conductivity equation. After this, the group classification of differential equations became the subject of intensive research. A detailed survey of the work done in this area up to the beginning of the 1990's is given in [6]. In the present article we solve the problem of group classification for non-linear wave equations of the form

$$u_{tt} = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x), \tag{1}$$

where $F \neq 0$, G are arbitrary smooth functions, $u = u(t, x)$. We note that differential equations of the form (1) are of great importance in mathematical physics and are used in modelling various types of dispersion of waves. They have found applications in differential geometry, hydrodynamics, gas dynamics, as well as in chemical engineering and superconductivity.

Many articles have been written on the subject of group classification of quasi-linear equations of the form (1). A complete solution of the problem of group classification of the general linear equation is given in [4, 7]. The method of Lie–Ovsiannikov has also been applied to give a full solution of the problem for a number of non-linear wave equations:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + F(u); && [8\text{–}11]\\
&u_{tt} = [f(u)u_x]_x\,; && [12, 13]\\
&u_{tt} = f(u_x)u_{xx}; && [14]\\
&u_{tt} = f(u_x)u_{xx} + G(u_x); && [15]\\
&u_{tt} = u_x^m u_{xx} + F(u); && [16]\\
&u_{tt} + f(u)u_t = [F(u)u_x]_x\,; && [17]\\
&u_{tt} + f(u)u_t = [F(u)u_x]_x + G(u)u_x. && [18]
\end{aligned}$$

As one can see, the equations listed above involve arbitrary functions of one variable. This is connected with the fact that the standard method of performing a group classification involves solving a defining system of equations for the symmetry operators, and for the equations listed above it is possible to solve these defining equations because the arbitrary elements are functions of just one variable. However, one is confronted with a different situation when these arbitrary functions are functions of two or more variables and the defining equations for the symmetry operators then involve first order partial derivatives of the functions which render difficult or even impossible the complete solution

of the defining system of equations. It is this which explains why the classification of the equations

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = [f(x, u)u_x]_x\,; && [19]\\
&u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x); && [20, 21]\\
&u_{tt} = [f(u_x)u_x + g(x, u)]_x\,; && [22\text{–}24]\\
&u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x) && [25]
\end{aligned}$$

is, in the classical sense of Lie, incomplete.

In the differential equations which we study, the arbitrary functions are functions of four variables, and therefore we shall use the method for the solution of the problem of the group classification which was described in [26] and was used in the group classification of the following equations:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x); && [26]\\
&u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x); && [27]\\
&u_t = u_{xxx} + F(t, x, u, u_x, u_{xx}); && [28]\\
&u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). && [29, 30]
\end{aligned}$$

A detailed description of the algorithmic method which we use may be found in [26, 27]. Here, we merely note that it differs from the classical method of group classification of differential equations in that we exploit all possible realizations of low-dimensional Lie algebras within the class of vector fields which are infinitesimal symmetries of the equation under study, and this also gives us further specification of the arbitrary functions. We also note that in performing the group classification of equation (1) we exclude all cases which are equivalent, under local changes of coordinates, to a linear equation or to

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). \tag{2}$$

2. Preliminary results of group classification of equation (1). Our first task is to determine the form of the vector fields which are symmetry operators for equation (1), and to determine the equivalence group of equation (1) (we define this concept later). We seek these symmetry operators amongst vector fields of the form

$$Q = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{3}$$

where $\tau(t,x,u)$, $\xi(t,x,u)$, $\eta(t,x,u)$ are smooth functions from $V=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. The variables $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ are said to be the independent variables, and $u=u(t,x)\in\mathbb{R}$ is said to be the dependent variable. The condition that such an operator (3) be a symmetry of equation (1) is that

$$\begin{aligned}&\phi^{tt}-\phi^{xx}F-(\tau F_t+\xi F_x+\eta F_u+\phi^x F_{u_x})u_{xx}-\\&\quad-(\tau G_t+\xi G_x+\eta G_u+\phi^x G_{u_x})\big|_{(1)}=0.\end{aligned}\tag{4}$$

By a standard but tedious calculation, equation (4) gives us the following initial information about the coefficients:

$$\begin{aligned}&\tau=a(t,x)u+b(t,x),\quad \xi=\xi(t,x),\\&\eta=a_t(t,x)u^2+c(t,x)u+d(t,x)\end{aligned}$$

where the functions $a(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$, $d(t,x)$, $\xi(t,x)$, F, G satisfy the system of equations

$$\begin{aligned}&\xi_t-(a_xu+b_x+au_x)F=0,\quad 2aF-(a_xu+b_x+au_x)F_{u_x}=0,\\&2\eta_{tu}-\tau_{tt}-3\tau_uG+(\tau_{xx}+2u_x\tau_{xu})F+(\tau_x+u_x\tau_u)G_{u_x}=0,\\&2(\xi_x-\tau_t)F-(\tau F_t+\xi F_x+\eta F_u)-[\eta_x+(\eta_u-\xi_x)u_x]F_{u_x}=0,\\&\eta_{tt}-u_x\xi_{tt}-[\eta_{xx}+(2\eta_{xu}-\xi_{xx})u_x+\eta_{uu}u_x^2)F-(2\tau_t-\eta_u)G-\\&\quad-(\tau G_t+\xi G_x+\eta G_u)-[\eta_x+(\eta_u-\xi_x)u_x]G_{u_x}=0.\end{aligned}\tag{5}$$

From the first two equations of (5) we find that, since $F\neq0$, then $a=0$. Further, we distinguish three cases: (1) $F_{u_x}\neq0$, (2) $F_{u_x}=0$, $F_u\neq0$, (3) $F_u=F_{u_x}=0$.

Case 1: $F_{u_x}\neq 0$. If $F_{u_x}\neq0$ then it follows from the first two equations of (5) that $\xi_t=b_x=0$ and the third equation then becomes $2c_t-b_{tt}=0$, from which we find that $c=\frac{1}{2}b_t+\theta(x)$. Then in (3) we have

$$\tau=b(t),\quad \xi=\xi(x),\quad \eta=\left(\frac{1}{2}b_t+\theta(x)\right)u+d(t,x)\tag{6}$$

and the functions τ, ξ, η, F, G satisfy the last two equations of (5).

Case 2: $F_{u_x}=0$, $F_u\neq 0$. If, in this case, $G_{u_xu_x}\neq0$ then we obtain the same result as in case 1. So, suppose that $G_{u_xu_x}=0$, which gives us $G=A(t,x,u)u_x+B(t,x,u)$ with A and B being arbitrary smooth functions. If $A=0$ then equation (1) becomes

$$u_{tt}=Fu_{xx}+B,\quad F_u\neq0\tag{7}$$

and in (3) we find

$$\begin{aligned}&\tau=b(t),\quad \xi=\xi(x),\\&\eta=\left[\tfrac{1}{2}(\tau_t+\xi_x)+k\right]u+d(t,x),\quad k\in\mathbb{R},\ k\neq0.\end{aligned}$$

If, on the other hand, $F=\lambda(x)A$, $\lambda(x)A_u\neq0$, then equation (1) becomes

$$u_{tt}=A[\lambda(x)u_{xx}+u_x]+B\tag{8}$$

and there is then a local change of coordinates $t'=t$, $x'=X(x)$, $u=v(t',x')$, $X_x\neq0$ with $\lambda X_{xx}+X_x=0$, which transforms (8) to a wave equation of the form (7). As is well-known (see [1]), from the group-theoretic point of view, such equations are deemed to be equivalent. Finally, if $F\neq\lambda(t,x)A$, $\lambda A\neq0$ or if $F=\lambda(t,x)A$, $\lambda A\neq0$, $\lambda_t\neq0$ then the invariance group of the corresponding wave equation (1) is generated by the operator (3) with τ, ξ, η satisfying (6).

Case 3: $F_{u_x}=F_u=0$, $F\neq0$. If, in equation (1) we have $G_{u_xu_x}\neq0$ or $G=A(t,x,u)u_x+B(t,x,u)$ with $A_u\neq0$ then the invariance group is generated by operators(3) with coefficients given by (6). This leaves us with the case when equation (1) is of the form

$$u_{tt}=F(t,x)u_{xx}+A(t,x)u_x+B(t,x,u).\tag{9}$$

It is well known from the general theory of partial differential equations that there are invertible changes of coordinates

$$t'=\alpha(t,x),\quad x'=\beta(t,x),\quad \frac{D(t',x')}{D(t,x)}\neq0$$

which transform the equation (9) either to an equation of hyperbolic type

$$v_{t't'}-v_{x'x'}=\tilde{A}(t',x')v_{x'}+\tilde{C}(t',x')v_{t'}+\tilde{B}(t',x',v)\tag{10}$$

or to an equation of elliptic type

$$v_{t't'}+v_{x'x'}=\tilde{A}(t',x')v_{x'}+\tilde{C}(t',x')v_{t'}+\tilde{B}(t',x',v).\tag{11}$$

However from the point of view of the local analytic theory with analytic coefficients, the elliptic type is equivalent to the hyperbolic type. Therefore there exist corresponding transformations in the complex domain which allow us to obtain equations (10) and (11) from each other. Further, the change of variables $y = t'$, $z = x'$, $\omega(y,z) = \Lambda(t',x')v$, $\Lambda \neq 0$ where

$$\Lambda = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\int \tilde{C}(t',x')dt'\right)$$

transforms equation (10) into an equation of the form

$$\omega_{yy} = \omega_{zz} + H(y,z)\omega_z + R(y,z,\omega).$$

This equation belongs to the class of equations (2) and therefore, as we noted earlier, we exclude it from our considerations. From the analysis carried out above, it now follows that, in order to solve our problem of group classification, we need consider only the following cases:

$$u_{tt} = F(t,x,u,u_x)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \quad F_{u_x} \neq 0, \tag{12}$$
$$u_{tt} = F(t,x,u,)u_{xx} + G(t,x,u,u_x), \quad F \neq 0, \quad G_{u_xu_x} \neq 0, \tag{13}$$
$$u_{tt} = F(t,x,u)u_{xx} + G(t,x,u,)u_x + H(t,x,u), \quad F_u \neq 0, \quad F \neq \lambda(t,x)G, \quad \lambda G \neq 0, \tag{14}$$
$$u_{tt} = F(t,x,u)[H(t,x)u_{xx} + u_x] + G(t,x,u), \quad F_u \neq 0, \quad H_t \neq 0, \tag{15}$$
$$u_{tt} = F(t,x)u_{xx} + G(t,x,u)u_x + H(t,x,u), \quad F \neq 0, \quad G_u \neq 0, \tag{16}$$
$$u_{tt} = F(t,x,u)u_{xx} + G(t,x,u), \quad F_u \neq 0. \tag{17}$$

The following result follows from the above considerations.

Proposition 1. *The invariance groups of equations* (12)–(16) *are generated by vector fields of the form*

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]\partial_u. \tag{18}$$

Further, for equations (12) *and* (13) *the functions* τ, ξ, θ, η, F, G *satisfy the system of equations*

$$\begin{aligned}
&2(\xi_x - \tau_t)F - (\tau F_t + \xi F_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right])F_u = \\
&\quad = \left[\theta_x u + \eta_x + u_x\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta - \xi_x\right)\right]F_{u_x}, \\
&\tfrac{1}{2}\tau_{ttt}u + \eta_{tt} - [\theta_{xx}u + \eta_{xx} + u_x(2\theta_x - \xi_{xx})]F - \left(\tfrac{3}{2}\tau_t - \theta\right)G - \\
&\quad - (\tau G_t + \xi G_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right])G_u = \\
&\quad = \left[\theta_x u + \eta_x + u_x\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta - \xi_x\right)\right]G_{u_x}.
\end{aligned} \tag{19}$$

For equation (14) *the functions* τ, ξ, θ, η, F, G, H *satisfy the system of equations*

$$\begin{aligned}
&(\xi_x - 2\tau_t)G + (\xi_{xx} - 2\theta_x)F - \big(\tau G_t + \xi G_x + \\
&\quad \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]G_u\big) = 0, \\
&2(\xi_x - \tau_t)F - \big(\tau F_t + \xi F_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]\big)F_u = 0, \\
&\tfrac{1}{2}\tau_{ttt}u + \eta_{tt} - [\theta_{xx}u + \eta_{xx}]F - (\eta_x + u\theta_x)G - \left(\tfrac{3}{2}\tau_t - \theta\right)H - \\
&\quad - \big(\tau H_t + \xi H_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta\right]\big)H_u = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

For equation (15) *the functions* τ, ξ, θ, η, F, G, H *satisfy the system of equations*

$$\begin{aligned}
&[2(\xi_x - \tau_t)H - \tau H_t - \xi H_x]F - \\
&\quad - \left\{\tau F_t + \xi F_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]F_u\right\}H = 0, \\
&(\xi_{xx} - 2\theta_x)HF - (2\tau_t - \xi_x)F - \\
&\quad - \left\{\tau F_t + \xi F_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]F_u\right\} = 0, \\
&\tfrac{1}{2}\tau_{ttt}u + \eta_{tt} - (\eta_{xx} + u\theta_{xx})HF - (u\theta_x + \eta_x)F - \left(\tfrac{3}{2}\tau_t - \theta\right)G - \\
&\quad - \left\{\tau G_t + \xi G_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]G_u\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

For equation (16) *the functions* τ, ξ, θ, η, F, G, H *satisfy the system of equations*

$$\begin{aligned}
&(\xi_{xx} - 2\theta_x)F - (2\tau_t - \xi_x)G - \\
&\quad - \left\{\tau G_t + \xi G_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]G_u\right\} = 0, \\
&2(\xi_x - \tau_t)F - \tau F_t - \xi F_x = 0, \\
&\tfrac{1}{2}\tau_{ttt}u + \eta_{tt} - (\eta_{xx} + u\theta_{xx})F - (u\theta_x + \eta_x)G - \left(\tfrac{3}{2}\tau_t - \theta\right)H - \\
&\quad - \left\{\tau H_t + \xi H_x + \left[\left(\frac{1}{2}\tau_t + \theta(x)\right)u + \eta(t,x)\right]H_u\right\} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

The general infinitesimal operator Q *of the invariance group of equation* (17) *is given by*

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}(\tau_t + \xi_x) + k\right)u + \eta(t,x)\right]\partial_u, \tag{23}$$

where the functions τ, ξ, η, F, G *and the constant* k *satisfy the system of equations*

$$2(\xi_x - \tau_t)F - \left(\tau F_t + \xi F_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}(\tau_t + \xi_x) +\right)u + \eta\right]F_u\right) = 0,$$

$$\eta_{tt} + \tfrac{1}{2}\tau_{ttt}u - \left(\tfrac{1}{2}\xi_{xxx}u + \eta_{xx}\right)F - \left(\tfrac{3}{2}\tau_t - \tfrac{1}{2}\xi_x - k\right)G - \\ - \left(\tau G_t + \xi G_x + \left[\left(\tfrac{1}{2}(\tau_t + \xi_x) + k\right)u + \eta(t,x)\right]G_u\right) = 0. \tag{24}$$

A direct calculation shows that when the equations (12)–(17) contain arbitrary functions then the equations do not possess any symmetries in the classical sense of Lie. In what follows, we shall carry out a group classification up to equivalence under the equivalence group (which we denote by $\mathcal{E}$) of the equation under consideration. The equivalence group $\mathcal{E}$ of a given equation consists of those transformations (of the space $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$) $t' = T(t,x,u)$, $x' = X(t,x,u)$, $v = U(t,x,u)$ which preserve the form of the differential equation (1), that is, transformations of the above type which transform (1) into an equation

$$v_{t't'} = \tilde{F}(t', x', v, v_{x'})v_{x'x'} + \tilde{G}(t', x', v, v_{x'}).$$

In order to determine the transformations of $\mathcal{E}$ one may use the infinitesimal method [31] or the direct method. These calculations are long but standard, and we give only their result.

Proposition 2. *The equivalence group $\mathcal{E}$ of equations* (12)–(16) *consist of the transformations*

$$t' = T(t), \quad x' = X(x), \quad v = U(x)\sqrt{|T_t|}u + Y(t,x) \tag{25}$$

with the condition $T_tX_xU \neq 0$ and with Y being an arbitrary function. The transformations of the equivalence group $\mathcal{E}$ of equation (17) *consist of the transformations*

$$t' = T(t), \quad x' = X(x), \quad v = \gamma\sqrt{|T_t|}\sqrt{|X_x|}u + Y(t,x) \tag{26}$$

with $\gamma T_tX_x \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, and

$$t' = T(x), \quad x' = X(t), \quad v = \gamma\sqrt{|T_t|}\sqrt{|X_x|}u + Y(t,x) \tag{27}$$

with $\gamma T_tX_x \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, and in both cases Y is an arbitrary function.

We now pass to the description of those nonlinear equations which are invariant under low-dimensional Lie algebras.

3. Invariance of equations under one-dimensional Lie algebras. As we showed above, when the functions F, G, H in equations (12)–(17) are allowed to be completely arbitrary, then the equations do not have any symmetry in the sense of Lie. For this reason we begin our classification of those equations which admit symmetries by looking at those

which are invariant under one-parameter groups of local transformations (which is equivalent to being invariant under one-dimensional Lie algebras). In order to do this, we first obtain all inequivalent realizations of one-dimensional Lie algebras.

3.1. Realizations of one-dimensional Lie algebras.

Theorem 1. *There exist transformations of the form* (25) *which transform the operator* (18) *into one of the following forms:*

$$Q = \partial_t, \quad Q = \partial_x, \quad Q = \partial_t + \partial_x, \\ Q = f(x)u\partial_u, \quad Q = g(t,x)\partial_u, \quad Q = \partial_t + f(x)u\partial_u,$$

where $f, g \neq 0$.

Proof. Applying the change of coordinates (25) we transform the operator (18) into one of the form

$$\tilde{Q} = \tau T_t\partial_{t'} + \xi X_x\partial_{x'} + \Big\{\Big[\tfrac{1}{2}\epsilon\tau|T|^{-1/2}T_{tt}U + \xi|T_t|^{1/2}U_x + \\ + \left(\tfrac{1}{2}\tau_t + \theta\right)|T_t|^{1/2}U\Big]u + \tau Y_t + \xi Y_x + \eta|T_t|^{1/2}U\Big\}\partial_v, \tag{28}$$

where $\epsilon = 1$ if $T_t > 0$ and $\epsilon = -1$ if $T_t < 0$. We now consider three cases: (1) $\tau \neq 0$, (2) $\tau = 0$, $\xi \neq 0$, (3) $\tau = \xi = 0$.

Case 1: $\tau \neq 0$. Putting $T_t = \tau^{-1}$ in (25) we make the coefficient of $\partial_{t'}$ equal to one. If we also have $\xi \neq 0$ then we may put $X_x = \xi^{-1}$. We also choose U to be a non-trivial solution of $\xi U_x + \theta U = 0$, and Y is taken as a solution of the equation $\tau Y_t + \xi Y_x + \eta|\tau|^{-1/2}U = 0$. In this way we transform the operator given in (28) into the operator

$$\tilde{Q} = \partial_{t'} + \partial_{x'}. \tag{29}$$

If, however, $\xi = 0$, $\theta \neq 0$ then, putting Y equal to a solution of

$$\tau Y_t + \eta|\tau|^{-1/2}U = 0,$$

the transformation (25) takes the operator Q into

$$\tilde{Q} = \partial_{t'} + \theta(x')v\partial_v. \tag{30}$$

If $\xi = \theta = 0$ then, in the same way, we may transform Q into

$$\tilde{Q} = \partial_{t'}. \tag{31}$$

Case 2: $\tau = 0$, $\xi \neq 0$**.** Put $X_x = \xi^{-1}$ in (25) and choose U to be a non-trivial solution of $\xi U_x + \theta U = 0$ and we choose Y to be a solution of $\xi Y_x + \eta |T_t|^{1/2} U = 0$. This then takes Q into the operator

$$\tilde{Q} = \partial_{x'}. \tag{32}$$

Case 3: $\tau = \xi = 0$**.** If $\theta \neq 0$ in (18) then we put $T = t$, $Y = \theta^{-1}\eta U$ in (25) and the operator (28) becomes

$$\tilde{Q} = \theta(x')v\partial_v. \tag{33}$$

If we have $\theta = 0$ in (18) then $\eta \neq 0$ and we obtain the operator

$$\tilde{Q} = \tilde{\eta}(t', x')\partial_v. \tag{34}$$

The forms of the operator $\tilde{Q}$ obtained in (29)–(34) is, apart from the notation, that given in the statement of the theorem. All that remains to be done is to verify that these different forms are inequivalent under the action of transformations (25). We show this for the case of the operators $Q_1 = \partial_t$ and $Q_2 = \partial_t + f(x)u\partial_u$, and the other cases are treated in the same way. First, we assume that there is a transformation of the form (25) which takes Q_1 into $\tilde{Q} = \partial_{t'} + \tilde{f}(x')v\partial_v$. Then this implies that we must have $f = 0$ which contradicts the requirement for Q_2. This completes the proof.

Theorem 2. *There exist transformations of the type* (26), (27) *which transform the operator* (23) *into one of the following:*

$$Q = \partial_t + \partial_x, \quad Q = \partial_t, \quad Q = \partial_t + \partial_x + u\partial_u,$$
$$Q = \partial_t + u\partial_u, \quad Q = u\partial_u, \quad Q = g(t,x)\partial_u, \quad g \neq 0.$$

The proof is carried out in the same way as that of Theorem 1.

It follows from these two theorems that, in the classes (18) and (23) of operators, there exist six inequivalent (with respect to the equivalence group of our partial differential equation) types of one-dimensional Lie algebras $A_1 = \langle e_1 \rangle$. We list these below, using a notation which we shall use in the rest of this paper.

One-dimensional Lie algebras of operators of type (18).

$$A_1^1 = \langle \partial_t + \partial_x \rangle, \quad A_1^2 = \langle \partial_t \rangle, \quad A_1^3 = \langle \partial_x \rangle, \quad A_1^4 = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u \rangle,$$
$$A_1^5 = \langle f(x)u\partial_u \rangle, \quad A_1^6 = \langle g(t,x)\partial_u \rangle, \quad f, g \neq 0.$$

One-dimensional Lie algebras of operators of type (23).

$$\tilde{A}_1^1 = \langle \partial_t + \partial_x \rangle, \quad \tilde{A}_1^2 = \langle \partial_t \rangle, \quad \tilde{A}_1^3 = \langle \partial_t + \partial_x + u\partial_u \rangle,$$
$$\tilde{A}_1^4 = \langle \partial_t + u\partial_u \rangle, \quad \tilde{A}_1^5 = \langle u\partial_u \rangle, \quad \tilde{A}_1^6 = \langle g(t,x)\partial_u \rangle, \quad g \neq 0.$$

3.2. Equations invariant under one-dimensional Lie algebras. We now have to determine for each of the above realizations whether the given operator is an admissible symmetry operator (that is, if there is a wave equation which is invariant under a given realization). To do this we use the system of determining equations Proposition 1. Since the procedure of constructing A_1-invariant equations reduces to integrating systems of first-order partial differential equations, we do not give details: we merely make some remarks and then give a list of our results. All the realizations A_1^i $(i = 1, \ldots, 6)$ are invariance algebras only for equations of the form (12). For equations of the form (13), substituting the values of the coefficients τ, ξ, θ, η in the realizations A_1^5 and A_1^6 into the system (19) leads to the equality $F_u = 0$, which contradicts the condition placed on the equation. We arrive at the same result when we examine these realizations for the equations (14) and (15). For equation (15) we also find that the condition of its invariance under A_1^2 leads to $H_t = 0$, which contradicts the condition placed on the equation. Finally, for equation (16) the invariance under A_1^6 leads to $G_u = 0$, as follows from the second equation in (22). This contradicts the requirements placed on the equation. The realizations $\tilde{A}_1^5$ and $\tilde{A}_1^6$ cannot be invariance algebras of equation (17) since the first equation of the system (24) gives $F_u = 0$ which is a contradiction. Below we give a list of all A_1-invariant equations, and we give the realization of the algebras A_1 which is an invariance algebra of the corresponding equation, and we give the corresponding forms of the functions F, G, H.

A_1-invariant equations of type (12).

$$A_1^1: \ F = \tilde{F}(z, u, u_x), \quad G = \tilde{G}(z, u, u_x), \quad z = t - x, \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_1^2: \ F = \tilde{F}(x, u, u_x), \quad G = \tilde{G}(x, u, u_x), \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_1^3: \ F = \tilde{F}(t, u, u_x), \quad G = \tilde{G}(t, x, u_x), \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_1^4: \ G = u\tilde{G}(x, v, \omega) - f^{-1}[f'' u \ln|u| + 2f' u_x \ln|u| -$$
$$- (f')^2 f^{-1} u \ln^2|u|]\tilde{F}, \quad F = \tilde{F}(x, v, \omega),$$
$$v = u\exp(-tf), \quad \omega = u^{-1}u_x - f^{-1}f' \ln|u|, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$

$A_1^5:$ $G = u\tilde{G}(t,x,\omega) - f^{-1}[f''u\ln|u| + 2f'u_x\ln|u| -$
$-(f')^2 f^{-1}u\ln^2|u|]\tilde{F}, \quad F = \tilde{F}(t,x,\omega), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0,$
$\omega = u^{-1}u_x - f^{-1}f'\ln|u|;$

$A_1^6:$ $F = \tilde{F}(t,x,\omega), \quad G = \tilde{G}(t,x,\omega) - g^{-1}g_{xx}u\tilde{F} + g^{-1}g_{tt}u,$
$\omega = gu_x - g_x u, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0.$

A_1-invariant equations of type (13).

$A_1^1:$ $F = \tilde{F}(z,u), \quad G = \tilde{G}(z,u,u_x), \quad z = t - x, \quad \tilde{F}_u \neq 0;$

$A_1^2:$ $F = \tilde{F}(x,u,), \quad G = \tilde{G}(x,u,u_x), \quad \tilde{F}_u \neq 0;$

$A_1^3:$ $F = \tilde{F}(t,u,), \quad G = \tilde{G}(t,u,u_x), \quad \tilde{F}_u \neq 0;$

$A_1^4:$ $G = u\tilde{G}(x,v,\omega) - f^{-1}[f''u\ln|u| + 2f'u_x\ln|u| -$
$-(f')^2 f^{-1}u\ln^2|u|]\tilde{F}, \quad F = \tilde{F}(x,\omega),$
$\omega = u\exp(-tf), \quad v = u^{-1}u_x - f^{-1}f'\ln|u|, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0.$

A_1-invariant equations of type (14).

$A_1^1:$ $F = \tilde{F}(z,u), \quad G = \tilde{G}(z,u), \quad H = \tilde{H}(z,u),$
$z = t - x, \quad \tilde{F}_u \neq 0, \quad \tilde{F} \neq \lambda(z)\tilde{G}, \quad \lambda(z)\tilde{G} \neq 0;$

$A_1^2:$ $F = \tilde{F}(x,u), \quad G = \tilde{G}(x,u), \quad H = \tilde{H}(x,u),$
$\tilde{F}_u \neq 0, \quad \tilde{F} \neq \lambda(x)\tilde{G}, \quad \lambda(x)\tilde{G} \neq 0;$

$A_1^3:$ $F = \tilde{F}(t,u), \quad G = \tilde{G}(t,u), \quad H = \tilde{H}(t,u),$
$\tilde{F}_u \neq 0, \quad \tilde{F} \neq \lambda(t)\tilde{G}, \quad \lambda(t)\tilde{G} \neq 0;$

$A_1^4:$ $F = \tilde{F}(x,\omega), \quad G = \tilde{G}(x,\omega) - 2f'f^{-1}\ln|u|\tilde{F},$
$H = u\tilde{H}(x,\omega) + (f')^2 f^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} - f'f^{-1}u\ln|u|\tilde{G} -$
$-f''f^{-1}u\ln|u|\tilde{F}, \quad \omega = u\exp(-tf), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$
if $f' = 0$ then $\tilde{F} \neq \lambda(x)\tilde{G}, \quad \lambda(x)\tilde{G} \neq 0.$

A_1-invariant equations of type (15).

$A_1^1:$ $F = \tilde{F}(z,u), \quad G = \tilde{G}(z,u), \quad H = \tilde{H}(z),$
$z = t - x, \quad \tilde{F}_u \neq 0, \quad \tilde{H}_z \neq 0;$

$A_1^3:$ $F = \tilde{F}(t,u,), \quad G = \tilde{G}(t,u), \quad H = \tilde{H}(t), \quad \tilde{F}_u \neq 0, \quad \tilde{H}_t \neq 0;$

$A_1^4:$ $F = \tilde{F}(x,\omega)[\tilde{H}(x) - 2tf'], \quad H = [\tilde{H}(x) - 2tf']^{-1},$
$G = e^{tf}\tilde{G}(x,\omega) + u\tilde{F}\left[\frac{1}{4}(H - 2tf')^2 - tf''\right],$
$\omega = u\exp(-tf), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0, \quad f' \neq 0.$

A_1-invariant equations of type (16).

$A_1^1:$ $F = \tilde{F}(z), \quad G = \tilde{G}(z,u), \quad H = \tilde{H}(z,u),$
$z = t - x, \quad \tilde{G}_u \neq 0;$

$A_1^2:$ $F = \tilde{F}(x), \quad G = \tilde{G}(x,u), \quad H = \tilde{H}(x,u), \quad \tilde{G}_u \neq 0;$

$A_1^3:$ $F = \tilde{F}(t), \quad G = \tilde{G}(t,u), \quad H = \tilde{H}(t,u), \quad \tilde{G}_u \neq 0;$

$A_1^4:$ $F = \tilde{F}(x), \quad G = \tilde{G}(x,\omega) - 2f'f^{-1}\ln|u|\tilde{F},$
$H = u\tilde{H}(x,\omega) + (f')^2 f^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} - f'f^{-1}u\ln|u|\tilde{G} -$
$-f''f^{-1}u\ln|u|\tilde{F}, \quad \omega = u\exp(-tf);$
$\tilde{G}$ is arbitrary if $f' \neq 0$; $\tilde{G}_\omega \neq 0$ if $f' = 0$.

$A_1^5:$ $F = \tilde{F}(t,x), \quad G = \tilde{G}(t,x) - 2f'f^{-1}\ln|u|\tilde{F},$
$H = u\tilde{H}(t,x) - f''f^{-1}u\ln|u|\tilde{F} + (f')^2 f^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} -$
$-f'f^{-1}u\ln|u|\tilde{G}, \quad f' \neq 0.$

A_1-invariant equations of type (17).

$\tilde{A}_1^1:$ $F = \tilde{F}(z,u), \quad G = \tilde{G}(z,u), \quad z = t - x, \quad \tilde{F}_u \neq 0;$

$\tilde{A}_1^2:$ $F = \tilde{F}(x,u), \quad G = \tilde{G}(x,u), \quad \tilde{F}_u \neq 0;$

$\tilde{A}_1^3:$ $F = \tilde{F}(z,\omega), \quad G = e^t\tilde{G}(z,\omega),$
$z = t - x, \quad \omega = u\exp(-t), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$

$\tilde{A}_1^4:$ $F = \tilde{F}(x,\omega), \quad G = e^t\tilde{G}(x,\omega), \quad \omega = u\exp(-t), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0.$

We note that in the above lists, $f' = \frac{df}{dx}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$. Also, we note that the Lie algebras given are the maximal invariance algebras of the corresponding equations when the functions $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ are arbitrary.

4. Invariance of equations under two-dimensional Lie algebras. It is well-known (see [32]) that there are, up to isomorphism, only two Lie algebras $A_2 = \langle e_1, e_2\rangle$ of dimension two:

$$A_{2.1}: \quad [e_1, e_2] = 0; \quad A_{2.2}: \quad [e_1, e_2] = e_2.$$

In order to obtain a full list of non-linear equations (1) which are invariant under two-dimensional Lie algebras, we must first construct all possible inequivalent realizations of the Lie algebras $A_{2.1}$ and $A_{2.2}$ in the class of operators (18) and (23). Then we must use the defining system of equations (19)–(22) and (22) in order to pick out those realizations which are invariance algebras for equations of the given type (1). To carry out this construction, we are able to exploit the results of Theorems 1 and 2, which allow us to choose one of the operators of the two-dimensional Lie algebras in one of the canonical forms given in these results.

4.1. $A_{2.1}$-invariant equations. The Lie algebra $A_{2.1}$ is Abelian, so we just add one more operator of the form (18) or (23) which commutes with the first operator chosen from amongst the canonical forms. We do this for the canonical form A_1^1. In this case we put $e_1 = \partial_t + \partial_x$, and we let the operator e_2 have the form (18). Then the commutation relation $[e_1, e_2] = 0$ gives us

$$e_2 = c_1\partial_t + c_2\partial_x + (c_3 u + \eta(z))\partial_u, \tag{35}$$

where $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $z = t - x$. To give the operator (35) a canonical form we use the subgroup Φ of the equivalence group $\mathcal{E}$ (given by (25)) which maps e_1 to $\lambda e_1'$ with $e_1' = \partial_{t'} + \partial_{x'}$ for some arbitrary choice of constant $\lambda \neq 0$. This is allowed because the commutation relation $[e_1, e_2] = 0$ is preserved. A straightforward calculation gives us the following form of the allowed transformation:

$$t' = \lambda t + \lambda_1, \quad x' = \lambda x + \lambda_2, \quad v = \lambda_3\sqrt{|\lambda|}u + Y(z), \tag{36}$$

where $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $z = t - x$, $\lambda, \lambda_3 \neq 0$. Applying this transformation, we obtain the following possible forms for e_2:

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad \partial_t + u\partial_u, \quad \partial_x + u\partial_u, \quad u\partial_u, \quad g(z)\partial_u,$$

with $g \neq 0$. The extra factor λ gives us flexibility in our calculations so that no other arbitrary constants arise in the canonical forms for e_2. We then have the following forms for the algebra $A_{2.1}$:

$$\langle\partial_t, \partial_x\rangle, \quad \langle\partial_t + \partial_x, u\partial_u\rangle, \quad \langle\partial_t + \partial_x, g(z)\partial_u\rangle, \quad \langle\partial_t + \partial_x, \partial_t + u\partial_u\rangle,$$

where $g \neq 0$, $z = t - x$. Note that the two algebras $\langle\partial_t + \partial_x, \partial_t\rangle$ and $\langle\partial_t + \partial_x, \partial_x\rangle$ are both the same as $\langle\partial_t, \partial_x\rangle$. The other cases are treated in the same manner, and we find the following realizations of the algebras $A_{2.1}^i$ in the class of operators (18):

$$A_{2.1}^1 = \langle\partial_t, \partial_x\rangle; \quad A_{2.1}^2 = \langle\partial_t + \partial_x, u\partial_u\rangle;$$
$$A_{2.1}^3 = \langle\partial_t + \partial_x, \partial_t + u\partial_u\rangle;$$
$$A_{2.1}^4 = \langle\partial_t + \partial_x, g(z)\partial_u\rangle, \quad z = t - x, \ g \neq 0; \quad A_{2.1}^5 = \langle\partial_t, \partial_u\rangle;$$
$$A_{2.1}^6 = \langle\partial_x, \partial_t + u\partial_u\rangle; \quad A_{2.1}^7 = \langle\partial_x, u\partial_u\rangle; \quad A_{2.1}^8 = \langle\partial_x, \partial_u\rangle;$$
$$A_{2.1}^9 = \langle\partial_t, f(x)u\partial_u\rangle, \quad f \neq 0;$$
$$A_{2.1}^{10} = \langle\partial_t + f(x)u\partial_u, e^{tf}\partial_u\rangle, \quad f \neq 0;$$
$$A_{2.1}^{11} = \langle\partial_t + f(x)u\partial_u, h(x)u\partial_u\rangle, \quad fh' - f'h \neq 0;$$
$$A_{2.1}^{12} = \langle g(t,x)\partial_u, h(t,x)\partial_u\rangle;$$
$$A_{2.1}^{13} = \langle f(x)u\partial_u, h(x)u\partial_u\rangle, \quad fh' - f'h \neq 0.$$

In the realization of $A_{2.1}^{12}$ the functions h, g are linearly independent (with respect to at least one of the arguments).

The next step is to check whether these realizations can be invariance algebras for equations (12)-(16). We find that all the realizations except $A_{2.1}^{13}$ are invariance algebras for equations of the form given in (12).

$A_{2.1}$-invariant equations of the form (12).

$$A_{2.1}^1: \ F = \tilde{F}(u, u_x), \quad G = \tilde{G}(u, u_x), \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_{2.1}^2: \ F = \tilde{F}(z, \omega), \quad G = u\tilde{G}(z, \omega), \quad z = t - x,$$
$$\omega = u^{-1}u_x, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$
$$A_{2.1}^3: \ F = \tilde{F}(v, \omega), \quad G = e^z\tilde{G}(v, \omega), \quad v = u\exp(-z),$$
$$\omega = u^{-1}u_x, \quad z = t - x, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$
$$A_{2.1}^4: \ F = \tilde{F}(z, \omega), \quad G = \tilde{G}(z, \omega) - g^{-1}g''u\tilde{F} + ug^{-1}g'',$$
$$g = g(z) \neq 0, \quad z = t - x, \quad \omega = gu_x + g'u, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$
$$A_{2.1}^5: \ F = \tilde{F}(x, u_x), \quad G = \tilde{G}(x, u_x), \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_{2.1}^6: \ F = \tilde{F}(v, \omega), \quad G = u\tilde{G}(v, \omega),$$
$$v = u\exp(-t), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$
$$A_{2.1}^7: \ F = \tilde{F}(t, \omega), \quad G = u\tilde{G}(t, \omega), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \tilde{F}_\omega \neq 0;$$
$$A_{2.1}^8: \ F = \tilde{F}(t, u_x), \quad G = \tilde{G}(t, u_x), \quad \tilde{F}_{u_x} \neq 0;$$
$$A_{2.1}^9: \ F = \tilde{F}(x, \omega), \quad \omega = u^{-1}u_x - f^{-1}f'\ln|u|,$$

$$\tilde F_\omega \neq 0, \quad G = u\tilde G(x,\omega) - f^{-1}[f'' u \ln|u| + 2f' u_x \ln|u| - (f')^2 f^{-1} u \ln|u|]\tilde F;$$

$A^{10}_{2.1}$: (1) $f = 1, \quad F = \tilde F(x,\omega), \quad G = u + e^t \tilde G(x,\omega), \quad \omega = e^{-t} u_x, \quad \tilde F_\omega \neq 0;$

(2) $f = x, \quad F = \tilde F(x,\omega), \quad \tilde F_\omega \neq 0, \quad \omega = [u^{-1}u_x - x^{-1}\ln|u| - t^{-2}x\ln|u| - 2t + x^{-1}]u\exp(-tx),$

$$G = e^{tx}\tilde G(x,\omega) + ux^2 + u[-4t^3 x \ln|u| - t^4 x^2 \ln^2|u| - 5t^2 - 2tu^{-1}u_x \ln|u| + 2tx^{-1}\ln^2|u| + 2t^3 x \ln^2|u| + 6t^2\ln|u| - 2tx^{-1}\ln|u| + 6tx^{-1} - 2x^{-2} - 2x^{-1}u^{-1}u_x \ln|u| + x^{-2}\ln^2|u|]\tilde F;$$

$A^{11}_{2.1}$: (1) $f = 1, \quad h' \neq 0, \quad F = \tilde F(x,\omega), \quad \tilde F_\omega \neq 0,$

$$\omega = u^{-1}u_x + (h^7 - 1)h' t \ln|u|,$$

$$G = u\tilde G(x,\omega) + h^{-1}u[th''\ln|u| + 2h^{-1}(h')^2 u - 2h' u_x]\tilde F;$$

(2) $f = x, \quad h \neq 0, \quad \lambda x \ (\lambda \neq 0),$

$$F = \tilde F(x,\omega), \quad \omega = u^{-1}u_x - (x^{-1} - txh'h^{-1} + t)\ln|u|,$$

$$G = u\tilde G(x,\omega) + h^{-1}u[(2x^{-1}h' - h^{-1}(h')^2 - hx^{-2})\ln|v| - h'' + 2(x^{-1}h - h')\omega]\ln|v|\tilde F + [x^{-2}u\ln^2|u| - 2x^{-1}u_x\ln|u|]\tilde F, \quad v = u\exp(-tx), \quad \tilde F_\omega \neq 0;$$

$A^{12}_{2.1}$: $g = 1, \quad h = t, \quad F = \tilde F(t,x,u_x), \quad G = \tilde G(t,x,u_x), \quad \tilde F_{u_x} \neq 0.$

In constructing those $A_{2.1}$-invariant equations of the form (13) and (14), we have used the fact that there are no realizations of A^5_1 and A^6_1 which can be symmetry algebras. This allows us to shorten the list of realizations of the algebras of type $A_{2.1}$ to just three: $A^1_{2.1}$, $A^3_{2.1}$, $A^6_{2.1}$. All these algebras are in fact symmetry algebras of equations of type (13) and (14).

$A_{2.1}$-invariant equations of the type (13).

$A^1_{2.1}$: $F = \tilde F(u), \quad G = \tilde G(u,u_x), \quad \tilde F_u \neq 0;$

$A^3_{2.1}$: $F = \tilde F(v), \quad G = e^z\tilde G(v,\omega), \quad \tilde F_v \neq 0, \quad v = u\exp(-z), \quad z = t - x, \quad \omega = u^{-1}u_x;$

$A^6_{2.1}$: $F = \tilde F(\omega), \quad G = u\tilde G(v,\omega), \quad \tilde F_\omega \neq 0, \quad \omega = ue^{-t}, \quad v = u^{-1}u_x.$

$A_{2.1}$-invariant equations of the type (14).

$A^1_{2.1}$: $F = \tilde F(u), \quad G = \tilde G(u), \quad H = \tilde H(u), \quad \tilde F_u \neq 0, \quad \tilde F \neq \tilde G, \quad \tilde G \neq 0;$

$A^3_{2.1}$: $F = \tilde F(\omega), \quad G = \tilde G(\omega), \quad H = e^z\tilde H(\omega), \quad \tilde F_\omega \neq 0, \quad \tilde F \neq \tilde G, \quad \tilde G \neq 0, \quad \omega = u\exp(-z), \quad z = t - x, \quad \omega = u^{-1}u_x;$

$A^6_{2.1}$: $F = \tilde F(\omega), \quad G = u\tilde G(\omega), \quad H = u\tilde H(\omega), \quad \tilde F_\omega \neq 0, \quad \tilde F \neq \tilde G, \quad \tilde G \neq 0, \quad \omega = ue^{-t}.$

There are no $A_{2.1}$-invariant equations of type (15). First, there are none which are invariant under A^2_1, A^5_1, A^6_1. This then narrows the number of those which are left in the list of $A_{2.1}$ algebras down to just two: $A^3_{2.1}$ and $A^6_{2.1}$. Then we use the system of defining equations (21) and find that requiring $A^3_{2.1}$ invariance leads to $\tilde H_z = 0$, which contradicts the conditions of (15); the defining system (21) also leads to $f' = 0$ when testing the algebra $A^6_{2.1}$, and this contradicts the condition on f. The same type of procedure is used for examining the symmetry algebras for equation (16): there are just five such equations which are invariant under $A_{2.1}$.

$A_{2.1}$-invariant equations of type (16).

$A^1_{2.1}$: $F = \lambda, \quad G = \tilde G(u), \quad H = \tilde H(u), \quad \tilde G' \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_*;$

$A^3_{2.1}$: $F = \lambda, \quad G = \tilde G(\omega), \quad H = e^z\tilde H(\omega), \quad \tilde G' \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_*, \quad z = t - x, \quad \omega = ue^{-z};$

$A^6_{2.1}$: $F = \lambda, \quad G = \tilde G(\omega), \quad H = e^t\tilde H(\omega), \quad \tilde G' \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_*, \quad \omega = ue^{-t};$

$A^9_{2.1}$: $F = \tilde F(x), \quad G = \tilde G(x) - 2f'f^{-1}\tilde F\ln|u|,$

$$H = u\tilde H(x) - f''f^{-1}u\ln|u|\tilde F + (f')^2 f^{-2}u\ln^2|u|\tilde F - f'f^{-1}u\ln|u|\tilde G, \quad \tilde F \neq 0, \quad f' \neq 0;$$

$A^{11}_{2.1}$: (1) $f = 1, \quad h' \neq 0; \quad F = \tilde F(x) \neq 0,$

$$G = \tilde{G}(x) + 2h'h^{-1}t\ln|u|\tilde{F},$$
$$H = u\tilde{H}(x) + t^2h^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} + th''h^{-1}u\ln|u|\tilde{F} +$$
$$+ th'h^{-1}u\ln|u|\tilde{G};$$
$$(2)\ f = x, \quad h \neq 0, \quad F = \tilde{F}(x) \neq 0,$$
$$G = \tilde{G}(x) - 2h^{-1}(x^{-1}h - h')tx\ln|u|\tilde{F} - 2x^{-1}\ln|u|\tilde{F},$$
$$H = u\tilde{H}(x) + x^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} - x^{-1}u\ln|u|\tilde{G} +$$
$$+ 2th^{-1}(x^{-1}h - h')u\ln^2|u|\tilde{F} + t^2u\ln^2|u|\tilde{F} -$$
$$- tu\ln|u|\tilde{G} - x^2t^3h'h^{-1}u\ln^2|u|\tilde{F} - txh^{-1}h''u\ln|u|\tilde{F} -$$
$$- t^2x^2(h')^2h^{-2}u\ln^2|u|\tilde{F} + txh^{-1}h'u\ln|u|\tilde{G}.$$

We are now left with the case of $A_{2.1}$-invariant equations of type (17). Having constructed realizations of $A_{2.1}$ in the class of operators (23), and then testing them as symmetry algebras for equations of type (17), we find only three algebras:

$$\tilde{A}^1_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_x \rangle, \quad \tilde{A}^2_{2.1} = \langle \partial_t, \partial_x + u\partial_u \rangle,$$
$$\tilde{A}^3_{2.1} = \langle \partial_t + u\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle.$$

$\tilde{A}_{2.1}$-invariant equations of type (17).

$$\tilde{A}^1_{2.1}: \ F = \tilde{F}(u), \quad G = \tilde{G}(u), \quad \tilde{F}' \neq 0;$$
$$\tilde{A}^2_{2.1}: \ F = \tilde{F}(\omega), \quad G = e^x\tilde{G}(\omega), \quad \tilde{F}' \neq 0, \quad \omega = ue^{-x};$$
$$\tilde{A}^3_{2.1}: \ F = \tilde{F}(\omega), \quad G = e^{(t+x)}\tilde{G}(\omega), \quad \tilde{F}' \neq 0, \quad \omega = ue^{-(t+x)}.$$

4.2. $A_{2.2}$-invariant equations. As in the case of the $A_{2.1}$-invariant equations, we must first construct all possible inequivalent algebras $A_{2.2}$ in the classes of operators (18) and (23) which do not contain $\tilde{A}^5_1$ or $\tilde{A}^6_1$ as subalgebras (or algebras equivalent to them). In carrying out our construction, we begin with the results of Theorems 1 and 2, according to which we choose one of the basis operators of $A_{2.2}$ (we choose the basis operator e_2 for this) in one of the canonical forms given in these theorems. The calculations are similar to those involved in the construction of the algebras $A_{2.1}$ so we do not dwell on the calculations for this case, and we merely give the list of realizations.

Realizations of the algebras $A_{2.2}$ in the classes of operators (18).

$$A^1_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + \partial_x \rangle;$$

$$A^2_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u, \partial_t + \partial_x \rangle;$$
$$A^3_{2.2} = \langle -t\partial_t + ku\partial_u, \partial_t \rangle; \quad A^4_{2.2} = \langle -t\partial_t + xu\partial_u, \partial_t \rangle;$$
$$A^5_{2.2} = \langle -t\partial_t, \partial_t \rangle; \quad A^6_{2.2} = \langle -t\partial_t + \partial_u, \partial_t \rangle;$$
$$A^7_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t \rangle; \quad A^8_{2.2} = \langle -x\partial_x + ku\partial_u, \partial_x \rangle \ (k \neq 0);$$
$$A^9_{2.2} = \langle -x\partial_x + \partial_u, \partial_x \rangle; \quad A^{10}_{2.2} = \langle -x\partial_x, \partial_x \rangle;$$
$$A^{11}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x \rangle;$$
$$A^{12}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u, \partial_x \rangle \ (k \neq 0);$$
$$A^{13}_{2.2} = \langle -t\partial_t + x\partial_x, \partial_t + xu\partial_u \rangle; \quad A^{14}_{2.2} = \langle x\partial_x, xu\partial_u \rangle;$$
$$A^{15}_{2.2} = \langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u \rangle;$$
$$A^{16}_{2.2} = \langle \partial_t + \partial_x, e^tg(z)\partial_u \rangle, \quad z = t - x, \ g \neq 0;$$
$$A^{17}_{2.2} = \langle \partial_t, e^t\partial_u \rangle; \quad A^{18}_{2.2} = \langle \partial_x, e^x\partial_u \rangle;$$
$$A^{19}_{2.2} = \langle \partial_t + u\partial_u, e^{2t}\partial_u \rangle; \quad A^{20}_{2.2} = \langle \partial_t + xu\partial_u, e^{(1+x)t}\partial_u \rangle;$$
$$A^{21}_{2.2} = \langle -u\partial_u, \partial_t, g(t,x)\partial_u \rangle, \ g \neq 0.$$

Realizations of the algebras $A_{2.2}$ in the class of operators (23). In this list we do not include those realizations which contain one-dimensional subalgebras equivalent to $\tilde{A}^5_1$, $\tilde{A}^6_1$. We have:

$$\tilde{A}^1_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u, \partial_t + \partial_x \rangle, \ m \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{A}^2_{2.2} = \langle -t\partial_t + \partial_u, \partial_t \rangle; \quad \tilde{A}^3_{2.2} = \langle -t\partial_t + mu\partial_u, \partial_t \rangle;$$
$$\tilde{A}^4_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u, \partial_t \rangle, \ m \in \mathbb{R}.$$

We remark that when we construct $A_{2.2}$-invariant equations, we put $k = m + 1$ in the system (24) for the realizations of $\tilde{A}^1_{2.2}$, $\tilde{A}^3_{2.2}$, $\tilde{A}^4_{2.2}$. Further, we use only those algebras which do not contain subalgebras equivalent to A^2_1, A^5_1, A^6_1. There are eight such algebras: $A^1_{2.2}$, $A^2_{2.2}$, $A^8_{2.2}$, $A^9_{2.2}$, $A^{10}_{2.2}$, $A^{11}_{2.2}$, $A^{12}_{2.2}$, $A^{13}_{2.2}$. Then, substituting $A^8_{2.2}$, $A^9_{2.2}$, $A^{10}_{2.2}$ into (21), we find that $HF = 0$, which is a contradiction. All the other algebras are invariance algebras of equations of the form (15).

$A_{2.2}$-invariant equations of type (15).

$$A^1_{2.2}: \ F = z^{-1}\tilde{F}(\omega), \quad H = \lambda z \quad G = |z|^{-3/2}\tilde{G}(\omega),$$
$$\tilde{F}' \neq 0, \quad z = t - x, \quad \omega = |z|^{-1/2}u, \quad \lambda \neq 0,$$
$$A^2_{2.2}: \ F = z^{-1}\tilde{F}(\omega), \quad H = \lambda z \quad G = |z|^{k-3/2}\tilde{G}(\omega),$$

$$\tilde F' \neq 0,\quad z = t - x,\quad \omega = |z|^{k-1/2}u,\quad \lambda k \neq 0,$$

$$A^{11}_{2.2}:\ F = t^{-1}\tilde F(\omega),\quad H = \lambda t\quad G = |t|^{-3/2}\tilde G(\omega),$$
$$\tilde F' \neq 0,\quad \omega = |t|^{-1/2}u,\quad \lambda \neq 0,$$

$$A^{12}_{2.2}:\ F = t^{-1}\tilde F(\omega),\quad H = \lambda t\quad G = |t|^{k-3/2}\tilde G(\omega),$$
$$\tilde F' \neq 0,\quad \omega = |t|^{k-1/2}u,\quad \lambda k \neq 0,$$

$$A^{13}_{2.2}:\ F = x^3(\lambda - 2tx)\tilde F(\omega),\quad H = x8\lambda - 2tx]^{-1},$$
$$G = e^{tx}|x|^{3/2}\tilde G(\omega) + \tfrac{1}{4}x^2u(\lambda - 2tx)^2\tilde F,$$
$$\tilde F' \neq 0,\quad \omega = |x|^{1/2}ue^{-tx},\quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$A_{2.2}$-invariant equations of type (17).

$$\tilde A^{1}_{2.2}:\ F = \tilde F(\omega),\quad G = |z|^{-(m+2)}\tilde G(\omega),$$
$$\tilde F' \neq 0,\quad z = t - x,\quad \omega = |z|^{m}u,\quad m \in \mathbb{R},$$

$$\tilde A^{2}_{2.2}:\ F = e^{2u}\tilde F(x),\quad G = e^{2u}\tilde G(x),\quad \tilde F \neq 0,$$

$$\tilde A^{3}_{2.2}:\ F = |u|^{4/(2m+1)}\tilde F(x),\quad G = |u|^{(5+2m)/(2m+1)}\tilde G(x),$$
$$\tilde F \neq 0,\quad m \neq -\tfrac{1}{2},$$

$$\tilde A^{4}_{2.2}:\ F = \tilde F(\omega),\quad G = |x|^{-(m+2)}\tilde G(\omega),$$
$$\tilde F' \neq 0,\quad \omega = |x|^{m},\quad m \in \mathbb{R}.$$

Conclusion. It is clear from the above results that the successive increase in dimension of the Lie algebra of invariance of the given equation leads to a corresponding decrease in arbitrariness in the functions entering into the equation. This then allows us, at a certain stage, to use the standard methods to obtain a complete solution of the problem of group classification of equations of type (1). In particular, for equations of the form (15) and (17), the A_2-invariant equations contain arbitrary functions of one variable, which then allows us to use the Lie–Ovsiannikov method in order to obtain a complete list of equations of this type, and whose algebras of invariance are solvable Lie algebras.

V. Lahno thanks the Swedish Research Council (Vetenskapsrådet) for financial support (grant 624-2004-1073) during this research. He also thanks the Mathematics Department of Linköping University for its hospitality during his stay.

[1] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[2] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986.

[3] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1989.

[4] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung // Arch. für Math. – 1881. – **6**. – S. 328.–368.

[5] Ovsiannikov L.V. Group properties of nonlinear heat equation // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1959. – **125**. – P. 492–495.

[6] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. – Boca Raton: CRC Press, 1994.

[7] Ovsiannikov L.V. Group properties of the Chaplygin equation // Zh. Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz. – 1960. – N 3. – P. 126–145.

[8] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. für Math. – 1881. – **6**. – S. 112–125.

[9] Barone A., Esposito C., Scott A.C. Theory and application of sine-Gordon equation // Rivista Nuovo Cimento. – 1971. – **1**. – P. 227–267.

[10] Kumei S. Invariance transformation, invariance group transformations and invariance groups of sine-Gordon eqautions // J. Math. Phys. – 1975. – **16**. – P. 2461–2472.

[11] Fushchich W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[12] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Nonlinear Mech. – 1981. – **16**. – P. 439–447.

[13] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172–176.

[14] Suhubi E.S., Bakkaloĝlu A. Group properties and similarity solutions for a quasilinear wave equation in the plane // Int. J. Nonlinear Mech. – 1991. – **26**. – P. 567–584.

[15] Kambulle M.T. Symmetries and conservation laws on nonlinear waves / Modern Group Analysis, Developments in Theory, Computation and Application // Proceedings of the International Conference at the Sophus Lie Conference Center. – Nordfjordied, Norway, 1999. – P. 167–174.

[16] Arrigo D.J. Group properties of $u_{xx} - u_y^m u_{yy} = f(u)$ // Int. J. Nonlinear Mech. – 1991. – **26**. – P. 619–629.

[17] Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Approximate group analysis of nonlinear equation $u_{tt} - (f(u)u_x)_x + \varepsilon\varphi(u)u_t = 0$ // Diff. Equations. – 1988. – **24**. – P. 1127–1138.

[18] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation // Int. J. Nonlinear Mech. – 2001. – **36**. – P. 987–997.

[19] Torrisi M., Valenti A. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations and nonlinear wave equation // Int. J. Nonlinear Mech. – 1985. – **20**. – P. 135–144.

[20] Chikwendu S.C. Nonlinear wave propagation solution by Fouries transforms perturbation // Int. J. Nonlinear Mech. – 1981. – **16**. – P. 117–128.

[21] Pucci E. Group analysis of the eqaution $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1987. – **12**. – P. 71–87.

[22] Donato A. Similarity analysis and nonlinear wave propagation // Int. J. Nonlinear Mech. – 1987. – **22**. – P. 307–318.

[23] Torrisi M. Similarity solutions and wave propagation in reactive polytropic gas // J. Eng. Math. – 1988. – **22**. – P. 239–258.

[24] Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. – 1990. – **38**. – P. 445–458.

[25] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. – 1991. – **32**. – P. 2988–2995.

[26] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity eqations with a nonlinear source // J. Phys. A. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[27] Basarab-Horwath P., Lahno V.I., Zhdanov R.Z. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential eqautions // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[28] Güngör F., Lahno V., Zhdanov R. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 2280–2113.

[29] Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, 053301. – 37 pp.

[30] Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equation // Acta Appl. Math. – 2006. – **91**. – P. 253–313.

[31] Akhatov I. Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Nonlocal symmetries: heuristic approach // J. Soviet Math. – 1991. – **55**. – P. 1401–1450.

[32] Jacobson N. Lie algebras. – New York: Wiley (Interscience), 1962.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 31–38

УДК 517.9

Нелокальні формули розмноження розв'язків рівняння синус-Гордона

Л.М. БЛАЖКО

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: lblazhko@ukr.net

Одержаний ланцюжок односолітонних розв'язків рівняння синус-Гордона за допомогою автоперетворень Беклунда.

Using Bäcklund autotransformations the chain of one-soliton solutions of sine-Gordon equation is obtained.

1. Вступ. Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} - u_{11} + \sin u = 0, \tag{1}$$

де $u = u(x_0, x_1)$, яке в літературі відоме як рівняння синус-Гордона (СГ). Дане рівняння виникло в диференціальній геометрії при описі поверхонь від'ємної кривизни [1]. Потім його почали використовувати у фізиці [2,3]. Особливо інтенсивно рівняння СГ застосовується в теорії солітонів [4,5].

Добре відомі симетрійні властивості рівняння СГ. Максимальною алгеброю інваріантості рівняння синус-Гордона (1) є алгебра Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1. \tag{2}$$

Зауваження. Оператори (2) породжують скінченні перетворення

$$x_0' = \alpha x + \theta_0, \quad x_1' = \beta x + \theta_1, \quad u' = u, \tag{3}$$

де $\alpha x = \alpha_0 x_0 - \alpha_1 x_1$, $\alpha^2 = \alpha_0^2 - \alpha_1^2$, $\alpha^2 = -\beta^2 = 1$, $\alpha\beta = 0$.

Крім того рівняння СГ (1) інваріантне відносно так званих CPT перетворень

$$C: \quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to -u,$$

$$
\begin{aligned}
&P: \quad x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad u \to u,\\
&T: \quad x_0 \to -x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u,
\end{aligned} \tag{4}
$$

та перетворень

$$x_0 \to x_0, \quad x_1 \to x_1, \quad u \to u + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Тому всі викладки в цій статті будемо проводити з точністю до перетворень (3)–(5).

2. Побудова нелокальних формул розмноження розв'язків. Ще наприкінці XIX століття Беклунд [4] запропонував нелокальні перетворення вигляду:

$$\left(\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2}\right)_y = \frac{1}{\lambda}\sin\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2}, \quad \left(\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{2}\right)_z = \lambda\sin\frac{\overset{2}{u}+\overset{1}{u}}{2} \tag{6}$$

для рівняння СГ (1) записаного в конусних змінних

$$u_{yz} = \sin u, \tag{7}$$

де

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2}, \tag{8}$$

$\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ – два різні розв'язки рівняння (7), λ – довільна стала, індекс біля функції внизу означає диференціювання по відповідному аргументу. Оскільки перетворення (6) зв'язують між собою два різні розв'язки рівняння СГ, то вони є автоперетворенням Беклунда (АПБ). Так як перетворення (6) задають неявний зв'язок між двома розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння (7), то їх важко використовувати для побудови точних розв'язків цього рівняння.

За допомогою АПБ (6) в літературі побудовані деякі точні розв'язки рівняння (7), які одержали назву солітонних розв'язків (див., наприклад, [6]). Односолітонні та двохсолітонні розв'язки відповідно мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&u = 4\arctan e^{\theta_1},\\
&u = 4\arctan\left(\frac{\lambda_2+\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\,\frac{e^{\theta_1}-e^{\theta_2}}{1+e^{\theta_1+\theta_2}}\right),
\end{aligned} \tag{9}
$$

де $\theta_i = \lambda_i z + \frac{1}{\lambda_i} y + c_i$, $\lambda_i, c_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

Ми пропонуємо дещо інший підхід до знаходження розв'язків рівняння СГ за допомогою АПБ (6). Нехай для простоти $\lambda = 1$. Введемо функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$ за формулою:

$$\tau = \tan\frac{\overset{2}{u}-\overset{1}{u}}{4}. \tag{10}$$

Введення функціонального параметру за формулою (10) дає можливість записати зв'язок між розв'язками $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ рівняння СГ в параметричному вигляді. Сформулюємо це у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Якщо* $\overset{1}{u}$ *– розв'язок рівняння* (7)*, то його інший розв'язок* $\overset{2}{u}$ *знаходиться за формулою*

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4\arctan\tau, \tag{11}$$

де $\tau = \tau(y, z)$ *– розв'язок системи диференціальних рівнянь*

$$\tau_y = -\tfrac{1}{2}(\tau^2+1)\overset{1}{u}_y + \tau, \quad \tau_z = -\tfrac{1}{2}(\tau^2-1)\sin\overset{1}{u} + \tau\cos\overset{1}{u}. \tag{12}$$

Таким чином, згідно даної теореми, побудову розв'язків рівняння СГ пропонується здійснювати в два етапи. Спочатку по відомому розв'язку $\overset{1}{u}$ потрібно знайти функціональний параметр $\tau = \tau(y, z)$, як розв'язок системи диференціальних рівнянь (12), а потім за допомогою розв'язку $\overset{1}{u}$ і знайденому по ньому параметру τ за формулою (11) знаходимо $\overset{2}{u}$ – новий розв'язок рівняння СГ.

На перший погляд формули (11), (12) спрощують знаходження розв'язку $\overset{2}{u}$, але в той же час для знаходження параметра τ потрібно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь (12), яка є системою рівнянь Ріккаті. Добре відомо, що немає загального методу розв'язування рівнянь Ріккаті. Тому по складності формули (11), (12) напевно не поступаються формулам (6). Але нам вдалося помітити одну закономірність, яка дозволяє знаходити частинний розв'язок рівнянь Ріккаті (12) (див. лему нижче). Як відомо, наявність частинного розв'язку рівняння Ріккаті дозволяє звести його до рівняння Бернуллі, яке інтегрується в квадратурах.

Якщо для побудови розв'язків рівняння СГ формули (11), (12) використовувати послідовно декілька разів, то, в результаті, отримуємо рекурентні формули вигляду

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4\arctan\overset{n+1}{\tau}, \tag{13}$$

$$\overset{n+1}{\tau}_y = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 + 1)\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau},$$
$$\overset{n+1}{\tau}_z = -\tfrac{1}{2}((\overset{n+1}{\tau})^2 - 1)\sin\overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos\overset{n}{u}, \tag{14}$$

де $\overset{n}{u}$ – розв'язок рівняння СГ на n-му кроці, $\overset{n+1}{u}$, $\overset{n+1}{\tau}$ – функції, які знайдені на $(n+1)$-му кроці. Ми помітили зв'язок між розв'язками системи рівнянь Ріккаті (14) на різних кроках. Сформулюємо цей зв'язок у вигляді наступного твердження.

Лема. *Якщо в якості початкового розв'язку в формулах* (13), (14) *вибрати тривіальний розв'язок рівняння синус-Гордона* $\overset{0}{u} = 0$, *то для системи* (14) *справедлива формула*

$$\overset{n+1}{\tau}_0(y,z) = \overset{n}{\tau}_3(-y,-z),$$

де $\overset{n}{\tau}_3(y,z)$ *– загальний розв'язок системи* (14) *на* n*-му кроці,* $\overset{n+1}{\tau}_0(y,z)$ *– частинний розв'язок системи* (14) *на* $(n+1)$*-му кроці,* $n = 1,2,3$.

Опишемо знаходження точних розв'язків рівняння (1).

1-крок. $n = 1$:

$$\overset{0}{u} = 0, \quad \text{тоді} \quad \overset{1}{u} = 4\arctan\overset{1}{\tau},$$

де функціональний параметр $\overset{1}{\tau}$ є розв'язком наступної системи диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними

$$\overset{1}{\tau}_y = \overset{1}{\tau}, \quad \overset{1}{\tau}_z = \overset{1}{\tau},$$

розв'язавши яку, одержимо

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z+c_1}. \tag{15}$$

Тоді

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z+c_1}, \tag{16}$$

c_1 – стала інтегрування. Цей розв'язок в літературі відомий як односолітонний розв'язок рівняння СГ.

Враховуючи перетворення (3), сталу інтегрування c_1 у формулах (15), (16) можна опустити. Отже,

$$\overset{1}{\tau} = e^{y+z}, \quad \overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z}.$$

2-крок. $n = 2$:

$$\overset{1}{u} = 4\arctan e^{y+z}, \tag{17}$$
$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4\arctan\overset{2}{\tau}, \tag{18}$$

де параметр $\overset{2}{\tau}$ є розв'язком системи рівнянь Ріккаті наступного вигляду:

$$\overset{2}{\tau}_y = M((\overset{2}{\tau})^2 + 1) + \overset{2}{\tau}, \quad \overset{2}{\tau}_z = N((\overset{2}{\tau})^2 - 1) + L\overset{2}{\tau}, \tag{19}$$

де

$$M = -\frac{1}{\cosh(y+z)}, \quad N = \frac{\sinh(y+z)}{\cosh^2(y+z)}, \quad L = 2\tanh^2(y+z) - 1.$$

Використавши лему, маємо

$$\overset{2}{\tau}_0(y,z) = \overset{1}{\tau}_3(-y,-z) = e^{-(y+z)}.$$

Зробивши заміну

$$\overset{2}{\tau} = w + e^{-(y+z)},$$

де $w = w(y,z)$ – нова невідома функція, систему (19) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\cosh(y+z)w_y = (\sin(y+z) - 1)w - w^2,$$
$$\cosh^2(y+z)w_z = (\sin^2(y+z) - 1)w + \sinh(y+z)w^2. \tag{20}$$

Загальний розв'язок системи (20) має вигляд

$$w = \frac{2\cosh^2(y+z)}{e^{y+z}(y - z + c_2) - \cosh(y+z)}. \tag{21}$$

Отже, використавши (21), одержуємо, що

$$\overset{2}{\tau} = \frac{(y - z + c_2)e^{-(y+z)} + \cosh(y+z)}{y - z + c_2 - e^{-(y+z)}\cosh(y+z)}, \tag{22}$$

де c_2 – стала інтегрування. Підставивши $\overset{2}{\tau}$, $\overset{1}{u}$, що задані формулами (22), (17) відповідно, у формулу (18), одержуємо

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z+c_2)}{\cosh(y+z)}.$$

Аналогічно, як і у формулах (15), (16), врахувавши перетворення (3), можна вважати $c_2 = 0$. Отже,

$$\begin{aligned}\overset{2}{\tau} &= \frac{(y-z)e^{-(y+z)} + \cosh(y+z)}{y-z-e^{-(y+z)}\cosh(y+z)},\\ \overset{2}{u} &= 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}.\end{aligned}\tag{23}$$

Зауважимо, що розв'язок (23) одержаний в [7] із двохсолітонного розв'язку (9), якщо в ньому перейти до границі при $\lambda_2 \longrightarrow \lambda_1$.

3-крок. $n = 3$:

$$\overset{2}{u} = 4\arctan\frac{-(y-z)}{\cosh(y+z)}, \quad \text{тоді} \quad \overset{3}{u} = \overset{2}{u} + 4\arctan\overset{3}{\tau}.$$

Система рівнянь Ріккаті для знаходження $\overset{3}{\tau}$ має вигляд

$$\begin{aligned}\overset{3}{\tau}_y &= -\frac{2((y-z)\sinh(y+z)-\cosh(y+z))}{B}((\overset{3}{\tau})^2+1)+\overset{3}{\tau},\\ \overset{3}{\tau}_z &= \frac{2(y-z)\cosh(y+z)A}{B^2}((\overset{3}{\tau})^2-1)+\\ &\quad+\frac{A^2-4(y-z)^2\cosh^2(y+z)}{B^2}\overset{3}{\tau},\end{aligned}\tag{24}$$

де

$$A = \cosh^2(y+z)-(y-z)^2, \quad B = \cosh^2(y+z)+(y-z)^2.$$

Використавши лему, маємо

$$\overset{3}{\tau}_0(y,z) = \overset{2}{\tau}_3(-y,-z) = \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)}.$$

Зробивши заміну

$$\overset{3}{\tau} = w + \frac{(y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z)}{y-z+e^{y+z}\cosh(y+z)},$$

де $w = w(y,z)$ – нова невідома функція, систему (24) зводимо до системи рівнянь Бернуллі

$$\begin{aligned}w_y &= \frac{\beta B - 4\alpha C}{\beta B}w - \frac{2C}{B}w^2,\\ w_z &= \frac{4(y-z)\alpha A\cosh(y+z)+\beta(A^2-4(y-z)^2)\cosh^2(y+z)}{\beta B^2}w+\\ &\quad+\frac{2(y-z)A\cosh(y+z)}{B^2}w^2,\end{aligned}\tag{25}$$

де

$$\alpha = (y-z)e^{y+z}-\cosh(y+z), \quad \beta = y-z+e^{y+z}\cosh(y+z),$$
$$C = (y-z)\sinh(y+z)-\cosh(y+z).$$

Розв'язавши (25), одержуємо

$$\overset{3}{\tau} = \frac{-2B^2+\alpha K}{\beta K}, \quad \overset{3}{u} = 4\arctan e^{-(y+z)}\frac{P+B}{P-B},$$

де

$$\begin{aligned}K &= (y-z+e^{y+z}\cosh(y+z))((y-z)^2e^{-(y+z)}-\\ &\quad-2(y-z)\cosh(y+z)+f)-4e^{y+z}\cosh^4(y+z),\\ f &= \cosh(y+z)(e^{2(y+z)}+2)+(y+z+c)e^{-(y+z)},\\ P &= c+y+z+\cosh(y+z)\cdot\sinh(y+z).\end{aligned}$$

Враховуючи зв'язок (8) між змінними y, z та x_0, x_1, випишемо одержаний нами ланцюжок розв'язків рівняння СГ (1):

$$\begin{aligned}&0 \to 4\arctan e^{x_1} \to 4\arctan\frac{-x_0}{\cosh x_1} \to\\ &\to 4\arctan\left(e^{-x_1}\frac{c+x_1+\cosh x_1\sinh x_1+\cosh^2 x_1+x_0^2}{c+x_1+\cosh x_1\sinh x_1-\cosh^2 x_1-x_0^2}\right).\end{aligned}$$

Оскільки графіки розв'язків $\overset{2}{u}$, $\overset{3}{u}$ зберігають форму єдиної хвилі з ростом часової змінної x_0, то можна припустити, що ці розв'язки, як і $\overset{1}{u}$, є односолітонними розв'язками рівняння синус-Гордона.

3. Висновки. Таким чином, нами побудований алгоритм знаходження розв'язків рівняння синус-Гордона та за його допомогою одержаний ланцюжок односолітонних розв'язків даного рівняння.

[1] Eisenhart L.P. A treatise on the differential geometry of curves and surfaces. – New York: Dover, 1960. – 247 p.

[2] Френкель Я., Конторова Т. О теории пластической деформации и двойникования // Физ. жур. – 1939. – № 1. – С. 137.

[3] Perring J.K., Skyrme T.H.R. A model unified theory // Nucl. Phys. – 1961. – **31**. – P. 550–555.

[4] Bäcklund A.V. Om ytor med konstant negativ krökning // Lund Universitets Arsskrift. – 1883. – № 19. – P. 24–38.

[5] Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240–243.

[6] Новокшенов В.Ю. Математические модели в естествознании. – Уфа: УГАТ ун-та, 1999. – 98 с.

[7] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. – Москва: Наука, 1980. – 324 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 39–48

УДК 517.9

Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations

V.M. BOYKO

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: boyko@imath.kiev.ua

Запропоновано підхід для опису інтегровних випадків рівняння Абеля, що базується на підвищенні порядку та використанні перетворень еквівалентності для відповідного звичайного диференціального рівняння другого порядку. Розглянуто проблему лінеаризації розглядуваного класу рівнянь.

We suggest an approach for description of integrable cases of the Abel equations. It is based on increasing of the order of equations up to the second one and using equivalence transformations for the corresponding second-order ordinary differential equations. The problem of linearizability of the equations under consideration is considered.

Introduction. A diversity of methods were developed to date for finding solutions of nonlinear ordinary differential equations (ODE). Everybody who encounters integration of a particular ODE uses, as a rule, the accumulated databases (or reference books) of the classes of ODE and methods for integration of them (e.g. [22, 29]). But if an ODE does not belong to any of the described classes then it does not mean that there is no approaches for finding solutions of this ODE in a closed form.

The symmetry approach is one of the most algorithmic approaches for integration and lowering of the order of ODE that admit a certain nontrivial symmetry (see e.g. books [24, 28] and review papers [19, 35]). In the framework of the symmetry approach (and its modifications) it is possible to obtain many of the known classes of integrable ODE. However, the needs of the applications stimulate new research into development of new methods for construction of ODE solutions in the closed form. The works [2–9, 12–19, 25–27, 29–35] may give an idea of current developments and directions of research in the field of symmetry (algebraic) methods for investigation of ODE.

The problem of finding Lie symmetries for the first-order ODE is equivalent to finding solutions for these equations, and for this reason the direct application of the Lie method is complicated in the general case. On of the well-known approaches in the cases when for a given ODE it is not feasible (or not effective) to apply the Lie method directly, is increasing of the order of the ODE under consideration (in particular, to obtain a second-order ODE related to the respective ODE by a change of variables). For examples of utilisation of such approach we can refer to papers [2–6, 14, 25–27]. In such cases, if the "induced" equation of a higher order admits a non-trivial Lie symmetry (that generated a non-local symmetry for the initial equation), we can speak of so-called hidden symmetries for an initial equation (for more details see [2–4]).

Main results. In this paper we study Abel equations having the form

$$\dot{p}(f_5(y)p + f_0(y)) = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y), \tag{1}$$

where $p = p(y)$, $\dot{p} = \frac{dp}{dy}$, f_i, $i = 0, \dots, 5$, are arbitrary smooth functions (with f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 not identically vanishing simultaneously). In view of existence of the gauge transformation of multiplication by an arbitrary function of y, any equation (1) can be reduced to one of the following canonical forms (respectively, Abel equations of the first and the second kind, see e.g. [1, 22, 29]):

$$\dot{p} = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y), \tag{2}$$

$$\dot{p}(p + f_0(y)) = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y). \tag{3}$$

Equations (2), (3) along with the Riccati equation are among the "simplest" nonlinear first-order ODE that have extensive applications. At the same time the problem of description of integrable classes of these equations stays within the focus of current research, and was previously considered in many papers (see e.g. [5, 6, 10–13, 27, 29, 30, 32–34, 36]).

Note that the Abel equations of the first and the second kind (2), (3) are related with each other by a local change of variables (namely, the equation (3) can be reduced to the form (2) by means of the change of variables $p = 1/v(y) - f_0$). Besides, the well-known Riccati equation is a partial case of equation (2).

Further we will consider the following second-order ODE

$$\ddot{y} = \dot{y}^4 f_4(y) + \dot{y}^3 f_3(y) + \dot{y}^2 f_2(y) + \dot{y} f_1(y), \tag{4}$$

$$\ddot{y}(\dot{y} + f_0(y)) = \dot{y}^4 f_4(y) + \dot{y}^3 f_3(y) + \dot{y}^2 f_2(y) + \dot{y} f_1(y), \tag{5}$$

where $y = y(x)$, $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dx^2}$, related to the Abel equations (2) and (3).

The substitution $\dot{y} = p(y)$ reduces equations (4) and (5) respectively to the Abel equations (2) and (3) (reduction of the order for equations (4) and (5)). Such reduction is induced by the Lie operator $X_1 = \partial_x$ (that corresponds to invariance of equations (4) and (5) with respect to translations by the variable x). This is exactly the fact that explains why we consider equations (4) and (5).

In the case when (4) or (5) are invariant with respect to another operator (that is when (4) or (5) admit two-dimensional Lie algebras), then equations (4) and (5) are integrable in the framework of the Lie approach. And in this way we can obtain exact solutions of the equations (2) and (3) respectively.

Further we will consider only the equation (5) (since equations (2)–(5) are interconnected – see Remark 3). Let (5) admit a two-dimensional Lie algebra

$$L = \langle X_1, X_2 \rangle, \quad X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y. \tag{6}$$

We will consider a problem of description of inequivalent equations (5) that are invariant with respect to two-dimensional Lie algebras of the form (6) (non-equivalent realizations of the operator X_2 in the algebra (6) will determine canonical representatives for equation (5)).

It is well-known that any two-dimensional Lie algebra in the general case, by means of choosing the basis operators X_1 and X_2 in an appropriate manner, may be reduced to four nonequivalent cases (see e.g. [19, 24, 28]). In the framework of our problem additional cases arise as we have fixed the form of the operator X_1.

So, it is quite straightforward to show that equation (5) may admit a two-dimensional Lie algebra (6) only of one of the following types:

$$\begin{array}{lll}
1. & [X_1, X_2] = 0, & \operatorname{rank} L = 1; \\
2. & [X_1, X_2] = 0, & \operatorname{rank} L = 2; \\
3. & [X_1, X_2] = X_1, & \operatorname{rank} L = 1; \\
4. & [X_1, X_2] = X_1, & \operatorname{rank} L = 2; \\
5. & [X_1, X_2] = X_2, & \operatorname{rank} L = 1; \\
6. & [X_1, X_2] = X_2, & \operatorname{rank} L = 2.
\end{array} \tag{7}$$

Further, utilising classification of two-dimensional algebras (7), we obtain that equation (5) may admit only the following realizations of two-dimensional Lie algebras (6):

$$
\begin{aligned}
&1.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \xi(y)\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const};\\
&2.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y,\\
&\qquad\qquad\qquad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const} \ \text{ or } \ \xi(y) \equiv 0, \quad \eta(y) \neq 0;\\
&3.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = (x + \xi(y))\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const} \ \text{ or } \ \xi(y) \equiv 0;\\
&4.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = (x + \xi(y))\partial_x + \eta(y)\partial_y,\\
&\qquad\qquad\qquad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const} \ \text{ or } \ \xi(y) \equiv 0, \quad \eta(y) \neq 0;\\
&5.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = e^x \xi(y)\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv 0;\\
&6.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = e^x(\xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y), \quad \eta(y) \neq 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

It is clear that using these realizations we can describe equations of the form (5) that are invariant with respect to two-dimensional Lie algebras (similarly as we have discussed in [32]). However, this way is too cumbersome, and thus obtained types of equations (5) will be quite complicated (functions f_i, $i = 0, \ldots, 4$ in (5) will be expressed through coefficients of the operator X_2 from realizations (8)).

It is straightforward to show that the most general transformations that preserve the form of the operator X_1 we look as follows:

$$
t = x + \omega(y), \quad u = g(y), \tag{9}
$$

where $\omega(y)$, $g(y)$ are arbitrary smooth functions, $g(y) \not\equiv \mathrm{const}$.

After substitution (9) equation (5) takes the form

$$
\begin{aligned}
&\ddot u((1 - \omega' f_0)\dot u + f_0 g')g'^2 =\\
&\qquad = \big(f_4 - \omega''(1 - \omega' f_0) - \omega' f_3 + \omega'^2 f_2 - \omega'^3 f_1\big)\dot u^4\\
&\qquad + \big(g' f_3 - \omega'' g' f_0 + g''(1 - \omega' f_0) - 2\omega' g' f_2 + 3\omega'^2 g' f_1\big)\dot u^3\\
&\qquad + \big(g'^2 f_2 + g'' g'^2 f_0 - 3\omega' g'^2 f_1\big)\dot u^2 + f_1 g'^3 \dot u,
\end{aligned} \tag{10}
$$

where $\omega' = \frac{d\omega}{dy}$, $\omega'' = \frac{d^2\omega}{dy^2}$, $g' = \frac{dg}{dy}$, $g'' = \frac{d^2 g}{dy^2}$ (in addition in (10) all functions of the variable y should be expressed as functions of the variable u).

With $(1 - \omega' f_0) \not\equiv 0$ equation (10) belongs again to the class of equations (5).

Remark 1. With $(1 - \omega' f_0) \equiv 0$ after the substitution (9), equation (5) is transformed to the equation (4), that is reduced to the Abel equation of the first kind (2).

Remark 2. It is possible to regard that $(1 - \omega' f_0) \not\equiv 0$ for the equation (5) as a result of the substitution (9) (we attain that by combination of transformations (9)).

Thus (9) are equivalence transformations for (5), and, besides, these transformations preserve the form of the operator $X_1 = \partial_x$ in the algebra (6).

Remark 3. So, the transformations (9) are equivalence transformations for the class of equations (4)–(5). Moreover, if we prolongate these transformations for $\dot u = p$ then they form an equivalence transformation group for (1) and include as a subgroup in the complete equivalence group of class (1), which are formed by the transformations

$$
\tilde y = F(y), \quad \tilde p = \frac{P_1(t)p + Q_1(t)}{P_2(t)p + Q_2(t)},
$$

where F, P_1, P_2, Q_1, Q_2 are arbitrary analytic functions, and $P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \neq 0$.

Thus, by means of transformations (9), realizations (8) of the algebra (6) may be reduced to the simplest canonical form. The transformations (9) in that process will not take us out of the class of equations (5).

By means of transformations (9) the realizations (8) of two-dimensional Lie algebras (6) admitted for equation (5) are reduced to the following canonical realizations:

$$
\begin{aligned}
&1.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = y\partial_x;\\
&2.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y;\\
&3.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x;\\
&4.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = x\partial_x + y\partial_y;\\
&5.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = e^x\partial_x;\\
&6.\ X_1 = \partial_x, \quad X_2 = e^x(\partial_x + \partial_y).
\end{aligned} \tag{11}
$$

In accordance to (11) we obtain the following integrable cases for equation (5) that are non-equivalent with respect to (9):

1. $\ddot y = \alpha(y)\dot y^3$;

2. $\ddot{y}(\dot{y}+e)=d\dot{y}^4+c\dot{y}^3+b\dot{y}^2+a\dot{y}$;
3. $\ddot{y}=\alpha(y)\dot{y}^2$;
4. $y\ddot{y}(\dot{y}+e)=d\dot{y}^4+c\dot{y}^3+b\dot{y}^2+a\dot{y}$;
5. $\ddot{y}(\dot{y}+\beta(y))=\alpha(y)\dot{y}^3+(1-\alpha(y)\beta(y))\dot{y}^2-\beta(y)\dot{y}$;
6. $a)$ $f_0=0:$

$$\ddot{y}=de^y\dot{y}^3+(-3de^y+c)\dot{y}^2+(-de^y-(2c+1)+be^{-y})\dot{y}+(-de^y+(c+1)-be^{-y}+ae^{-2y});$$

$b)$ $f_0\neq 0:$

$$\ddot{y}(\dot{y}+\alpha(y))=-\dot{y}^3+(1-\alpha(y))\dot{y}^2+\alpha(y)\dot{y}, \tag{12}$$

where $\alpha(y)$, $\beta(y)$ are arbitrary smooth functions, a, b, c, d, e are constants.

The case 6a in (12) may be simplified by means of the substitution $t=x$, $u=e^y$ (see (9) and (10)).

Equations (12) determine non-equivalent cases of the form (5) that admit two-dimensional algebras (11) up to equivalence transformations (9).

Thus, summarising the above, we come to the following scheme for integration of the Abel equation (3):

- we increase the order of equation (3), considering a second-order equation (5);
- if a corresponding equation (5) admits a two-dimensional Lie algebra, then we reduce this algebra to one of the canonical forms (11), and thus the equation is reduced to the respective canonical forms (12);
- we integrate the canonical form (12);
- making reverse changes of variables we obtain the solution of the Abel equation (3).

Case of Lie's linearization test. According to results of S. Lie [23] (see also [19–21]) second-order ODEs

$$\ddot{y}=f(x,y,\dot{y}) \tag{13}$$

can be reduced to the form

$$\ddot{u}=0, \tag{14}$$

by point change of variables

$$t=\varphi(x,y),\quad u=\psi(x,y),\quad u=u(t) \tag{15}$$

if equations (13) is at most cubic in the first derivative, i.e. only if equations (13) has the form

$$\ddot{y}+F_3(x,y)\dot{y}^3+F_2(x,y)\dot{y}^2+F_1(x,y)\dot{y}+F(x,y)=0, \tag{16}$$

where

$$\begin{aligned}
F_3(x,y)&=\frac{\varphi_y\psi_{yy}-\psi_y\varphi_{yy}}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F_2(x,y)&=\frac{\varphi_x\psi_{yy}-\psi_x\varphi_{yy}+2(\varphi_y\psi_{xy}-\psi_y\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F_1(x,y)&=\frac{\varphi_y\psi_{xx}-\psi_y\varphi_{xx}+2(\varphi_x\psi_{xy}-\psi_x\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x},\\
F(x,y)&=\frac{\varphi_x\psi_{xx}-\psi_x\varphi_{xx}}{\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x}.
\end{aligned} \tag{17}$$

For given function $F_3(x,y)$, $F_3(x,y)$, $F_1(x,y)$ and $F(x,y)$ linearization is possible iff the over-determined system (17) is integrable. S. Lie proved that system (17) is integrable iff the following auxiliary system for w and z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}&=zw-FF_3-\frac{1}{3}\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial F_2}{\partial x},\\
\frac{\partial w}{\partial y}&=-w^2+F_2w+F_3z+\frac{\partial F_3}{\partial x}-F_1F_3,\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=z^2-Fw-F_1z+\frac{\partial F}{\partial y}+FF_2,\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=-zw+FF_3-\frac{1}{3}\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial F_1}{\partial y}
\end{aligned} \tag{18}$$

is compatible. The compatibility conditions for this system have the form

$$\begin{aligned}
&3(F_3)_{xx}-2(F_2)_{xy}+(F_1)_{yy}=\\
&\qquad=(3F_1F_3-F_2^2)_x-3(FF_3)_y-3F_3F_y+F_2(F_1)_y,\\
&3F_{yy}-2(F_1)_{xy}+(F_2)_{xx}=
\end{aligned}$$

$$= 3(FF_3)_x - 3(FF_2 - F_1^2)_y + 3F(F_3)_x - F_1(F_2)_x \quad (19)$$

(subscripts x and y denote differentiations with respect to x and y, respectively).

So, following [20, 21] a necessary and sufficient condition of linearization for equations of form (16) is that functions $F_3(x,y)$, $F_2(x,y)$, $F_1(x,y)$ and $F(x,y)$ satisfy the conditions (19).

In case $f_0(y) \equiv 0$ equations (5) is partial case of (16), i.e. have the following form

$$\ddot{y} = \dot{y}^3 f_4(y) + \dot{y}^2 f_3(y) + \dot{y} f_2(y) + f_1(y). \quad (20)$$

This equations can be linearizable if $f_4(y)$, $f_3(y)$, $f_1(y)$ and $f_1(y)$ satisfy the conditions (following (19))

$$(f_2)_{yy} = 3(f_1 f_4)_y + 3f_4(f_1)_y - f_3(f_2)_y,$$
$$3(f_1)_{yy} = 3(f_1 f_3 - f_2^2)_y. \quad (21)$$

And point transformations (15) which linearizing (20) can be found from system (17).

Let us note that a second-order ODE is linearizable iff it admits an eight-dimensional Lie algebra. So, any linearizable equation (20) belongs, up to equivalence transformations (9), belong to the set of equations (12).

Conclusion. It is obvious from the above that there is an alternative way for generation of new integrable cases of the Abel equation based on utilisation of the relation between the Abel equations of the first and the second kind, and relation between the equations (4) and (5) by means of the transformations (9). Thus, starting from some integrable Abel equation (that is of such equation for which the solution is known) it is possible to obtain new integrable cases of the Abel equations (solutions of these equations will be related through transformations (9)). It would be possible to use for this purpose even the well-known Riccati equation that is a partial case of the equation (2) (for generation of integrable Riccati equations an approach that is proposed in [30] may be used).

We hope that new results for classification of integrable classes of ODE may be obtained also using our classification of inequivalent realizations of real low-dimensional Lie algebras [31].

The author is grateful to Roman Popovych and Irina Yehorchenko for useful discussions and interesting comments.

[1] Abel N.H. Oeuvres Complétes II, Editors S. Lie and L. Sylow. – Christiana, 1839.

[2] Abraham-Shrauner B. Hidden symmetries and non-local group generators for ordinary differential equations // IMA J. Appl. Math. – 1996. – **56**. – P. 235–252.

[3] Abraham-Shrauner B. Hidden symmetries, first integrals and reduction of order of nonlinear ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 2002. – **9**, suppl. 2. – P. 1–9.

[4] Abraham-Shrauner B., Guo A. Hidden symmetries associated with the projective group of nonlinear first-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – **25**. – P. 5597–5508.

[5] Adam A.A., Mahomed F.M. Non-local symmetries of first-order equations // IMA J. Appl. Math. – 1998. – **60**. –P. 187–198.

[6] Adam A.A., Mahomed F.M., Kara A.H. New solutions of the Abel equation // Lie Groups Appl. – 1994. – **1**. – P. 1–10.

[7] Berkovich L.M. Factorization and transformation of differential equations. – Moscow: RCD, 2002.

[8] Berth M., Czichowski G. Using invariants to solve the equivalence problem for ordinary differential equations // Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. – 2001. – **11**. – P. 359–376.

[9] Bocharov A.V., Sokolov V.V., Svinolupov S.I. On some equivalence problems for differential equations / Preprint ESI 54, The Erwin Schrödonger International Institute for Mathematical Physics. – Wien, Austria, 1993. – 12 p.

[10] Cheb-Terrab E.S. A connection between Abel and ${}_pF_q$ hypergeometric differential equations // European J. Appl. Math. – 2004. – **15**. –P. 1–11.

[11] Cheb-Terrab E.S., Kolokolnikov T. First-order ordinary differential equations, symmetries and linear transformations // European J. Appl. Math. – 2003. – **14**. – P. 231–246.

[12] Cheb-Terrab E.S., Roche A.D. Abel ODEs: equivalence and integrable classes // Comp. Phys. Comm. – 2000. – **130**. – P. 204–231.

[13] Cheb-Terrab E.S., Roche A.D. An Abel ordinary differential equation class generalizing known integrable classes // European J. Appl. Math. – 2003. – **14**. – P. 217–229.

[14] Edelstein R.M., Govinder K.S., Mahomed F.M. Solution of ordinary differential equation via nonlocal transformations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2001. – **34**. – P. 1141–1152.

[15] Euler N., Euler M. Sundman symmetries of nonlinear second-order and third-order ordinary differential equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 2004. – **11**. – P. 399–421.

[16] Euler N., Wolf T., Leach P.G.L., Euler M. Linearisable third-order ordinary differential equations and generalised Sundman transformations: the case $X''' = 0$ // Acta Appl. Math. – 2003. – **76**. – P. 89–115.

[17] González-Gascón F., González-López A. Symmetries of differential equations. IV // J. Math. Phys. – 1983. – **24**. – P. 2006–2021.

[18] González-Gascón F., González-López A. The inverse problem concerning symmetries of ordinary differential equations // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 618–621.

[19] Ibragimov N.H. Group analysis of ordinary differentail equations and the invariance principle in mathematical physics // Russian Math. Surveys. – 1992. – **47**, N 4. – P. 89–156.

[20] Ibragimov N.H., Magri F. Geometric proof of Lie's linearization theorem // Nonlinear Dynamics. – 2004. – **36**. – P. 41–46.

[21] Ibragimov N.H., Meleshko S.V. Linearization of third-order ordinary differential equations by point transformations // Archives of ALGA. – 2004. – **1**. – P. 71–93.

[22] Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. – New York: Chelsea Publishing, 1959.

[23] Lie S. Klassification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Arch. Math. Naturv. – 1883. – **8**, Heft 4. – S. 371–458.

[24] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. – Leipzig: Teubner, 1891.

[25] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations // J. Math. Phys. – 1989. – **30**. – P. 2770–2777.

[26] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Symmetry Lie algebras on nth order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – **151**. – P. 80–107.

[27] Mellin C.M., Mahomed F.M., Leach P.G.L. Solution of generalized Emden–Fowler equations with two symmetries // Internat. J. Non-Linear Mech. – 1994. – **29**. – P. 529–538.

[28] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986.

[29] Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. – Boca Raton: CRC Press, 1995.

[30] Popovych R.O., Boyko V.M. Differential invariants and application to Riccati-type systems // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2002. – **43**, Part 1. – P. 184–193.

[31] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360.

[32] Revenko I.V., Boyko V.M. Symmetry and some integrable cases of Abel's equation of the second kind // Dopovidi of NAS of Ukraine. – 1995. – N 7. – P. 16–18.

[33] Schwarz F. Symmetry analysis of Abel's equation // Studies in Appl. Math. – 1998. – **100**. – P. 269–294.

[34] Schwarz F. Algorithmic solution of Abel's equation // Computing. – 1998. – **61**. – P. 39–46.

[35] Schwarz F. Solving second-order differential equations with Lie symmetry // Acta Appl. Math. – 2000. – **60**. – 39–113.

[36] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Linearizable Abel equations: an application of Lie–Tresse theorem / Proceedings The International Conference MOGRAN-2000 "Modern Group Analysis for the New Millennium" (27 September – 03 October, 2000, Ufa, Russia). – Ufa, 2000. – P. 152–153.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 49–62

УДК 517.912:512.816

Групова класифікація рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю

О.О. ВАНЄЄВА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: vaneeva@imath.kiev.ua

Виконано групову класифікацію рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю. Знайдено звичайну та узагальнену розширену групи еквівалентності, що дозволяє спростити результати класифікації та подальші їх застосування. Отримані ліївські симетрії використано для відшукання точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Group classification of variable coefficient reaction-diffusion equations with quadratic nonlinearity is carried out. Usual and generalized extended equivalence groups are also found. These allow to simplify results of classification and further applications of them. The obtained Lie symmetries are used to construct exact solutions of equations for the class under consideration.

1. Вступ. Починаючи з роботи Л.В. Овсяннікова [1], де було запропоновано метод розв'язування задачі групової класифікації та застосовано його до нелінійного рівняння теплопровідності, з'явилося багато робіт, присвячених дослідженню рівнянь дифузійного типу з симетрійної точки зору (див., наприклад, [2–8]).

Часто у якості моделей різноманітних процесів в фізиці, хімії [9, 10] та біології [11] виступають рівняння реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m, \tag{1}$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$ та $h = h(x)$ – довільні гладкі функції своїх аргументів, $f(x)g(x) \neq 0$, n та m – довільні константи.

Нещодавно в [12] було виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь (1) з $n \neq 0$, а також здійснено класифікацію допустимих перетворень та законів збереження цього класу.

При дослідженні групових властивостей рівнянь з класу (1) з лінійним дифузійним коефіцієнтом (тобто з параметром $n = 0$) виділяється підклас з квадратичною нелінійністю $m = 2$, а саме клас

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^2, \quad h(x) \neq 0. \tag{2}$$

Він має більш широку, у порівнянні з іншими значеннями параметра m, групу еквівалентності, а також вирізняється під час групової класифікації більш складними визначальними рівняннями на коефіцієнти інфінітезимального оператора та довільні елементи класу.

В цій роботі розв'язана задача групової класифікації рівнянь виду (2). При цьому використано підхід, пов'язаний з калібруванням довільних елементів та наступним відображенням отриманого класу в інший, для якого задача групової класифікації спрощується. Також побудовано точні розв'язки рівнянь, що допускають розширення алгебри ліївських симетрій.

2. Перетворення еквівалентності та вибір досліджуваного класу. Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (2) складають невироджені точкові перетворення в просторі змінних (t, x, u, f, g, h) вигляду

$$\begin{array}{ll} \tilde{t} = T^t(t,x,u), & \tilde{f} = T^f(t,x,u,f,g,h), \\ \tilde{x} = T^x(t,x,u), & \tilde{g} = T^g(t,x,u,f,g,h), \\ \tilde{u} = T^u(t,x,u), & \tilde{h} = T^h(t,x,u,f,g,h), \end{array}$$

які перетворюють будь-яке рівняння з класу (2) на функцію $u = u(t,x)$ з довільними елементами (f, g, h) в рівняння з того ж класу на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x})$ з новими довільними елементами $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h})$.

Теорема 1. *Група $G^{\sim}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \delta_3 u,$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\delta_3\varphi_x} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\delta_3}\, g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_3^2\varphi_x} h,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ – довільні сталі, $\delta_0\delta_1\delta_3 \neq 0$, φ – довільна гладка функція змінної x, $\varphi_x \neq 0$.

Виявляється, що клас (2) допускає перетворення еквівалентності, що не належать до групи $G^{\sim}$ і складають разом зі звичайними перетвореннями еквівалентності *узагальнену розширену групу еквівалентності*. Обмеження на перетворення з групи еквівалентності можуть бути послаблені в двох напрямках. По-перше, допускається, що перетворення змінних t, x, u можуть залежати від довільних елементів f, g та h (префікс "узагальнена" [13]). По-друге, явна форма нових довільних елементів $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h})$ може визначатися через (t, x, u, f, g, h) якимось нелокальним способом (префікс "розширена"). Повну (у цьому сенсі) узагальнену розширену групу еквівалентності $\hat{G}^{\sim}$ класу (2) побудовано, використовуючи прямий метод [14].

Теорема 2. *Група $\hat{G}^{\sim}$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$

$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\varphi_x\psi^2} f, \quad \tilde{g} = \frac{\delta_0\varphi_x}{\psi^2}\, g, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\varphi_x\psi^3} h,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2)$ – довільні сталі, $\delta_0\delta_1 \neq 0$; $\psi(x)$ – гладкий розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння (ЗДР) четвертого порядку

$$\left[\frac{g}{\psi^2}\left(\frac{\psi^2}{2h}\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right)_x\right]_x = \frac{\psi}{4h}\left[\left(\frac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x\right]^2 \tag{3}$$

та $\chi = -\dfrac{\psi^2}{2h}\left(\dfrac{g\psi_x}{\psi^2}\right)_x$.

Рівняння (3) має частинний розв'язок $\psi(x) = \left(\delta_3 \int \frac{dx}{g(x)} + \delta_4\right)^{-1}$ з відповідним $\chi(x) = 0$, завдяки чому можна побудувати підгрупу групи $\hat{G}^{\sim}$ з перетвореннями у явному вигляді. Ця підгрупа є ширшою за звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$.

Наявність довільної функції $\varphi(x)$ в перетвореннях еквівалентності з груп $G^{\sim}$ та $\hat{G}^{\sim}$ дозволяє спростити задачу групової класифікації класу (2), зменшивши в ньому кількість довільних елементів.

Наприклад, перетворення

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int \frac{dx}{g(x)}, \quad \tilde{u} = u$$

з групи $G^{\sim}$ відображує (2) в клас $\tilde{f}(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{t}} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{h}(\tilde{x})\tilde{u}^2$ з новими довільними елементами $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)g(x)$, $\tilde{g}(\tilde{x}) = 1$ та $\tilde{h}(\tilde{x}) = g(x)h(x)$.

Взагалі кажучи, перетвореннями з $G^{\sim}$ можна відкалібрувати будь-який довільний елемент класу (2) в одиницю. Незважаючи на те, що найбільш вдалою здається калібровка $g = 1$, задача групової класифікації класу $f(x)u_t = u_{xx} + h(x)u^2$ залишається складною. Виходом з даної ситуації є відображення класу (2) деяким невиродженим перетворенням, що не належить до груп еквівалентності $G^{\sim}$ та $\hat{G}^{\sim}$, в клас, для якого задача групової класифікації є більш легкою. Для цього спочатку перетворенням з групи $G^{\sim}$ відкалібруємо довільні елементи класу (2) таким чином, щоб коефіцієнт $g(x)$ в новому класі співпадав з $f(x)$. З теореми 1 випливає, що це можна зробити перетворенням

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \int \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|^{\frac{1}{2}} dx, \quad \tilde{u} = u. \tag{4}$$

Таким чином, не втрачаючи загальності, можна обмежитися дослідженням класу

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^2 \tag{5}$$

з $h(x) \neq 0$, оскільки всі результати (симетрії, точні розв'язки) отримані для цього класу можна поширити для класу (2) перетворенням (4).

Узагальнену розширену групу еквівалентності класу (5) можна знайти з теореми 2, поклавши у формулах перетворень довільних елементів $\tilde{f} = \tilde{g}$ та $f = g$. Отриманий результат сформульовано у вигляді наступної теореми.

Теорема 3. *Клас рівнянь* (5) *допускає узагальнену розширену групу еквівалентності* $\hat{G}_1^{\sim}$, *що складається з перетворень*

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{u} = \psi(x)u + \chi(x),$$
$$\tilde{f} = \frac{\delta_0\delta_1}{\psi^2} f, \quad \tilde{h} = \frac{\delta_0}{\delta_1\psi^3} h,$$

де δ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ – *довільні сталі,* $\delta_0\delta_1 \neq 0$. $\psi(x)$ – *гладкий розв'язок нелінійного ЗДР четвертого порядку*

$$\left[\frac{f}{\psi^2} \left(\frac{\psi^2}{2h} \left(\frac{f\psi_x}{\psi^2} \right)_x \right)_x \right]_x = \frac{\psi}{4h} \left[\left(\frac{f\psi_x}{\psi^2} \right)_x \right]^2,$$

а функція χ *визначається за формулою* $\chi = -\dfrac{\psi^2}{2h} \left(\dfrac{f\psi_x}{\psi^2} \right)_x$.

Використання перетворень з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ дозволяє суттєво спростити результати групової класифікації рівнянь (5).

Далі в класі (5) зробимо заміну залежної змінної

$$v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}\,u(t,x) - \frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}|f(x)|}{2h(x)}. \tag{6}$$

При цьому (5) відображується в клас

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^2 + G(x), \tag{7}$$

де довільні елементи $H(x)$ та $G(x)$ виражаються через функції $f(x)$ та $h(x)$ за формулами

$$H(x) = h(x)|f(x)|^{-\frac{3}{2}}, \tag{8}$$

$$G(x) = \left(\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}|f(x)|}{2h(x)} \right)_{xx} - \frac{((\sqrt{|f(x)|})_{xx})^2\sqrt{|f(x)|}}{4h(x)}. \tag{9}$$

Таким чином, задачу групової класифікації рівнянь реакції-дифузії (2) зведено до отримання такої класифікації для рівняння (7), група еквівалентності $G^{\sim}_{HG}$ якого складається з перетворень

$$\tilde{t} = {\delta_1}^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v,$$
$$\tilde{H} = \frac{H}{{\delta_1}^2\delta_4}, \quad \tilde{G} = \frac{\delta_4 G}{{\delta_1}^2}.$$

Тут δ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – довільні сталі, $\delta_1\delta_4 \neq 0$.

В наступному параграфі наведено результати класифікації рівнянь (7) та за ними відновлено групову класифікацію класу (5).

3. Ліївські симетрії. Групову класифікацію класу рівнянь (7) виконаємо за класичним алгоритмом [15, 16]. Нехай інфінітезимальний оператор

$$Q = \tau(t,x,v)\partial_t + \xi(t,x,v)\partial_x + \eta(t,x,v)\partial_v$$

породжує групу симетрій рівняння (7). Тоді з інфінітезимального критерію інваріантності після переходу на многовид, заданий в продовженому просторі рівнянням (7), та розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q:

$$\tau_x = \tau_v = \xi_v = \eta_{vv} = 0, \quad \tau_t = 2\xi_x, \quad \xi_t = \xi_{xx} - 2\eta_{xv}, \tag{10}$$

$$\eta_t = \eta_{xx} - (\eta_v - \tau_t)(Hv^2 + G) + 2\eta Hv + \xi H_x v^2 + \xi G_x. \tag{11}$$

Розв'язуючи рівняння (10), знаходимо $\tau = \tau(t)$,

$$\xi = \tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t), \quad \eta = \left(-\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_t x + \zeta(t)\right)v + \eta^0(t,x).$$

Підставляючи отримані форми коефіцієнтів τ, ξ, η в рівняння (11) і розщеплюючи його за змінною v, отримуємо класифікуючи умови,

$$\left(\tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)H_x = \left(\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_t x - \zeta - \tau_t\right)H,$$
$$2\eta^0 H = -\tfrac{1}{8}\tau_{ttt}x^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_{tt}x + \zeta_t + \tfrac{1}{4}\tau_{tt},$$
$$\left(\tfrac{1}{2}\tau_t x + \sigma\right)G_x = -\left(\tfrac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \tfrac{1}{2}\sigma_t x - \zeta + \tau_t\right)G + {\eta^0}_t - {\eta^0}_{xx},$$

що дають подальші обмеження на коефіцієнти оператора Q в залежності від вигляду функцій H та G. Якщо не фіксувати функції H та G, то, розщеплюючи в останніх рівняннях за цими функціями та їх похідними, отримуємо $\tau_t = 0$, $\sigma = \zeta = \eta^0 = 0$. З цього випливає, що ядром основних груп рівнянь з класу (7) є група Лі, алгебра Лі якої $A^{\ker} = \langle\partial_t\rangle$. Всі можливі випадки розширення ядра основних груп класу (7) пераховано в табл. 1 з точністю до перетворень еквівалентності з групи $G^{\sim}_{HG}$.

Перетворення (6) є невиродженим точковим перетворенням класу (5) в (7). При цьому базисні елементи алгебри Лі інваріантності рівнянь (5) отримуються з відповідних елементів алгебри Лі рівняння (7) за формулою

$$\tilde{Q} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \left[\xi\left(\left(\frac{(\sqrt{|f|})_{xx}\sqrt{|f|}}{2h}\right)_x - \frac{vf_x}{2f\sqrt{f}}\right) + \frac{\eta}{\sqrt{|f|}}\right]\partial_u, \tag{12}$$

в яку треба підставити v з (6). Тут τ, ξ та η – коефіцієнти операторів з табл. 1 при ∂_t, ∂_x та ∂_v.

Відображення (6) не є взаємооднозначним, бо прообразом кожного рівняння з (7) є чотирипараметрична сім'я рівнянь з класу (5). Кожна така сім'я складається з рівнянь, що еквівалентні між собою відносно перетворень еквівалентності класу (5) наведених у теоремі 3. Для того, щоб розв'язати задачу групової класифікації класу (5)

Таблиця 1. Результати групової класифікації класу рівнянь $v_t = v_{xx} + H(x)v^2 + G(x), \quad H(x) \neq 0.$

№	$H(x)$	$G(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1	δe^{qx}	$a_1 e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qv\partial_v$
2	δe^{qx}	$\frac{q^4}{4\delta}e^{-qx}$	$\partial_t,\ \partial_x - qv\partial_v,$ $2t\partial_t + (x+2qt)\partial_x - \left((qx+2q^2t+2)v + \frac{q^2}{\delta e^{qx}}\right)\partial_v$
3	δx^k	$a_2 x^{-(k+4)}$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - (k+2)v\partial_v$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$G_1(x)$	$\partial_t,\ e^{8pt}\Big[\partial_t + 4px\partial_x$ $-4p\left((2px^2+k+2)v + \frac{2p(4px^2+2k+3)}{\delta x^k e^{px^2}}\right)\partial_v\Big]$
5	δe^{px^2}	$G_2(x)$	$\partial_t,\ e^{4pt}\left[\partial_x - 2px\left(v + \frac{2p}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_v\right],$ $e^{8pt}\left[\partial_t + 4px\partial_x - 8p\left((px^2+1)v + \frac{p(4px^2+3)}{\delta e^{px^2}}\right)\partial_v\right]$

$\delta = \pm1 \bmod G^{\sim}_{HG}$; $\quad k \neq 0$, $p \neq 0$, $a_1 \neq \frac{q^4}{4\delta}$; $\quad a_2$, q – довільні сталі.

У випадку 2 $q \neq 0$, якщо $a_1 = 0$. У випадку 4 k може бути 0, якщо $a_2 \neq 0$.

$$G_1(x) = \frac{p^2(2px^2+1)(2px^2-11) + 8kp^3x^2 + 2k(3k-5)p^2}{\delta x^k e^{px^2}} + \frac{k(k+1)(2k+3)px^2 + a_2}{\delta x^{k+4}e^{px^2}}; \quad G_2(x) = \frac{p^2(2px^2+1)(2px^2-11)}{\delta e^{px^2}}.$$

Таблиця 2. Частинні розв'язки рівняння (13).

№	$H(x)$	$G(x)$	$F(x)$
1	δe^{qx}	$a_1 e^{-qx}$	b_1
2	δe^{qx}	$\frac{q^4}{4\delta}e^{-qx}$	$-q^2$
3	δx^k	$a_2 x^{-(k+4)}$	$b_2 x^{-2}$
4	$\delta x^k e^{px^2}$	$G_1(x)$	$-(2px^2(2px^2+2k+3) - b_3)x^{-2}$
5	δe^{px^2}	$G_2(x)$	$-4p^2x^2 - 6p$

$b_1 = -q^2 \pm \sqrt{q^4 - 4\delta a_1}$,
$b_2 = -(k+2)(k+3) \pm \sqrt{(k+2)^2(k+3)^2 - 4\delta a_2}$,
$b_3 = -(k+2)(k+3) \pm \sqrt{(k+2)^2(k+3)^2 - 4a_2}$.

з точністю до перетворень еквівалентності з групи $\hat{G}_1^{\sim}$ достатньо знайти по одному представникові з сімей рівнянь, що перетворенням (6) відображаються до рівнянь класу (7) з коефіцієнтами $H(x)$ та $G(x)$ наведеними у табл. 1. Тобто для кожної пари $(H(x), G(x))$ з табл. 1. достатньо знайти пару функцій $(f(x), h(x))$, що задовольняють умовам (8) та (9).

Виразивши з (8) функцію $h(x)$ та підставивши її в диференціальне рівняння (9), отримуємо нелінійне ЗДР четвертого порядку на невідому функцію $f(x)$. Для того, щоб спростити задачу відшукання частинних розв'язків отриманого рівняння, зведемо його до ЗДР другого порядку

$$\left(\frac{F}{2H}\right)_{xx} + \frac{F^2}{4H} + G(x) = 0 \tag{13}$$

заміною $F(x) = -\dfrac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}$. Частинні розв'язки рівняння (13) для відповідних $H(x)$ та $G(x)$ з табл. 1 наведено у табл. 2.

Тепер задача відшукання функції $f(x)$ зводиться до розв'язання ЗДР другого порядку

$$(\sqrt{|f(x)|})_{xx} + F\sqrt{|f(x)|} = 0 \tag{14}$$

для кожного значення функції $F(x)$ з табл. 2. Нижче наведено загальні розв'язки рівняння (14) для відповідних функцій $F(x)$.

1. $F = b_1$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1x + c_2)^2, \quad b_1 = 0, \\ (c_1 \sin\sqrt{b_1}x + c_2\cos\sqrt{b_1}x)^2, \quad b_1 > 0, \\ (c_1 \sinh\sqrt{-b_1}x + c_2\cosh\sqrt{-b_1}x)^2, \quad b_1 < 0. \end{cases}$$

2. $F = -q^2$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1x + c_2)^2, \quad q = 0, \\ (c_1 \sinh|q|x + c_2\cosh|q|x)^2, \quad q \neq 0. \end{cases}$$

3. $F = \dfrac{b_2}{x^2}$:

$$f(x) = \begin{cases} (c_1x + c_2)^2, \quad b_2 = 0, \\ x(c_1 + c_2\ln|x|)^2, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \\ x(c_1\sin(\alpha\ln|x|) + c_2\cos(\alpha\ln|x|))^2, \quad b_2 > \frac{1}{4}, \\ x(c_1|x|^{\alpha} + c_2|x|^{-\alpha})^2, \quad b_2 < \frac{1}{4}, \quad b_2 \neq 0, \end{cases}$$

де $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{|1-4b_2|}$.

4. $F = -4p^2x^2 - 2p(2k+3) + \dfrac{b_3}{x^2}$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\Big(C_1M_{\kappa,\mu}(2px^2) + C_2W_{\kappa,\mu}(2px^2)\Big)^2,$$

де $\kappa = -\dfrac{2k+3}{4}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{1-4b_3}}{4}$; $M_{\kappa,\mu}$, $W_{\kappa,\mu}$ – функції Уіттекера (див., наприклад, [17]). Якщо $b_3 = -(k+2)(k+3)$, то для рівняння (14) відомий частинний розв'язок $f(x) = x^{-2(k+2)}e^{-2px^2}$.

5. $F = -4p^2x^2 - 6p$:

$$f(x) = \left[C_1\,x\,e^{px^2} + C_2\left(\sqrt{2p\pi}\,x\,e^{px^2}\,\mathrm{Erf}\left(\sqrt{2p}x\right) + e^{-px^2}\right)\right]^2,$$

де $\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$ – функція помилок (див., наприклад, [17]).

Зауваження 1. Вище наголошувалось, що для повної групової класифікації потрібні лише частинні розв'язки рівняння (14), але наведено загальні розв'язки цього рівняння. Це зумовлено тим, що узагальнена розширена група еквівалентності $\hat{G}_1^{\sim}$ досить складна і еквівалентність окремих рівнянь з класу (5) не завжди очевидна. З загальних розв'язків цей зв'язок легко бачити. Наприклад, значенню $F(x) = -1$ (випадок 1, $b_1 = -1$) відповідають, зокрема, значення $f(x) = \sinh^2 x$ та $f(x) = \cosh^2 x$. Це означає, що рівняння

$$\sinh^2 x\, u_t = (\sinh^2 x\, u_x)_x + \delta e^{qx}\sinh^3 x\, u^2$$

еквівалентно рівнянню

$$\cosh^2\tilde{x}\,\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\cosh^2\tilde{x}\,\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \delta e^{q\tilde{x}}\cosh^3\tilde{x}\,\tilde{u}^2.$$

З теореми 3 знаходимо перетворення

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = x, \quad \tilde u = \tanh x\, u,$$

яке дозволяє з симетрій (див. табл. 3) та точних розв'язків другого з цих рівнянь знайти подібні результати для першого.

Таблиця 3. Результати групової класифікації класу рівнянь $f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^2$, $f(x)h(x) \neq 0$.

№	$f(x)$	$h(x)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	∂_t
1.1	1	δe^{qx}	$\partial_t,\ \partial_x - qu\partial_u$
1.2	$\cos^2 x$	$\delta e^{qx}\cos^3 x$	$\partial_t,\ \partial_x - (q - \tan x)\, u\partial_u$
1.3	$\cosh^2 x$	$\delta e^{qx}\cosh^3 x$	$\partial_t,\ \partial_x - (q + \tanh x)\, u\partial_u$
2.1	1	δ	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t + x\partial_x - 2u\partial_u$
2.2	$\cosh^2 qx$	$\delta e^{qx}\cosh^3 qx$	$\partial_t,\ \partial_x - q\,(1+\tanh qx)\, u\partial_u,$ $2t\partial_t + (x+2qt)\partial_x -$ $(2 + q(x+2qt)(1+\tanh qx))\, u\partial_u$
3.1	x^β	δx^γ	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x - (2-\beta+\gamma)u\partial_u$
3.2	$x\cos^2(\alpha\ln\|x\|)$	$\delta x^\gamma\cos^3(\alpha\ln\|x\|)$	$\partial_t,\ 2t\partial_t + x\partial_x -$ $(\gamma + 1 - \alpha\tan(\alpha\ln\|x\|))\, u\partial_u$
4.1	$x^\beta e^{-rx^2}$	$\delta x^{\beta-2}e^{-rx^2}$	$\partial_t,\ e^{4rt}\,(\partial_t + 2rx\partial_x)$
4.2	$x^{-1}f_1(x)^2$	$\dfrac{\delta e^{px^2} f_1(x)^3}{x^{\frac{3}{2}-k}}$	$\partial_t,\ e^{8pt}\Big[\partial_t + 4px\partial_x - 4p\Big(4px^2 +$ $2k + 3 + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\left(2\mu - k - \frac{1}{2}\right)\Big)\, u\partial_u\Big]$
5	$x^2e^{rx^2}$	$\delta x^3 e^{2rx^2}$	$\partial_t,\ e^{2rt}\left(\partial_x - \frac{2rx^2+1}{x}u\partial_u\right),$ $e^{4rt}\left(\partial_t + 2rx\partial_x - 2r(2rx^2+3)u\partial_u\right)$

$\delta = \pm 1$; α, β, γ, p, $r \neq 0$; q, k – довільні сталі. У випадках 1.1 та 2.2 $q \neq 0$.

У випадку 1.3 $q \neq 1$. У випадку 3.1 $(\beta,\gamma) \neq \{(-6,-9),\ (0,0),\ (2,3),\ (8,12)\}$.

$f_1(x) = M_{\kappa,\mu}(2px^2)$, $\quad f_2(x) = M_{\kappa+1,\mu}(2px^2)$ – функції Уіттекера,

де $\kappa = -\dfrac{2k+3}{4}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{1-4b_3}}{4}$.

Вибираючи найбільш прості частинні розв'язки рівняння (14) з вищенаведених загальних та знаходячи відповідні їм функції $h(x)$ з алгебраїчного рівняння (8), отримуємо усі нееквівалентні відносно групи $\hat G_1^\sim$ випадки розширення ядра основних груп в класі рівнянь (5). Базисні оператори максимальної алгебри інваріантності для цих випадків відновлено з відповідних операторів, наведених у табл. 1, за формулою (12). Ядром основних груп рівнянь з класу (5) є група зсувів за змінною t.

Результати групової класифікації представлено у табл. 3. Нумерація випадків табл. 3 показує, з яких випадків табл. 1 їх отримано. Для зручності у деяких випадках табл. 3 введено нові сталі, а саме, у випадку 3.2 $k+\frac{3}{2}$ позначено через γ, а у випадку 4.1 $\beta = -2(k+2)$. У випадках 4.1 та 5 $r = 2p$.

Зауваження 2. Всі випадки, отримані з випадку 3 табл. 1 за умови $b_2 \leq \frac{1}{4}$, об'єднано в один випадок 3.1 табл. 3. Параметри (β,γ) не дорівнюють $(0,0)$, оскільки при цих значеннях маємо тривимірну максимальну алгебру інваріантності (випадок 2.1 табл. 3.). Також $(\beta,\gamma) \neq \{(-6,-9),\ (2,3),\ (8,12)\}$, оскільки ці випадки еквівалентні 2.1 відносно перетворень з групи $\hat G_1^\sim$.

3. Точні розв'язки. Оператори симетрії, отримані при розв'язанні задачі групової класифікації, можна використовувати для побудови точних розв'язків рівнянь з класів (5) та (7). Метод редукції за оптимальною системою підалгебр максимальної алгебри Лі інваріантності добре відомий і достатньо алгоритмічний (див., наприклад, [15, 16]). За допомогою цього методу побудовано наступні точні розв'язки рівнянь з класу (7).

1. $H = \delta e^{qx}$, $\quad G = a_1 e^{-qx}$: $\quad v = -\dfrac{q^2 + 2\theta\tanh(\theta t)}{2\delta e^{qx}}$,

$$v = -\frac{q^2 + 2\theta\coth(\theta t)}{2\delta e^{qx}}, \quad v = \frac{-q^2 \pm 2\theta}{2\delta e^{qx}}, \quad \text{де } \theta = \frac{1}{2}\sqrt{q^4 - 4a_1\delta}.$$

2. $H = \delta e^{qx}$, $\quad G = \dfrac{q^4}{4\delta}e^{-qx}$: $\quad v = -\dfrac{q^2 t + 2}{2\delta t e^{qx}}$, $\quad v = -\dfrac{q^2}{2\delta e^{qx}}$.

3. $H = \delta x^k$, $\quad G = \dfrac{a_2}{x^{k+4}}$: $\quad v = \dfrac{b_2}{2\delta x^{k+2}}$.

4. $H = \delta x^k e^{px^2}$, $\quad G = G_1(x)$: $\quad v = -\dfrac{2px^2(2px^2 + 2k + 3) - b_3}{2\delta x^{k+2}e^{px^2}}$.

5. $H = \delta e^{px^2}$, $G = G_2(x)$: $v = -\dfrac{p(2px^2+3)}{\delta e^{px^2}}$,

$$v = -\frac{px^2(2px^2+3)+6}{\delta x^2 e^{px^2}}, \quad v = -\frac{p\left((2px^2-5)e^{-8pt}+2px^2+3\right)}{\delta(e^{-8pt}+1)e^{px^2}}.$$

Визначення функцій $G_1(x)$, $G_2(x)$ та сталих b_2, b_3 наведено після таблиць 1 та 2 відповідно.

Частинні розв'язки рівняння (5) можна знайти, як перетворюючи відповідні розв'язки рівнянь з класу (7), так і безпосередньо методом редукції. Нижче наведено деякі точні розв'язки рівнянь з класу (5), отримані в рамках цих підходів.

1.1. $f = 1$, $h = \delta e^{qx}$: $u = -\dfrac{q^2}{\delta}e^{-qx}$,

$$u = -\frac{\theta(1+\tanh(\theta t))}{\delta e^{qx}}, \quad u = -\frac{\theta(1+\coth(\theta t))}{\delta e^{qx}}, \quad \text{де } \theta = \frac{q^2}{2}.$$

1.2. $f = \cos^2 x$, $h = \delta e^{qx}\cos^3 x$: $u = -\dfrac{2\theta}{\delta e^{qx}\cos x}$,

$$u = -\frac{\theta(1+\tanh(\theta t))}{\delta e^{qx}\cos x}, \quad u = -\frac{\theta(1+\coth(\theta t))}{\delta e^{qx}\cos x}, \quad \text{де } \theta = \frac{q^2+1}{2}.$$

1.3. $f = \cosh^2 x$, $h = \delta e^{qx}\cosh^3 x$: $u = -\dfrac{2\theta}{\delta e^{qx}\cosh x}$,

$$u = -\frac{\theta(1+\tanh(\theta t))}{\delta e^{qx}\cosh x}, \quad u = -\frac{\theta(1+\coth(\theta t))}{\delta e^{qx}\cosh x}, \quad \text{де } \theta = \frac{q^2-1}{2}.$$

2.1. $f = 1$, $h = \delta$: $u = -\dfrac{1}{\delta t}$, $u = -\dfrac{6}{\delta x^2}$.

2.2. $f = \cosh^2 qx$, $h = \delta e^{qx}\cosh^3 qx$: $u = -\dfrac{e^{-qx}}{\delta t\cosh(qx)}$.

3.1. $f = x^\beta$, $h = \delta x^\gamma$: $u = \dfrac{(2\beta-3-\gamma)(2-\beta+\gamma)}{\delta x^{2-\beta+\gamma}}$.

3.2. $f = x\cos^2(\alpha\ln|x|)$, $h = \delta x^\gamma\cos^3(\alpha\ln|x|)$:

$$u = -\frac{(\gamma+1)^2+\alpha^2}{\delta\cos(\alpha\ln|x|)}\,x^{-(\gamma+1)}.$$

4.1. $f = x^\beta e^{-rx^2}$, $h = \delta x^{\beta-2}e^{-rx^2}$: $u = z(\omega)$, де $\omega = xe^{-2rt}$,

а z задовольняє рівняння $\omega^2 z_{\omega\omega} + \beta\omega z_\omega + \delta z^2 = 0$.

Якщо $\beta = 1$, то $u = -\dfrac{6}{\delta(\ln|x|-2rt)^2}$.

5. $f = x^2e^{rx^2}$, $h = \delta x^3 e^{2rx^2}$: $u = \dfrac{4re^{-rx^2}}{\delta x\,(e^{4rt}+1)}$, $u = -\dfrac{6e^{-rx^2}}{\delta x^3}$.

Використовуючи перетворення еквівалентності, з вищенаведених розв'язків можна отримати точні розв'язки для складніших рівнянь реакції-дифузії з квадратичною нелінійністю.

Авторка вдячна Р.О. Поповичу за корисні дискусії та ідею використання перетворень класів рівнянь для спрощення задачі групової класифікації. Робота була частково підтримана грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**, № 3. – С. 492–495.

[2] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – **22**, № 6. – С. 1393–1400.

[3] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms // Euro. J. of Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[4] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equation // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[5] Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.

[6] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[7] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Ukr. Mat. Visn. – 2005. – **2**. – P. 149–200.

[8] Ivanova N.M., Sophocleous C. On the group classification of variable coefficient nonlinear diffusion–convection equations // J. Comp. Appl. Math. – 2006. – **197**. – P. 322–344.

[9] Crank J. The mathematics of diffusion. – London: Oxford, 1979. – 414 p.

[10] Kamin S., Rosenau P. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium // J. Math. Phys. – 1982. – **23**. – P. 1385–1390.

[11] Murray J.D. Mathematical biology I: An introduction. – New York: Springer, 2002. – 551 p.

[12] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – in press.

[13] Мелешко С.В. Однородные автономные системы с тремя независимыми переменными // Прикл. мат. мех. – 1994. – **58**. – С. 97–102.

[14] Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 1597–1619.

[15] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[16] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[17] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа II: Трансцендентные функции. – Москва: Физматгиз, 1963. – 516 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 63–70

УДК 514.745.82

Інтегровні геодезійні потоки на двовимірній сфері, породжені одновимірними багаточастинковими системами

А.Я. ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів
E-mail: matmod@franko.lviv.ua

Розглянуто питання існування додаткового першого інтеграла геодезійного потоку ріманової метрики на двовимірній сфері. Отримано явний вигляд відповідних метрик, пов'язаних з потенціалами взаємодії інтегровних три- та чотиричастинкових систем Калоджеро–Мозера та Тоди.

The problem of the existence of additional first integral for the geodesic flow of Riemannian metric on two-dimensional sphere is considered. The explicit form of corresponding metrics, connected with potentials of interaction in integrable three- and four-particle Calogero–Moser and Toda systems is obtained.

1. Вступ. Однією з нетривіальних задач у теорії інтегровних скінченновимірних гамільтонових систем є проблема інтегровності геодезійних потоків ріманових метрик на сфері S^2.

Нагадаємо, що на довільному гладкому многовиді M з рімановою метрикою ds^2 можна сконструювати геодезійний потік – гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\vec{p}\|^2$, де $\vec{p}$ – вектор узагальнених імпульсів і $\|\cdot\|$ – норма на дотичному просторі, індукована відповідною метрикою ds^2. Геодезійний потік називається *інтегровним*, якщо він є інтегровним як гамільтонова система. Якщо розглядуваний многовид є сферою S^2, відповідний геодезійний потік є гамільтоновою системою з двома ступенями вільності, тому достатньою умовою його інтегровності за Ліувіллем є існування ще однієї функції на дотичному розшаруванні $F : T^*S^2 \to \mathbb{R}$, функціонально незалежної з $\mathcal{H}$, яка є сталою на траєкторіях гамільтонової системи. Відомо, що у випадку двовимірного многовида S^2 існує система глобальних координат $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, відомих як ізотермічні координати (див. [1]), в яких метрика на сфері має вигляд

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

а відповідний гамільтоніан – вигляд

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2)/\lambda(x, y). \tag{2}$$

Очевидно, достатньо шукати додаткові перші інтеграли гамільтонової системи з гамільтоніаном (2) у вигляді однорідного многочлена за імпульсами, оскільки будь-яка однорідна за імпульсами компонента розвинення інтеграла F в ряд Лорана знову є першим інтегралом цієї ж системи (див. [2]). Проблеми існування для геодезійного потоку додаткових перших інтегралів, що є лінійними або квадратичними функціями за імпульсами, є повністю досліджені (див., наприклад, [3]). Однак для випадку додаткових інтегралів вищих порядків відомі лише деякі частинні випадки, які переважно пов'язані з класичними інтегровними задачами динаміки твердого тіла.

2. Інтеграл третього степеня. Розглянемо задачу існування додаткового першого інтеграла, кубічного за імпульсами, вигляду

$$F = E^{30}(x, y)p_x^3 + E^{21}(x, y)p_x^2 p_y + E^{12}(x, y)p_x p_y^2 + E^{03}(x, y)p_y^3 \tag{3}$$

для геодезійного потоку метрики (1) на сфері S^2.

Надалі перейдемо до комплексних координат z, $\bar{z}$ $(z = x + iy)$. У цих координатах метрика (1) має вигляд $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, а гамільтоніан задається формулою $\mathcal{H} = 2p\bar{p}/\lambda(z, \bar{z})$, де $p = (p_x - ip_y)/2$ – відповідний узагальнений імпульс.

Зобразимо перший інтеграл (3) в координатах z, $\bar{z}$, p, $\bar{p}$ у вигляді

$$F = A(z, \bar{z})p^3 + B(z, \bar{z})p^2\bar{p} + C(z, \bar{z})p\bar{p}^2 + D(z, \bar{z})\bar{p}^3. \tag{4}$$

Оскільки F є дійснозначною функцією, то симетричні функціональні коефіцієнти в (4) є комплексно-спряженими, тобто $D = \bar{A}$, $C = \bar{B}$. Запишемо умову того, що функція (4) є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\mathcal{H}$. Тоді дужка Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$ тотожно дорівнює нулю:

$$\{\mathcal{H}, F\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{p}}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при усіх мономах $p^i\bar{p}^j$ в дужці Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &A_2 = 0, \quad A_1\lambda + B_2\lambda + 3A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0, \\ &B_1\lambda + C_2\lambda + 2B\lambda_1 + 2C\lambda_2 = 0, \\ &C_1\lambda + D_2\lambda + C\lambda_1 + 3D\lambda_2 = 0, \quad D_1 = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

де введено позначення $A_1 := \partial A/\partial z$, $A_2 := \partial A/\partial \bar{z}$ і т.п.

З першого рівняння негайно отримуємо, що $A = A(z)$ є голоморфною функцією аргументу $z \in \mathbb{C}$. Елементарними міркуваннями (див. [4]) легко показати, що $A(z)$ є поліномом не вище 6-го степеня. Відповідно, диференціальні форми $\lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, $dz^3/A(z)$, $dz^2d\bar{z}/B(z, \bar{z})$ є інваріантними щодо довільного голоморфного перетворення глобальної координати z, тобто

$$dz^3/A(z) = d\omega^3/\tilde{A}(\omega), \quad \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z} = \tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}.$$

Лема. *При $\omega \to \infty$ справедливі такі асимптотики:*

$$\tilde{\lambda}(\omega, \tilde{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2\tilde{\omega}^2}, \quad \tilde{\beta}(\omega, \tilde{\omega}) = (b + o(1))\omega^2,$$
$$\widetilde{\Phi}(\omega, \tilde{\omega}) = c + o(1),$$

де a, b, c – деякі константи (можливо, нульові).

Доведення леми цілком аналогічне до відповідного результату Колокольцова [4], яке було одержано для додаткових квадратичних за імпульсами перших інтегралів. Таким чином, заміна змінної

$$z = \int_0^\omega (3\widetilde{A}(s)/i)^{-1/3}ds \tag{6}$$

переводить глобальну координату ω в локальну координату $z \in K \subset \mathbb{C}$, якій відповідає поліном $A(z) = i/3$.

Теорема. *Глобальний поліном $\widetilde{A}(\omega)$ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати лише один із наступних виглядів:*

1. $\widetilde{A}(\omega) = i/3$,
2. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega/3$,
3. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^2/3$,

4. $\widetilde{A}(\omega) = i\omega^3/3$,
5. $\widetilde{A}(\omega) = i(\omega-\theta)^2(\omega+\bar{\theta})^2/3$.

Доведення теореми легко випливає з однозначності оберненого перетворення $\omega(z) : K \to \mathbb{C}$, що пов'язане з однозначністю відображення, оберненого до (6), і практично повністю повторює міркування роботи [4], проведені для випадку квадратичного додаткового першого інтеграла.

Таким чином, зручно розглядати випадок локальної координати z, для якої $A(z) = \text{const} = i/3$, оскільки всі інші інтегровні випадки можуть бути легко отримані за допомогою заміни змінної $d\omega/dz = (3\tilde{A}(\omega)/i)^{1/3}$. Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $A(z) = i/3$. Введемо позначення $\beta = iB\lambda$, $\gamma = -iC\lambda$. Тоді відповідна система рівнянь (5) на невідомі функції λ, β, γ набуде вигляду

$$\beta_2 = \lambda_1, \quad \beta_1\lambda + \beta\lambda_1 = \gamma_2\lambda + \gamma\lambda_2, \quad \gamma_1 = \lambda_2. \tag{7}$$

Це звичайна нелінійна система диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно функції λ, лінійна стосовно перших похідних від невідомої функції. При дослідженні розв'язків системи (7) одним із важливих моментів є питання про асимптотичну поведінку розв'язків у критичних точках області зміни локальної координати z.

У роботі [5] запропоновано загальний підхід до розв'язування цієї системи і описано декілька інтегровних систем рухомої частинки на сфері, що еволюціонує під впливом деякого потенціалу, які пов'язані з відомими інтегровними натуральними гамільтоновими системами. Один із таких розв'язків отримується при підстановці першого та третього рівнянь системи (7) у друге:

$$\beta_1\lambda + \beta\beta_2 = \gamma_2\lambda + \gamma\gamma_1.$$

Розглянувши випадок, коли з цього рівняння неможливо виразити λ внаслідок виконання рівностей

$$\beta_1 = \gamma_2, \quad \beta\beta_2 = \gamma\gamma_1,$$

остаточно отримаємо

$$\lambda_{111} = \beta_{112} = \gamma_{122} = \lambda_{222},$$

звідки

$$\lambda = f_1(z+\bar{z}) + f_2(\varepsilon z + \varepsilon^2\bar{z}) + f_3(\varepsilon^2 z + \varepsilon\bar{z}), \tag{8}$$

де $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$ – первісний кубічний корінь з одиниці, $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, – довільні гладкі функції.

Легко перевірити, що зображення функції $\lambda(z, \bar{z})$ у вигляді (8) при підстановці в систему (7) дає в якості першоджерела відповідної метрики дві інтегровні системи на сфері S^2, що пов'язані з натуральними динамічними системами з гамільтоніанами

$$\mathcal{H}_1 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + c_1\exp(x_1) + c_2\exp(\tilde{x}_1) + c_3\exp(\tilde{\tilde{x}}_1) \tag{9}$$

та

$$\mathcal{H}_2 = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}), \tag{10}$$

де

$$\tilde{x}_1 = -\tfrac{1}{2}x + y\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tilde{\tilde{x}}_1 = -\tfrac{1}{2}x - y\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Гамільтоніани (9), (10) описують відповідно замкнутий ланцюжок Тоди та систему Калоджеро–Мозера взаємодіючих трьох точок на прямій, які допускають існування додаткового кубічного за імпульсами першого інтеграла. За допомогою принципу Мопертюї динамічні системи з гамільтоніанами (9), (10) індукують геодезійні потоки на многовидах

$$M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1\exp(x_1) + c_2\exp(\tilde{x}_1) + c_3\exp(\tilde{\tilde{x}}_1) < h\},$$
$$M_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}) < h\},$$

з метриками

$$ds_1^2 = (h - c_1\exp(x_1) - c_2\exp(\tilde{x}_1) - c_3\exp(\tilde{\tilde{x}}_1)(dx_1^2 + dx_2^2), \tag{11}$$
$$ds_1^2 = (h - g^2(x_1^{-2} + \tilde{x}_1^{-2} + \tilde{\tilde{x}}_1^{-2}))(dx_1^2 + dx_2^2). \tag{12}$$

Причетність обидвох цих систем до генерування інтегровних геодезійних потоків на сфері було відзначено в роботі [7], однак для них не було знайдено явного виразу для $\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})$ в глобальній координаті $\omega \in \mathbb{C}$.

Виявляється, що метрика (12) системи Калоджеро–Мозера, аналогічно як і метрика (11) замкнутого ланцюжка Тоди, за допомогою принципу Мопертюї генерує три сім'ї інтегровних гамільтонових систем на сфері S^2 для випадків $\widetilde{A}(\omega) \in \{i/3, i\omega/3, i\omega^2/3\}$, однак жоден із них не приводить до побудови гладкої метрики на S^2, тобто всі три випадки описують динаміку руху частинки на сфері S^2 під дією деякого потенціалу, що має сингулярні точки на конфігураційному просторі. Тому ці інтегровні системи не становлять значного інтересу в питаннях дослідження інтегровності геодезійних потоків на S^2. Але метрика (11) за умов $c_1 = c_2 = c_3 = c > 0$, $h > 0$, відповідає локальному многовиду $K \subset \mathbb{C}$, такому що K є трикутником з вершинами в точках $\{\varrho i, \varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i\}$, де $h = 2\exp(\varrho\sqrt{3}/2)$. У всіх вершинах трикутника K функція $\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})$ обертається в нуль. Тоді за допомогою інтеграла Крістоффеля–Шварца

$$\omega = \int_0^\omega \frac{dz}{\sqrt[3]{(z - \varrho\varepsilon i)^2 (z - \varrho\varepsilon^2 i)^2}} \tag{13}$$

область K конформно і однолисто відображається у верхню півплощину комплексної площини $\mathbb{C}$. Відповідно, область $K \cup K_1$ (де K_1 – трикутник, симетричний до K відносно відрізка $[\varrho\varepsilon i, \varrho\varepsilon^2 i]$) відображається конформно і однолисто у всю комплексну площину. Отже, для випадку $\widetilde{A}(\omega) = i(z - \varrho\varepsilon i)^2 (z - \varrho\varepsilon^2 i)^2/3$ гладка на S^2 інтегровна метрика з додатковим кубічним за імпульсами першим інтегралом має явний вигляд

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{\lambda(z(\omega), \bar{z}(\bar{\omega}))}{|\widetilde{A}(\omega)|^{\,2/3}}, \tag{14}$$

де $z(\omega)$ – та вітка многозначної функції, оберненої до (13), область значень якої співпадає з областю $K \cup K_1 \subset \mathbb{C}$. Легко переконатися, що функція (12) задовольняє асимптотиці

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2 \bar{\omega}^2}, \quad \omega \to \infty.$$

3. Інтеграл четвертого степеня. Аналогічним чином розглянемо модель геодезійного потоку на сфері з додатковим першим інтегралом, що є поліномом четвертого степеня за імпульсами. Нехай перший інтеграл метрики (1) має вигляд

$$F = A(z, \bar{z})p^4 + B(z, \bar{z})p^3\bar{p} + C(z, \bar{z})p^2\bar{p}^2 +$$

$$+ D(z, \bar{z})p\bar{p}^3 + D(z, \bar{z})\bar{p}^4. \tag{15}$$

Міркування, аналогічні до наведених вище для кубічного за імпульсами першого інтеграла, приводять до висновку, що $A(z)$ є поліномом не вище восьмого степеня. Розглядаючи деяку локальну координату z, для якої $A(z) = 1/4$, і ввівши позначення $\beta = -B\lambda$, $\gamma = -C\lambda$, $\delta = -D\lambda$, легко отримати систему рівнянь для невідомих функцій λ, β, γ, δ, аналогічну до вищенаведеної системи (7):

$$\begin{aligned} &\beta_2 = \lambda_1, \quad \beta_1\lambda + \beta\lambda_1 = \gamma_2\lambda + 2\gamma\lambda_2, \\ &\delta_2\lambda + \delta\lambda_2 = \gamma_1\lambda + 2\gamma\lambda_1, \quad \gamma_1 = \lambda_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Зауважимо, що з другого та третього рівнянь системи (16) випливає, що функція γ є дійснозначною, а β та δ – комплексно-спряжені.

Виключимо γ з другого та третього рівнянь:

$$(\beta_1\lambda + \beta\lambda_1)_1 = (\delta_2\lambda + \delta\lambda_2)_2.$$

Тоді випадок

$$\beta_1 = \gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_1$$

є аналогічним до того, що був описаний вище для метрики (8) у випадку кратного додаткового інтеграла. У цьому випадку функція λ задовольняє рівняння $\lambda_{1111} = \lambda_{2222}$ із загальним розв'язком

$$\lambda = f_1(z + \bar{z}) + f_2(\theta z + \theta^3 \bar{z}) + f_3(\theta^2 z + \theta^2 \bar{z}) + f_4(\theta^3 z + \theta \bar{z}),$$

де θ – первісний корінь четвертого степеня з одиниці, а саме $\theta = i$. Підставляючи загальний вигляд функції λ в умову тотожної рівності нуль дужки Пуассона $\{F, \mathcal{H}\} = 0$, одержимо функціональне рівняння

$$\begin{aligned} &(f_4 - f_2)(\dddot{f}_3 - \dddot{f}_1) + 2(\ddot{f}_4 - \ddot{f}_2)(f_3 - f_1) + \\ &\quad + 3\dot{f}_4(\dot{f}_3 - \dot{f}_1) + 3\dot{f}_2(\dot{f}_3 + \dot{f}_1) = 0. \end{aligned}$$

Це функціональне рівняння вперше виникло в роботі [6] при дослідженні інтегровних натуральних динамічних систем з додатковим першим інтегралом 4 степеня. Один із частинних розв'язків (для якого $f_4 = 0$) генерує інтегровну метрику на сфері, для якої у глобальній координаті ω відповідний поліном

$$\widetilde{A}(\omega) = (\omega - \omega_1)^2 (\omega - \omega_2)^3/4.$$

Відповідний інтегровний геодезійний потік на сфері породжується натуральною динамічною системою з двома ступенями вільності та гамільтоніаном

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \gamma(\exp(2x) + \exp(-2y) + 2\exp(y-x))),$$

що описує окремий випадок системи чотирьох частинок на прямій, що рухається під дією експоненціального потенціалу взаємодії, а саме відповідають розірваному ланцюжку Тоди з симетричним розташуванням частинок та протилежними за значеннями величинами імпульсів.

4. Заключні зауваження. У дослідженнях А.В. Болсінова, В.С. Матвєєва та А.Т. Фоменка (див. [3]) свого часу було висловлено гіпотезу про наявність для аналітичних метрик на сфері S^2 інтегровних геодезійних потоків з додатковими поліноміальними першими інтегралами вище четвертого степеня за імпульсами. Останнім часом роботи Є.Н. Селіванової підтверджують можливість будувати нові однопараметричні метрики на сфері з додатковими першими інтегралами 3 та 4 степеня. Питання ж підтвердження або заперечення гіпотези про метрики з нетривіальними інтегралами степеня вище четвертого надалі залишається відкритим.

[1] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – Москва: Наука, 1967. – 664 с.

[2] Whittaker E.T. A Treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. – Cambridge: Cambridge University Press, 1937.

[3] Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T. Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries // Math. Sb. – 1998. – **189**, № 9–10. – P. 1441–1466.

[4] Колокольцов В.Н. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на римановых многообразиях // Дисс. . . . канд. физ.–мат. наук. – Москва, 1984.

[5] Вус А.Я. Геодезійні потоки на сфері S^2 з додатковим кубічним за імпульсами першим інтегралом // Математичний вісник НТШ. – 2005. – **2**. – С. 49–57.

[6] Hietarinta J. Direct methods for the search of second invariant // Phys. Rep. – 1987. – **147** – P. 87–154.

[7] Dullin H.R., Matveev V.S., Topalov P.I. On integrals of the third degree in the momenta // Regular and Chaotic Dynamics, – 1999. – **4**, N 3 – P. 35–44.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 71–91

УДК 517.912:512.816

Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі

О.В. ГАПОНОВА, М.О. НЕСТЕРЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: gaponova@imath.kiev.ua, maryna@imath.kiev.ua

Отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири.

Regular systems of two second-order ordinary differential equations invariant with respect to real three- or four-dimensional Lie algebras are exhaustively described.

1. Вступ. Груповий аналіз є ефективним інструментом при дослідженні диференціальних рівнянь. Зокрема, він надає регулярну процедуру опису класів еквівалентності, для яких можуть бути справедливі ті чи інші загальні твердження теорії диференціальних рівнянь. Найбільш вражаючі досягнення групового аналізу пов'язані зі звичайними диференціальними рівняннями. Майже усі спеціальні методи інтегрування таких рівнянь (заміна змінних, метод інтегруючого множника тощо) насправді є частковими випадками загальної процедури, яка є складовою групового аналізу.

Основні ідеї групового аналізу сформульовано Софусом Лі ще у XIX столітті [6], ним же введено поняття "диференціального інваріанта", яке є важливим при вивчені диференціальних рівнянь груповими методами. У роботі [5] Лі довів, що кожну невироджену інваріантну систему диференціальних рівнянь можна зобразити у термінах диференціальних інваріантів відповідної групи симетрій. Внаслідок цього теорія диференціальних інваріантів стала важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. Пізніше теорія диференціальних інваріантів та відповідний понятійний апарат розвинуто у роботах Тресса [11, 12], Овсяннікова [9] та Олвера [2, 3, 8].

У цій статті теорію диференціальних інваріантів застосовано для вичерпного опису регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Іншими словами, метою є знаходження усіх систем вигляду

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \tag{1}$$

які інваріантні відносно дійсних три- та чотиривимірних алгебр Лі.

Вивчення таких систем вмотивовано тим, що в багатьох випадках вони є базовими у класичній і квантовій механіці, механіці рідини та у загальній теорії відносності. Зокрема, серед (1) містяться усі ньютонівські і геодезичні [4,7] системи. Дослідження усіх можливих симетрій таких систем є надзвичайно складною задачею. Тому у багатьох роботах виконано групову класифікацію лише часткових випадків системи (1). Даміану та Софоклеус в [1] знайшли групи точкових перетворень автономних гамільтонових систем з двома степенями вільності. Вафо Сох та Махмуд розглядали критерій лінеаризації [14] та канонічні форми [13] систем вигляду (1), але, на жаль, їх роботи базуються на помилковій класифікації векторних полів і внаслідок цього містять ряд хибних тверджень.

Статтю організовано наступним чином. У параграфі 2 наведено необхідні поняття та твердження, а також розглянуто приклад побудови інваріантної системи. Класифікацію реалізацій дійсних низькорозмірних алгебр Лі з [10] використано у параграфах 3 та 4 для опису регулярних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, що інваріантні відносно алгебр розмірностей три та чотири. Кожна з наведених систем записується у нормальній формі та містить дві параметр-функції. У параграфі 5 підсумовано отримані результати, сформульовано ряд задач для подальших досліджень та наведено деякі фізично важливі системи, що зводяться до описаних в статті.

2. Диференціальні інваріанти. Розглянемо r-вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів з базисними інфінітезимальними операторами

$$e_i = \xi_i(t, x, y)\partial_t + \eta_i(t, x, y)\partial_x + \zeta_i(t, x, y)\partial_y. \tag{2}$$

Продовжену алгебру $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$ породжують диференціальні оператори

$$e_i^{(n)} = \xi_i(t, x, y)\partial_t + \eta_i(t, x, y)\partial_x + \zeta_i(t, x, y)\partial_y +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\eta_i^k(t, x_{(k)}, y_{(k)})\partial_{x^{(k)}} + \zeta_i^k(t, x_{(k)}, y_{(k)})\partial_{y^{(k)}} \right). \tag{3}$$

Тут і надалі $n \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$, символи $x_{(k)}$ та $y_{(k)}$ позначають набори $(x, x', \ldots, x^{(k)})$ та $(y, y', \ldots, y^{(k)})$ із залежних змінних x, y та їх похідних по t порядків не вище k.

Означення 1. Гладку функцію $I = I(t, x_{(n)}, y_{(n)})\colon \mathbb{R}^{(2n+3)} \to \mathbb{R}$ називають *диференціальним інваріантом* порядку n алгебри Лі $\mathfrak{g}$, якщо $e_i^{(n)} I(t, x_{(n)}, y_{(n)}) = 0$ для продовженого базису $\{e_i^{(n)}\}$ алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$.

Розглянемо ранги

$$r_k = \mathrm{rank}\{(\xi_i, \eta_i, \eta_i^1, \ldots, \eta_i^k, \zeta_i, \zeta_i^1, \ldots, \zeta_i^k),\ i = 1, \ldots, r\}.$$

Оскільки послідовність $\{r_k\}$ не спадає, обмежена значенням r та досягає його, то існує число $\nu = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid r_k = r\}$ та мають місце співвідношення $r_\nu = r_{\nu+1} = \cdots = r$.

Важливість диференціальних інваріантів пояснюється наступним фактом. Нехай система ЗДР інваріантна відносно алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді локально її можна зобразити як об'єднання рівнянь, записаних у термінах диференціальних інваріантів $\mathfrak{g}$ ("регулярна" частина системи) та умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів ("сингулярна" частина).

Природнім є питання чи можна вибрати мінімальний набір диференціальних інваріантів, який дозволяє отримати усі диференціальні інваріанти заданого порядку за допомогою скінченої кількості визначених операцій. Відповідь на це питання позитивна.

Означення 2. Максимальний набір I_n функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку не вище n (тобто інваріантів продовженої алгебри $\mathrm{pr}^{(n)}\mathfrak{g}$) називається *універсальним диференціальним інваріантом* порядку n алгебри $\mathfrak{g}$.

У випадку однієї незалежної та двох залежних змінних розмірність простору потоків порядку n дорівнює $2n + 3$. Отже кількість функціонально незалежних диференціальних інваріантів порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ обчислюється за формулою

$$d_n = 2n + 3 - r_n.$$

Будь-який диференціальний інваріант I порядку n алгебри $\mathfrak{g}$ з необхідністю є диференціальним оператором порядку $n + l$ цієї ж алгебри, $l \geq 0$. Отже, універсальний диференціальний інваріант I_{n+l} можна отримати доповненням універсального диференціального інваріанта I_n диференціальними інваріантами вищих порядків.

Необхідним етапом вивчення регулярних нормальних систем двох ЗДР другого порядку є побудова універсальних диференціальних інваріантів другого порядку відповідних алгебр. Наступна теорема дає необхідний і достатній критерій існування таких систем для заданої алгебри Лі.

Теорема 1. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу* (1) *тоді і тільки тоді, коли* $r_1 = r_2$.

Для повного опису диференціальних інваріантів фіксованої реалізації алгебри Лі досить побудувати функціональний базис диференціальних інваріантів та оператори інваріантного диференціювання. Базиси диференціальних інваріантів можна знайти як частину універсального інваріанта порядку $(\nu + 1)$. Конструктивна процедура побудови операторів інваріантного диференціювання виводиться безпосередньо з умови їх комутування з формально нескінченно продовженими елементами алгебри (див. [9]).

Зауваження 1. Використання операторів інваріантного диференціювання є доцільним і для пошуку диференціальних інваріантів фіксованого порядку у особливо складних випадках, коли метод рухомих реперів та метод, що базується на означенні 1, призводять до громіздких обчислень. Це ілюструється у прикладі 1.

Зауваження 2. У цій роботі використано реалізації низькорозмірних алгебр Лі векторними полями у просторі не більше трьох змінних з класифікації, отриманої у [10]. Залежні та незалежну змінні вибрано з міркувань максимального спрощення обчислень та зовнішнього вигляду систем ЗДР. Системи, які відповідають різним виборам залежних і незалежної змінних у фіксованій реалізації, еквівалентні з точністю до перетворень годографа та перепозначення змінних.

Зауважимо також, що не всі інваріантні регулярні системи ЗДР другого порядку можна представити у нормальній формі. Для виокремлення таких випадків використано теорему 1.

Приклад 1. Розглянемо детально дійсну нерозв'язну алгебру Лі $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$, породжену базисними елементами [10]

$$
\begin{aligned}
&e_1 = \partial_t, \quad e_2 = t\partial_t + x\partial_x, \quad e_3 = t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y,\\
&e_4 = x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y, \quad c \in \{-1,\ 0,\ 1\}.
\end{aligned}
$$

Для знаходження системи ЗДР другого порядку інваріантної відносно цієї реалізації, знайдемо диференціальні інваріанти до другого порядку включно. Оскільки $r_0 = 3$, то інваріантів нульового порядку у цьому випадку немає.

Розглянемо другі продовження базисних операторів:

$$
\begin{aligned}
&e_1^{(2)} = \partial_t, \quad e_2^{(2)} = t\partial_t + x\partial_x - \dot{y}\partial_{\dot{y}} - \ddot{x}\partial_{\ddot{x}} - 2\ddot{y}\partial_{\ddot{y}},\\
&e_3^{(2)} = t^2\partial_t + 2tx\partial_x + x\partial_y + 2x\partial_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})\partial_{\dot{y}} +\\
&\qquad + (2\dot{x} - 2t\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (\ddot{x} - 2\dot{y} - 4t\ddot{y})\partial_{\ddot{y}},\\
&e_4^{(2)} = x\partial_t + 2xy\partial_x + (y^2 + c)\partial_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)\partial_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}\partial_{\dot{y}} +\\
&\qquad + (2\ddot{x}y + 4\dot{x}\dot{y} + 2x\ddot{y} - 3\dot{x}\ddot{x})\partial_{\ddot{x}} + (2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} - 2\dot{x}\ddot{y})\partial_{\ddot{y}}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, що $r_1 = r_2 = 4 = r_l$, $l \geq 3$. Крім того, $d_1 = 5 - 4 = 1$ і $d_2 = 7 - 4 = 3$. Отже, існує один функціонально незалежний інваріант першого порядку та три функціонально незалежні інваріанти другого порядку, причому серед останніх міститься рівно один інваріант першого порядку. Звідси випливає, що критерій теореми 1 виконується і для даної реалізації існує інваріантна система вигляду (1).

Універсальний диференціальний інваріант I_1 породжується єдиною функцією $I = I(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Остання визначається умовами $e_i^{(1)} I = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, які еквівалентні перевизначеній системі ДРЧП першого порядку

$$
\begin{aligned}
&I_t = 0, \quad tI_t + xI_x - \dot{y}I_{\dot{y}} = 0,\\
&t^2 I_t + 2txI_x + xI_y + 2xI_{\dot{x}} + (\dot{x} - 2t\dot{y})I_{\dot{y}} = 0,\\
&xI_t + 2xyI_x + (y^2 + c)I_y + (2y\dot{x} + 2x\dot{y} - \dot{x}^2)I_{\dot{x}} + (2y - \dot{x})\dot{y}I_{\dot{y}} = 0.
\end{aligned}
$$

Набір функціонально незалежних інтегралів відповідної характеристичної системи складається з однієї функції

$$
I = \frac{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}}.
$$

Знайдемо розширення універсального інваріанту I_1 до універсального інваріанту другого порядку I_2. Для цього досить знайти два будь-які функціонально незалежні диференціальні інваріанти $\tilde{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$ та $\hat{I}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y})$, що явно залежать від других похідних.

Слід зазначити, що задача знаходження розв'язків системи

$$e_i^{(2)}\tilde{I}=0,\quad i=1,2,3,4 \tag{4}$$

та застосування методу рухомого реперу є надзвичайно складними і громіздкими, тому для знаходження одного з диференціальних інваріантів другого порядку подіємо оператором інваріантного диференціювання на інваріант I.

Оператор інваріантного диференціювання знаходиться у вигляді $X=\lambda(t,x,y,\dot{x},\dot{y})D_t$, де функція λ знаходиться у неявному вигляді $\varphi(\lambda,t,x,y,\dot{x},\dot{y})$ з системи $(e_i^{(1)}+\lambda D_t(\xi_i)\partial_\lambda)\varphi=0$, $i=1,2,3,4$.

Для даної реалізації алгебри Лі оператор інваріантного диференціювання має вигляд:

$$X=\frac{x}{x\dot{y}+y^2-\dot{x}y+c}D_t.$$

Подіявши цим оператором на знайдений вище інваріант першого порядку I, отримаємо один з шуканих інваріантів другого порядку

$$\hat{I}=\frac{(\ddot{x}-2\dot{y})x(x\dot{y}(\dot{x}-4y)+\dot{x}(y^2+c))-\ddot{y}x^2(\dot{x}^2-2(x\dot{y}+y\dot{x})+2(y^2+c))}{(4x\dot{y}-\dot{x}^2)^2},$$

який використовуємо для знаходження іншого інваріанта $\tilde{I}$ другого порядку. З перших трьох рівнянь системи (4) отримаємо $\tilde{I}=\tilde{I}(J_1,J_2,J_3,J_4)$, де

$$\begin{aligned}&J_1=2y-\dot{x},\quad J_2=4x\dot{y}-\dot{x}^2,\\&J_3=x(\ddot{x}-2\dot{y}),\quad J_4=x^2\ddot{y}-xy(\ddot{x}-2\dot{y}).\end{aligned}\tag{5}$$

Перепишемо четверте рівняння системи (4) та інваріанти I, $\hat{I}$ в термінах J_1, J_2, J_3, J_4

$$\begin{aligned}&2(J_1^2-J_2+4c)\tilde{I}_{J_1}+8J_1J_2\tilde{I}_{J_2}+4(3J_1J_3+2J_4)\tilde{I}_{J_3}+\\&\quad+(2J_1J_4-J_1^2J_3-J_2J_3-4cJ_3)\tilde{I}_{J_4}=0,\end{aligned}\tag{6}$$

$$I=\frac{J_1^2+J_2+4c}{\sqrt{J_2}},\quad \hat{I}=\frac{2J_4(J_1^2-J_2+4c)+J_1J_3(J_1^2+J_2+4c)}{J_2^2}.$$

Скориставшись тим, що I та $\hat{I}$ є розв'язками рівняння (6), знаходимо третій функціонально незалежний з ними розв'язок цього

рівняння:

$$\tilde{I}=\frac{2J_1(2J_4(J_1^2-J_2+4c)+J_1J_3(J_1^2+J_2+4c))-J_3((J_1^2+J_2+4c)^2-16cJ_2)}{(J_1^2-J_2+4c)\sqrt{J_2}((J_1^2+J_2+4c)^2-16cJ_2)}.$$

Повернувшись до вихідних змінних, отримаємо другий шуканий диференціальний інваріант реалізації $R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,3)$, що містить другі похідні:

$$\tilde{I}=\frac{\ddot{x}x(y^2-x\dot{y}+c)+\ddot{y}x^2(\dot{x}-2y)+2x\dot{y}(x\dot{y}-y^2-c)}{\sqrt{4x\dot{y}-\dot{x}^2}((x\dot{y}+y^2-y\dot{x}+c)^2-c(4x\dot{y}-\dot{x}^2))}.$$

Отже, узагальнений диференціальний інваріант другого порядку можна записати у вигляді $I_2=\{I,\hat{I},\tilde{I}\}$. Відповідну інваріантну систему наведено у параграфі 4.

3. Системи з тривимірною алгеброю інваріантності. В цьому параграфі подано повний перелік множин регулярних систем двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних тривимірних алгебр Лі. Кожна інваріантна система записується у нормальній формі та містить дві параметр-функції $F(\omega_1,\omega_2)$ і $G(\omega_1,\omega_2)$, де ω_1, ω_2 – диференціальні інваріанти нульового та першого порядків. Відповідну реалізацію алгебри Лі з переліку, наведеного в роботі [10], вказано перед системою. Решта функцій, що зустрічаються у цьому параграфі, є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

$R(3A_1,1)$: $\omega_1=\dot{x}$, $\omega_2=\dot{y}$,

$$\ddot{x}=F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot{y}=G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(3A_1,3)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot{x}-\dot{\varphi}(y)}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot{x}\dot{y}^2G(\omega_1,\omega_2)+\dot{y}\ddot{\varphi}(y),\quad \ddot{y}=\dot{y}^3G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,1)$: $\omega_1=\dot{x}e^y$, $\omega_2=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x}=\dot{x}^2F(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,2)$: $\omega_1=y$, $\omega_2=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}+\ln\dot{y}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2F(\omega_1,\omega_2)+\dot{x}\dot{y}G(\omega_1,\omega_2),\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G(\omega_1,\omega_2).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,3)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{2.1}\oplus A_1,4)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot yx}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.1},1)$: $\omega_1=y-\frac{1}{\dot x},\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.1},2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot x^2-2\dot y}{\dot y^2}$,

$$\ddot x=\dot y\left(\dot x^2-\dot y\right)F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right),$$
$$\ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^3G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.1},3)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.2},1)$: $\omega_1=y-\frac{1}{\dot x},\ \omega_2=\frac{\dot ye^y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.2},2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot ye^{\frac{1}{\dot x}}}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^2\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.2},3)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3e^{-x}F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot ye^{-x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.3},1)$: $\omega_1=\dot x,\ \omega_2=\dot ye^y$,

$$\ddot x=\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.3},2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\dot x$,

$$\ddot x=\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A_{3.3},3)$: $\omega_1=x,\ \omega_2=\frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3e^yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot ye^yF\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot x^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},1)$: $\omega_1=\dot xe^{(1-a)y},\ \omega_2=\dot ye^y$,

$$\ddot x=\dot x\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\dot x\dot y^{a-1}$,

$$\ddot x=\dot x\dot yF\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^a_{3.4},3)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{x\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3x^{\frac{2a-1}{1-a}}F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x^2\dot yx^{\frac{2a-1}{1-a}}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},1)$: $\omega_1=y+\operatorname{arctg}\dot x,\ \omega_2=\frac{\dot y^2e^{2by}}{1+\dot x^2}$,

$$\ddot x=\dot y\left(1+\dot x^2\right)F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{1+\dot x^2}{\dot y^2}e^{2b\operatorname{arctg}\dot x}$,

$$\ddot x=\dot y\left(1+\dot x^2\right)F\left(\omega_1,\omega_2\right),\quad \ddot y=\dot x\dot y^2F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(A^b_{3.5},3)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{\dot y\left(1+x^2\right)}{\dot x}$,

$$\ddot x=\dot x^3\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}e^{-b\operatorname{arctg}x}F\left(\omega_1,\omega_2\right),$$
$$\ddot y=\frac{\dot x\dot y^2e^{-b\operatorname{arctg}x}}{\sqrt{1+x^2}}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\dot y^2G\left(\omega_1,\omega_2\right)-\frac{2x\dot x\dot y}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),1)$: $\omega_1=2y-\dot x,\ \omega_2=4x\dot y-\dot x^2$,

$$\ddot x=\frac{1}{x}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+2\dot y,\quad \ddot y=\frac{y}{x^2}F\left(\omega_1,\omega_2\right)+\frac{1}{x^2}G\left(\omega_1,\omega_2\right).$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),2)$: $\omega_1=y,\ \omega_2=\frac{x^2\dot y^2}{\dot x^2+1}$,

$$\ddot x=x^2\dot y^3F(\omega_1,\omega_2)-\frac{1+\dot x^2}{x},\ \ \ddot y=\dot y^2(\dot xF(\omega_1,\omega_2)+G(\omega_1,\omega_2))-\frac{2\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),3)$: $\omega_1 = y,\ \omega_2 = \frac{x^2\dot y^2}{\dot x^2-1}$,

$$\ddot x = x^2\dot y^3F(\omega_1,\omega_2) - \frac{\dot x^2-1}{x},\quad \ddot y = \dot y^2(\dot x F(\omega_1,\omega_2) + G(\omega_1,\omega_2)) - \frac{2\dot x\dot y}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}),4)$: $\omega_1 = y,\ \omega_2 = x\dot y$,

$$\ddot x = \frac{1}{2x}F(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot x^2}{2x},\quad \ddot y = \frac{1}{x^2}G(\omega_1,\omega_2) - \frac{\dot x\dot y}{x}.$$

$R(so(3),1)$: $\omega_1 = y,\ \omega_2 = \frac{\dot x^2+\cos^2 x}{\dot y^2}$,

$$\begin{aligned}\ddot x &= \frac{\dot y^3}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) - 2\dot x^2\operatorname{tg}x - \sin x\cos x,\\ \ddot y &= \frac{\dot x\dot y^2}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) + \dot y^2G(\omega_1,\omega_2) - 2\dot x\dot y\operatorname{tg}x.\end{aligned}$$

$R(so(3),2)$: $\omega_1 = y - \operatorname{arctg}\frac{\dot x}{\cos x},\ \omega_2 = \frac{\dot x^2+\cos^2 x}{(\dot y+\sin x)^2}$,

$$\begin{aligned}\ddot x &= \frac{(\dot x^2+\cos^2 x)}{\cos x}\left((\dot y+\sin x)F(\omega_1,\omega_2) + \dot y\right) - \dot x^2\operatorname{tg}x,\\ \ddot y &= \frac{\dot x(\dot y+\sin x)^2}{\cos x}F(\omega_1,\omega_2) + \frac{\dot x\dot y(\dot y+\sin x)}{\cos x} +\\ &\quad + (\dot y+\sin x)^2G(\omega_1,\omega_2) - \dot x\cos x - \dot x(\dot y+\sin x)\operatorname{tg}x.\end{aligned}$$

4. Системи з алгеброю інваріантності розмірності чотири. Даний параграф присвячено системам двох диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантним відносно дійсних чотиривимірних алгебр Лі. Як і у випадку тривимірних алгебр, інваріантні системи записуються у нормальній формі та містять дві параметр-функції $F(\omega)$ і $G(\omega)$, де ω – диференціальний інваріант нульового або першого порядку. Відповідна реалізація алгебри Лі зазначається перед системою, а її явний вигляд можна знайти у роботі [10]. Решта функцій, що позначені грецькими літерами, є довільними, диференційовними потрібну кількість разів, якщо не зазначене інше.

$R(4A_1,8)$: $\omega = y$,

$$\ddot x = \frac{\dot y\,(\theta'\varphi''-\psi''+\theta''\dot x)\,(\dot yG(\omega)+\theta''(\dot x-\varphi'))}{\theta''(\varphi'\theta'-\psi')} + \frac{\dot y^2F(\omega)}{\theta''} + \dot y\varphi'',$$

$$\ddot y = \frac{\dot y^3G(\omega) + \dot y^2\theta''(\dot x-\varphi')}{\varphi'\theta'-\psi'},$$

де вектор-функції $(y,\varphi(y))$ і $(\theta(y),\psi(y))$ – лінійно незалежні, а штрихами позначено похідні за змінною y.

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,4)$: $\omega = \frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^2F(\omega),\quad \ddot y = \dot y^2G(\omega).$$

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,6)$: $\omega = \frac{\dot y}{y\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^2F(\omega) + \dot x^2\dot yG(\omega),\quad \ddot y = \dot x\dot y^2G(\omega).$$

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,9)$: $\omega = y$,

$$\ddot x = \dot y^2F(\omega) + \dot x\dot yG(\omega) - \dot y^2\varphi''\ln\dot y,\quad \ddot y = \dot y^2G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(2A_{2.1},3)$: $\omega = \dot y\dot x^{-\frac{C}{1+C}}e^{\frac{y}{1+C}}$,

$$\ddot x = \dot x\dot yF(\omega),\quad \ddot y = \dot y^2G(\omega).$$

$R(2A_{2.1},4)$: $\omega = \frac{\dot y}{y}e^{\frac{\dot x}{\dot y}}$,

$$\ddot x = \frac{\dot y^2}{y}\left(F(\omega) - G(\omega)\ln\frac{\dot y}{y}\right),\quad \ddot y = \frac{\dot y^2}{y}G(\omega).$$

$R(2A_{2.1},5)$: $\omega = y$,

$$\ddot x = \dot x\dot yF(\omega),\quad \ddot y = \dot y^2G(\omega).$$

$R(2A_{2.1},6)$: $\omega = \frac{x\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot x^2\dot ye^yF(\omega),\quad \ddot y = \dot x\dot y^2e^yF(\omega) + \dot y^2G(\omega).$$

$R(A_{3.1}\oplus A_1,5)$: $\omega = \frac{\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = \dot y^2F(\omega) + \dot x\dot y^2G(\omega),\quad \ddot y = \dot y^3G(\omega).$$

$R(A_{3.1}\oplus A_1,8)$: $\omega = x$,

$$\ddot x = \dot x^3G(\omega) - \frac{\dot x^2\dot y}{\varphi'}F(\omega) - \frac{\dot x\dot y^2\varphi''}{2\varphi'^2},$$

$$\ddot{y} = \left(\dot{x}^2 - \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\varphi'}\right) F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'} - \frac{\dot{y}^3\varphi''}{2\varphi'^2},$$

де $\varphi(x)$ – довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 3)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{\frac{1}{\dot{x}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2\dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 5)$: $\omega = \frac{y\dot{x}+\dot{x}-1}{\dot{y}} e^{-y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^y (1 - y\dot{x}) F(\omega) + e^y \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) - \dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G(\omega) - y\dot{y}^3 e^y F(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 6)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x}) F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) - \dot{x}\dot{y}(1 - y\dot{x}),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) - y\dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) - \dot{y}^2(1 - y\dot{x}).$$

$R(A_{3.2} \oplus A_1, 7)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 e^{-x} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y}e^{-x} F(\omega) + \dot{x}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 3)$: $\omega = \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 5)$: $\omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega) + \dot{x}^2\dot{y}G(\omega) - \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 G(\omega) - \dot{y}^2.$$

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 8)$: $\omega = x$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y} \exp\left(\frac{y\varphi'\dot{x} - \varphi\dot{y}}{\varphi'\dot{x}}\right) F(\omega) + \dot{x}^2 G(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}\varphi''}{\varphi'},$$

де $\varphi(x)$ – довільна функція від x, а штрихами позначено її похідні.

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 3)$: $\omega = \dot{x}\dot{y}^{a-1}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 5)$: $\omega = \frac{\dot{y}e^{ay+y}}{\dot{x}e^y - ae^{ay}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{ay} F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^y G(\omega) + (a-1)\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G(\omega) - \dot{y}^2.$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 6)$: $\omega = \frac{\dot{y}e^{ay}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^y G(\omega) - \dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^y G(\omega) - \dot{y}^2.$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 7)$: $\omega = \frac{\dot{y}x}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^2\dot{y}x^{\frac{2a-1}{1-a}} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 10)$: $\omega = \dot{y}e^y$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{ay} F(\omega) + \dot{x}\dot{y}G(\omega) + a\dot{x}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 3)$: $\omega = \frac{\dot{x}^2+1}{\dot{y}^2} e^{2b\,\mathrm{arctg}\,\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = (\dot{x}^2+1)\dot{y}F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 5)$: $\omega = \frac{\dot{x}(b\cos y - \sin y) + b\sin y + \cos y}{\dot{y}e^{by}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y}^2 e^{by} \left(F(\omega)(\sin y + \dot{x}\cos y) + G(\omega)(\dot{x}\sin y - \cos y)\right) - \dot{y}(1+\dot{x}^2),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 e^{by} \left(F(\omega)\cos y + G(\omega)\sin y\right) - \dot{y}^2(b + \dot{x}).$$

$R(A^b_{3.5} \oplus A_1, 6)$: $\omega = \frac{\dot{y}(x^2+1)}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}^2 \sqrt{x^2+1}\; e^{-b\,\mathrm{arctg}\,x} F(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 \sqrt{x^2+1}\; e^{-b\,\mathrm{arctg}\,x} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) - \frac{2x\dot{x}\dot{y}}{1+x^2}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 3)$: $\omega = \frac{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}{\sqrt{4x\dot{y} - \dot{x}^2}}$,

$$\ddot{x} = \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{x} \left(1 - \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{2(x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c)}\right) F(\omega) +$$
$$+ \frac{(\dot{x} - 2y)(4x\dot{y} - \dot{x}^2)}{2x(\omega^2 - c)} G(\omega) + 2\dot{y},$$
$$\ddot{y} = \frac{4x\dot{y} - \dot{x}^2}{2x^2(\dot{x} - 2y)} \left(4x\dot{y} - 2y\dot{x} + \frac{(4x\dot{y} - \dot{x}^2)(y^2 - x\dot{y} - c)}{x\dot{y} + y^2 - \dot{x}y + c}\right) F(\omega) -$$

$$-\frac{(4x\dot{y}-\dot{x}^2)(y^2-x\dot{y}+c)}{2x^2(\omega^2-c)}G(\omega).$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,4)$: $\omega=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2-1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega)-\frac{\dot{x}^2-1}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2\left(\dot{x}F(\omega)+G(\omega)\right)-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,5)$: $\omega=\frac{x^2\dot{y}^2}{\dot{x}^2+1}$,

$$\ddot{x}=x^2\dot{y}^3F(\omega)-\frac{\dot{x}^2+1}{x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2\left(\dot{x}F(\omega)+G(\omega)\right)-\frac{2\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,6)$: $\omega=x\dot{y}$,

$$\ddot{x}=\frac{1}{2x}F(\omega)+\frac{\dot{x}^2}{2x},\quad \ddot{y}=\frac{1}{x^2}G(\omega)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,7)$: $\omega=y$,

$$\ddot{x}=\frac{x\dot{y}^2}{2y^2}\left(F(\omega)+2G(\omega)\ln(x\dot{y})+\ln^2(x\dot{y})\right)+\frac{\dot{x}^2}{2x},$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{y}^2}{y}\left(G(\omega)+\ln(x\dot{y})\right)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(sl(2,\mathbb{R})\oplus A_1,8)$: $\omega=y$,

$$\ddot{x}=\frac{x\dot{y}^2}{2}F(\omega)+\frac{\dot{x}^2}{2x},\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G(\omega)-\frac{\dot{x}\dot{y}}{x}.$$

$R(so(3)\oplus A_1,1)$: $\omega=\frac{\dot{x}^2+\cos^2x}{\dot{y}^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{\dot{y}^3}{\cos x}F(\omega)-2\dot{x}^2\operatorname{tg}x-\sin x\cos x,$$
$$\ddot{y}=\frac{\dot{x}\dot{y}^2}{\cos x}F(\omega)+\dot{y}^2G(\omega)-2\dot{x}\dot{y}\operatorname{tg}x.$$

$R(so(3)\oplus A_1,2)$: $\omega=\frac{\dot{x}^2+\cos^2x}{(\dot{y}+\sin x)^2}$,

$$\ddot{x}=\frac{(\dot{x}^2+\cos^2x)^{3/2}}{\cos x}F(\omega)+\frac{\dot{y}(\dot{x}^2+\cos^2x)}{\cos x}-\dot{x}^2\operatorname{tg}x,$$

$$\ddot{y}=(\dot{y}+\sin x)^2\left(\frac{\dot{x}}{\cos x}F(\omega)+G(\omega)\right)+\frac{\dot{x}(\dot{y}^2-1)}{\cos x}.$$

$R(A_{4.1},3)$: $\omega=\frac{\dot{y}^2}{2\dot{y}-\dot{x}^2}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}(\dot{y}-\dot{x}^2)F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2G(\omega),\quad \ddot{y}=\dot{y}^3G(\omega)-\dot{x}\dot{y}^2F(\omega).$$

$R(A_{4.1},5)$: $\omega=\frac{y\dot{x}+1}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2(1+\dot{x}y)F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2G(\omega)+\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y}=\dot{y}^3yF(\omega)+\dot{y}^3G(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.1},6)$: $\omega=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\ddot{x}=\frac{1}{2}\dot{x}^3x^2F(\omega)+\frac{1}{2}\dot{x}^3G(\omega)+2x\dot{x}^2\dot{y},$$
$$\ddot{y}=\dot{x}^2\left(1+\frac{1}{2}x^2\dot{y}\right)F(\omega)+\frac{1}{2}\dot{x}^2\dot{y}G(\omega)+2x\dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^b_{4.2},2)$: $\omega=\dot{y}e^{\frac{(b-1)\dot{x}}{\dot{y}}}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}}F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^{\frac{b}{b-1}}G(\omega),\quad \ddot{y}=\dot{y}^{\frac{2b-1}{b-1}}G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2},4)$: $\omega=\dot{y}e^{-by}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2e^{-y}F(\omega)+\dot{x}\dot{y}G(\omega),\quad \ddot{y}=\dot{y}^2G(\omega).$$

$R(A^b_{4.2},5)$: $\omega=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}x^{\frac{b-2}{b-1}}$,

$$\ddot{x}=\frac{\dot{x}^2\dot{y}}{b-1}\left(\ln xF(\omega)+(b-1)G(\omega)-2\ln x\right),$$
$$\ddot{y}=\dot{x}\dot{y}\left(\frac{\dot{y}\ln x}{b-1}-\frac{1}{x}\right)F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2G(\omega)-\frac{2\dot{x}\dot{y}^2\ln x}{b-1}.$$

$R(A^b_{4.2},7)$: $\omega=\frac{e^y(b-1)\dot{x}+e^{by}}{\dot{y}}$,

$$\ddot{x}=\dot{y}^2e^{-y}F(\omega)+\dot{x}\dot{y}^2e^{-by}G(\omega)+(b-1)\dot{x}\dot{y},$$
$$\ddot{y}=\dot{y}^3e^{-by}G(\omega)+(b-1)\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.3},3)$: $\quad \omega = \frac{\dot x}{\dot y} + \ln \dot y$,

$$\ddot x = \dot y^2 F(\omega) + \dot x \dot y G(\omega), \quad \ddot y = \dot y^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.3},5)$, $\varepsilon \in \{0,1\}$: $\quad \omega = \frac{\varepsilon x + e^y}{\dot y}$,

$$\ddot x = \dot y^2 F(\omega) + \dot x \dot y^2 e^{-y} G(\omega) + \dot x \dot y, \quad \ddot y = \dot y^3 e^{-y} G(\omega) + \dot y^2.$$

$R(A_{4.3},6)$: $\quad \omega = \frac{x\dot y}{\dot x}$,

$$\ddot x = x\dot x \dot y^2 \left(F(\omega) - G(\omega)\ln x\right) - 2\dot x^2 \dot y \ln x,$$
$$\ddot y = x\dot y^3 F(\omega) + \dot y^2 (1 - x\dot y \ln x) G(\omega) - 2\dot x \dot y^2 \ln x.$$

$R(A_{4.4},2)$: $\quad \omega = \frac{\dot x^2 - 2\dot y}{\dot y^2}$,

$$\ddot x = \frac{\dot y}{e^{\frac{\dot x}{\dot y}}}\left((\dot y - \dot x^2) F(\omega) + \dot x \dot y G(\omega)\right), \quad \ddot y = \frac{\dot y^2}{e^{\frac{\dot x}{\dot y}}}\left(\dot y G(\omega) - \dot x F(\omega)\right).$$

$R(A_{4.4},4)$: $\quad \omega = \frac{1 + y\dot x}{\dot y} e^y$,

$$\ddot x = \frac{\dot y^2}{e^y}\left((1 + y\dot x)F(\omega) + \dot x G(\omega)\right) + \dot x^2 \dot y, \quad \ddot y = \frac{\dot y^3}{e^y}\left(yF(\omega) + G(\omega)\right) + \dot x \dot y^2.$$

$R(A_{4.4},5)$: $\quad \omega = \frac{\dot x}{\dot y} e^x$,

$$\ddot x = \dot x^2 \dot y F(\omega) + \frac{1}{2} x^2 \dot x^2 \dot y G(\omega) + 2x\dot x^2 \dot y,$$
$$\ddot y = \dot x \dot y^2 F(\omega) + \dot x \dot y \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \dot y\right) G(\omega) + 2x\dot x \dot y^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,c},2)$: $\quad \omega = \frac{\dot y^{b-a}}{\dot x^{c-a}}$,

$$\ddot x = \dot x^{\frac{b-2a}{b-a}} F(\omega), \quad \ddot y = \dot y^{\frac{c-2a}{c-a}} G(\omega).$$

$R(A_{4.5}^{1,1,1},7)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot x = \dot y\left(\dot x - \varphi'\right)\left(F(\omega) + \dot x G(\omega)\right) + \dot y \varphi'', \quad \ddot y = \dot y^2 \left(\dot x - \varphi'\right) G(\omega),$$

де $\varphi(y)$ – довільна функція від y, а штрихами позначено її похідні.

$R(A_{4.5}^{1,1,c},6), c \neq 1$: $\quad \omega = x$,

$$\ddot x = \dot x^3 \left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^{1/c} F(\omega), \quad \ddot y = \dot x^2 \dot y \left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^{1/c} F(\omega) + \dot x \dot y G(\omega).$$

$R(A_{4.5}^{1,1,c},7), c \neq 1$: $\quad \omega = \frac{\dot y}{\dot x} e^y$,

$$\ddot x = \dot x \dot y F(\omega) + \dot x^2 \dot y G(\omega) + (c-1)\dot x \dot y, \quad \ddot y = \dot x \dot y^2 G(\omega) + (c-1)\dot y^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,1},5)$, $-1 \le a < b < 1$; $b > 0$ при $a = -1$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}$, $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 \neq 0$:
$$\omega = \dot y^{-1}\left(\varepsilon_1 (a-1) e^{-by} \dot x + \varepsilon_2 (b-1) e^{-ay}\right),$$

$$\ddot x = \frac{\dot y e^{by}}{\varepsilon_1 (a-1)}\left(\dot y F(\omega) - \varepsilon_2 (b-1)(a-b) e^{-ay}\right) + \dot x \dot y^2 e^{ay} G(\omega),$$
$$\ddot y = \dot y^3 e^{ay} G(\omega) - (a-1)\dot y^2.$$

$R(A_{4.5}^{a,b,1},6), -1 \le a < b < 1$; $b > 0$ при $a = -1$: $\quad \omega = \frac{\dot y}{\dot x} x^{\frac{a-b-1}{a-b}}$,

$$\ddot x = \dot x^2 \dot y x^{\frac{b-1}{a-b}} F(\omega), \quad \ddot y = \dot x \dot y^2 x^{\frac{b-1}{a-b}} F(\omega) + \dot y^2 x^{\frac{1}{b-a}} G(\omega).$$

$R(A_{4.6}^{a,b},2)$: $\quad \omega = \left(\dot x^2 + \dot y^2\right) e^{2(a-b)\,\mathrm{arctg}\,\frac{\dot x}{\dot y}}$,

$$\ddot x = e^{-a\,\mathrm{arctg}\,\frac{\dot x}{\dot y}}\left(\dot y F(\omega)) + \dot x G(\omega)\right), \quad \ddot y = e^{-a\,\mathrm{arctg}\,\frac{\dot x}{\dot y}}\left(\dot y G(\omega) - \dot x F(\omega)\right).$$

$R(A_{4.6}^{a,b},4)$: $\quad \omega = \frac{\dot x \varepsilon e^{b\,\mathrm{arctg}\,y}(b - a + y)\sqrt{1+y^2} - (1+y^2)e^{a\,\mathrm{arctg}\,y}}{\dot y}$,

$$\ddot x = \frac{\dot y^2 e^{-b\,\mathrm{arctg}\,y}}{(1+y^2)^{3/2}} F(\omega) + \frac{\dot x \dot y^2 e^{-a\,\mathrm{arctg}\,y}}{(1+y^2)^2}\left(G(\omega) - \varepsilon y F(\omega)\right) +$$
$$+ \frac{2y\dot x \dot y}{1+y^2} - \frac{\dot x^2 \dot y \varepsilon e^{(b-a)\,\mathrm{arctg}\,y}\left(y^2 + 1 + (b-a+y)^2\right)}{(1+y^2)^{3/2}},$$
$$\ddot y = \frac{\dot y^3 e^{-a\,\mathrm{arctg}\,y}}{(1+y^2)^2}\left(G(\omega) - \varepsilon y F(\omega)\right) + \frac{2y\dot y^2}{1+y^2} -$$
$$- \frac{\dot x \dot y^2 \varepsilon e^{(b-a)\,\mathrm{arctg}\,y}\left(y^2 + 1 + (b-a+y)^2\right)}{(1+y^2)^{3/2}}.$$

$R(A_{4.7},2)$: $\quad \omega = \frac{\dot y}{y\dot x - 1} e^{\frac{\dot x}{\dot y}}$,

$$\ddot x = \dot x \dot y^2 F(\omega) + \dot y^2 (y\dot x - 1) e^{-\frac{\dot x}{\dot y}} G(\omega) - \dot x^2 \dot y,$$

$$\ddot{y} = \dot{y}^3 F(\omega) + \dot{y}^3 y e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{y}}} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A_{4.7}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}^2 - 2\dot{y}}{\dot{y}^2} e^{2y}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} e^{-y} \left(\dot{y} - \dot{x}^2\right) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 e^{-2y} G(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 e^{-2y} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 e^{-y} F(\omega).$$

$R(A_{4.7}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega) + y\dot{x}^3, \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) + y\dot{x}^2\dot{y}.$$

$R(A_{4.7}, 5)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^3 F(\omega) - \dot{x}^3 \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad \ddot{y} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega) - \dot{x}^2 \dot{y} \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

$R(A^b_{4.8}, 2)$: $\quad \omega = \left(y - \frac{1}{\dot{x}}\right) \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{\frac{b}{1-b}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \frac{\dot{x}\dot{y}^2}{y\dot{x} - 1} G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{x}^2 - 2\dot{y}}{\dot{y}^2} y^{\frac{2b}{b-1}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} y^{\frac{2b-1}{1-b}} \left(\dot{y} - \dot{x}^2\right) F(\omega) + \dot{x}\dot{y}^2 y^{\frac{3b-1}{1-b}} G(\omega),$$
$$\ddot{y} = \dot{y}^3 y^{\frac{3b-1}{1-b}} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2 y^{\frac{2b-1}{1-b}} F(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{y}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{by} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^{by} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 5)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^{b+2} \dot{y}^{1-b} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^{b+1} \dot{y}^{2-b} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^{-1}_{4.8}, 7)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}\dot{y}^2 \left(F(\omega) + G(\omega) \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right), \quad \ddot{y} = \dot{y}^3 F(\omega) + \dot{y}^2 \left(1 + \dot{y} \ln \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 6), b \neq \pm 1$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{by}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} e^{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 e^{y} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^b_{4.8}, 7), b \neq \pm 1$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^{\frac{2b+1}{b}} \dot{y}^{\frac{b-1}{b}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}^{\frac{b+1}{b}} \dot{y}^{\frac{2b-1}{b}} F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A^0_{4.8}, 9)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} e^{\frac{y\dot{x} - 1}{C\dot{x}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x}^2 \dot{y} F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega), \quad C \neq 0.$$

$R(A^a_{4.9}, 2)$: $\quad \omega = \frac{y\dot{x} - 1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} e^{a \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}}$,

$$\ddot{x} = \dot{x} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) F(\omega) + \dot{y} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) G(\omega) - \dot{x}^2 \dot{y},$$
$$\ddot{y} = \dot{y} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) F(\omega) + \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)\left(\dot{x} + y\dot{y}^2\right)}{y\dot{x} - 1} G(\omega) - \dot{x}\dot{y}^2.$$

$R(A^a_{4.9}, 3)$: $\quad \omega = \frac{2\dot{y} - \dot{x}^2}{\dot{y}^2} (1 + y^2) e^{2a \operatorname{arctg} y}$,

$$\ddot{x} = \frac{2\dot{y} - \dot{x}^2}{1 + y^2} \left(\frac{(\dot{y} - \dot{x}^2)}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + \dot{x} G(\omega) + y\dot{x}\right),$$
$$\ddot{y} = \frac{\dot{y}(2\dot{y} - \dot{x}^2)}{1 + y^2} \left(G(\omega) - \frac{\dot{x}}{\sqrt{2\dot{y} - \dot{x}^2}} F(\omega) + y\right).$$

$R(A_{4.10}, 3)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y} e^{y + C \operatorname{arctg} \dot{x}}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} \left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 4)$: $\quad \omega = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \left(1 + x^2\right)$,

$$\ddot{x} = \frac{\dot{x}^3 e^{y}}{(1 + x^2)^{3/2}} F(\omega), \quad \ddot{y} = \frac{\dot{x}\dot{y}}{1 + x^2} \left(\frac{\dot{x} e^{y}}{(1 + x^2)^{1/2}} F(\omega) + G(\omega) - 2x\right).$$

$R(A_{4.10}, 5)$: $\quad \omega = y + \operatorname{arctg} \dot{x}$,

$$\ddot{x} = \dot{y} \left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

$R(A_{4.10}, 6)$: $\quad \omega = y$,

$$\ddot{x} = \dot{y} \left(1 + \dot{x}^2\right) F(\omega), \quad \ddot{y} = \dot{x}\dot{y}^2 F(\omega) + \dot{y}^2 G(\omega).$$

5. Заключні зауваження. У цій роботі отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Решта інваріантних систем або є сингулярними, тобто включають умови виродження рангів других продовжень генераторів алгебри Лі, або не можуть бути записані у нормальній формі. Опис таких систем, а також питання лінеаризації систем типу (1) теж є цікавими з точки зору застосувань та стануть предметом наших подальших досліджень. Іншою важливою задачею є знаходження геодезичних рівнянь серед систем другого порядку, а саме "докласифікація" отриманих систем, інваріантних відносно чотиривимірних алгебр Лі. Також потрібно дослідити, які з отриманих інваріантних систем є ньютонівськими, а саме, які з них можна записати у вигляді

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} \tag{7}$$

з потенціал-функцією $V = V(x, y)$.

Як обгрунтування важливості отриманих результатів і доцільності подальших досліджень наведемо декілька фізично цікавих систем, що містяться серед побудованих у статті.

Приклад 2. Класичну задачу Кеплера можна переписати через полярні координати у вигляді системи двох диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0, \quad r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Ця система як частковий випадок міститься в найбільш загальній системі, що інваріантна відносно реалізації $R(A_{2.1} \oplus A_1, 1)$.

Приклад 3. Узагальнена система Єрмакова

$$\ddot{x} = \frac{1}{x^3} F\left(\frac{y}{x}\right), \quad \ddot{y} = \frac{1}{y^3} G\left(\frac{y}{x}\right)$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2,\mathbb{R})$, еквівалентної реалізації $R(sl(2,\mathbb{R}), 1)$.

Приклад 4. Двовимірна задача з центральною силою

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\mu}{(x^2+y^2)^2} - \epsilon\right)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \quad \mu, \epsilon > 0, \quad \boldsymbol{r} = (x, y)$$

інваріантна відносно реалізації алгебри Лі $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$, еквівалентної реалізації $R(sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1, 3)$ та в полярних координатах може бути переписана у вигляді

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{\mu}{r^3} - \varphi r = 0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$$

Автори вдячні В.М. Бойко, В.І. Лагно, А.Г. Нікітіну та Р.О. Поповичу за постановку задачі та корисні дискусії. Дослідження МН частково підтримані грантом Президента України для молодих учених № GP/F11/0061 та грантом INTAS № 04-83-3217.

[1] Damianou P.A., Sophocleous C. Symmetries of Hamiltonian systems with two degrees of freedom // J. Math. Phys. – 1999. – **40**, № 1. – P. 210–235.

[2] Fels M., Olver P.J. Moving coframes. I. A practical algorithm // Acta Appl. Math. – 1998. – **51**. – P. 161–213.

[3] Fels M., Olver P.J. Moving coframes. II. Regularization and theoretical foundations // Acta Appl. Math. – 1999. – **55**. – P. 127–208.

[4] Feroze T., Mahomed F.M., Qadir A. The connection between isometries and symmetries of geodesic equations of the underlying spaces, to appear.

[5] Lie S. Über Differentiation // Math. Ann. – 1884. – **24**. – P. 537–578.

[6] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 1–3. – Leipzig, 1888, 1890, 1893. – 645 s., 568 s., 830 s.

[7] Mahomed F.M., Qadir A. Invariant criteria for a system of geodesic equations corresponding to spaces of constant nonzero curvature, to appear.

[8] Olver P. Equivalence, invariants, and symmetry. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 525 p.

[9] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[10] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360.

[11] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. – 1894. – **18**. – P. 1–88.

[12] Tresse A. Determination des invariants ponctuels de l'equation differentielle du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. – Leiptzig: S. Hirzel, 1896.

[13] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2001. – **34**. – P. 2883–2911.

[14] Wafo Soh C., Mahomed F.M. Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations // Internat. J. Non-Linear Mech. – 2001. – **36**. – P. 671–677.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 92–97

УДК 517.912:512.816

Симетрійні властивості та деякі точні розв'язки узагальненого рівняння Бюргерса

А.А. ГЕВЛЕНКО

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: kaf26@pntu.poltava.ua

Проведено класифікацію симетрійних властивостей одного з можливих узагальнень рівняння Бюргерса на випадок двох просторових змінних в залежності від вигляду нелінійності та знайдено деякі його точні розв'язки.

Depending on the type of nonlinearity we classify the symmetric properties of one of the possible generalizations of Burgers equation in two-dimensional space. Some exact solution of equations under consideration are found.

1. Вступ. Як відомо, коло питань математичної фізики тісно пов'язане з вивченням різних фізичних процесів. Сюди відносять явища, що вивчають у гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці, фізиці елементарних частинок і т.д. Математичні задачі, що виникають при цьому, часто зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь різних типів, в тому числі диференціальних рівнянь з частинними похідними другого і вище порядків. Диференціальні рівняння, що описують конкретні фізичні процеси, як правило, мають широку симетрію. Наявність симетрії може бути одним з критеріїв вибору серед деякої множини рівнянь оптимальної математичної моделі, що максимально точно описує даний процес. Великі можливості класифікації симетрій та побудови точних розв'язків рівнянь математичної фізики відкривають започатковані ще у XIX столітті Софусом Лі методи теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь. Оператори алгебри інваріантності диференціальних рівнянь застосовуються (див. [1]) для побудови підстановок спеціальної форми (анзаців), які зводять (редукують) дане рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Класичні

методи Лі, доповнені результатами теорії представлень груп і алгебр Лі, знаходять все ширше застосування в теоретичній та математичній фізиці.

2. Симетрійна класифікація. Розглянемо класичне рівняння Бюргерса

$$u_0 = u_{11} + uu_1, \tag{1}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\mu = \overline{0,1}$, та узагальнимо його на випадок двох просторових змінних наступним чином

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + F(u)(u_1 + u_2), \tag{2}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, $F = F(u)$ – довільна гладка функція.

Поставимо задачу дослідити симетрійні властивості рівняння (2) в залежності від вигляду функції $F(u)$.

Надалі будемо вважати $F \neq \lambda$ ($\lambda = \text{const}$) так як при $F = \lambda$ рівняння

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + \lambda(u_1 + u_2)$$

заміною $t = x_0$, $y_1 = x_1 + \lambda x_0$, $y_2 = x_2 + \lambda x_0$, $w = u$ зводиться до рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2}.$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Максимальні алгебри інваріантності (МАІ) рівняння* (2) *в залежності від вигляду функції* $F(u)$ *наведені в таблиці 1.*

Доведення теореми проводиться за допомогою стандартного методу Лі (див. [1,2]).

3. Деякі точні розв'язки. Проведемо процедуру симетрійної редукції та знаходження деяких точних розв'язків рівняння (2) для випадку функції $F(u) = e^u$:

$$u_0 = u_{11} + u_{22} + e^u(u_1 + u_2). \tag{3}$$

Оскільки елементи МАІ рівняння (3) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням

$$[P_0, P_a] = 0, \quad [P_0, D_1] = 2P_0, \quad [P_a, D_1] = P_a,$$

Таблиця 1. Результат симетрійної класифікації рівняння (2).

№	Вигляд рівняння	MAI
1	$u_0 = u_{11} + u_{22} + f(u)(u_1 + u_2)$	$P_0 = \partial_0,\ P_a = \partial_a$
2	$u_0 = u_{11} + u_{22} + e^u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a$ $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \partial_u$
3	$u_0 = u_{11} + u_{22} + \ln u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a,$ $G_1 = x_0(\partial_1 + \partial_2) - u\partial_u$
4	$u_0 = u_{11} + u_{22} + u^k(u_1 + u_2)$	$P_0, P_a,$ $D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{1}{k}u\partial_u$
5	$u_0 = u_{11} + u_{22} + u(u_1 + u_2)$	$P_0,\ P_a,$ $G_2 = x_0(\partial_1 + \partial_2) - \partial_u,$ $D_3 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u\partial_u$

В таблиці 1 k – довільна стала, $k \neq 0; 1$, $f = f(u)$ – довільна гладка функція, $a = \overline{1,2}$.

де $a = 1, 2$, то з точністю до спряженості відносно групи автоморфізмів виділимо класи підалгебр розмірностей 1 і 2 [3]. За кожною з підалгебр MAI здійснимо процедуру симетрійної редукції [1, 3]. Отримані результати наведемо в таблиці 2.

Для підалгебри $\langle P_1 + \alpha_2 P_2\rangle$ редуковане рівняння при $\alpha_2 = 1$ зводиться до лінійного рівняння теплопровідності

$$\varphi_1 = 2\varphi_{22}. \tag{4}$$

Таким чином функція

$$u = \varphi(x_0, x_1 - x_2)$$

є розв'язком рівняння (3), якщо φ – довільний розв'язок лінійного рівняння (4).

Розглянемо редуковане рівняння

$$(1 + \alpha_2^2)\ddot{\varphi} + (1 - \alpha_2)e^{\varphi}\dot{\varphi} - \alpha_1\alpha_2\dot{\varphi} = 0. \tag{5}$$

Проінтегрувавши дане рівняння, одержимо

$$(1 + \alpha_2^2)\dot{\varphi} + (1 - \alpha_2)e^{\varphi} - \alpha_1\alpha_2\varphi - C_1 = 0. \tag{6}$$

Таблиця 2. Симетрійна редукція рівняння (3).

Підалгебра MAI	Анзац	Редуковане рівняння
$\langle P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2\rangle$	$u = \varphi(\omega_1, \omega_2),$ $\omega_a = x_a - \alpha_a x_0$	$\varphi_{11} + \varphi_{22} + e^{\varphi}(\varphi_1 + \varphi_2) +$ $+ \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 = 0$
$\langle P_1 + \alpha_2 P_2\rangle$	$u = \varphi(\omega_1, \omega_2),$ $\omega_1 = x_0,$ $\omega_2 = x_2 - \alpha_2 x_1$	$(1 + \alpha_2^2)\varphi_{22} +$ $+ (1 - \alpha_2)e^{\varphi}\varphi_2 - \varphi_1 = 0$
$\langle D_1\rangle$	$u = \varphi(\omega_1, \omega_2) - \frac{1}{2}\ln x_0,$ $\omega_a = \frac{x_a}{\sqrt{x_0}}$	$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \frac{1}{2}(\omega_a\varphi_a + 1) +$ $+ e^{\varphi}(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$
$\langle P_0 + \alpha_1 P_1, P_1 + \alpha_2 P_2\rangle$	$u = \varphi(\omega),$ $\omega = \alpha_1\alpha_2 x_0 - \alpha_2 x_1 + x_2$	$(1 + \alpha_2^2)\ddot{\varphi} +$ $+(1 - \alpha_2)e^{\varphi}\dot{\varphi} - \alpha_1\alpha_2\dot{\varphi} = 0$
$\langle P_1, P_2\rangle$	$u = \varphi(\omega),\ \omega = x_0$	$\dot{\varphi} = 0$
$\langle D_1,\ P_0\rangle$	$u = \varphi(\omega) - \ln x_2,$ $\omega = \frac{x_1}{x_2}$	$(1 + \omega^2)\ddot{\varphi} +$ $+ e^{\varphi}((1 - \omega)\dot{\varphi} - 1) + 1 = 0$
$\langle D_1, P_1 + \alpha_2 P_2\rangle$	$u = \varphi(\omega) - \frac{1}{2}\ln x_0,$ $\omega = \frac{\alpha_2 x_1 - x_2}{\sqrt{x_0}}$	$(\alpha_2^2 + 1)\ddot{\varphi} +$ $+((\alpha_2 - 1)e^{\varphi} + \frac{1}{2}\omega)\dot{\varphi} + \frac{1}{2} = 0$

Після відокремлення змінних рівняння (6) перепишеться так

$$\frac{d\varphi}{(\alpha_2 - 1)e^{\varphi} + \alpha_1\alpha_2\varphi + C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2 + 1}. \tag{7}$$

Інтеграл рівняння (7)

$$\int_0^u \frac{d\varphi}{(\alpha_2 - 1)e^{\varphi} + \alpha_1\alpha_2\varphi + C_1} = \frac{\alpha_1\alpha_2 x_0 - \alpha_2 x_1 + x_2}{\alpha_2^2 + 1}$$

залежить від значень α_1, α_2, C_1. Можливі наступні суттєво різні випадки:

1) $\alpha_2 = 0 \to \dfrac{d\varphi}{-e^{\varphi} + C_1} = d\omega :$

$A)$ $C_1 = 0 \to \dfrac{d\varphi}{-e^{\varphi}} = d\omega \to e^{-\varphi} = \omega + C_2 \to \varphi = \ln\dfrac{1}{\omega + C_2} \to$

$\to u = \ln\dfrac{1}{x_2 + C_2};$

$$B)\ C_1 \neq 0 \to \frac{d\varphi}{-e^{\varphi}+C_1} = d\omega \to \frac{d\varphi}{-e^{\varphi}(1-C_1e^{-\varphi})} = d\omega \to$$

$$\to \frac{d(e^{-\varphi})}{e^{-\varphi}-\frac{1}{C_1}} = -C_1 d\omega \to e^{-\varphi} = \frac{C_2}{C_1}e^{-C_1\omega} + \frac{1}{C_1} \to$$

$$\to \varphi = \ln\frac{C_1}{C_2e^{-C_1\omega}+1} \to u = \ln\frac{C_1}{C_2e^{-C_1x_2}+1};$$

$$2)\ \alpha_2 = 1 \to \frac{2d\varphi}{\alpha_1\varphi + C_1} = d\omega :$$

$$A)\ \alpha_1 = 0 \to \frac{2d\varphi}{C_1} = d\omega :$$

$$a)\ C_1 = 0 \to \varphi = const \to u = \text{const};$$

$$b)\ C_1 \neq 0 \to \varphi = \frac{C_1}{2}\omega + C_2 \to u = \frac{C_1}{2}(x_2 - x_1) + C_2;$$

$$B)\ \alpha_1 \neq 0 \to \frac{2d\varphi}{\alpha_1(\varphi + \frac{C_1}{\alpha_1})} = d\omega \to \varphi = C_2e^{\frac{\alpha_1}{2}\omega} - \frac{C_1}{\alpha_1} \to$$

$$\to u = C_2e^{\frac{\alpha_1}{2}(\alpha_1x_0 - x_1 + x_2)} - \frac{C_1}{\alpha_1};$$

$$3)\ \alpha_1 = 0 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} :$$

$$A)\ \alpha_2 = 1 \to d\varphi = \frac{C_1}{2}d\omega \to \varphi = \frac{C_1}{2}\omega + C_2 \to$$

$$\to u = \frac{C_1}{2}(x_2 - x_1) + C_2;$$

$$B)\ \alpha_2 \neq 1 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} :$$

$$a)\ C_1 = 0 \to \frac{d\varphi}{e^{\varphi}} = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2^2+1}d\omega \to \varphi = \ln\frac{1}{\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2^2}\omega + C} \to$$

$$\to u = ln\frac{1}{\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2^2}(x_2 - \alpha_2x_1) + C};$$

$$b)\ C_1 \neq 0 \to \frac{d\varphi}{(\alpha_2-1)e^{\varphi}+C_1} = \frac{d\omega}{\alpha_2^2+1} \to$$

$$\to \frac{d\varphi}{e^{\varphi}+C_3} = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2^2+1}d\omega \to \varphi = \ln\frac{C_3}{\Phi(\omega)+1},$$

де

$$\Phi(\omega) = C_1\exp\left(\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2^2+1}C_3\omega\right), \quad C_3 = \frac{C_1}{1-\alpha_2}.$$

Враховуючи вигляд анзацу, отримаємо:

$$u = \ln\frac{C_3}{C_1\exp\left(\frac{C_1}{\alpha_2^2+1}(\alpha_2x_1 - x_2)\right)+1}.$$

Провівши аналогічні міркування можна знайти точні розв'язки рівняння (2) для решти випадків функції $F(u)$ з таблиці 1.

4. Висновки. В даній роботі виконано симетрійну класифікацію нелінійного рівняння (2). Симетрійні властивості даного рівняння використані для побудови інваріантних анзаців, які редукують рівняння (2) до диференціальних рівнянь відносно меншої кількості незалежних змінних. В результаті розв'язування редукованих рівнянь побудовані деякі точні розв'язки рівняння (2).

Автор виражає подяку своєму науковому керівнику В.О. Марченку за постановку задачі та цінні рекомендації.

[1] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 98–112

УДК 517.912:512.816

Редукція багатовимірних нелінійних рівнянь Даламбера до двовимірних рівнянь: анзаци, сумісність умов редукції, редуковані рівняння

І.А. ЄГОРЧЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Вивчені умови редукції багатовимірних хвильових рівнянь – системи з рівнянь Даламбера та Гамільтона. Доведені необхідні умови сумісності цих умов редукції. Описані можливі типи редукованих рівнянь та анзаців. Наведено короткий огляд літератури щодо сумісності системи рівнянь Даламбера та Гамільтона та побудови розв'язків нелінійного рівняння Даламбера.

We study conditions of reduction of multidimensional wave equations – of a system of d'Alembert and Hamilton equations. Necessary conditions for compatibility of such reduction conditions are proved. Possible types of the reduced equations and ansatzes are described. We also provide a brief review of the literature with respect to compatibility of the system of d'Alembert and Hamilton equations and construction of solutions for the nonlinear d'Alembert equation.

1. Вступ. У цій роботі продовжуються дослідження, розпочаті у 1990 р. у спільній роботі з В.І. Фущичем [1]. Ми досліджуємо редукцію нелінійного рівняння Даламбера

$$\Box u = F(u), \qquad (1)$$
$$\Box \equiv \partial^2_{x_0} - \partial^2_{x_1} - \cdots - \partial^2_{x_n}, \quad u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

за допомогою анзацу з двома новими незалежними змінними [2, 3]

$$u = \varphi(y, z), \qquad (2)$$

де y, z – нові змінні. Тут і далі n – це кількість незалежних просторових змінних у вихідному рівнянні Даламбера.

Широкі класи точних розв'язків нелінійних рівнянь, що мають відповідні симетрійні властивості, можуть бути побудовані шляхом симетрійної редукції цих рівнянь до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних або до звичайних диференціальних рівнянь (щодо відповідних алгоритмів та прикладів див. [4–7]).

Редукція та пошук розв'язків рівняння (1) шляхом симетрійної редукції або застосування анзаців розглядались, зокрема у роботах М. Таджірі [8], І. Патери, Р. Шарпа, П. Вінтерніца та Г. Цесенхауса [9], В.І. Фущича та М.І. Сєрова [10], В.І. Фущича, Л.Ф. Баранника та А.Ф. Баранника [11] (у [12] розглядається симетрійна редукція пуанкаре-інваріантних нелінійних рівнянь до двовимірних рівнянь).

У роботі В.І. Фущича, А.Ф. Баранника та Ю.Д. Москаленка [13] розглядається симетрійна редукція рівняння (1) з $F = u^k$ до двовимірних рівнянь, а також симетрія відповідних редукованих рівнянь.

Очевидно, що метод симетрійної редукції не дає вичерпного опису всіх точних розв'язків рівнянь, тому актуальним є пошук та розвиток інших алгоритмічних методів пошуку розв'язків. Одним з таких методів є редукція рівнянь за допомогою спеціальних підстановок – анзаців.

П. Кларксоном та М. Крускалом [14] був запропонований так званий "прямий метод" ("direct method") пошуку точних розв'язків нелінійних рівнянь у частинних похідних, і було продемонстровано, що цей метод дає більш широкі класи розв'язків, ніж метод симетрійної редукції за підалгебрами алгебр інваріантності рівняння (див. також [15, 16] та процитовані там роботи). Проте застосування цього методу для більшості рівнянь становить значні труднощі, тому що вимагає дослідження сумісності та розв'язання складних перевизначених систем рівнянь – умов редукції вихідного рівняння за допомогою обраного анзацу.

Розв'язки, що одержуються прямим методом, також пов'язані з симетрійними властивостями рівняння – Q-умовною симетрією цього рівняння [6, 17, 18] (симетрії такого типу також називаються некласичною або неліївською симетрією [14, 19, 20]).

У роботі Р.З. Жданова, І.М. Цифри та Р.О. Поповича [21] встановлена еквівалентність некласичної (умовної) симетрії та прямого підходу (застосування анзацу) до редукції диференціальних рівнянь в частинних похідних. У статті В.І. Фущича "Анзац 95" [23] наведено огляд результатів з редукції для багатьох хвильових рівнянь. У роботі В.І. Фущича та А.Ф. Баранника [24] пропонується також варіант методу застосування анзаців для рівняння (1) з степеневою нелінійністю.

У роботі Дж. Чіконьї [22] проведено аналіз застосування різних типів умовної та некласичної симетрії для пошуку розв'язків нелінійних рівнянь у частинних похідних.

На відміну від алгоритмічного методу симетрійної редукції, метод прямої редукції з застосуванням анзаців або повний опис умовної симетрії (навіть Q-умовної симетрії) не можна назвати алгоритмічним у такій же мірі. Більшість робіт з застосування "прямого методу" стосується еволюційних рівнянь та інших рівнянь, які містять похідні не вище першого порядку для хоча б однієї з незалежних змінних, і число незалежних змінних у яких не більше трьох. У такому випадку розв'язання умов редукції є відносно простим.

Умови редукції є набагато складнішими для дослідження та розв'язання у випадку рівнянь, що містять другі та/або вищі похідні для всіх незалежних змінних, та багатовимірних рівнянь.

У цій роботі ми розглядаємо загальні умови редукції багатовимірного рівняння (1) за допомогою загального анзацу з двома новими незалежними змінними. Знайдені необхідні умови сумісності відповідних умов редукції – посилені умови, які були знайдені у [1]. Ми також описуємо відповідні можливі форми редукованих рівнянь. Таким чином, доведено, що редуковані рівняння можуть мати лише певний вигляд. Проте, одержані в цій роботі результати в загальному випадку не дозволяють провести повне застосування "прямого методу", для чого було б потрібно знайти загальний розв'язок умов редукції.

Аналогічна задача раніше розглядалась для анзаца з однією незалежною змінною

$$u = \varphi(y), \tag{3}$$

де y – нова незалежна змінна.

Аналіз сумісності системи Даламбера–Гамільтона

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = f(u) \tag{4}$$

в тривимірному просторі був проведений Коллінзом в [31].

Розв'язки системи (4) досліджувались в роботах Г. Бейтмена [25], В.І. Смірнова та В.Л. Соболєва [26], М.П .Єругіна [27] (див. більш детальний огляд у [29, 30]).

У роботі [32] була знайдена умова сумісності системи (4) для $f(u) = 0$.

Для повного дослідження сумісності перевизначених систем диференціальних рівнянь з визначеною кількістю незалежних змінних може бути використаний алгоритм Картана [28], проте на практиці його дуже складно застосовувати вже для випадку трьох незалежних змінних, і неможливо – для довільної кількості незалежних змінних. Тому для таких випадків доводиться застосовувати спеціальні прийоми навіть для пошуку необхідних умов сумісності.

Очевидно, що систему Даламбера–Гамільтона (4) локальними перетвореннями можна привести до вигляду

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = \lambda, \quad \lambda = 0, \pm 1. \tag{5}$$

Необхідні умови сумісності системи (5) для чотирьох незалежних змінних вивчались В.І. Фущичем та Р.З. Ждановим [33] (див. також [30]).

Пізніше В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та автором цієї роботи були знайдені необхідні умови сумісності системи (5) для довільної кількості незалежних змінних [34]:

Твердження 1. *Для того, щоб система* (5) *(n – довільне) була сумісною, необхідно, щоб функція F мала наступний вигляд:*

$$F = \frac{\lambda \partial_u \Phi}{\Phi}, \quad \partial_u^{n+1} \Phi = 0.$$

В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та І.В. Ревенком [29, 35, 36] був знайдений загальний розв'язок системи (5) для трьох просторових змінних (тобто чотирьох незалежних змінних), і необхідні та достатні умови сумісності цієї системи [35]:

Твердження 2. *Для того, щоб система* (5) ($u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$) *була сумісною, необхідно та достатньо, щоб функція F мала наступний вигляд:*

$$F = \frac{\lambda}{N(u + C)}, N = 0, 1, 2, 3.$$

Редукція рівняння (1) за допомогою анзаца (2) розглядалась В.І. Фущичем, Р.З. Ждановим та І.В. Ревенком у [36] для спеціального випадку (коли друга незалежна змінна входить у редуковане рівняння лише у якості параметру), і були описані всі відповідні анзаци для випадку чотирьох незалежних змінних, знайдені відповідні точні розв'язки. Деякі розв'язки такого типу для довільних n також розглядались А.Ф. Баранником та І.І. Юриком у [37].

У роботі Р.З. Жданова та О.А. Панчак [38] розглядалась редукція нелінійного рівняння Даламбера за допомогою анзаца $u = \phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, для випадку $\Box\omega_1 = 0$, $\omega_{1\mu}\omega_{1\mu} = 0$ (тобто ω_1 входило у редуковане рівняння лише у якості параметру). Були досліджені відповідні умови сумісності та знайдені нові (неліївські) точні розв'язки.

Зазначимо, що цей випадок не включає повністю розглядуваний нами випадок анзацу з двома новими довільними незалежними змінними.

Рівняння Гамільтона може також розглядатись, безвідносно до задачі редукції, як додаткова умова до рівняння Даламбера, що дозволяє розширити симетрію цього рівняння. Симетрія системи

$$\Box u = F(u), \quad u_\mu u_\mu = 0$$

була описана у [39]. У [34] була знайдена конформна симетрія для системи (4), що є новою умовною симетрією для рівняння Даламбера. Умовні симетрії для відповідних розглянутих анзаців були описані також у [36, 38].

2. Необхідні умови сумісності системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох функцій або для комплекснозначної функції. Спеціальне дослідження редукції багатовимірних рівнянь до двовимірних становить інтерес, тому що розв'язки двовимірних рівнянь в частинних похідних, в тому числі і нелінійних, можуть бути досліджені більш повно, ніж розв'язки багатовимірних рівнянь, проте такі рівняння можуть мати більш цікаві властивості, ніж звичайні диференціальні рівняння.

Наприклад, нехай $y_\mu y_\mu = -z_\mu z_\mu = 1$, $z_\mu y_\mu = \Box y = \Box z = 0$. Тоді рівняння (6) має вигляд

$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi).$$

Якщо $F(\varphi) = \sin\varphi$, то редуковане рівняння має солітонні розв'язки. Якщо $F(\varphi) = \exp\varphi$, воно має загальний розв'язок. Двовимірні редуковані рівняння також можуть мати цікаві властивості з точки зору умовної симетрії.

Підстановка анзацу (2) у рівняння (1) приводить до наступного рівняння:

$$\varphi_{yy}y_\mu y_\mu + 2\varphi_{yz}z_\mu y_\mu + \varphi_{zz}z_\mu z_\mu + \varphi_y\Box y + \varphi_z\Box z = F(\varphi) \tag{6}$$
$$\left(y_\mu = \frac{\partial y}{\partial x_\mu}, \quad \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

звідки одержуємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &y_\mu y_\mu = r(y,z), \quad y_\mu z_\mu = q(y,z), \quad z_\mu z_\mu = s(y,z), \\ &\Box y = R(y,z), \quad \Box z = S(y,z). \end{aligned} \tag{7}$$

Система (7) є умовою редукції багатовимірного хвильового рівняння (1) до двовимірного рівняння (6) за допомогою анзаца (2).

Систему рівнянь (7), в залежності від знаку виразу $rs - q^2$, локальними перетвореннями можна звести до одного з чотирьох типів:

1) еліптичний випадок: $rs - q^2 > 0$, $v = v(y,z)$ – комплекснозначна функція,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, v^*), \quad \Box v^* = V^*(v, v^*), \\ &v^*_\mu v_\mu = h(v, v^*), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad v^*_\mu v^*_\mu = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

(редуковане рівняння еліптичного типу);

2) гіперболічний випадок: $rs - q^2 < 0$, $v = v(y,z)$, $w = w(y,z)$ – дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, w), \quad \Box w = W(v, w), \\ &w_\mu w_\mu = h(v, w), \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad w_\mu w_\mu = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

(редуковане рівняння гіперболічного типу);

3) параболічний випадок: $rs - q^2 = 0$, $r^2 + s^2 + q^2 \neq 0$, $v(y,z)$, $w(y,z)$ – дійсні функції,

$$\begin{aligned} &\Box v = V(v, w), \quad \Box w = W(v, w), \\ &v_\mu w_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = \lambda \ (\lambda = \pm 1), \quad w_\mu w_\mu = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

(якщо $W \neq 0$, то редуковане рівняння параболічного типу);

4) рівняння першого порядку $r = s = q = 0$, $y \to v$, $z \to w$

$$v_\mu v_\mu = w_\mu w_\mu = v_\mu w_\mu = 0,$$

$$\Box v = V(v,w), \quad \Box w = W(v,w). \tag{11}$$

Сформулюємо необхідні умови сумісності систем (8)–(11).

Теорема 1. *Система* (8) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v,v^*)\partial_{v^*}\Phi}{\Phi}, \quad \partial_{v^*} \equiv \frac{\partial}{\partial v^*},$$

де Φ *– довільна функція, для якої виконується умова*

$$(h\partial_{v^*})^{n+1}\Phi = 0.$$

Функцію h можна представити у вигляді $h = \frac{1}{R_{vv^*}}$, де R – довільна достатньо гладка функція, R_v, R_{v^*} – частинні похідні по відповідним змінним.

Тоді функцію Φ можна представити у вигляді $\Phi = \sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k$, де $f_k(v)$ – довільні функції, і

$$V = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k f_k(v)R_v^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k}.$$

Відповідне редуковане рівняння матиме вигляд

$$h(v,v^*)\left(\phi_{vv^*} + \phi_v\frac{\partial_{v^*}\Phi}{\Phi} + \phi_{v^*}\frac{\partial_v\Phi^*}{\Phi^*}\right) = F(\phi). \tag{12}$$

Рівняння (12) можна переписати також як рівняння з двома дійсними незалежними змінними ($v = \omega + \theta$, $v^* = \omega - \theta$):

$$2\widetilde{h}(\omega,\theta)(\phi_{\omega\omega} + \phi_{\theta\theta}) + \Omega(\omega,\theta)\phi_\omega + \Theta(\omega,\theta)\phi_\theta = F(\phi). \tag{13}$$

Ми не будемо наводити складні вирази для Ω, Θ, які можуть бути знайдені з (12).

Теорема 2. *Система* (9) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{h(v,w)\partial_w\Phi}{\Phi}, \quad W = \frac{h(v,w)\partial_v\Psi}{\Psi},$$

де функції Φ, Ψ *задовольняють умовам*

$$(h\partial_v)^{n+1}\Psi = 0, \quad (h\partial_w)^{n+1}\Phi = 0.$$

Функцію h можна представити у вигляді $h = \frac{1}{R_{vw}}$, де R – довільна достатньо гладка функція, R_v, R_w – частинні похідні по відповідним змінним. Тоді функції Φ, Ψ можна представити у вигляді

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k, \quad \Psi = \sum_{k=0}^{n+1} g_k(w)R_w^k,$$

де $f_k(v)$, $g_k(w)$ – довільні функції, і

$$V = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k f_k(v)R_v^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} f_k(v)R_v^k}, \quad W = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} k g_k(w)R_w^k}{\sum\limits_{k=0}^{n+1} g_k(w)R_w^k}.$$

Відповідне редуковане рівняння матиме вигляд

$$h(v,w)\left(\phi_{vw} + \phi_v\frac{\partial_w\Phi}{\Phi} + \phi_w\frac{\partial_v\Psi}{\Psi}\right) = F(\phi). \tag{14}$$

Теорема 3. *Система* (10) *сумісна тільки в тому випадку, коли*

$$V = \frac{\lambda\partial_v\Phi}{\Phi}, \quad \partial_v^{n+1}\Phi = 0, \quad W \equiv 0.$$

Ми не можемо редукувати рівняння (1) за допомогою анзаца (2) до параболічного рівняння – у цьому випадку одна з змінних буде входити як параметр до редукованого звичайного диференціального рівняння першого порядку.

Сумісність та розв'язки таких системи для $n = 3$ були розглянуті у [36]; для цього випадку були знайдені необхідні та достатні умови сумісності та загальний розв'язок.

Система (11) сумісна тільки в тому випадку, коли $V = W \equiv 0$, тобто редуковане рівняння може бути лише алгебраїчним рівнянням $F(u)$=0. Таким чином, ми не можемо редукувати рівняння (1) за допомогою анзаца (2) до рівняння першого порядку.

Доведення цих теорем проводиться із застосуванням лем, аналогічних наведеним у [33, 34], та відомої теореми Гамільтона–Келі, згідно з якою матриця є коренем свого характеристичного полінома.

Ми наведемо короткий напис доведення для теореми 2 для гіперболічного випадку. Для інших випадків доведення є аналогічним.

Ми будемо оперувати з матрицями розмірності $(n+1)\times(n+1)$ других похідних функцій v та w:

$$\hat{V} = \{v_{\mu\nu}\}, \quad \hat{W} = \{w_{\mu\nu}\}.$$

Щодо операцій з цими матрицями ми використовуємо звичайні для простору Мінковського позначення та домовленості щодо підсумовування: $v_0 = i\partial_{x_0}$, $v_a = -i\partial_{x_a}(a = 1,\dots,n)$, $v_\mu v_\mu = v_0^2 - v_1^2 - \cdots - v_n^2$.

Лема 1. *Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9)*, для будь-якого k для них виконуються співвідношення*

$$\mathrm{tr}\hat{V} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(h(v,w)\partial_w)^{k+1}V(v,w),$$
$$\mathrm{tr}\hat{W} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!}(h(v,w)\partial_v)^{k+1}W(v,w).$$

Лема 2. *Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9), $\det\hat{V} = 0$, $\det\hat{W} = 0$.

Лема 3. *Нехай $M_k(\hat{V})$ – сума головних мінорів порядку k для матриці $\hat{V}$. Якщо функції v та w є розв'язками системи* (9)*, для будь-якого k для них виконуються співвідношення*

$$M_k(\hat{V}) = \frac{(h(v,w)\partial_w)^k\Phi}{k!\Phi}, \quad M_k(\hat{W}) = \frac{(h(v,w)\partial_v)^k\Psi}{k!\Psi},$$

де функції Φ, Ψ задовольняють умовам

$$(h\partial_v)^{n+1}\Psi = 0, \quad (h\partial_w)^{n+1}\Phi = 0.$$

Ці леми можуть бути доведені методом математичної індукції аналогічно [34] з використанням теореми Гамільтона–Келі (E – одинична матриця розмірності $(n+1)\times(n+1)$).

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k M_k\hat{V}^{n-k} + (-1)^n E\det\hat{V} = 0.$$

Очевидно, що твердження теореми 2 є прямим наслідком леми 3 для $k = 1$.

Зауваження 1. Рівняння (8) можна переписати для пари дійсних функцій $\omega = \mathrm{Re}\,v$, $\theta = \mathrm{Im}\,v$. Проте в цьому випадку необхідні умови сумісності мають дуже громіздкий вигляд.

Зауваження 2. Перехід від (7) до (8)–(11) зручний тільки з точки зору дослідження сумісності. Знак виразу $rs - q^2$ може змінюватись для різних y, z і перехід розглядається тільки в області, де цей знак постійний.

3. Приклади розв'язків системи рівнянь Даламбера–Гамільтона. Наведемо явні розв'язки систем типу (7) і відповідні редуковані рівняння. Параметри a_μ, b_μ, c_μ, d_μ ($\mu = \overline{0,3}$) задовольняють умовам:

$$-a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = -1 \quad (a^2 \equiv a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_3^2),$$
$$ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0;$$

y, z – функції від x_0, x_1, x_2, x_3.

1) $y = ax, \quad z = dx, \quad \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = F(\varphi);$

2) $y = ax, \quad z = \left((bx)^2 + (cx)^2 + (dx)^2\right)^{1/2},$
$$\varphi_{yy} - \varphi_{zz} - \frac{2}{z}\varphi_z = F(\varphi).$$

У цьому випадку редуковане рівняння є так званим радіальним хвильовим рівнянням, симетрія та розв'язки якого досліджуються у [44, 45].

3) $y = bx + \Phi(ax + dx), \quad z = cx, \quad -\varphi_{zz} - \varphi_{yy} = F(\varphi);$

4) $y = \left((bx)^2 + (cx^2)\right)^{1/2}, \quad z = ax + dx, \quad -\varphi_{yy} - \dfrac{1}{y}\varphi_y = F(\varphi).$

Умовна симетрія та розв'язки різних нелінійних двовимірних хвильових рівнянь, які можуть виникати як редуковані рівняння для рівняння (1), розглянуті у [42–46]. З цих робіт також можна бачити, що симетрія двовимірних редукованих рівнянь часто є ширшою, ніж симетрія вихідного рівняння, тобто редукція до двовимірних рівнянь дає можливість знаходження нових неліївських розв'язків.

4. Висновки. Результати з дослідження сумісності та розв'язки систем (8)–(11) можуть використовуватись для дослідження та пошуку розв'язків також інших пуанкаре-інваріантних хвильових рівнянь, крім рівняння Даламбера, наприклад, рівняння Дірака та рівнянь Максвелла для векторного потенціалу.

Будь-яке багатовимірне рівняння, інваріантне відносно алгебри Пуанкаре (такі рівняння для скалярних функцій описані в роботі В.І. Фущича та автора [47]), може бути редуковане за допомогою анзаца (2) до двовимірного рівняння за умови, якщо y та z задовольняють умовам редукції (7).

Таким чином, у цій роботі

1) знайдено необхідні умови сумісності для системи рівнянь Даламбера–Гамільтона для двох залежних функцій, тобто умов редукції нелінійного багатовимірного рівняння Даламбера за допомогою анзаца (2) до двовимірного рівняння; такі умови сумісності для рівнянь довільної розмірності не можуть бути знайдені за рахунок стандартної процедури;

2) знайдено можливі типи двовимірних редукованих рівнянь, які можуть бути одержані з рівняння (1) за допомогою анзаца (2).

Знайдені умови редукції та типи анзаців можуть бути використані також для довільного пуанкаре-інваріантного багатовимірного рівняння.

Досить часто у своїх роботах, разом з новими результатами та ідеями, В.І. Фущич наводив переліки задач, які можуть розвивати одержані результати. Підтримуючи цю традицію, я також хочу навести перелік наступних задач, які можуть розвивати представлені в цій роботі дослідження.

1. Дослідження ліївської та умовної симетрії системи умов редукції (7) (симетрія системи рівнянь Даламбера для комплексної функції досліджувалась у [49]).
2. Дослідження ліївської та умовної симетрії редукованих рівнянь (12) та (14), а також можливих редукованих рівнянь першого порядку. Знаходження точних розв'язків редукованих рівнянь.
3. Зв'язок групи еквівалентності класу редукованих рівнянь з симетрією вихідного рівняння.
4. Групова класифікація редукованих рівнянь.
5. Знаходження достатніх умов сумісності та загального розв'язку умов сумісності (7) для менших розмірностей ($n = 2, 3$).
6. Знаходження та дослідження умов сумісності та класів редукованих рівнянь для інших типів рівнянь, зокрема, для пуанкаре-інваріантних скалярних рівнянь.

Я хочу подякувати Р.З. Жданову за корисні коментарі та посилання.

[1] Фущич В.І., Єгорченко І.А. Про редукцію багатовимірного нелінійного хвильового рівняння до двовимірних рівнянь // Доповіді АН УРСР, Сер. А, фіз.-мат. і техн. науки. – 1990. – № 8. – С. 32–34 (див. math-ph/0610020).

[2] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 6–28.

[3] Grundland A., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 791–807.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[5] Olver P. Application of Lie groups to differential equations. – New York: Springer Verlag, 1987.

[6] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Publishers, 1993.

[7] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer Verlag, 1989.

[8] Tajiri M. Some remarks on similarity and soliton solutions of nonlinear Klein–Gordon equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1984. – **53**. – P. 3759–3764.

[9] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 977–985.

[10] Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – **16**. – P. 3645–3656.

[11] Фущич В.І., Баранник А.Ф. Про точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера у просторі Мінковського $R(1,n)$ // Доповіді НАН України, Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 31–34.
Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.
Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга $n > 1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1250–1256.
Фущич В.И., Баранник А.Ф. Максимальные подалгебры ранга $n > 1$ алгебры $AP(1,n)$ и редукция нелинейных волновых уравнений. II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1693–1700.

[12] Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – С. 1311–1323.

[13] Фущич В.І., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Д. Про нові точні розв'язки багатовимірного нелінійного рівняння Даламбера // Доповіді НАН України. – 1995. – № 2. – С. 33–37.

[14] Clarkson P.A., Kruskal M. New similarity reductions of the Boussinesq equations // J. Math. Phys. – 1989. – **30**. – P. 2201–2213.

[15] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions // SIAM J. Appl. Math. – 1994. – **54**. – P. 1693–1719 (see solv-int/9401002).

[16] Olver P. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. London A. – 1994. – **444**. – P. 509–523.

[17] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1987. – С. 4–16.

[18] Фущич В. І., Жданов Р.З. Умовна симетрія та редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**. – С. 970–982.

[19] Olver P.J., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**. – P. 107–112.

[20] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915–2924.

[21] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.

[22] Cicogna G. A discussion on the different notions of symmetry of differential equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 77–84.

[23] Fushchych W.I. Ansatz–95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**. – P. 216–235.

[24] Фущич В.І., Баранник А.Ф. Про новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Доповіді НАН України. – 1996. – № 10. – С. 48–51.

[25] Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. – Cambridge: Univ. Press, 1922.
Bateman H. Mathematical analysis of electrical and optical wave-motion. – New York: Dover, 1955.

[26] Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. – 1932. – **20**. – С. 37–40.
Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. – 1933. – **29**. – С. 43–51.
Соболев С.Л. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения // Тр. физ.-мат. ин–та им. В.А. Стеклова. – 1934. – **5**. – С. 259–264.

[27] Еругин Н.П. О функционально-инвариантных решениях // Доклады АН СССР. – 1944. – **5**. – С. 385–386.

[28] Cartan E. Oeuvres completes. V. 1–6. – Paris: Gauthier-Villars, 1952–1955.

[29] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**. – С. 1471–1486.

[30] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992, 228 с.
Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries of nonlinear Dirac equations. – Kyiv, Mathematical Ukraina Publishers, 1997. – 384 p.

[31] Collins S.B. Complex potential equations. I // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1976. – **80**. – P. 165–187.
Collins S.B. All solutions to a nonlinear system of complex potential equations // J. Math. Phys. – 1980. – **21**. – P. 240–248.

[32] Cieciura G., Grundland A. A certain class of solutions of the nonlinear wave equation // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 3460–3469.

[33] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. On some new exact solutions of the nonlinear d'Alembert–Hamilton system // Phys. Lett. A. – 1989. – **141**, N 3–4, 113–115.

[34] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Yegorchenko I.A. On reduction of the nonlinear many-dimensional wave equations and compatibility of the d'Alembert–Hamilton system // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **160**. – P. 352–360.

[35] Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Совместность и решения нелинейных уравнений Даламбера и Гамильтона. – 1990. – 65 с. (Препр. / АН УССР. – Киев: Ин-т математики. – 90.39).

[36] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V. On the general solution of the d'Alembert equation with a nonlinear eikonal constraint and its applications // J. Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 7109–7127.

[37] Barannyk A., Yuryk I. On some exact solutions of nonlinear wave equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7–13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – **1**. – P. 98–107.

[38] Zhdanov R., Panchak O. New conditional symmetries and exact solutions of the nonlinear wave equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 8727–8734.

[39] Шульга М.В. Симметрия и некоторые точные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием / Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1985. – С. 36–38.

[40] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.

[41] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейных уравнений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда и Монжа–Ампера относительно конформной алгебры / Симметрийный анализ и рещения уравнений математической физики. – Киев: Ин–т математики АН УССР, 1988. – С. 98–102

[42] Єгорченко І.А., Воробйова А.І. Умовна інваріантність та точні розв'язки рівняння Клейна–Гордона–Фока // Доповіді НАН України. – 1992. – № 3. – С. 19–22.

[43] Euler M., Euler N. Symmetries for a class of explicitly space- and time-dependent (1+1)-dimensional wave equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 70–78.

[44] Anco S.C., Liu S. Exact solutions of semilinear radial wave equations in n dimensions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **297**. – P. 317–342 (see math-ph/0309049).

[45] Yehorchenko I.A., Vorobyova A.I. Sets of conditional symmetry operators and exact solutions for wave and generalised heat equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 298–303 (see math-ph/0304029).

[46] Cicogna G., Ceccherini F., Pegoraro F. Applications of symmetry methods to the theory of plasma physics // SIGMA. – 2006. – **2**, Paper 017. – 17 p.

[47] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extension $E(n)$, $P(l,n)$ // Acta Appl. Math. – 1992. – **28**. – P. 69–92.

[48] Zhdanov R.Z. On conditional symmetries of multidimensional nonlinear equations of quantum field theory / Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (July 7–13, 1997, Kyiv). – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – **1**. – P. 53–61.

[49] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation for complex fields // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2643–2652.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 113–123

УДК 517.9

Про інтегровні тривимірні квантово-механічні системи в магнітному полі

О.Ю. ЖАЛІЙ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: zhaliy@imath.kiev.ua

Робота присвячена побудові інтегровних тривимірних квантово-механічних систем з ненульовими магнітними полями. Розглядається існування пари взаємокомутуючих інтегралів руху не вище другого порядку за похідними. Більшість отриманих систем є новими і не співвідносяться з відокремленням змінних у відповідному рівнянні Шрьодінгера.

This paper is devoted to the construction of integrable three-dimensional quantum mechanical systems with magnetic fields. The existence of pairs of commuting integrals of motion not higher than second order in derivatives is considered. Most of the systems obtained are new and not related to the separation of variables in the corresponding Schrödinger equation.

Розглянемо стаціонарне рівняння Шрьодінгера для частинки, що рухається в зовнішньому електромагнітному полі в тривимірному евклідовому просторі

$$H\psi = E\psi, \quad H = \tfrac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + V(x,y,z) + A_i(x,y,z)p_i + p_iA_i(x,y,z), \quad (1)$$

де $V(x,y,z)$ та $(A_1(x,y,z),\ A_2(x,y,z),\ A_3(x,y,z))$ – скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля. Тут і надалі використовується позначення $\vec{p} = -ih\vec{\nabla}$, та за індексами, що повторюються йде підсумовування від 1 до 3.

За аналогією з класичною гамільтоновою механікою будемо вважати таку систему інтегровною, якщо існує пара квантово-механічних операторів P і Q, які комутують між собою, а також з гамільтоніаном H, тобто виконуються такі умови

$$[H,Q] = [H,P] = [P,Q] = 0.$$

Окрім цього, всі три оператори H, Q, P мають бути алгебраїчно незалежними, тобто жоден з них не може бути представлений поліномом від двох інших [1, 2].

В нашому дослідженні обмежимося випадком, коли оператори Q, P є квадратичними поліномами по $\vec{p}$

$$
\begin{aligned}
Q &= \alpha_{ik}(x,y,z)p_i p_k + f_i(x,y,z)p_i + u_1(x,y,z),\\
P &= \beta_{ik}(x,y,z)p_i p_k + g_i(x,y,z)p_i + u_2(x,y,z).
\end{aligned} \tag{2}
$$

В класичній механіці інтегровні системи є цікавими, оскільки їх рух у фазовому просторі є більш впорядкованим, а саме обмежується тором. В квантовій механіці інтегровність n-вимірної квантово-механічної системи, тобто існування n інтегралів руху (операторів, що комутують між собою, та з оператором рівняння (1)), полегшує задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій навіть тоді, коли з інтегровності не випливає відокремлення змінних, а лише так зване “квазі-відокремлення змінних” [3].

Отже задача опису всіх тих потенціалів електромагнітного поля V та A_1, A_2, A_3, для яких квантово-механічна задача є інтегровною в означенному вище сенсі, є важливою і актуальною.

У випадку чисто скалярного потенціалу, тобто коли магнітне поле відсутнє, для тривимірного випадку цю задачу було розв’язано в 1967-му році Я.А. Смородінським та його учнями [4, 5]. Вони довели, що з факту існування пари інтегралів руху першого або другого порядку по $\vec{p}$ (в означеному вище сенсі) випливає можливість відокремлення змінних у відповідному рівнянні Шрьодінгера [5] та навпаки [4]. А отже, отримані ними 11 класів інтегровних потенціалів V повністю співпали з результатами класичної роботи Ейзенхарта [6], де він ще у 1948-му році описав всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (або ж рівняння Гамільтона-Якобі у випадку класичної механіки) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 систем координат.

Наступний крок зробив у 1972-му році В.Н. Шаповалов зі співавторами [7], які отримали повний опис вектор-потенціалів з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 вищезгаданих систем координат, та виписали відповідні пари операторів першого та другого порядків, які комутують між собою та з оператором рівняння.

Подальші результати в цьому напрямі пов’язані з роботами групи П. Вінтерніца [8–10]. Для двовимірного випадку було встановлено, що в магнітному полі з існування інтегралів руху другого порядку не обов’язково слідує відокремлення змінних. Хоча при цьому інтеграли руху все ще класифікуються на класи еквівалентності під дією групи Евкліда, причому члени другого порядку по p_i в них мають таку ж саму форму, як і у випадку чисто скалярного потенціалу. Також було показано, що в магнітному полі квантовий випадок [10] вже не обов’язково збігається з класичним [8,9]: отримані вектор-потенціали можуть залежати від сталої Планка $\hbar$ нетривіальним чином.

В даній роботі робиться наступний крок в класифікації потенціалів електромагнітного поля V та $\vec{A}$ в тривимірному евклідовому просторі, при яких відповідна квантово-механічна система, що описується рівнянням (1), є інтегровною в означеному вище сенсі, тобто для яких існує пара операторів (2), що комутують між собою, а також з оператором рівняння. Як результат, ми отримаємо цілу низку вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, а отже ці потенціали не містяться в класифікації Шаповалова [7] і тому є новими.

Спочатку ми розглянемо один оператор Q вигляду (2), який комутує з оператором рівняння Шрьодінгера H вигляду (1). Комутатор $[Q, H]$ буде містити в собі члени третього, другого, першого, та нульового порядків по p_i, коефіцієнти при яких ми маємо покласти рівними нулеві. Коефіцієнти при третій степені p_i дають таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_m} p_m p_i p_k = 0.$$

Після розв’язання цієї системи ми маємо наступний результат: розглядуваний оператор Q може бути представлений як симетричний білінійний поліном по генераторам групи рухів тривимірного евклідового простору E_3, тобто групи симетрій тривимірного рівняння Шрьодінгера для вільної частинки (рівняння Гельмгольца):

$$
\begin{aligned}
Q = {}& a_{ik} M_i M_k + b_{ik}(p_i M_k + M_k p_i) + c_{ij} p_i p_k +\\
& + f_i(x,y,z)p_i + u_1(x,y,z),
\end{aligned} \tag{3}
$$

де a_{ik}, b_{ik} та c_{ij} є константами, а M_i – оператор повороту, а саме $M_i = \varepsilon_{ikl} x_k p_l$, де ε_{ikl} – повністю антисиметричний тензор.

Порівнюючи отриманий вигляд оператора (3) з аналогічним виглядом для випадку чисто скалярного потенціалу [5] робимо висновок, що члени другого порядку по p_i в операторах залишаються незмінними і після появи ненульового магнітного поля (як і в двовимірному випадку [10]).

А тому, за повною аналогією з роботою [5], пара комутуючих операторів P, Q вигляду (3) може бути зведена поворотами та зсувами системи координат, а також перетвореннями виду

$$Q' = \mu P + \nu Q + \lambda H$$

до одного з 11 класів, що відповідають класичним 11 ортогональним системам координат, які дозволяють відокремлення змінних у тривимірному рівнянні Шрьодінгера для вільної частинки.

Тому в нашому випадку ненульового магнітного поля ми отримаємо члени другого порядку по p_i в цих комутуючих 11 парах операторів P, Q такі ж самі, як і в роботі [5]. Але, на відміну від чисто скалярного випадку, в наших операторах залишаються також ненульові коефіцієнти при членах p_i першого порядку, які є довільними функціями, від вигляду яких в решті решт і залежить вигляд магнітного поля (у скалярному випадку вони дорівнюють нулеві), як це буде показано далі.

В цій статті нам вдалося повністю розв'язати найпростіший "декартовий" випадок, тобто коли пара P, Q має вигляд:

$$\begin{aligned} Q &= p_1^2 + \vec{f}(x,y,z)\vec{p} + u_1(x,y,z), \\ P &= p_2^2 + \vec{g}(x,y,z)\vec{p} + u_2(x,y,z). \end{aligned}$$

Прирівнюючи в рівності $[H,Q]=[H,P]=[P,Q]=0$ коефіцієнти при незалежних степенях p_i до нуля, ми отримаємо перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь с частинними похідними для невідомих функцій f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, u_1, u_2 і V, A_1, A_2, A_3.

Коефіцієнти при вищих степенях p_i дають таку систему:

$$\begin{aligned} &f_2 = f_2(x), \quad f_3 = f_3(x), \quad g_1 = g_1(y), \quad g_3 = g_3(y), \quad f_{1y} = g_{2x}, \\ &f_2'(x) + f_{1y} = 4A_{2x}, \quad g_3'(y) + g_{2z} = 4A_{3y}, \quad 4A_{1x} = f_{1x}, \\ &f_3'(x) + f_{1z} = 4A_{3x}, \quad g_1'(y) + g_{2x} = 4A_{1y}, \quad 4A_{2y} = g_{2y}. \end{aligned}$$

Її загальним розв'язком для $\vec{A}$ буде

$$4A_1 = s_x + k_{1x} + g_1(y) + r_1(z), \quad 4A_2 = s_y + k_{2y} + f_2(x) + r_2(z),$$

$$4A_3 = s_z + k_{1z} + k_{2z} + f_3(x) + g_3(y) + r_3'(z),$$

де $s = s(x,y,z)$, $k_1 = k_1(x,z)$, $k_2 = k_2(y,z)$.

Калібровне перетворення

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}F, \quad F = s(x,y,z) + k_1(x,z) + k_2(y,z) + r_3(z).$$

спрощує вираз для $\vec{A}$ до такого

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{4}(g_1(y) + r_1(z)), \\ A_2 &= \tfrac{1}{4}(f_2(x) + r_2(z)), \\ A_3 &= \tfrac{1}{4}(f_3(x) + g_3(y)). \end{aligned}$$

Маючи цей вираз для $\vec{A}$, ми отримаємо з коефіцієнтів при нижчих степенях p_i наступну систему для функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$:

$$\begin{aligned} f_2(x)g_3'(y) &= g_1(y)f_3'(x), \\ r_1(z)f_2'(x) &= f_3(x)r_2'(z), \\ r_2(z)g_1'(y) &= g_3(y)r_1'(z). \end{aligned} \tag{4}$$

Очевидно, що рівняння Шрьодінгера з вектор-потенціалом (1) є інваріантним відносно перестановок A_1, A_2, A_3, що відбуваються одночасно з x_1, x_2, x_3. При цьому рівняння (4) є інваріантними відносно перестановок функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$. Ці перетворення еквівалентності можна зобразити таким чином:

$$\begin{pmatrix} f_2 & g_3 & r_1 \\ f_3 & g_1 & r_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 & f_2 & g_3 \\ r_2 & f_3 & g_1 \\ A_3 & A_1 & A_2 \\ z & x & y \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} g_3 & r_1 & f_2 \\ g_1 & r_2 & f_3 \\ A_2 & A_3 & A_1 \\ y & z & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_3 & r_2 & g_1 \\ f_2 & r_1 & g_3 \\ A_1 & A_3 & A_2 \\ x & z & y \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} g_1 & f_3 & r_2 \\ g_3 & f_2 & r_1 \\ A_2 & A_1 & A_3 \\ y & x & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_2 & g_1 & f_3 \\ r_1 & g_3 & f_2 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Використовуючи це відношення еквівалентності, нам вдалося повністю описати всі розв'язки системи (4). Це, в свою чергу дало нам опис всіх можливих форм вектор-потенціалів $\vec{A}$. Коефіцієнти при степенях p_i, що залишилися, служать для визначення форми скалярної компоненти вектор-потенціалу V і накладають деякі додаткові обмеження на $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$.

Внизу ми наводимо остаточні результати наших обчислень. Тут і надалі $\vec{\Omega}$ позначає магнітне поле, а саме $\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{A}$.

Випадок 1.

$$\vec{A} = 0, \quad \vec{\Omega} = 0, \qquad Q = p_1^2 + 2u_1(x),$$
$$V = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z), \qquad P = p_2^2 + 2u_2(y).$$

Цей випадок відповідає нульовому магнітному полю і міститься в класифікації Ейзенхарта [6]. Згідно його результатів такий вигляд для скалярного потенціалу $V = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z)$ вичерпує всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Випадок 2.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -v_2'(z) \\ v_1'(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = v_3(z), \quad \begin{matrix} Q = p_1^2, \\ P = p_2^2. \end{matrix}$$

Випадок 3.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) + g(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ -f'(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$V = u_1(x) + u_2(y), \quad \begin{matrix} Q = p_1^2 + 4f(x)p_3 + 2u_1(x), \\ P = p_2^2 + 4g(y)p_3 + 2u_2(y). \end{matrix}$$

Випадки 2–3 були отримані в класифікації Шаповалова та співавторів [7]. Згідно їх результатів ці два випадки вичерпують всі векторпотенціали з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Наступні випадки не пов'язані з відокремленням змінних, а отже ці потенціали не містилися в класифікації Шаповалова [7] і тому є новими.

Випадок 4.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix},$$
$$\begin{aligned} V &= -(C_3 f(x) + C_3 g(y) + \\ &\quad + 2C_2 f^2(x) + 2C_1 g^2(y) + r(z) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)), \\ Q &= p_1^2 + 4f'(x)p_2 - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2 f(x)^2 + C_3 f(x)), \\ P &= p_2^2 + 4g'(y)p_1 - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1 g(y)^2 + C_3 g(y)), \end{aligned}$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$f''(x) = Cf^2(x) + C_1 f(x) + C_4, \quad g''(y) = Cg^2(y) + C_2 g(y) + C_5.$$

При $C = 0$ це є лінійні рівняння другого порядку. Випадок $C \neq 0$ більш цікавий: коли ще при цьому і $C_1 \neq 0$ (або ж, відповідно, $C_2 \neq 0$), то їх розв'язками будуть перші трансцеденти Пенлеве, а якщо ж $C_1 = 0$ (або ж, відповідно, $C_2 = 0$), то маємо справу с рівнянням Вейерштраса, розв'язки якого виражаються або ж через функції Вейерштраса, або ж через елементарні функції, в залежності від параметру C_4 (або ж, відповідно, C_5) та констант інтегрування. Деталі можна знайти, наприклад, в довіднику Камке [11].

Випадок 5.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ Cf(x) + Cg(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} Cg'(y) \\ -Cf'(x) \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix},$$
$$\begin{aligned} V &= -(r + C_3 f(x) + C_3 g(y) + \\ &\quad + 2C_2 f^2(x) + 2C_1 g^2(y) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)), \\ Q &= p_1^2 + 4(f'(x)p_2 + Cf(x)p_3) - \\ &\quad - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2 f(x)^2 + C_3 f(x)), \\ P &= p_2^2 + 4(g'(y)p_1 + Cg(y)p_3) - \\ &\quad - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1 g(y)^2 + C_3 g(y)), \end{aligned}$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$f''(x) = C_6 f^2(x) + C_1 f(x) + C_4,$$

$$g''(y) = C_6 g^2(y) + C_2 g(y) + C_5,$$

які розв'язуються аналогічно до попереднього випадку.

Випадок 6.

$$\vec{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} w_1'(y) + v_1'(z) \\ u_2'(x) + v_2'(z) \\ u_3'(x) + w_3'(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} w_3''(y) - v_2''(z) \\ v_1''(z) - u_3''(x) \\ u_2''(x) - w_1''(y) \end{pmatrix},$$

$$V = -\tfrac{1}{4}(r + u_1(x) + w_2(y) + v_3(z) + w_1(y)u_2''(x) + v_1(z)u_3''(x) + \\ + u_2(x)w_1''(y) + v_2(z)w_3''(y) + u_3(x)v_1''(z) + w_3(y)v_2''(z)),$$

$$Q = p_1^2 + u_2'(x)p_2 + u_3'(x)p_3 - \\ - \tfrac{1}{2}(w_1(y)u_2''(x) + v_1(z)u_3''(x) + u_1(x)),$$

$$P = p_2^2 + w_1'(y)p_1 + w_3'(y)p_3 - \\ - \tfrac{1}{2}(u_2(x)w_1''(y) + v_2(z)w_3''(y) + w_2(y)),$$

де функції $u_2(x)$, $u_3(x)$, $w_1(y)$, $w_3(y)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $u_1(x)$, $w_2(y)$, $v_3(z)$ визначені конкретним чином, та розбиваються в свою чергу на чотири випадки:

Випадок 6.1.

$$u_2(x) = a_3(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$u_3(x) = a_2(r_1\sinh(a_1x) + k_1\cosh(a_1x)),$$
$$w_1(y) = a_3(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$w_3(y) = a_1(r_2\sinh(a_2y) + k_2\cosh(a_2y)),$$
$$v_1(z) = a_2(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z)),$$
$$v_2(z) = a_1(r_3\sinh(a_3z) + k_3\cosh(a_3z)),$$
$$u_1(x) = \tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 + k_1^2)\cosh(2a_1x) + 2r_1k_1\sinh(2a_1x)) + \\ + C(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$w_2(y) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 + k_2^2)\cosh(2a_2y) + 2r_2k_2\sinh(2a_2y)) + \\ + C(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$v_3(z) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 + k_3^2)\cosh(2a_3z) + 2r_3k_3\sinh(2a_3z)) + \\ + C_1(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z))$$

з 5 можливими підвипадками:

$a)$ $C = 0, \quad C_1 = 0;$

$b)$ $r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = C;$

$c)$ $r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = C;$

$d)$ $r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -C;$

$e)$ $r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -C.$

Випадок 6.2.

$$u_2(x) = a_3(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),$$
$$u_3(x) = a_2(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),$$
$$w_1(y) = a_3(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),$$
$$w_3(y) = a_1(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),$$
$$v_1(z) = a_2(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z)),$$
$$v_2(z) = a_1(r_3\sinh(a_3z) + k_3\cosh(a_3z)),$$
$$u_1(x) = \tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 - k_1^2)\cos(2a_1x) + 2r_1k_1\sin(2a_1x)) + \\ + C(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),$$
$$w_2(y) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 - k_2^2)\cos(2a_2y) + 2r_2k_2\sin(2a_2y)) + \\ + C(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),$$
$$v_3(z) = -\tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 + k_3^2)\cosh(2a_3z) + 2r_3k_3\sinh(2a_3z)) + \\ + C_1(r_3\cosh(a_3z) + k_3\sinh(a_3z))$$

з 5 можливими підвипадками:

$a)$ $C = 0, \quad C_1 = 0;$

$b)$ $r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = iC;$

$c)$ $r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = iC;$

$d)$ $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -iC;$

$e)$ $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.3.

$$u_2(x) = a_3(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),$$
$$u_3(x) = ia_2(r_1\sin(a_1x) - k_1\cos(a_1x)),$$
$$w_1(y) = a_3(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),$$
$$w_3(y) = ia_1(r_2\sin(a_2y) - k_2\cos(a_2y)),$$
$$v_1(z) = a_2(r_3\cos(a_3z) + k_3\sin(a_3z)),$$

$$v_2(z) = ia_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z)),$$
$$u_1(x) = -\tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 - k_1^2)\cos(2a_1x) + 2r_1k_1\sin(2a_1x)) + \\ + C(r_1\cos(a_1x) + k_1\sin(a_1x)),$$
$$w_2(y) = -\tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 - k_2^2)\cos(2a_2y) + 2r_2k_2\sin(2a_2y)) + \\ + C(r_2\cos(a_2y) + k_2\sin(a_2y)),$$
$$v_3(z) = -\tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 - k_3^2)\cos(2a_3z) + 2r_3k_3\sin(2a_3z)) + \\ + C_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z))$$

з 5 можливими підвипадками:

a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$

b) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = iC;$

c) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = iC;$

d) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -iC;$

e) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.4.

$$u_2(x) = a_3(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$u_3(x) = -ia_2(r_1\sinh(a_1x) + k_1\cosh(a_1x)),$$
$$w_1(y) = a_3(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$w_3(y) = -ia_1(r_2\sinh(a_2y) + k_2\cosh(a_2y)),$$
$$v_1(z) = a_2(r_3\cos(a_3z) + k_3\sin(a_3z)),$$
$$v_2(z) = ia_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z)),$$
$$u_1(x) = \tfrac{1}{4}a_2^2a_3^2((r_1^2 + k_1^2)\cosh(2a_1x) + 2r_1k_1\sinh(2a_1x)) + \\ + C(r_1\cosh(a_1x) + k_1\sinh(a_1x)),$$
$$w_2(y) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_3^2((r_2^2 + k_2^2)\cosh(2a_2y) + 2r_2k_2\sinh(2a_2y)) + \\ + C(r_2\cosh(a_2y) + k_2\sinh(a_2y)),$$
$$v_3(z) = \tfrac{1}{4}a_1^2a_2^2((r_3^2 - k_3^2)\cos(2a_3z) + 2r_3k_3\sin(2a_3z)) + \\ + C_1(r_3\sin(a_3z) - k_3\cos(a_3z))$$

з 5 можливими підвипадками:

a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$

b) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = C;$

c) $r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = C;$

d) $r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -C;$

e) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -C.$

Таким чином, ми отримали цілу низку нових вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, і для яких відповідну квантово-механічну задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій можна спробувати розв'язати за допомогою, наприклад, квазі-відокремлення змінних [3].

Автор вдячний Павлові Вінтерніцу за корисні дискусії. Робота була підтримана NATO Reintegration Grant NUKR.RIG 982038 та грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Hietarinta J. Pure quantum integrability // Phys. Lett. A. – 1998. – **246**. – P. 97–104.

[2] Hietarinta J. Classical vs quantum integrability // J. Math. Phys. – 1984. – **25**. – P. 1833–1840.

[3] Hudon C., Winternitz P. Quasiseparation of variables in the Schrödinger equation with a magnetic field, math-ph/0502046

[4] Смородинский Я.А., Тугов И.И. О полных наборах наблюдаемых // ЖЭТФ – 1966. – **50**. – С. 653–659.

[5] Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // Nuovo Cimento A – 1967. – **52**. – P. 1061–1084.

[6] Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one–particle Schroedinger equations are separable // Phys. Rev. – 1948. – **74**. – P. 87–89.

[7] Шаповалов В.Н., Багров В.Г., Мешков А.Г. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера // Изв. вузов СССР, Физика. – 1972. – № 8. – С. 45–50.

[8] Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. – 1985. – **26**. – P. 3070–3079.

[9] McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields // J. Math. Phys. – 2000. – **41**. – P. 2957–2967.

[10] Berube, J., Winternitz P. Integrable and superintegrable quantum systems in a magnetic field // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 1959–1973.

[11] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 124–147

УДК 517.9:519.46

Груповий аналіз загального еволюційного рівняння другого порядку: інваріантність відносно груп локальних перетворень з нетривіальним розкладом Леві

Р.З. ЖДАНОВ †, ***В.І. ЛАГНО*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: renat@imath.kiev.ua

‡ *Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка*
E-mail: lvi@pdpu.poltava.ua

В статті розглядається задача групової класифікації загального рівняння еволюційного типу другого порядку. Отримано повний перелік рівнянь цього типу, групи локальних перетворень яких мають нетривіальний розклад Леві.

In this article we consider the problem of group classification of general second-order evolution equation. We find the complete list of such equations whose groups of local transformations have nontrivial Levi decomposition.

1. Вступ. Об'єктом наших досліджень є рівняння, що належать до класу рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{1}$$

В (1) і далі $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, функція F – довільна гладка функція.

Слід відзначити, що рівняння вигляду (1) займають одне з чільних місць серед фундаментальних рівнянь сучасного природознавства. До рівнянь цього типу приводять задачі опису процесів тепло– і масообміну, механіки суцільного середовища, росту популяцій, фізики моря (для опису розподілу коливань температури і солоності моря відносно глибини) і т.п.

Одним із універсальних методів дослідження диференціальних рівнянь сучасної математичної фізики є їх груповий аналіз, основні поняття і факти якого можна знайти, наприклад, в [1–4]. Але, ефективність застосування цього методу безпосередньо пов'язана із наявністю у досліджуваного рівняння нетривіальних групових властивостей. У зв'язку із цим важливою постає задача групової класифікації диференціальних рівнянь, яка для рівняння (1) звучить так: описати всі рівняння даного вигляду, що мають нетривіальні симетрійні властивості.

Першим систематично досліджував симетрійні властивості рівнянь вигляду (1) ще Софус Лі [5]. Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь здійснив Л.В. Овсянніков у відомій статті [6], де він запропонував метод (Лі–Овсяннікова) розв'язування задачі групової класифікації і здійснив групову класифікацію нелінійного рівняння теплопровідності. Ця стаття поклала початок численним циклам робіт з групової класифікації диференціальних рівнянь взагалі і диференціальних рівнянь вигляду (1), зокрема. Досить повний аналіз результатів робіт, присвячених груповій класифікації диференціальних рівнянь, станом на початок 90-х років минулого століття можна знайти в [7]. Виділимо лише роботи [8–20], в яких було здійснено групову класифікацію рівнянь вигляду (1). Слід відзначити, що в цих роботах для групової класифікації досліджуваних рівнянь було використано метод Лі–Овсяннікова, оскільки всі вони містили довільні функції однієї змінної.

Подальшого прогресу у розв'язуванні задачі групової класифікації нелінійних диференціальних рівнянь вигляду (1) було досягнуто в роботах [21, 22], де запропоновано новий підхід до групової класифікації диференціальних рівнянь і проведено групову класифікацію рівнянь

$$u_t = u_{xx} + f(t, x, u, u_x),$$
$$u_t = f(t, x, u, u_x)u_{xx} + g(t, x, u, u_x),$$

та в роботах [23–25], де, відповідно, проведено груповий аналіз рівняння Шрьодінгера, еволюційного рівняння третього порядку й хвильового рівняння.

Ми, слідуючи роботам [21, 22], розв'язуємо задачу групової класифікації найбільш загального еволюційного рівняння другого порядку в двовимірному просторі-часі. Оскільки групова класифікація лінійних рівнянь вигляду (1) є добре вивченою, розглядається *задача групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду* (1), а саме, тут ми здійснюємо опис тих рівнянь, які допускають групи локальних перетворень з нетривіальним розкладом Леві та є нееквівалентними лінійним рівнянням.

2. Попередній симетрійний аналіз нелінійного еволюційного рівняння. Згідно з відомим алгоритмом Лі [1–4], група локальних перетворень, яку може допускати рівняння вигляду (1), генерується інфінітезимальними операторами вигляду

$$\mathrm{v} = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u, \tag{2}$$

де $\tau = \tau(t,x,u)$, $\xi = \xi(t,x,u)$, $\eta = \eta(t,x,u)$ – довільні дійсні гладкі функції, визначені в просторі $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ незалежних $\mathbb{R}^2 = \langle t, x\rangle$ та залежної $\mathbb{R}^1 = \langle u\rangle$ змінних. Умова інваріантності рівняння (1) відносно оператора (2) має вигляд

$$\varphi^t - \tau F_t - \xi F_x - \eta F_u - \varphi^x F_{u_x} - \varphi^{xx} F_{u_{xx}}\big|_{(1)} = 0, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned}
&\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi),\\
&\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi),\\
&\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi),\\
&D_t = \partial_t + u_t\partial_u + u_{tt}\partial_{u_t} + u_{tx}\partial_{u_x} + \cdots,\\
&D_x = \partial_x + u_x\partial_u + u_{tx}\partial_{u_t} + u_{xx}\partial_{u_x} + \cdots,
\end{aligned}$$

умова $\big|_{(1)}$ в (3) означає заміну u_t у виразах для φ^t, φ^x, φ^{xx} на F.

Провівши стандартний аналіз співвідношення (3), переконуємося у справедливості такого твердження.

Твердження 1. *Група інваріантності рівняння* (1) *генерується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$\mathrm{v} = \tau(t)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де функції τ, ξ, η та функція F в рівнянні (1) *задовольняють таку рівність:*

$$\begin{aligned}
&\eta_t - u_x\xi_t + (\eta_u - \tau_t - u_x\xi_u)F =\\
&\quad = [\eta_x + u_x(\eta_u - \xi_x) - u_x^2\xi_u]F_{u_x} +\\
&\quad + [\eta_{xx} + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - u_x^3\xi_{uu} +\\
&\quad + u_{xx}(\eta_u - 2\xi_x) - 3u_x u_{xx}\xi_u]F_{u_{xx}} + \tau F_t + \xi F_x + \eta F_u.
\end{aligned} \tag{5}$$

Рівність (5) називатимемо класифікуючим рівнянням.

Оскільки прямий повний аналіз класифікуючого рівняння (5) є неможливим, ми для групової класифікації рівняння (1) будемо використовувати метод, запропонований в роботах [21, 22]. Для цього, перш за все, вияснимо, які із перетворень простору V складають групу еквівалентності рівняння (1) (надалі ми позначаємо її $\mathcal{E}$). Взагалі кажучи, групу $\mathcal{E}$ складають ті із взаємоoднозначних перетворень простору V

$$\bar t = \alpha(t,x,u), \quad \bar x = \beta(t,x,u), \quad v = \gamma(t,x,u), \quad \frac{D(\alpha,\beta,\gamma)}{D(t,x,u)} \neq 0, \tag{6}$$

які залишають диференціальну структуру (вигляд) рівняння (1) незмінною. Виконавши заміну змінних (6) в рівнянні (1) і вимагаючи, щоб трансформоване рівняння мало вигляд

$$v_{\bar t} = \Phi(\bar t, \bar x, v, v_{\bar x}, v_{\bar x\bar x}),$$

де Φ – довільна гладка функція своїх аргументів, приходимо до такого результату.

Твердження 2. *Групу $\mathcal{E}$ рівняння* (1) *становлять такі перетворення:*

$$\begin{aligned}
&\bar t = T(t), \quad \bar x = X(t,x,u), \quad v = U(t,x,u),\\
&T' = \frac{dT}{dt} \neq 0, \quad \frac{D(X,U)}{D(x,u)} \neq 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Метод групової класифікації, який ми використовуємо, передбачає, перш за все, використання перетворень (7) для спрощення вигляду інфінітезимальних операторів, які можуть складати базис алгебр інваріантності рівнянь вигляду (1). Заміна змінних (7) трансформує оператор (4) в оператор

$$\tilde{\mathrm{v}} = \tau T'\partial_{\bar t} + (\tau X_t + \xi X_x + \eta X_u)\partial_{\bar x} + (\tau U_t + \xi U_x + \eta U_u)\partial_v. \tag{8}$$

Якщо в операторі (4) $\tau \neq 0$, то, поклавши функцію T рівною розв'язкові рівняння $\tau T' = 1$, а функції X, U – рівними фундаментальним розв'язкам системи рівнянь

$$\tau X_t + \xi X_x + \eta X_u = 0, \quad \tau U_t + \xi U_x + \eta U_u = 0, \quad \frac{D(X,U)}{D(x,u)} \neq 0,$$

бачимо, що оператор (8) зводиться до оператора $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_{\bar{t}}$. Якщо ж в операторі (4) $\tau = 0$, то обов'язково або $\xi \neq 0$, або $\eta \neq 0$. Якщо в (4) $\xi \neq 0$, $\eta = 0$, то заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = u$, $v = x$, перетворення якої належать до групи $\mathcal{E}$, зводять оператор (4) в оператор $\tilde{\mathrm{v}} = \xi(\bar{t}, \bar{x}, v)\partial_v$. Отже, з точністю до еквівалентності, яку визначає дія перетворень з групи $\mathcal{E}$, можемо вважати, що коли $\tau = 0$, то в (4) обов'язково $\eta \neq 0$. Але тоді, поклавши в перетвореннях (7) функції X та U рівними ненульовим розв'язкам рівнянь $\xi X_x + \eta X_u = 0$, $\xi U_x + \eta U_u = 1$, бачимо, що у цьому випадкові оператор (8) зводиться до оператора $\tilde{\mathrm{v}} = \partial_v$. Отже, має місце така лема.

Лема 1. *Оператор* (4) *є еквівалентним одному з таких двох операторів:* $\mathrm{v} = \partial_t$, $\mathrm{v} = \partial_u$.

Результати леми 1 дозволяють отримати і перший класифікаційний результат для рівняння (1).

Теорема 1. *З точністю до еквівалентності існують два класи нелінійних рівнянь вигляду* (1), *які допускають максимальні однопараметричні групи інваріантності. Нижче наведено представники (їх канонічний вигляд) цих класів рівнянь та відповідні одновимірні алгебри Лі* A_1 *операторів симетрії, які генерують їх групи інваріантності:*

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}) : \quad A_1^1 = \langle \partial_t \rangle;$$
$$u_x = F(t, x, u_x, u_{xx}) : \quad A_1^2 = \langle \partial_u \rangle.$$

Доведення. Якщо рівняння (1) допускає однопараметричну групу інваріантності, то вона генерується інфінітезимальним оператором вигляду (4), який, згідно з результатами леми 1, є еквівалентним одному з операторів ∂_t або ∂_u.

Для оператора ∂_t класифікуюче рівняння (5) набуває вигляду $F_t = 0$, звідки випливає, що $F = F(x, u, u_x, u_{xx})$. Аналогічно переконуємося, що у рівнянні, інваріантному відносно оператора ∂_u, $F = F(t, x, u_x, u_{xx})$.

Подальша пряма перевірка показує, що у випадку довільних значень отриманих функцій ці оператори генерують максимальні групи

інваріантності відповідних рівнянь, тобто їх максимальні алгебри інваріантності збігаються з A_1^1 та A_1^2. Теорема доведена.

У подальшій груповій класифікації ми розбиваємо множину рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями на два класи. Припустимо, що рівняння вигляду (1) допускає k-вимірну ($k \geq 1$) максимальну алгебру інваріантності $A_k = \langle \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_k \rangle$ з базисними операторами

$$\mathrm{v}_i = \tau^i \partial_t + \xi^i \partial_x + \eta^i \partial_u, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

Якщо в операторах (9) $\tau^i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), то відповідне інваріантне рівняння ми відносимо до рівнянь першого класу. Якщо ж хоча б в одному з операторів $\tau^i \equiv 0$, то відповідне інваріантне рівняння ми відносимо до рівнянь другого класу. Як випливає з результатів леми 1 з точністю до еквівалентності ми завжди можемо один із базисних операторів алгебри інваріантності рівняння першого класу покласти рівним ∂_t, а для рівняння другого класу – ∂_u. Провівши групову класифікацію рівнянь кожного класу, ми отримаємо повний перелік рівнянь вигляду (1) з нетривіальними симетрійними властивостями.

3. Групова класифікація рівнянь першого класу. Згідно з результатами теореми 1, серед рівнянь першого класу найнижчі симетрійні властивості має рівняння

$$u_t = F(x, u, u_x, u_{xx}), \tag{10}$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є одновимірна алгебра Лі $A_1^1 = \langle \partial_t \rangle$.

Лема 2. *Серед рівнянь першого класу не існують такі, максимальні алгебри інваріантності яких містили б як підалгебру двовимірну абелеву алгебру Лі операторів симетрії.*

Доведення. Для доведення леми нам достатньо показати, що серед рівнянь першого класу не існують такі, які б допускали двовимірні абелеві алгебри Лі операторів симетрії.

Припустимо, що таке рівняння існує. Тоді один з базисних операторів, наприклад, $\mathrm{v}_1 = \partial_t$, а другий ($\mathrm{v}_2$) має вигляд (4). Перевірка комутаційного співвідношення $[\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2] = 0$ показує, що в операторі v_2 $\tau_t = 0$, $\xi_t = 0$, $\eta_t = 0$, тобто можемо покласти $\mathrm{v}_2 =$

$\xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u$. Але тоді неважко показати, що існують перетворення (8), які залишають вигляд оператора v_1 незмінним, а оператор v_2 зводять в оператор $\tilde{\mathrm{v}}_2 = \partial_v$. Отже дане рівняння еквівалентне такому, алгебра інваріантності якого збігається з двовимірною алгеброю Лі операторів симетрії $\langle \partial_t, \partial_u \rangle$, тобто дане рівняння є рівнянням другого класу. Отримана суперечність і доводить лему.

З відомої теореми Леві–Мальцева (див., наприклад, [26]) випливає, що множина скінченновимірних дійсних алгебр Лі вичерпується розв'язними алгебрами Лі та алгебрами Лі з нетривіальним фактором Леві. Оскільки фактор Леві є деякою напівпростою алгеброю Лі, то для повного опису рівнянь першого класу з нетривіальними симетрійними властивостями нам, перш за все, потрібно отримати рівняння, які інваріантні відносно розв'язних та напівпростих алгебр Лі операторів симетрії.

3.1. Інваріантність відносно розв'язних алгебр Лі. Серед дійсних двовимірних розв'язних алгебр Лі з точністю до ізоморфізму розрізняють дві алгебри:

$$\begin{aligned} &A_{2.1} = \langle e_1, e_2 \rangle : \quad [e_1, e_2] = 0; \\ &A_{2.2} = \langle e_1, e_2 \rangle : \quad [e_1, e_2] = e_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Оскільки алгебра $A_{2.1}$ є абелевою то дослідженню підлягають лише ті рівняння, які можуть допускати алгебри Лі операторів симетрії, що є ізоморфними алгебрі $A_{2.2}$ При цьому побудову реалізацій алгебри $A_{2.2}$ можна проводити поклавши один з базисних операторів, наприклад, e_2, рівним оператору ∂_t.

Отже, нехай $e_2 = \partial_t$, а оператор e_1 має вигляд (4), де $\tau \neq 0$. Тоді з виконання другого комутаційного співвідношення(11) випливає, що $\tau_t = -1$, $\xi_t = \eta_t = 0$. Тому в реалізації алгебри $A_{2.2}$ можна покласти, що

$$e_1 = -t\partial_t + \xi(x,u)\partial_x + \eta(x,u)\partial_u. \tag{12}$$

Якщо в операторі (12) $\xi = \eta = 0$, то має місце реалізація $\langle -t\partial_t, \partial_t \rangle$. Якщо ж в (12) $|\xi| + |\eta| \neq 0$, то неважко переконатися у тому, що існують такі перетворення з групи $\mathcal{E}$, які залишають вигляд оператора e_2 незмінним, а оператор e_1 (12) зводять в оператор $\tilde{e}_1 = -\bar{t}\partial_{\bar{t}} - v\partial_v$.

Отже, можна стверджувати, що з точністю до еквівалентності існують дві реалізації алгебри $A_{2.2}$ $\langle -t\partial_t, \partial_t \rangle$, $\langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_t \rangle$, які можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь першого класу.

Перевірка класифікуючого рівняння (5) для першої з реалізацій приводить до умови $F = 0$, звідки випливає, що ця реалізація не може бути алгеброю інваріантності досліджуваних рівнянь.

Для другої реалізації відповідна процедура показала, що $A_{2.2}$-інваріантне рівняння має вигляд

$$u_t = F(x, \omega, \mathrm{w}), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \mathrm{w} = u^{-1}u_{xx}.$$

Подальшому дослідженню підлягають ті із рівнянь першого класу, які допускають тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Добре відомо (див., наприклад, [27]), що тривимірні розв'язні дійсні алгебри Лі $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ з точністю до ізоморфізму вичерпуються двома розкладними

$$\begin{aligned} &A_{3.1} = A_{2.1} \oplus A_1 : \quad [e_i, e_j] = 0, \quad i,j = 1,2,3; \\ &A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1 : \quad [e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0 \end{aligned}$$

та сімома нерозкладними алгебрами Лі:

$$\begin{aligned} &A_{3.3} : \ [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0; \\ &A_{3.4} : \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1 + e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\ &A_{3.5} : \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\ &A_{3.6} : \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_2] = 0; \\ &A_{3.7} : \ [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = qe_2, \quad [e_1, e_2] = 0 \ \ (0 < |q| < 1); \\ &A_{3.8} : \ [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_2] = 0; \\ &A_{3.9} : \ [e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \ \ [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, \ \ [e_1, e_2] = 0 \ (q>0). \end{aligned}$$

Неважко побачити, що усі ці алгебри містять як підалгебру алгебру $A_{2.1}$, а тому можна стверджувати, що серед рівнянь першого класу не існують такі, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Більше цього, наявність композиційного ряду в скінченновимірної розв'язної алгери Лі [27], дозволяє зробити такий висновок.

Лема 3. *З точністю до еквівалентності рівнянням*

$$u_t = F(x, \omega, \mathrm{w}), \quad \omega = u^{-1}u_x, \quad \mathrm{w} = u^{-1}u_{xx},$$

максимальною алгеброю інваріантності якого є двовимірна алгебра Лі операторів симетрії $\langle -t\partial_t - u\partial_u, \partial_t \rangle$, вичерпуються рівняння першого класу, які інваріантні відносно розв'язних алгебр Лі.

3.2. Інваріантність відносно напівпростих алгебр Лі. З точністю до ізоморфізму розрізняють [26] дві найнижчі напівпрості алгебри Лі, що мають розмірність рівну трьом:

$$so(3): \quad [e_1,e_2]=e_3, \quad [e_1,e_3]=-e_2, \quad [e_2,e_3]=e_1;$$
$$sl(2,\mathbb{R}): \quad [e_1,e_2]=2e_2, \quad [e_1,e_3]=-2e_3, \quad [e_2,e_3]=e_1.$$

Ці алгебри не містять [28] як підалгебру двовимірну абелеву алгебру $A_{2.1}$. Аналіз структури напівпростих алгебр Лі розмірностей вищих за три (див., наприклад, [26]) показує, що всі ці алгебри містять як підалгебри двовимірні абелеві алгебри. Отже, в даному випадкові дослідженню підлягає існування лише $SO(3)$- та $SL(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь першого класу.

Зупинимося спочатку на питанні існування реалізацій алгебри $so(3)$. Нехай оператор $e_1=\partial_t$, а оператори e_2 та e_3 мають вигляд (4). Тоді з виконання перших двох комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $so(3)$, випливає, що

$$e_2 = C\cos t\partial_t + (\alpha\cos t+\beta\sin t)\partial_x + (\gamma\cos t+\theta\sin t)\partial_u,$$
$$e_3 = [\partial_t, e_2],$$

де C – довільна дійсна стала, $C\neq 0$, $\alpha=\alpha(x,u)$, $\beta=\beta(x,u)$, $\gamma=\gamma(x,u)$, $\theta=\theta(x,u)$ – довільні дійсні функції своїх аргументів. Але виконання третього комутаційного співвідношення приводить до рівності $C^2=-1$, яка не має сенсу в дійсній області. Отже, не існують $SO(3)$-інваріантні рівняння першого класу.

Тепер розглянемо питання про існування реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Нехай тут $e_3=\partial_t$, а оператори e_1, e_2 мають вигляд (4).

Перевіривши виконання комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, та використавши ті із перетворень з групи $\mathcal{E}$, що не змінюють вигляд оператора e_3, переконуємося, що існують такі нееквівалентні реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$:

$$\langle 2t\partial_t, -t^2\partial_t, \partial_t\rangle; \quad \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x, \partial_t\rangle;$$
$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle;$$
$$\langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2-t)\partial_x, \partial_t\rangle.$$

Перша реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (1). Для другої реалізації із класифікуючого рівняння (5) випливає умова $xu_x=0$. Отже, й друга реалізація не може бути алгеброю інваріантності досліджуваних рівнянь. Для третьої реалізації,

проінтегрувавши визначальні рівняння, знаходимо, що

$$F = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega,\mathrm{w}),$$
$$\omega = x^2u_{xx} - 2u, \quad \mathrm{w} = 2u - xu_x.$$

Нарешті, для останньої реалізації

$$F = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + x^{-3}u_x^{-1}\tilde{F}(u,\omega), \quad \omega = u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1}.$$

Отже, можемо підвести підсумок: серед рівнянь першого класу існують лише два рівняння, які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії, ізоморфних алгебрі $sl(2,\mathbb{R})$.

3.3. Завершення групової класифікації рівнянь першого класу. Для завершення групової класифікації рівнянь першого класу залишається вивчити питання про наявність рівнянь, які допускають алгебри Лі операторів симетрії з нетривіальним фактором Леві і ненульовим радикалом. Очевидно, що такими алгебрами інваріантності можуть бути лише алгебри Лі операторів симетрії, які розкладаються в напівпрямі суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. При цьому, як показано вище, розв'язна алгебра може бути або одновимірною, або ізоморфною алгебрі $A_{2.2}$. Структура таких алгебр з фактором Леві $sl(2,\mathbb{R})$ вивчена в [29]. Згідно з результатами цієї роботи, не існують алгебри Лі з вказаною вище властивістю, а тому не існують і рівняння першого класу з нетривіальними симетрійними властивостями, окрім рівнянь, які були отримані вище. З іншого боку очевидним є те, що отримані рівняння містять довільні функції трьох і двох змінних, а тому для деяких значень цих функцій симетрійні властивості рівнянь будуть розширюватися. Але такі рівняння вже належатимуть до рівнянь другого класу.

Підведемо підсумок дослідженням у вигляді теореми.

Теорема 2. *З точністю до еквівалентності серед рівнянь першого класу лише три мають нетривіальні симетрійні властивості. Це рівняння отримане в лемі 3, максимальна алгебра інваріантності якого ізоморфна алгебрі $A_{2.2}$, та ще два $SL(2,\mathbb{R})$-інваріантні рівняння. Нижче наведено вигляд цих рівнянь та реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$, які є їх максимальними алгебрами інваріантності:*

$$u_t = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega,\mathrm{w}),$$
$$\omega = x^2u_{xx} - 2u, \quad \mathrm{w} = 2u - xu_x:$$

$$sl^1(2,\mathbb{R}) = \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u, \partial_t\rangle;$$
$$u_t = -\tfrac{1}{4}x^{-1}u_x + x^{-3}u_x^{-1}\tilde{F}(u,\omega),$$
$$\omega = u_x^{-2}u_{xx} + 3x^{-1}u_x^{-1} :$$
$$sl^2(2,\mathbb{R}) = \langle 2t\partial_t + x\partial_x, -t^2\partial_t + x(x^2-t)\partial_x, \partial_t\rangle.$$

4. Інваріантність рівнянь другого класу відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві. Як було відзначено вище, опис рівнянь, інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії даного типу, передбачає, перш за все, опис рівнянь вигляду

$$u_t = F(t,x,u_x,u_{xx}), \quad F_{u_{xx}} \neq 0, \tag{13}$$

інваріантних відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії. Саме з опису таких рівнянь ми і продовжуємо групову класифікацію рівняння (1).

4.1. Інваріантність відносно напівпростих алгебр Лі. Оскільки рівняння (13) допускає одновимірну алгебру інваріантності $A_1^2 = \langle\partial_u\rangle$, то один з базисних операторів в напівпростій алгебрі Лі, які будуть досліджені нижче, ми відразу можемо покласти рівним ∂_u. Знову стартуємо з розгляду найнижчих напівпростих алгебр Лі.

Випадок алгебри $so(3)$. Нехай $e_1 = \partial_u$, а оператори e_2 і e_3 мають вигляд (4). З виконання перших двох комутаційних співвідношень, що визначають алгебру $so(3)$, випливає, що з точністю до еквівалентності можемо покласти $e_3 = [\partial_t e_3]$,

$$e_2 = \alpha(t,x)\cos u\partial_x + [\beta(t,x)\cos u + \gamma(t,x)\sin u]\partial_u.$$

Перевірка третього комутаційного співвідношення приводить до умов:

$$\alpha\beta = 0, \quad \alpha\gamma_x - \beta^2 - \gamma^2 = 1. \tag{14}$$

Якщо $\alpha = 0$, то друга рівність (14) набуває вигляду $\beta^2 + \gamma^2 = -1$ і не має сенсу в дійсній області. Якщо ж $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, то заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = X(t,x)$ $(\alpha X_x = 1)$, $v = u$, дозволяє покласти

$$e_2 = \cos u\partial_x + \gamma(t,x)\sin u\partial_u, \quad e_3 = [\partial_t, e_2],$$

де функція $\gamma = \gamma(t,x)$ є розв'язком рівняння $\gamma_x = 1 + \gamma^2$, тобто $\gamma = \tan(x + \varphi(t))$.

Тому з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x + \varphi(t)$, $v = u$, $\gamma = \tan x$. Отже, в заданому класі операторів існує одна реалізація алгебри $so(3)$,

$$so^1(3) = \langle\partial_u, \cos u\partial_x + \tan x\sin u\partial_u, -\sin u\partial_x + \tan x\cos u\partial_u\rangle,$$

для якої розв'язок системи (5) має вигляд

$$F = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\,\tilde{F}(t,\omega), \tag{15}$$
$$\omega = [u_{xx}\cos x - (2 + u_x^2\cos^2 x)u_x\sin x](1 + u_x^2\cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}.$$

Подальша підстановка функції F (15) у класифікуюче рівняння показала, що реалізація $so^1(3)$ є максимальною алгеброю інваріантності отриманого рівняння. Отже, має місце таке твердження.

Лема 4. *З точністю до еквівалентності існує одне рівняння вигляду* (13) *максимальна алгебра інваріантності якого ізоморфна алгебрі* $so(3)$. *Нижче наведено канонічний вигляд цього рівняння та відповідна максимальна алгебра інваріантності:*

$$u_t = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\,\tilde{F}(t,\omega), \quad \tilde{F}_\omega \neq 0,$$
$$\omega = [u_{xx}\cos x - (2 + u_x^2\cos^2 x)u_x\sin x](1 + u_x^2\cos^2 x)^{-\frac{3}{2}} :$$
$$so^1(3) = \langle\partial_u, \cos u\partial_x + \tan x\sin u\partial_u, -\sin u\partial_x + \tan x\cos u\partial_u\rangle.$$

Випадок алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Нехай $e_3 = \partial_u$, а оператори e_1, e_2 мають вигляд (4).

Тоді із виконання комутаційних співвідношень, які визначають алгебру $sl(2,\mathbb{R})$, випливає, що

$$e_2 = (\alpha u + \beta)\partial_x + (-u^2 + \gamma u + \theta)\partial_u, \quad e_1 = [\partial_u, e_2], \quad e_3 = \partial_u,$$

де функції $\alpha = \alpha(t,x)$, $\beta = \beta(t,x)$, $\gamma = \gamma(t,x)$, $\theta = \theta(t,x)$ задовольняють співвідношення

$$2\beta = -\alpha\beta_x - \alpha\gamma + \beta\alpha_x, \quad 4\theta = -\alpha\theta_x - \gamma^2 + \beta\gamma_x. \tag{16}$$

Якщо в операторі e_2 $\alpha \neq 0$, то з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = X(t,x)$, $v = u + U(t,x)$, де функції X $(X_x \neq 0)$ та U задовольняють рівняння $\alpha X_x = X$, $XU = \beta X_x$, можемо покласти (в початкових позначеннях змінних)

$$e_2 = xu\partial_x + (-u^2 + \gamma u + \theta)\partial_u, \quad e_1 = [\partial_u, e_2], \quad e_3 = \partial_u.$$

Тоді система рівнянь (16) набуде вигляду $x\gamma = 0$, $4\theta = -x\theta_x - \gamma^2$, звідки випливає, що $\gamma = 0$, $\theta = \mu(t)x^{-4}$. Якщо $\mu = 0$, то має місце така реалізація алгебри $sl(2,\mathbb{R})$: $\langle 2u\partial_u - x\partial_x, -u^2\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle$. Якщо ж $\mu \neq 0$, то з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення $\bar{t} = t$, $\bar{x} = |\mu|^{-\frac{1}{4}}x$, $v = u$, приходимо до таких реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$:

$$\langle 2u\partial_u - x\partial_x, (x^{-4} - u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle,$$
$$\langle 2u\partial_u - x\partial_x, -(x^{-4} + u^2) + xu\partial_x, \partial_u\rangle.$$

Якщо в операторі e_2, $\alpha = 0$, то, врахувавши співвідношення (16), неважко переконатися, що з точністю до еквівалентності має місце така реалізація алгебри $sl(2,\mathbb{R})$: $\langle 2u\partial_u, -u^2\partial_u, \partial_u\rangle$.

Подальша перевірка показала, що остання реалізація не може бути алгеброю інваріантності рівнянь вигляду (13). Перші три реалізації задовольняють умови сформульованої задачі і є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного типу. Загальний результат досліджень подано у наступному твердженні.

Лема 5. *З точністю до еквівалентності існують три рівняння другого класу, максимальними алгебрами інваріантності яких є алгебри Лі операторів симетрії ізоморфні алгебрі $sl(2,\mathbb{R})$. Канонічний вигляд цих рівнянь та відповідні максимальні алгебри інваріантності подано нижче:*

$$u_t = xu_x\tilde{F}(t,\omega), \quad \omega = x^{-5}u_x^{-3}u_{xx} + 2x^{-6}u_x^{-2}:$$
$$sl^3(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, -u^2\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle;$$
$$u_t = x^{-2}\sqrt{4 + x^6u_x^2}\,\tilde{F}(t,\omega),$$
$$\omega = (4 + x^6u_x^2)^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x + \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right):$$
$$sl^4(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, (x^{-4} - u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle;$$
$$u_t = x^{-2}\sqrt{|x^6u_x^2 - 4|}\,\tilde{F}(t,\omega),$$
$$\omega = |x^6u_x^2 - 4|^{-\frac{3}{2}}\left(x^4u_{xx} + 5x^3u_x - \tfrac{1}{2}x^9u_x^3\right):$$
$$sl^5(2,\mathbb{R}) = \langle 2u\partial_u - x\partial_x, -(x^{-4} + u^2)\partial_u + xu\partial_x, \partial_u\rangle.$$

У всіх отриманих рівняннях $\tilde{F}_\omega \neq 0$.

Нарешті, провівши міркування аналогічні тим, які були зроблені в [22], неважко переконатися у справедливості такої теореми.

Теорема 4. *З точністю до еквівалентності рівняннями, отриманими в лемах 4, 5, вичерпуються рівняння другого класу, які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії.*

4.2. Інваріантність відносно алгебр Лі з з нетривіальним розкладом Леві. Наявність переліку нееквівалентних рівнянь вигляду (1), які інваріантні відносно напівпростих алгебр Лі операторів симетрії, дозволяє провести опис тих рівнянь, алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві. Серед алгебр Лі з такою властивістю розрізняють алгебри Лі, які розкладаються в пряму суму напівпростої та розв'язної алгебр Лі, та алгебри Лі, які є напівпрямими сумами фактора Леві та ненульового розв'язного радикалу.

4.2.1. Інваріантність відносно прямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. Для опису таких рівнянь нам достатньо провести розширення відомих реалізацій напівпростих алгебр Лі в класі операторів (4) до реалізацій алгебр Лі вказаного типу, а потім перевірити отримані реалізації на предмет того, чи можуть вони бути алгебрами інваріантності рівнянь досліджуваного вигляду. При цьому подальшому розгляду підлягають як отримані в лемах 4 та 5 рівняння другого класу, так і рівняння першого класу, максимальними алгебрами інваріантності яких є реалізації $sl^1(2,\mathbb{R})$ та $sl^2(2,\mathbb{R})$.

Зупинимося детально на випадкові $sl^1(2,\mathbb{R})$-інваріантного рівняння. Розширення реалізації $sl^1(2,\mathbb{R})$ ми можемо проводити тими операторами вигляду (4), які комутують з базисними операторами алгебри $sl^1(2,\mathbb{R})$ на нуль. Безпосередня перевірка показує, що таку умову задовольняють оператори вигляду

$$\mathrm{v} = C_1x\partial_x + (C_2 + 2C_1u)\partial_u, \tag{17}$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Далі неважко переконатися, що в класі операторів (17) існують реалізації двох одновимірних алгебр Лі L_1: $\langle\partial_u\rangle$, $\langle x\partial_x + 2u\partial_u\rangle$; та однієї двовимірної алгебри Лі $L_2 = \langle\partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u\rangle$, яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2}$.

Подальша перевірка отриманих алгебр Лі операторів симетрії показала, що вони можуть бути алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1). При цьому, в $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle\partial_u\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \tfrac{1}{4}u_x^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^2u_{xx} - xu_x;$$

в $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle x\partial_x + 2u\partial_u\rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + x^{-2}(2u - xu_x)^2\tilde{F}(\omega),$$

$$\omega = (x^2 u_{xx} - 2u)(2u - x u_x)^{-1};$$

а в $sl^1 2, (\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = m x^2 u_{xx}^2 - 2m x u_x u_{xx} + \left(m + \tfrac{1}{4}\right) u_x^2, \quad m \neq 0.$$

Також, безпосередні обчислення показують, що знайдені реалізації є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь.

Для реалізації $sl^2(2,\mathbb{R})$ розширення можливі в класі операторів

$$\mathrm{v} = \eta(u)\partial_u. \tag{18}$$

З точністю до еквівалентності в класі операторів (18) існує одна реалізація одновимірної алгебри Лі $L_1 = \langle \partial_u \rangle$ та одна реалізація двохвимірної алгебри Лі $L_2 = \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle$, при цьому $L_2 \sim A_{2.2}$. А оскільки в класі операторів (18) не існують реалізації алгебри $A_{2.1}$, то в цьому класі операторів не існуватимуть і реалізації розв'язних алгебр Лі розмірностей вищих за два. Отже, ми отримали два розширення реалізації $sl^2(2,\mathbb{R})$, які є максимальними алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1). При цьому в $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = -\tfrac{1}{4} x^{-1} u_x + x^{-3} u_x^{-1} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = u_x^{-2} u_{xx} + 3x^{-1} u_x^{-1};$$

в $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = -\tfrac{1}{4} x^{-1} u_x + m x^{-3} u_x^{-1} (u_x^{-2} u_{xx} + 3x^{-1} u_x^{-1})^{-2}, \quad m \neq 0.$$

Аналогічний розгляд реалізації $sl^3(2,\mathbb{R})$ показав, що дослідженню підлягають алгебри Лі в класі операторів

$$\mathrm{v} = \tau(t)\partial_t + \xi(t) x \partial_x. \tag{19}$$

Використавши ті із перетворень з групи $\mathcal{E}$, які залишають вигляд базисних операторів реалізації $sl^3(2,\mathbb{R})$ незмінним, неважко переконатися, що з точністю до еквівалентності в класі операторів (19) існують три реалізації одновимірної алгебри Лі: $\langle \partial_t \rangle$, $\langle x\partial_x \rangle$, $\langle t x \partial_x \rangle$. Але, як показала безпосередня перевірка, умовам сформульованої задачі задовольняють лише перша і третя реалізації. Подальше підвищення розмірності на одиницю привело до однієї реалізації алгебри $A_{2.1}$: $\langle f(t) x\partial_x, t x\partial_x \rangle$ $\left(\frac{d^2 f}{dt^2} \neq 0\right)$, та двох реалізацій алгебри $A_{2.2}$: $\langle -t\partial_t - m x\partial_x, \partial_t \rangle (m \in \mathbb{R})$, $\langle t\partial_t, t x\partial_x \rangle$. А оскільки реалізація алгебри $A_{2.1}$ не задовольняє умовам сформульованої задачі, то отримани ми вище чотирма реалізаціями вичерпуються ті, які задовольняють умовам сформульованої задачі. Ці реалізації є максимальними алгебрами інваріантності відповідних рівнянь і при цьому в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_t \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = x u_x \tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^{-5} u_x^{-3} u_{xx} + 2x^{-6} u_x^{-2};$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t x\partial_x \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \frac{x u_x}{4t} \ln \left| x^{-5} u_x^{-3} u_{xx} + 2x^{-6} u_x^{-2} \right| + x u_x \tilde{F}(t);$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -t\partial_t - m x\partial_x, \partial_t \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \lambda x u_x |x^{-5} u_x^{-3} u_{xx} + 2x^{-6} u_x^{-2}|^{\frac{1}{4m}}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, \pm\tfrac{3}{4};$$

в $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, t x\partial_x \rangle$-інваріантному рівнянні

$$F = \frac{x u_x}{4t} \ln |x^{-5} u_x^{-3} u_{xx} + 2x^{-6} u_x^{-2}| + \frac{\lambda x u_x}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Провівши аналогічний розгляд реалізацій $sl^4(2,\mathbb{R})$, $sl^5(2,\mathbb{R})$ та $so^1(3)$, ми отримали ще три рівняння, максимальними алгебрами інваріантності яких є алгебри Лі операторів симетрії, що розкладаються в пряму суму напівпростого фактора Леві та розв'язної алгебри Лі. Нижче наведено реалізації цих алгебр та значення функції F в інваріантних рівняннях:

$$\begin{aligned}
&sl^4(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_t \rangle : F = x^{-2} \sqrt{4 + x^6 u_x^2}\, \tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = (4 + x^6 u_x^2)^{-\frac{3}{2}} \left(x^4 u_{xx} + 5x^3 u_x + \tfrac{1}{2} x^9 u_x^3\right);\\
&sl^5(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_t \rangle : F = x^{-2} \sqrt{|x^6 u_x^2 - 4|}\, \tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = |x^6 u_x^2 - 4|^{-\frac{3}{2}} \left(x^4 u_{xx} + 5x^3 u_x - \tfrac{1}{2} x^9 u_x^3\right);\\
&so^1(3) \oplus \langle \partial_t \rangle : F = \sqrt{\sec^2 x + u_x^2}\, \tilde{F}(\omega),\\
&\quad \omega = [u_{xx} \cos x - (2 + u_x^2 \cos^2 x) u_x \sin x](1 + u_x^2 \cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

4.2.2. Інваріантність відносно напівпрямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі. Для опису рівнянь цього типу будемо використовувати відому класифікацію [29] неізоморфних алгебр, які розкладаються в напівпряму суму фактора Леві і розв'язного радикала.

Згідно з результатами роботи [30], без втрати загальності, ми можемо обмежитися дослідженням існування рівнянь, які допускають алгебри інваріантності, що є напівпрямими сумами напівпростої та розв'язної алгебр Лі і мають розмірність не вищу за 6 (якщо фактор Леві є ізоморфним $so(3)$), та не вищу за 5 (якщо фактор Леві є ізоморфним $sl(2,\mathbb{R})$).

Також, використовуючи метод Лі–Овсяннікова, ми здійснили групову класифікацію рівнянь, інваріантних відносно прямої суми напівпростої та розв'язної алгебр Лі операторів симетрії, які були отримані в попередніх пунктах розділу.

У подальшому ми будемо використовувати відомий (див., наприклад, [22, 27]) перелік неізоморфних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі, згідно з яким такі алгебри вичерпуються 10 розкладними алгебрами Лі $A_{3.i} \oplus A_1$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, $2A_{2.2} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$ та 10 нерозкладними алгебрами Лі $A_{4.i} = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$ алгебрами Лі. В рамках сказаного вище, дослідженню підлягає існування рівнянь, які інваріантні відносно алгебр Лі $sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}$, $so(3) \inplus A_{3.1}$. Оскільки розгляд усіх випадків про водився аналогічно, зупинимося детально на дослідженні існування $sl^1(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}$-інваріантних рівнянь.

Нехай $sl(2,\mathbb{R}) = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $A_{2.1} = \langle e_4, e_5\rangle$. Тоді для $sl^1(2,\mathbb{R})$ $e_1 = 2t\partial_t + x\partial_x$, $e_2 = -t^2\partial_t - tx\partial_x + x^2\partial_u$, $e_3 = \partial_t$. Базисні елементи напівпростої та розв'язної алгебр Лі зв'язані такими ненульовими комутаційними співвідношеннями:

$$[e_1, e_4] = e_4, \quad [e_1, e_5] = -e_5, \quad [e_2, e_5] = e_4, \quad [e_3, e_4] = e_5. \qquad (20)$$

Поклавши оператори e_4, e_5 рівними операторам вигляду (4) і перевіривши виконання комутаційних співвідношень (20), приходимо до такого результату: в класі операторів (4) з точністю до еквівалентності існують чотири реалізації алгебри $sl^1(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}$, де базисні оператори алгебри $A_{2.1}$ мають такий вигляд:

1) $e_4 = t\partial_x + 2tx^{-1}u\partial_u, \quad e_5 = \partial_x + 2x^{-1}u\partial_u;$

2) $e_4 = t\partial_x + (tx^{-1}u - x)\partial_u, \quad e_5 = \partial_x + x^{-1}u\partial_u;$

3) $e_4 = tx^{-1}\partial_u, \quad e_5 = x^{-1}\partial_u;$

4) $e_4 = (tu + x^2)\partial_x + (2ux + 2tx^{-1}u^2)\partial_u, \quad e_5 = u\partial_x + 2x^{-1}u^2\partial_u.$

Подальша перевірка отриманих реалізацій на предмет того, чи можуть вони бути алгебрами інваріантності рівнянь вигляду (1), показала, що умовам сформульованої задачі задовольняють лише друга і четверта реалізації. При цьому відповідні інваріантні рівняння мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
&sl^1(2,\mathbb{R}) \inplus \langle t\partial_x + (tx^{-1}u - x)\partial_u, \partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle :\\
&\quad u_t = \lambda u_{xx} + 2\lambda x^{-2}u - 2\lambda x^{-1}u_x + x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2, \quad \lambda \neq 0;\\
&sl^1(2,\mathbb{R}) \inplus \langle (tu + x^2)\partial_x + 2(xu + tx^{-1}u^2)\partial_u, u\partial_x + 2x^{-1}u^2\partial_u\rangle :\\
&\quad u_t = x^{-1}uu_x - x^{-2}u^2 + \lambda x^{-2}(2u - xu_x)\times\\
&\qquad \times (x^2u_{xx} + 2u - 2xu_x)^{-1}, \qquad \lambda \neq 0.
\end{aligned}$$

Відзначимо, що пряма перевірка показала, що відповідні реалізації є максимальними алгебрами інваріантності отриманих рівнянь.

Далі ми прийшли до такого результату: для реалізацій $sl^2(2,\mathbb{R})$, $sl^4(2,\mathbb{R})$, $sl^5(2,\mathbb{R})$ в класі операторів (4) не існують розширення до реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}$, як і розширення реалізації $so^1(3)$ до реалізацій алгебри $so^1(3) \inplus A_{3.1}$.

До нових $sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{2.1}$-інваріантних рівнянь привів розгляд реалізації $sl^3(2,\mathbb{R})$:

$$sl^3(2,\mathbb{R}) \inplus \langle -\partial_x + x^{-1}u\partial_u, x^{-1}\partial_u\rangle :$$

$$u_t = x^{-1}[xu_{xx} + 2u_x]^{\frac{1}{3}}F(t); \qquad (21)$$

$$sl^3(2,\mathbb{R}) \inplus \langle x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle : \quad u_t = x^3u_x^2[xu_{xx} + 2u_x]^{-\frac{1}{3}}F(t). \qquad (22)$$

Безпосередня перевірка показала, що для отриманих рівнянь відповідні алгебри інваріантності не є максимальними алгебрами інваріантності. Але, перш за все, зауважимо, що оскільки в отриманих рівняннях $F(t) \neq 0$, то заміна змінних $\bar{t} = \int F(t)dt$, $\bar{x} = x$, $v = u$, дозволяє покласти $F \equiv 1$. Далі, скориставшись алгоритмом Лі, ми отримали, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (21), в якому $F = 1$, збігається з алгеброю

$$sl^3(2,\mathbb{R}) \inplus \langle \partial_t, x\partial_x + \tfrac{4}{3}t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x + x^{-1}u\partial_u\rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $sl(2,\mathbb{R}) \inplus + A_{4.5}$ $\left(q = 1, p = \frac{4}{3}\right)$, а рівняння (22), в якому $F = 1$ – з алгеброю

$$sl^3(2,\mathbb{R}) \inplus \langle \partial_t, \tfrac{4}{3}t\partial_t - x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $sl(2,\mathbb{R}) \inplus A_{4.5}$ $\left(q = 1, p = \frac{4}{3}\right)$.

Групова класифікація рівнянь, які були отримані в попередньому пункті, показала таке. У випадкові $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантного рівняння підстановка функції

$$F = \tfrac{1}{4}u_x^2 + x^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x^2 u_{xx} - x u_x,$$

в класифікуюче рівняння (5) та подальше "розщеплення" отриманої рівності за степенями вільної диференціальної змінної u_x, приводить до такої системи диференціальних рівнянь для визначення значень функцій τ, ξ, η та $\tilde{F}$:

$$\begin{aligned}
&[x^{-2}(2x^{-1}\xi + \eta_u - 2\xi_x)\omega - x^{-1}\eta_x + \eta_{xx}]\tilde{F}_\omega = \\
&\quad = x^{-2}(\eta_u - \tau_t + 2x^{-1}\xi)\tilde{F}, \\
&(3x^{-2}\xi_u\omega + \xi_{xx} + x^{-1}\xi_x - x^{-2}\xi - 2\eta_{xu})\tilde{F}_\omega = \\
&\quad = x^{-2}\xi_u\tilde{F} + \tfrac{1}{2}\eta_x + \xi_t, \qquad\qquad (23)\\
&(2\xi_{xu} - \eta_{uu} + 2x^{-1}\xi_u)\tilde{F}_\omega = \tfrac{1}{4}\eta_u + \tfrac{1}{4}\tau_t - \tfrac{1}{2}\xi_x, \quad \xi_{uu}\tilde{F}_\omega = -\tfrac{1}{4}\xi_u.
\end{aligned}$$

Із системи (23) неважко отримати вже відомий результат: якщо функція $\tilde{F}$ є довільною функцією змінної ω, то реалізація $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$ є максимальною алгеброю інваріантності відповідного рівняння.

Структура двох останніх рівнянь системи (23) показує, що або функція $\tilde{F}$ є лінійною функцією змінної ω, або ж

$$\xi_u = \eta_{uu} = 0, \quad 2\xi_x - \eta_u - \tau_t = 0. \qquad (24)$$

Якщо $\tilde{F} = \lambda\omega + C$, $\lambda \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$, то максимальною групою інваріантності досліджуваного рівняння буде нескінченнопараметрична група локальних перетворень. А саме, якщо $C \neq 3\lambda$, то ця група буде генеруватися базисними операторами реалізації. $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$ та оператором $\mathrm{v}_\infty = \alpha(t,x)\exp\left(\frac{u}{4\lambda}\right)\partial_u$, де функція $\alpha = \alpha(t,x)$ є розв'язком рівняння $\alpha_t = \lambda\alpha_{xx} - \lambda x^{-1}\alpha_x - \frac{C}{4\lambda}x^{-2}\alpha$; якщо ж $C = 3\lambda$, то з'являються два додаткові оператори симетрії $t\partial_x + 2(\lambda x^{-1}t - x)\partial_u$, $\partial_x + 2\lambda x^{-1}\partial_u$.

Але локальна заміна змінних $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $u = 4\lambda\ln|v|$, $v = v(\bar{t},\bar{x})$, зводить отримане рівняння до лінійного рівняння теплопровідності $v_{\bar{t}} = \lambda v_{\bar{x}\bar{x}} - \lambda x^{-1}v_{\bar{x}} + \frac{C}{4\lambda}\bar{x}^{-2}v$. Звідси випливає, що отримане нелінійне рівняння є еквівалентним при $C = 3\lambda$ класичному рівнянню теплопровідності, при $C \neq 3\lambda$ – лінійному рівнянню теплопровідності,

а тому не задовольняє умовам сформульованої задачі і з подальшого розгляду вилучається.

Якщо функція $\tilde{F}$ не є лінійною функцією змінної ω, то, врахувавши рівності (24), із (23) отримуємо таку систему двох рівнянь для визначення функцій, τ, $\xi = \xi(t,x)$, $\eta = (2\xi_x - \tau_x)u + \theta(t,x)$ і $\tilde{F}$:

$$\begin{aligned}
&[x^{-2}(2x^{-1}\xi + \eta_u - 2\xi_x)\omega - x^{-1}\eta_x + \eta_{xx}]\tilde{F}_\omega = \\
&\quad = x^{-2}(\eta_u - \tau_t + 2x^{-1}\xi)\tilde{F} + \eta_t, \\
&(2\eta_{xu} - \xi_{xx} - x^{-1}\xi_x + x^{-2}\xi)\tilde{F}_\omega = -\tfrac{1}{2}\eta_x - \xi_t. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Оскільки випадок, коли $\tilde{F}$ є лінійною функцією змінної ω ми вже дослідили, класифікуючим є перше з рівнянь (25). Розглядаючи його як звичайне диференціальне рівняння відносно функції $\tilde{F}$, неважко отримати, що вивченню підлягають такі її значення:

$$\begin{aligned}
&\tilde{F} = \lambda\exp(p\omega) + m, \quad \lambda p \neq 0, \quad m \in \mathbb{R}; \\
&\tilde{F} = \lambda\ln|\omega + b| + m, \quad \lambda \neq 0, \quad b, m \in \mathbb{R}; \\
&\tilde{F} = \lambda|\omega + b|^p + m, \quad \lambda p \neq 0, \quad p \neq 1, \quad b, m \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Безпосередня підстановка цих значень функції $\tilde{F}$ в рівняння (25) показала, що розширення симетрії відбувається лише тоді, коли $\tilde{F} = \lambda\omega^2$, що відповідає вже відомому $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$-інваріантному рівнянню.

До цього ж рівняння привело дослідження і $sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle x\partial_x + 2u\partial_u \rangle$-інваріантного рівняння.

Аналогічний розгляд решти отриманих в пункті 4.2.1 рівнянь привів до таких результатів:

- $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії тоді, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle$-інваріантному рівнянню;
- $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle tx\partial_x \rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x \rangle$-інваріантному рівнянню;
- $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_t \rangle$-інваріантне рівняння допускає розширення симетрії, коли воно збігається з рівнянням, яке еквівалентне $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle -t\partial_t - mx\partial_x, \partial_t \rangle$-, $sl^3(2,\mathbb{R}) \oplus \langle t\partial_t, tx\partial_x \rangle$-, $sl^3(2,\mathbb{R}) \Subset\!\!\!+ \langle \partial_t, x\partial_x + \frac{4}{3}t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x + x^{-1}u\partial_u \rangle$- або $sl^3(2,\mathbb{R}) \Subset\!\!\!+ \langle \partial_t, \frac{4}{3}t\partial_t - x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x \rangle$-інваріантному рівнянню;

- в рамках сформульованої задачі $sl^4(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle$– $sl^5(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle$- та $so^1(3)\oplus\langle\partial_t\rangle$-інваріантні рівняння розширення симетрії не допускають.

4.2.3. Рівняння, інваріантні відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві. Тут ми підводимо підсумок досліджень, які проведені в підрозділі 4.2.2, і наводимо повний перелік рівнянь другого класу, максимальні алгебри інваріантності яких мають нетривіальний розклад Леві.

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u\rangle: \quad u_t=\tfrac14 u_x^2+x^{-2}F(\omega), \quad \omega=x^2u_{xx}-xu_x;$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle x\partial_x+2u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=x^{-1}uu_x-x^{-2}u^2+x^{-2}(2u-xu_x)^2F(\omega),$$
$$\omega=(x^2u_{xx}-2u)(2u-xu_x)^{-1};$$

$$sl^2(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u\rangle: \quad u_t=-\tfrac14 x^{-1}u_x+x^{-3}u_x^{-1}F(\omega),$$
$$\omega=u_x^{-2}u_{xx}+3x^{-1}u_x^{-1};$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle: \quad u_t=xu_xF(\omega),$$
$$\omega=x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2};$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle tx\partial_x\rangle:$$
$$u_t=\tfrac{xu_x}{4t}\ln\left|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2}\right|+xu_xF(t),$$

$$sl^4(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle: \quad u_t=x^{-2}\sqrt{4+x^6u_x^2}F(\omega),$$
$$\omega=(4+x^6u_x^2)^{-\frac32}(x^4u_{xx}+5x^3u_x+\tfrac12x^9u_x^3);$$

$$sl^5(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_t\rangle: \quad u_t=x^{-2}\sqrt{|x^6u_x^2-4|}F(\omega),$$
$$\omega=|x^6u_x^2-4|^{-\frac32}(x^4u_{xx}+5x^3u_x-\tfrac12x^9u_x^3);$$

$$so^1(3)\oplus\langle\partial_t\rangle: \quad u_t=\sqrt{\sec^2x+u_x^2}F(\omega),$$
$$\omega=(1+u_x^2\cos^2x)^{-\frac32}[u_{xx}\cos x-(2+u_x^2\cos^2x)u_x\sin x];$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\oplus\langle\partial_u, x\partial_x+2u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=\lambda x^2u_{xx}^2-2\lambda xu_xu_{xx}+\left(\lambda+\tfrac14\right)u_x^2, \quad \lambda\neq0;$$

$$sl^2(2,\mathbb{R})\oplus\langle -u\partial_u,\partial_u\rangle:$$
$$u_t=-\tfrac14x^{-1}u_x+\lambda x^{-3}u_x^{-1}(u_x^{-2}u_{xx}+3x^{-1}u_x^{-1})^{-2}, \quad \lambda\neq0;$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle -t\partial_t-mx\partial_x,\partial_t\rangle:$$
$$u_t=\lambda xu_x|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2}|^{\frac{1}{4m}}, \quad \lambda\neq0, \quad m\neq0,\pm\tfrac34;$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\oplus\langle t\partial_t, tx\partial_x\rangle:$$
$$u_t=\tfrac{xu_x}{4t}\ln\left|x^{-5}u_x^{-3}u_{xx}+2x^{-6}u_x^{-2}\right|+\tfrac{\lambda xu_x}{t}, \quad \lambda\in\mathbb{R};$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\in\!\!\!\!+\langle t\partial_x+(tx^{-1}-x)\partial_u, \partial_x+x^{-1}u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=\lambda u_{xx}+2\lambda x^{-2}u-2\lambda x^{-1}u_x+x^{-1}uu_x-x^{-2}u^2, \quad \lambda\neq0;$$

$$sl^1(2,\mathbb{R})\in\!\!\!\!+\langle (tu+x^2)\partial_x+2(xu+tx^{-1}u^2)\partial_u, u\partial_x+2x^{-1}u^2\partial_u\rangle:$$
$$u_t=x^{-1}uu_x-x^{-2}u^2+\lambda x^{-2}(2u-xu_x)\times$$
$$\times(x^2u_{xx}+2u-2xu_x)^{-1}, \quad \lambda\neq0;$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\in\!\!\!\!+\langle\partial_t, x\partial_x+\tfrac43t\partial_t, x^{-1}\partial_u, -\partial_x+x^{-1}u\partial_u\rangle:$$
$$u_t=x^{-1}(xu_{xx}+2u_x)^{\frac13};$$

$$sl^3(2,\mathbb{R})\in\!\!\!\!+\langle\partial_t, \frac43t\partial_t-x\partial_x, x^2u\partial_x, x^2\partial_x\rangle:$$
$$u_t=x^3u_x^2(xu_{xx}+2u_x)^{-\frac13}.$$

Висновки. Отже, для проведення повної групової класифікації залишається здійснити повний опис рівнянь другого класу, які допускають розв'язні групи локальних перетворень. Також слід відзначити, що поділ рівнянь вигляду (1) на два класи є природним, оскільки, як було відзначено в [31], рівняння другого класу можуть бути зведеними до квазілінійних рівнянь нелокальними замінами змінних, а рівняння першого класу – ні.

Нарешті, хотілося б відзначити, що значний вклад в розв'язування задачі групової класифікації рівнянь математичної фізики, як це зокрема, випливає з робіт [13, 14, 17, 21–25, 31–39], внесли українські математики з школи групового аналізу диференціальних рівнянь, яку в 70-х роках двадцятого століття започаткував Вільгельм Фущич, котрому у цьому році виповнюється 70 років зі дня народження.

[1] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. – Berlin: Springer, 1974.

[2] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[3] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986.

[4] Blumen G., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer, 1989.

[5] Lie S. On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals // Arch. Math. – 1881. – **6**. – P. 328–368 (in German).

[6] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[7] Ibragimov N.H. (editor) CRC Handbook of Lie group to differential equations, Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. – Boca Raton: CRC Press, 1994.

[8] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**. – С. 1033–1035.

[9] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172–176.

[10] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником // Журн. выч. мат. и мат. физ. – 1982. – **22**. – С. 1393–1400.

[11] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – **190**. – P. 149–154.

[12] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Non–Linear Mech. – 1994. – **29**. – P. 273–278.

[13] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 1262–1270.

[14] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second–order evolution equations with convection terms // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[15] Gandarias M.L. Classical point symmetries of a porous medium equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1996. – **29**. – P. 607–633.

[16] Катков В.Л. Групповая классификация решений уравнений Хопфа // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1965. – № 6. – С. 105–106.

[17] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[18] El-labany S.K., Elhanbaly A.M., Sabry R. Group classification and symmetry reduction of variable coefficient nonlinear diffusion-convection equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **35**. – P. 8055–8063.

[19] Pallikaros C., Sophocleous C. On point transformations of generalized nonlinear diffusion equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 6459–6465.

[20] Cüngör F. Group classification and exact solutions of a radially symmetric porous-medium equation // Int J. Nonlinear Mech. – 2002. – **37**. – P. 245–255.

[21] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[22] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[23] Zhdanov R.Z., Roman O.V. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schrödinger equations with some applications to Doebner–Goldin model // Rep. Math. Phys.– 2000. – **45.**– P. 273–291.

[24] Güngor F., Lagno V.I., Zhdanov R.Z. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. – 2004. – **45.** – P. 2280–2313.

[25] Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, 053301. – 37 p.

[26] Barut A.O., Raczka R. Theory of group representations and applications. – Warszawa: PWN–Polish Scientific Publishers, 1977.

[27] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. – № 1(32). — С. 114–123.

[28] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**. – P. 1449–1455.

[29] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 2139–2144.

[30] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**. – С. 141–156.

[31] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of the general evolution equation: local and quasilocal symmetries // SIGMA. – 2005. – **1**, Paper 009. – 7 p.

[32] Nikitin A.G., Popovych R.O. Group classification of nonlinear Schrödinger equations // Ukr. Math. J. – 2001. – **53**. – P. 1255–1265.

[33] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. Systems of reaction diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. – 2001. – **42**. – P. 1667–1668.

[34] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Ukr. Math. Bull. – 2005. – **2**. – P. 153–204.

[35] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Landau–Ginzburg equations // J. Math. Anal. Appl. – 2006. – **324**. – P. 615–628.

[36] Boyko V., Popovych V. Group classification Galilei invariant equations of higher order / Group analytic methods in mathematical physics // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2001. – **36**. – P. 45–50.

[37] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Group classification of (1 + 1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearlities // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 3045–3057.

[38] Cherniha R., King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. I // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000.– **33**. – P. 267–282.

[39] Cherniha R., King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 405–425.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 148–158

УДК 517.958

Локальні та нелокальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії

Н.М. ІВАНОВА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: ivanova@imath.kiev.ua

За допомогою композиційного варіаційного принципа знайдено локальні та нелокальні закони збереження (1+1)-вимірних рівнянь конвекції-дифузії із сталими коефіцієнтами.

Local and nonlocal conservation laws of (1+1)-dimensional constant coefficient diffusion-convection equations are found with application of composite variational principle.

1. Вступ. У представленій роботі вивчається клас рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \tag{1}$$

де $a = a(u)$ та $b = b(u)$ – довільні гладкі функції змінної u, $b(u)\neq 0$.

Рівняння (1), що називається також рівнянням Річардса, природно виникає у фізичних застосуваннях. Наприклад, супердифузивності такого типу були запропоновані для моделювання Ван-дер-Ваальсовської взаємодії у тонких плівках палива на поверхні рідини [7]. Це рівняння також застосовується при вивченні клітинних автоматів та взаємодії систем частинок із самоорганізацією (див. [4] та посилання в цій роботі). Воно описує модель потоку рідини у ненасиченому грунті [22].

Симетрії Лі рівнянь вигляду (1) досліджувалися у багатьох роботах (див., наприклад, [6, 18, 24]). Проте, повну та вичерпну групову класифікацію класу (1) отримано лише нещодавно у роботі [19]. Ліївські симетрії відповідної системи (2) рівнянь Ейлера–Лагранжа з нефіксованим значенням функції a, $b = 0$ та для $a = 1$, $b \in \{0, u\}$ розглянуто у [10]. Симетрії багатовимірних рівнянь дифузії та відповідних рівнянь Ейлера–Лагранжа досліджуються в [12].

Вперше закони збереження лінійного рівняння теплопровідності та рівняння Бюргерса побудовано за допомогою композиційного варіаційного принципу [1]. Ці результати перевідкрито та доповнено законами збереження нелінійного рівняння дифузії ($b = 0$, a – довільна, нефіксована функція) в роботі [10]. Закони збереження n-вимірних ($n \geq 1$) рівнянь дифузії $u_t = (a(u)u_i)_i$ прокласифіковано у [12] за допомогою прямого методу та композиційного варіаційного принципу. У [5] (див. також [9, розділ 10]) повністю вивчено локальні закони збереження рівнянь реакції-дифузії $u_t = (A(u))_{xx} + C(u)$, що мають непорожній перетин з класом (1). В [11, 21] представлено вичерпну класифікацію локальних та потенціальних законів збереження рівнянь (1). Локальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії із змінними коефіцієнтами знайдено в [13, 15].

2. Симетрії рівнянь конвекції-дифузії. Один з можливих шляхів знаходження законів збереження рівнянь (1) полягає у розповсюдженні лагранжевого підходу на нелагранжеві рівняння за допомогою введення допоміжних рівнянь таким чином, щоб отримана система була системою рівнянь Ейлера–Лагранжа для деякого варіаційного функціоналу. У якості таких допоміжних рівнянь виявилося надзвичайно зручним брати рівняння для приєднаної симетрії [1, 17, 23]. Тоді закони збереження отриманої системи (які, звичайно, є законами збереження вихідного рівняння) можна легко побудувати за допомогою теореми Ньотер [17]. Цей метод називається *композиційним варіаційним принципом.* Проілюструємо його застосування на прикладі рівнянь конвекції-дифузії.

Розглянемо систему рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \quad v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x \tag{2}$$

для варіаційного функціоналу

$$\mathscr{L} = \int \left(\tfrac{1}{2}(u_t v - u v_t) + a u_x v_x - \tfrac{1}{2} b u_x v + \tfrac{1}{2} v_x \textstyle\int b\right) dx,$$

що відповідає рівнянню (1). (Тут і надалі $\int b = \int b du$, $\int a = \int a du$.)

Система (2) складається з вихідного рівняння (1) та рівняння $v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x$ на приєднану до (1) симетрію.

Теорема 1. *Будь-яке перетворення з групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу (2) має вигляд*

$$\tilde{t} = \varepsilon_4 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_5 x + \varepsilon_7 t + \varepsilon_2, \quad \tilde{u} = \varepsilon_6 u + \varepsilon_3,$$

$$\tilde v=\varepsilon_8 v-\varepsilon_7 t+\varepsilon_9,\quad \tilde a=\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5^2 a,\quad \tilde b=\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_5 b-\varepsilon_7,$$

де $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_9$ *– довільні сталі,* $\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\varepsilon_8\neq 0$. *Група еквівалентності класу рівнянь* (1) *співпадає з проекцією групи еквівалентності* $G^{\sim}$ *класу систем* (2) *на простір змінних* t, x, u.

Зауважимо, що група $G^{\sim}$ є природним продовженням перетворень еквівалентності класу рівнянь (1) на змінну v.

Теорема 2. *Алгеброю Лі ядра основних груп систем* (2) *є* $A^{\cap}=\langle\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v\rangle$.

Теорема 3. *Повна множина* $G^{\sim}$*-нееквівалентних систем* (2)*, що допускають розширення* $A^{\cap}$*, вичерпуються випадками, наведеними у таблиці 1.*

Таблиця 1. Результати групової класифікації класу систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Базис $A^{\rm Lie}$
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v$
1	$\forall$	$a(u)$	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,e^x\partial_v$
2	$\forall$	0	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,x\partial_v$
3	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,(\mu-2)t\partial_t+(\mu-1)x\partial_x+\partial_u$
4	e^u	e^u	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,t\partial_t-\partial_u,\,e^x\partial_v$
5	e^u	u	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,t\partial_t+(x-t)\partial_x+\partial_u$
6	e^u	0	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,x\partial_v,\,t\partial_t-\partial_u$
7	u^μ	u^ν	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,(\mu-2\nu)t\partial_t+(\mu-\nu)x\partial_x+u\partial_u$
8	u^μ	u^μ	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,\mu t\partial_t-u\partial_u,\,e^x\partial_v$
9	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,\mu t\partial_t+(\mu x-t)\partial_x+u\partial_u$
10a	u^μ	0	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,x\partial_v,\,\mu t\partial_t-u\partial_u$
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+u\partial_u,\,e^{-x}(\partial_x+u\partial_u),\,e^x\partial_v$
11	$u^{-4/3}$	0	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,x\partial_v,\,4t\partial_t+3u\partial_u,$ $x^2\partial_x-3xu\partial_u+xv\partial_v$
12	1	u	$\partial_t,\,\partial_x,\,\partial_v,\,v\partial_v,\,t\partial_x-\partial_u,\,2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,$ $t^2\partial_t+tx\partial_x-(tu+x)\partial_u$
13	1	0	$\partial_t,\,\partial_x,\,v\partial_v,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,2t\partial_x-xu\partial_u+xv\partial_v,$ $u\partial_u,\,\alpha\partial_u,\,\beta\partial_v,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-(x^2+2t)u\partial_u+(x^2-2t)v\partial_v$

Зауваження 1. У табл. 1–4 $\mu,\nu=\mathrm{const.}$ $(\mu,\nu)\neq(-2,-2),\,(0,1)$ та $\nu\neq 0,\mu$ у випадку 7. $\mu\neq-4/3,0$ для випадку 10a. Функції $\alpha=\alpha(t,x)$ і $\beta=\beta(t,x)$ – довільні розв'язки рівнянь теплопровідності $\alpha_t=\alpha_{xx}$ та $\beta_t+\beta_{xx}=0$ відповідно. Випадок 10b зводиться до 10a ($\mu=-2$) додатковим перетворенням еквівалентності

$$\tilde t=t,\quad \tilde x=e^x,\quad \tilde u=e^{-x}u,\quad \tilde v=v.$$

Зауваження 2. Надалі для зручності використовується подвійна нумерація T.N випадків класифікації, де T – номер таблиці і N – номер відповідного випадку у таблиці T. Позначення "рівняння 1.N" ("система 1.N", тощо) використовується для рівнянь з класу (1) (систем вигляду (2), тощо), у яких параметр-функції набувають значення з відповідних випадків.

Зауваження 3. Експоненціальні випадки 1.3–1.6 можна отримати як границі степеневих випадків 1.7–1.10a [14, 20]. Більш точно,

$$\tilde u=1+\nu^{-1}u,\ \mu=\mu'\nu:\quad 1.7_{\mu,\nu}\to 1.3_{\mu'},\ \nu\to+\infty,$$
$$\tilde u=1+\mu^{-1}u,\ \tilde t=\mu^2 t,\ \tilde x=\mu x:\quad 1.9_{\mu}\to 1.5,\ \mu\to+\infty,$$
$$\tilde u=1+\mu^{-1}u:\quad 1.10\mathrm{a}_{\mu}\to 1.6,\ \mu\to+\infty.$$

Наведені граничні переходи зберігають структуру алгебри Лі інваріантності і можуть бути використані для побудови точних розв'язків для експоненціальних класів з розв'язків рівнянь із степеневими нелінійностями. Деякі часткові випадки наведених граничних переходів для рівнянь дифузії ($b=0$) отримано у [2, 3].

Легко бачити, що випадок 1.1 розширення симетрій виникає лише для класу систем (2) і не містить додаткових локальних симетрій рівнянь (1). Дійсно, проекція відповідної алгебри Лі симетрій на простір змінних t, x та u співпадає з алгеброю Лі $\langle\partial_t,\,\partial_x\rangle$ ядра основних груп класу рівнянь (1). Проте, як показано нижче, ця симетрія є варіаційною і, більш того, індукує локальні закони збереження рівнянь вигляду (1).

Застосування інфінітезімального критерію варіаційної інваріантності до симетрій Лі, представлених у таблиці 1 приводить до наступного твердження.

Теорема 4. *Повна множина* $G^{\sim}$*-нееквівалентних систем* (2)*, що мають нетривіальні варіаційні симетрії нульового порядку, вичерпується випадками, наведеними у таблиці 2.*

Випадки 2.4 та 2.8 є перетинами $2.1\cap 2.3$ та $2.1\cap 2.7$ відповідно. Відповідні алгебри варіаційних симетрій є об'єднаннями алгебр симетрій випадків 2.1 та 2.3 (2.1 та 2.7).

Таблиця 2. Класифікація варіаційних симетрій класу систем (2).

N	$a(u)$	$b(u)$	Базис $A^{\rm var}$
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v$
1	$\forall$	$a(u)$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ e^x\partial_v$
2	$\forall$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ x\partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v$
3	$e^{\mu u}$	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2)t\partial_t+(\mu-1)x\partial_x+\partial_u-(\mu-1)v\partial_v$
4	e^u	e^u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ e^x\partial_v,\ t\partial_t-\partial_u$
5	e^u	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_t+(x-t)\partial_x+\partial_u-v\partial_v$
6	e^u	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ x\partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ t\partial_t-\partial_u$
7	u^μ	u^ν	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ (\mu-2\nu)t\partial_t+(\mu-\nu)x\partial_x+$ $+u\partial_u+(\nu-\mu-1)v\partial_v$
8	u^μ	u^μ	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t-u\partial_u+v\partial_v,\ e^x\partial_v$
9	u^μ	$\ln u$	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ \mu t\partial_t+(\mu x-t)\partial_x+u\partial_u-(\mu+1)v\partial_v$
10a	u^μ	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ x\partial_v,\ \mu t\partial_t-u\partial_u+v\partial_v$
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+u\partial_u-v\partial_v,\ e^{-x}(\partial_x+u\partial_u),\ e^x\partial_v$
11	$u^{-4/3}$	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 2t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v,\ x\partial_v,\ 4t\partial_t+3u\partial_u-v\partial_v,$ $x^2\partial_x-3xu\partial_u+xv\partial_v$
12	1	u	$\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ t\partial_x-\partial_u,\ 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,$ $t^2\partial_t+tx\partial_x-(tu+x)\partial_u$
13	1	0	$\partial_t,\ \partial_x,\ 2t\partial_t+x\partial_x-u\partial_u,\ 2t\partial_x-xu\partial_u+xv\partial_v,$ $u\partial_u-v\partial_v,\ \alpha\partial_u,\ \beta\partial_v,$ $4t^2\partial_t+4tx\partial_x-(x^2+2t)u\partial_u+(x^2-2t)v\partial_v$

3. Закони збереження. У цьому розділі знайдені варіаційні симетрії використовуються для знаходження законів збереження рівнянь з класу (1). Законом збереження системи з класу (2) називається дивергентний вираз

$$D_tT(t,x,u_{(r)},v_{(r)})+D_xX(t,x,u_{(r)},v_{(r)})=0, \qquad (3)$$

який тотожно дорівнює нулеві на многовиді вихідної системи. Диференціальні функції T та X називаються *густиною* та *потоком* закону збереження відповідно.

Закон збереження називається *тривіальним*, якщо компоненти вектора густини задовольняють умову

$$T=\hat T+\check T,\quad X=\hat X+\check X,$$

де $\hat T$, $\check T$, $\hat X$, $\check X$ є функціями t, x та похідних u і v, $\hat T$, $\hat X$ – тотожні нулі на многовиді системи (2), $D_t\check T+D_x\check X\equiv 0$.

Два закони збереження з векторами густини $(T,\,X)$ та $(T',\,X')$ називаються *еквівалентними*, якщо вектор-функція $(T'-T,X'-X)$ є вектором густини тривіального закону збереження.

Застосовуючи теорему Ньотер [8,17] до варіаційних симетрій, знайдених у попередньому розділі, отримаємо множини нееквівалентних законів збереження систем (2) (рівнянь (1)), наведені у таблиці 3.

Таблиця 3. Класифікація законів збереження систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Закони збереження
0	$\forall$	$\forall$	CL^1, CL^2, CL^3
1	$\forall$	$a(u)$	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4
2	$\forall$	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6
3	$e^{\mu u}$	e^u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^7
4	e^u	e^u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^7(\mu=1)$
5	e^u	u	CL^1, CL^2, CL^3, CL^8
6	e^u	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, CL^9
7	u^μ	u^ν	CL^1, CL^2, CL^3, CL^{10}
8	u^μ	u^μ	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu)$
9	u^μ	$\ln u$	CL^1, CL^2, CL^3, CL^{11}
10a	u^μ	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, CL^{12}
10b	u^{-2}	u^{-2}	CL^1, CL^2, CL^3, CL^4, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=\nu=-2)$, CL^{13}
11	$u^{-4/3}$	0	CL^1, CL^2, CL^3, CL^5, CL^6, $\mathrm{CL}^{12}(\mu=-4/3)$, CL^{14}
12	1	u	CL^1, CL^2, CL^3, $\mathrm{CL}^{10}(\mu=0,\,\nu=1)$, CL^{15}, CL^{16}
13	1	0	CL^1, CL^2, CL^6, $\mathrm{CL}^{12}(\mu=0)$, CL^{17}, CL^{18}, CL^{19}, CL^{20}

Густини T та потоки X наведених законів збереження мають наступний вигляд:

CL^1: $au_xv_x-\frac12bu_xv+\frac12v\int b,\ -a(u_tv_x+u_xv_t)-\frac12u_tvb-\frac12v_t\int b;$

CL^2: $\frac12(uv_x-u_xv),\ \frac12(u_tv-uv_t)-au_xv_x;$

CL^3: $u,\ -au-\int b;$

CL^4: $e^xu,\ -e^xau_x;$

CL^5: $xu,\ \int a-xau_x;$

CL^6: $tau_xv_x+xvu_x,\ -xvu_t+a(xu_xv_x-u_xv-t(u_tv_x+u_xv_t));$

CL^7: $(\mu-2)te^{\mu u}u_xv_x-\frac12(\mu-2)te^u(u_xv-v_x)+v$
$+\frac12(\mu-1)(x(uv_x-u_xv)+uv),$
$-e^{\mu u}((\mu-2)t(u_tv_x+u_xv_t)+(\mu-1)(xu_xv_x-u_xv)-v_x)$
$+e^u(\frac12(\mu-2)t(u_tv-v_t)-\frac12\mu v)+\frac12(\mu-1)(u_tv-uv_t);$

CL^8: $\frac{1}{4}tu^2v_x - \frac{1}{2}tuu_xv + (x-t)(uv_x - u_xv) + \frac{1}{2}uv + v$,
$e^u(v_x - u_xv - xu_xv_x - t(u_tv_x + u_xv_t)) + \frac{1}{2}(x-t)(u_tv - uv_t)$
$-\frac{1}{2}uv + \frac{t}{4}(2uu_tv - u^2v_t)$;

CL^9: $te^uu_xv_x - v$, $-e^u(v_x + tu_tv_x + tv_tu_x)$;

CL^{10}: $\frac{1}{2}(\mu-2\nu)t(2au_xv_x - bu_xv - v_x\int b) + \frac{1}{2}(2-\nu+\mu)uv$
$+(\mu-\nu)x(uv_x - u_xv)$,
$\frac{1}{2}(\mu-\nu)x(u_tv - uv_t) + a(uv_x + (\nu-\mu-1)u_xv)$
$+\frac{1}{2}(\mu-2\nu)t(u_tbv - v_t\int b) + \frac{1}{2}(\nu-\mu-1)v\int b$
$-(\mu-\nu)xau_xv_x - (\mu-2\nu)ta(u_tv_x + u_xv_t)$;

CL^{11}: $\mu tu^\mu u_xv_x + \frac{1}{2}(\mu t\ln u + \mu x - t)(uv_x - u_xv) + \frac{1}{2}\mu uv + uv - \frac{1}{2}\mu tuv_x$,
$\frac{1}{2}(\mu t\ln u + \mu x - t)(u_tv - uv_t) - (\mu x - t)u_xv_x$
$-\mu tu^\mu(u_tv_x + u_xv_t) + u^{\mu+1}v_x$
$-(\mu+1)u^\mu u_xv - uv\ln u + \frac{1}{2}\mu uv_t + \frac{1}{2}(\mu+1)uv$;

CL^{12}: $\mu tu^\mu u_xv_x - uv$, $-u^{\mu+1}v_x + u^\mu u_xv - \mu tu^\mu(u_tv_x + u_xv_t)$;

CL^{13}: $e^{-x}(uv - u_xv + uv_x)$, $e^{-x}(u_tv - uv_t + 2u^{-2}u_xv_x - 2u^{-1}v_x$;

CL^{14}: $-2xuv + \dfrac{1}{2}x^2(uv_x - u_xv)$,
$\dfrac{1}{2}x^2(uv_t - u_tv) + x^2u^{-4/3}u_xv_x - 3u^{-1/3}v$
$+x(3u^{-1/3}v_x - u^{-4/3}u_xv)$;

CL^{15}: $tu_xv + v$, $tu_xv_x + v_x - tu_tv - uv$;

CL^{16}: $t^2(u_xv_x - uu_xv) + txuv_x - xv$,
$t^2(uu_tv - u_tv_x - u_xv_t) - tx(uv_t + u_xv_x) + t(u^2v - uv_x) - xv_x + v$;

CL^{17}: αu, $\alpha_xu - \alpha u_x$;

CL^{18}: βv, $\beta v_x - \beta_xv$;

CL^{19}: $t(uv_x - u_xv) - xuv$, $t(u_tv - uv_t - 2u_xv_x) + x(u_xv - uv_x)$;

CL^{20}: $t^2u_xv_x + \frac{1}{2}tx(uv_x - u_xv) - \frac{1}{4}x^2uv$,
$\frac{1}{4}x^2(u_xv - uv_x) - t^2(u_xv_t + u_tv_x) + \frac{1}{2}tx(u_tv - uv_t - 2u_xv_x)$
$-\frac{1}{2}t(u_xv + uv_x)$.

Зауваження 4. Вектори густини законів збереження CL^3, CL^4, CL^5 та CL^{17} не містять у явному вигляді розв'язків приєднаного рівняння і визначають локальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії (1). Це є у точності всі лінійно незалежні закони збереження рівнянь (1), отримані раніше у [21] за допомогою прямого методу.

Решта векторів густини визначають нелокальні закони збереження рівнянь конвекції-дифузії, де нелокальна змінна v задається приєднаним рівнянням $v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x$.

Простори законів збереження перетинів $3.4 = 3.1 \cap 3.3$ та $3.8 = 3.1 \cap 3.7$ є об'єднаннями відповідних просторів випадків 3.1 та 3.3 (3.1 та 3.7) за додаткової умови $\mu = 1$ ($\nu = \mu$). Закони збереження CL^3 та CL^5 для лінійного рівняння теплопровідності (що виникають як підвипадки випадку $a = u^\mu$, $b = 0$) є частковими випадками множини законів збереження CL^{18}.

Розглянемо зараз більш детально лінійний випадок

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad v_t + v_{xx} = 0 \tag{4}$$

Підкреслимо, що вектори густини законів збереження, наведені у таблиці 3 є нееквівалентними відносно звичайного означення еквівалентності, і відповідні закони збереження є лінійно незалежними. У той же час, діючи перетвореннями з групи Лі $G^{\max}$ симетрій системи (4), можна встановити $G^{\max}$-відношення еквівалентності на просторі законів збереження. Так, наприклад, CL^{18} еквівалентний CL^{17} відносно дискретного перетворення симетрії $\tilde t = -t$, $\tilde x = x$, $\tilde u = -v$, $\tilde v = -u$.

Розглянемо тепер множину законів збереження, породжених CL^{17} та CL$^{12}(\mu = 0)$. Очевидно, що вони утворюють лінійний підпростір простору законів збереження системи (4), визначений системою твірних $\{(\alpha u, \alpha_xu - \alpha u_x),\ (uv, uv_x - u_xv)\}$. Замінимо систему твірних на $\{((v+\alpha u), (v_x + \alpha_x)u - (v+\alpha)u_x),\ (uv, uv_x - u_xv)\}$. Під дією точкового перетворення $v \to v - \alpha$ (інші змінні не перетворюються) з групи симетрій $G^{\max}$ вектор густини $((v+\alpha u), (v_x + \alpha_x)u - (v + \alpha)u_x)$ переходить у $(uv, uv_x - u_xv)$. Таким чином, з точністю до групи симетрій системи (4) розглянутий підпростір генерується законом збереження з вектором густини $(uv, uv_x - u_xv)$.

У [8, 16] показано, що для систем рівнянь Ейлера–Лагранжа генеруюча множина нееквівалентних законів збереження визначається векторами густини, що відповідають операторам симетрії, які утворюють алгебри Лі, нееквівалентні відносно дії приєднаного зображення. Ця властивість дозволяє завершити дослідження еквівалентностей між законами збереження системи (4).

Теорема 5. *Генеруюча множина законів збереження системи* (4) *складається з CL^{19} та CL^{20}, що відповідають операторам варіа-*

ційної симетрії $2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$ *та* $4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (x^2+2t)u\partial_u + (x^2-2t)v\partial_v$.

Детальне та строге доведення теореми 5 наведено у [12]. Аналогічно можна знайти генеруючі множини законів збереження нелінійних систем (2), які наведені у таблиці 4.

Таблиця 4. Генеруючі множини законів збереження систем (2) (рівнянь (1)).

N	$a(u)$	$b(u)$	Закони збереження
0	$\forall$	$\forall$	CL^1, CL^2, CL^3
1	$\forall$	$a(u)$	CL^1, CL^2, CL^3
2	$\forall$	0	CL^6
3	$e^{\mu u}$	e^u	CL^7 if $\mu \neq -2$ and CL^1, CL^7 if $\mu = -2$
4	e^u	e^u	CL^2, CL^3, $\mathrm{CL}^7(\mu = 1)$
5	e^u	u	CL^8
6	e^u	0	CL^6, CL^9
7	u^μ	u^ν	CL^{10} if $\mu \neq -2\nu$ and CL^1, CL^{10} if $\mu = -2\nu$
8	u^μ	u^μ	CL^2, $\mathrm{CL}^{10}(\mu = \nu)$
9	u^μ	$\ln u$	CL^{11} if $\mu \neq 0, -1$;
			CL^1, CL^{11} if $\mu = 0$ and CL^3, CL^{11} if $\mu = -1$
10a	u^μ	0	CL^6, CL^{12}
10b	u^{-2}	u^{-2}	$\mathrm{CL}^{10}(\mu = \nu = -2)$
11	$u^{-4/3}$	0	CL^6
12	1	u	CL^3, CL^{16}
13	1	0	CL^{19}, CL^{20}

4. Висновки. Загальновідомо, що еволюційне рівняння другого порядку не допускає лагранжевого формулювання. У той же час, система, що складається з диференціального рівняння та рівняння на приєднану симетрію завжди є системою рівнянь Ейлера–Лагранжа для деякого функціоналу [1, 23]. Тому, для знаходження її законів збереження, які, очевидно, є законами збереження вихідного рівняння, доцільно використовувати теорему Ньотер. Цей метод дістав назви композиційного варіаційного принципу.

Закони збереження системи рівнянь Ейлера–Лагранжа, що не залежать явно від розв'язків приєднаного рівняння, є локальними для вихідного рівняння. Якщо ж вектори густини містять у явному вигляді розв'язки приєднаного рівняння, відповідні локальні закони збереження системи рівнянь Ейлера–Лагранжа є нелокальними законами збереження вихідного рівняння. Отримана нелокальність

має істотно інший характер, ніж найбільш досліджені потенціальні та псевдопотенціальні закони збереження.

У представленій роботі розглядається застосування композиційного варіаційного принципа до знаходження законів збереження (1+1)-вимірних рівнянь конвекції-дифузії. Знайдено локальні та нелокальні закони збереження рівнянь вигляду (1), що відповідають варіаційним симетріям нульового порядку системи рівнянь Ейлера–Лагранжа. Порівнюючи отримані закони збереження з результатами роботи [21] показано, що таким чином побудовано всі можливі локальні закони збереження рівнянь (1). Питання про повноту просторів нелокальних законів збереження із вказаним характером нелокальності залишається відкритим: необхідно додатково дослідити питання про (не)існування узагальнених варіаційних симетрій вищого порядку та/або про (не)існування локальних законів збереження вищих порядків для отриманої системи рівнянь Ейлера–Лагранжа.

Дослідження підтримано грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061.

[1] Atherton R.W., Homsy G.M. On the existence and formulation of variational principles for nonlinear differential equations // Stud. App. Math. – 1975. – **54**. – P. 31–60.

[2] Bluman G.W., Kumei S. Symmetries and differential equations. – Springer: New York, 1989. – 412 p.

[3] Bluman G.W., Reid G.J., Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equations // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 806–811.

[4] Chayes J.T., Osher S.J., Ralston J.V. On singular diffusion equations with applications to self-organized criticality // Comm. Pure Appl. Math. – 1993. – **46**. – P. 1363–1377.

[5] Dorodnitsyn V.A., Svirshchevskii S.R. On Lie–Bäcklund groups admitted by the heat equation with a source. – Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics of Academy of Sciences USSR, 1983. – Preprint № 101. – 28 pp.

[6] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations // Phys. Lett. A. – 1994. – **190**. – P. 149–154.

[7] De Gennes P.G. Wetting: statics and dynamics // Rev. Modern Phys. – 1985. – **57**. – P. 827–863.

[8] Ibragimov N.H. Transformation groups applied to mathematical physics. – Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1985. – 394 p.

[9] Ibragimov N.H. (Editor) Lie group analysis of differential equations. Vol. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws. – Boca Raton: Chemical Rubber Company, 1994. – 430 p.

[10] Ibragimov N.H., Kolsrud T. Lagrangian approach to evolution equations: symmetries and conservation laws // Nonlinear Dynamics. – 2004. – **36**. – P. 29–40.

[11] Ivanova N. Conservation laws and potential systems of diffusion-convection equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 149–153.

[12] Ivanova N. Conservation laws of multidimensional diffusion-convection equations // Nonlinear Dynamics, to appear.

[13] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations // Proceedings of Tenth International Conference in Modern Group Analysis. – Larnaca, Cyprus, 2004. – P. 107–113.

[14] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification, in preparation.

[15] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. III. Conservation laws and contractions, in preparation.

[16] Khamitova R.S. The structure of a group and the basis of conservation laws // Teoret. Mat. Fiz. – 1982. – **52**. – 244–251.

[17] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – 514 p.

[18] Oron A., Rosenau P. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172–176.

[19] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004. – **37**. – P. 7547–7565.

[20] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2005. – **38**. – P. 3145–3155.

[21] Popovych R.O., Ivanova N.M. Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**, 043502. – 22 pp.

[22] Richard's L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // Physics. – 1931. – **1**. – P. 318–333.

[23] Vainberg M.M. Variational methods for investigation of non-linear operators. – San Francisco, Calif.: Holden-Day, 1964. – 344 p.

[24] Yung C.M., Verburg K., Baveye P. Group classification and symmetry reductions of the non-linear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ // Int. J. Non-Lin. Mech. – 1994. – **29**. – P. 273–278.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 159–169

УДК 517.912:512.816

Еволюційні рівняння та системи, інваріантні відносно конформної алгебри

Н.В. ІЧАНСЬКА

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.poltava.ua

Для класів нелінійних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь, що є інваріантними відносно деяких реалізацій конформної алгебри, розв'язано низку обернених та прямих задач групової класифікації.

Inverse and direct group classification problems are solved for classes of nonlinear evolutionary equations and systems of such equations, which are invariant with respect to realizations of conformal algebras.

1. Вступ. Унаслідок широкого застосування нелінійні еволюційні рівняння є цікавим об'єктом дослідження. Найбільш відомими серед них є нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії)

$$u_t = \partial_x(f(u)u_x). \tag{1}$$

Повний опис симетрій Лі рівнянь класу (1) зроблено Л. Овсянніковим у статті [1]. Ця робота стала класичною, оскільки в ній на прикладі класу рівнянь (1), вперше було розв'язано задачу групової класифікації для нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В [1] показано, що найбільш широку симетрію це рівняння має у випадку, коли $f(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$, $\lambda = \text{const} \neq 0$, його максимальна алгебра інваріантності породжується базисними генераторами

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_x, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \\ &D_1 = 2x\partial_x - 3u\partial_u, \quad K = x^2\partial_x - 3xu\partial_u. \end{aligned} \tag{2}$$

Об'єктом наших досліджень є еволюційні рівняння та системи вигляду

$$u_t = F(t, x, u_{(n)}), \tag{3}$$

$$U_t = G(t, x, U_{(n)}), \tag{4}$$

Тут і скрізь нижче $u = u(t,x)$, $n \geq 2$. u_t та $u_{(n)}$ відповідно позначають похідну $\partial u/\partial t$ та сукупність всіх похідних функції u за змінною x до порядку n включно, причому u вважаємо похідною нульового порядку, $U = (u^1, \ldots, u^r)$, F – довільна достатньо гладка функція своі аргументів, $G = (g^1, \ldots, g^r)$ – набір таких функцій.

Рівняння вигляду (3) займають важливе місце серед диференціальних рівнянь з частинними похідними. До таких рівнянь приводять різні фізичні задачі, наприклад, задачі опису процесів тепло- та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря в глибину тощо. До класу (3) належать відомі рівняння Гарі–Діма, Кортевега–де Фріза, Крішевера–Новікова та ін., дослідження яких проводилось в багатьох роботах [2–4] тощо. У статті [5] розглядаються методи інтегрування деяких рівнянь класу (3). Серед систем (4) є відомі системи, симетрійні властивості яких розглядалися у багатьох роботах ([6–9] тощо).

У цій статті описано функції F, при яких рівняння (3) інваріантне відносно алгебри

$$AC_1(1) = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u\partial_u,\, K = x^2\partial_x + xu\partial_u \rangle. \tag{5}$$

Для декількох класів еволюційних рівнянь, пов'язаних з виокремленими, проведено повну групову класифікацію. Також побудовано одновимірні еволюційні системи двох рівнянь, що інваріантні відносно алгебри

$$\langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u^a\partial_{u^a},\, K = x^2\partial_x + xu^a\partial_{u^a} \rangle. \tag{6}$$

Алгебра операторів (5) є реалізацією алгебри $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$. Оскільки оператори ∂_x, D і K задають реалізацію алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ групи конформних перетворень одновимірного дійсного простору, то алгебру $sl(2,\mathbb{R}) \oplus A_1$ надалі будемо називати розширеною конформною алгеброю і позначати $AC_1(1)$. Ми розглядаємо конкретну реалізацію (5) алгебри $AC_1(1)$, тому під інваріантністю рівняння відносно алгебри $AC_1(1)$ будемо розуміти інваріантність відносно її реалізації (5).

Зауважимо, що для конкретних рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (5), де у виразах для D, K при других доданках

стоїть ненульовий коефіцієнт m. Але такі реалізації зводяться до (5) локальними перетвореннями $u \to u^m$. Аналогічно для конкретних систем рівнянь можуть виникати реалізації подібні до (6), коли оператори D, K мають вигляд

$$D = 2x\partial_x + m_{11}u^1\partial_{u^1} + m_{12}u^2\partial_{u^2},$$
$$K = x^2\partial_x + m_{11}xu^1\partial_{u^1} + m_{12}xu^2\partial_{u^2},$$

де m_{11}, m_{12} – довільні константи, одночасно нерівні нулю.

Якщо $m_{11} \neq 0$, $m_{12} \neq 0$, то такі реалізації зводяться до (6) локальними перетвореннями $u^1 \to (u^1)^{m_{11}}$, $u^2 \to (u^2)^{m_{12}}$.

Коли хоча б одна з сталих m_{11}, m_{12} дорівнює нулю, то такі реалізації локальними перетвореннями $u^1 \to u^1$, $u^2 \to (u^2)^{m_{12}}$ зводяться до

$$\langle \partial_t,\, \partial_x,\, D = 2x\partial_x + u^2\partial_{u^2},\, K = x^2\partial_x + xu^2\partial_{u^2} \rangle. \tag{7}$$

Інваріантність еволюційної системи рівнянь другого порядку відносно алгебри (7) розглянуто в [10].

2. Конформно-інваріантні еволюційні рівняння. Розглянемо спочатку задачу про виділення з загального класу еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = F(t, x, u_{(n)}) \tag{8}$$

тих, які є інваріантними відносно алгебри (5).

Теорема 1. *Рівняння з класу* (8) *інваріантне відносно алгебри* $AC_1(1)$ *тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$u_t = uf(I^1, I^2, \ldots, I^{n-1}) \tag{9}$$

де $I^k = (u^2\partial_x)^{k-1}(u^3u_{xx})$, $k = \overline{1, n-1}$, f *– довільна гладка функція своїх аргументів.*

Доведення. З інфінітезимального критерію інваріантності [11] для рівняння (8) відносно алгебри $AC_1(1)$ випливає, що $F = uf$, де функція f залежить лише від диференціальних інваріантів алгебри $AC_1(1)$, які не містять змінної t і диференціювань по t. Тому можна скористатися класичними результатами С. Лі [12] (див. також сучасний виклад в [13,14]) щодо реалізацій алгебр Лі на площині та їх диференціальних інваріантів, вважаючи змінну t параметром.

В просторі змінних x і u реалізація $\langle \partial_x, D, K\rangle$ алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ має фундаментальний диференціальний інваріант u^3u_{xx} і оператор інваріантного диференціювання $u^2\partial_x$, звідки очевидно випливає твердження теореми.

Оскільки задача повної групової класифікації рівнянь вигляду (9) є занадто громіздкою, обмежимося вивченням двох важливих підкласів рівнянь другого та третього порядків, які мають вигляд

$$u_t = uf(I^1), \quad I^1 = u^3u_{xx}, \tag{10}$$

$$u_t = uf(I^2), \quad I^2 = 3u^4u_xu_{xx} + u^5u_{xxx}. \tag{11}$$

Зауважимо, що заміною $u \to \sqrt{u}$ рівняння (11) зводиться до більш простого рівняння

$$u_t = ug(I), \quad I = u^2u_{xxx}, \tag{12}$$

де $g(I) = 2f(I/2)$. При $g = u^2u_{xxx}$ рівняння (12) є відомим рівнянням Гарі–Діма.

Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії [11,15]. Тому спочатку знайдемо точкові перетворення еквівалентності рівнянь (10) та (12). Для зручності перепишемо ці рівняння наступним чином

$$u^3u_{xx} = \varphi\left(\frac{u_t}{u}\right), \tag{13}$$

$$u^2u_{xxx} = \psi\left(\frac{u_t}{u}\right), \tag{14}$$

де φ, ψ – довільні гладкі функції. Після заміни

$$u = e^w, \tag{15}$$

де $w = w(t,x)$ – нова невідома функція, одержимо

$$e^{4w}(w_{xx} + w_x^2) = \varphi(w_t), \tag{16}$$

$$e^{3w}(w_{xxx} + 3w_xw_{xx} + w_x^3) = \psi(w_t). \tag{17}$$

Теорема 2. *Алгебра Лі групи еквівалентності $G_1^{\sim}$ класу рівнянь (16) породжується інфінітезимальними операторами вигляду*

$$(\varkappa_1 t + d_0)\partial_t + (ax^2 + 2\varkappa_2 x + d_1)\partial_x + (ax + \varkappa_2 + \varkappa_3)\partial_w + 4\varkappa_3\varphi\partial_\varphi.$$

Алгебра Лі групи еквівалентності $G_2^{\sim}$ класу рівнянь (17) породжується інфінітезимальними операторами вигляду

$$(\varkappa_1 t + d_0)\partial_t + (ax^2 + 2\varkappa_2 x + d_1)\partial_x + (ax + \varkappa_2 + \varkappa_3)\partial_w + 3\varkappa_3\psi\partial_\psi.$$

Тут $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, a, d_0, d_1 – довільні сталі.

Зауваження. Крім перетворень з групи еквівалентності $G_1^{\sim}$ у класі рівнянь (16) існують також додаткові точкові перетворення еквівалентності, які описано групою науковців, очолюваною М.І. Сєровим. Додаткові точкові перетворення еквівалентності є і між випадками розширення симетрії у класі рівнянь (12).

Теорема 3. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду (10) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t, \partial_x, D = 2x\partial_x + u\partial_u, K_x = x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle$.*

Теорема 4. *З точністю до точкових перетворень для класу рівнянь (10) існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^3u_{xx}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\ker}$):*

1. $f = \ln(\omega)$: $Y_1 = e^{4t}u\partial_u$;
2. $f = \omega^m$: $D_1 = 4mt\partial_t - u\partial_u$, $m \neq 0, \pm\frac{1}{3}$ – довільна стала;
3. $f = \omega^{-\frac{1}{3}}$: $D_2 = 4t\partial_t + 3u\partial_u$, $Q_1 = \partial_u$, $Q_2 = x\partial_u$;
4. $f = \omega^{\frac{1}{3}}$: $D_3 = 4t\partial_t - 3u\partial_u$, $G = u\partial_x$, $K_2 = xu\partial_x + u^2\partial_u$.

Теорема 5. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду (12) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t, \partial_x, D = x\partial_x + u\partial_u, K = x^2\partial_x + 2xu\partial_u\rangle$.*

Теорема 6. *З точністю до точкових перетворень для класу рівнянь (12) існує лише три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче $\omega = u^2u_{xxx}$ та наведено лише базисні оператори з доповнення до $A^{\ker}$):*

1. $g = \ln(\omega)$: $Y_1 = e^{3t}u\partial_u$;
2. $g = \omega^m$: $D_1 = 3mt\partial_t - u\partial_u$, $m \neq 0, -\frac{1}{2}$ – довільна стала;
3. $g = \omega^{-\frac{1}{2}}$: $D_2 = 3t\partial_t + 2u\partial_u$, $Q_1 = x^2\partial_u$, $Q_2 = x\partial_u$, $Q_3 = \partial_u$.

Як випливає з наведених тверджень, найширшу симетрію у класі (10) має рівняння

$$u_t = u^2(u_{xx})^{\frac{1}{3}}, \tag{18}$$

$$u_t = (u_{xx})^{-\frac{1}{3}}, \tag{19}$$

а в класі рівнянь (12) –

$$u_t = (u_{xxx})^{-\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

В [17] для рівняння (18) побудовано анзаци та проведено редукцію. Слід зазначити, що рівняння (18) заміною

$$t \to t, \quad x \to \frac{x}{u}, \quad u \to \frac{1}{u}$$

зводиться до рівняння

$$u_t = (u_{xx})^{\frac{1}{3}}. \tag{21}$$

Крім того, в [19] доведено, що рівняння (21) неточковою заміною

$$t \to t, \quad x \to u_x, \quad u \to xu_x - u$$

зводиться до рівняння (19).

Алгебри інваріантності рівнянь (21), (19) та (20) складаються з семи та восьми базових операторів, що узгоджується з твердженням [23] про те, що алгебра інваріантності еволюційного рівняння порядку n складається не більше ніж з $n+5$ операторів.

Рівняння (19) та (21) виділено і в [20, 21] при груповій класифікації рівнянь вигляду $u_t = F(u_{xx})$ як ті, що володіють найширшою симетрією. Рівняння (20) виділено як особливе також у [5].

4. Групова класифікація рівнянь n-го порядку. В цьому підрозділі результати одержані для рівнянь (19)–(21) узагальнено на випадок рівняння довільного порядку. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду:

$$u_t = f(u_n), \tag{22}$$

де $u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, f – довільна гладка функція змінної u_n, тобто функція f залежить лише від старшої похідної u_n, причому $f_{u_n} \neq 0$. Класифікацію таких рівнянь, коли $n=2$ проведено в роботах [20,21], тому надалі вважаємо, що $n>2$.

Будь-яке рівняння вигляду (22) можна привести до вигляду

$$u_n = F(u_t), \tag{23}$$

де F – гладка функція, яка є оберненою до функції f. Тому всі твердження сформулюємо для рівняння (23).

Результати групової класифікації для рівнянь класу (23) наведемо в вигляді наступних трьох теорем.

Теорема 7. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь вигляду* (23) *є алгебра* $A^{\ker} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, nt\partial_t + x\partial_x + nu\partial_u,\, \partial_u,\, x\partial_u,\, x^2\partial_u,\, \ldots,\, x^{n-1}\partial_u \rangle$.

Теорема 8. *Алгебра Лі* $A^{\sim}$ *групи еквівалентності* $G^{\sim}$ *класу рівнянь* (23) *породжується операторами з* $A^{\ker}$ *(продовженими на довільний елемент* F*) та операторами* $t\partial_u$, $u\partial_u + nF\partial_F$, $x\partial_x - nF\partial_F$.

Теорема 9. *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу рівнянь* (23) *при* $n>2$ *існує лише чотири випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до* $A^{\ker}$*):*

1. $F = e^{u_t}$: $\quad Q = x\partial_x - nt\partial_u$;
2. $F = \ln u_t$: $\quad Q = n!\, t\partial_t - x^n\partial_u$;
3. $F = (u_t)^m$: $\quad D_1 = (1-m)x\partial_x + nu\partial_u$, $\ m \neq -\frac{n+1}{n-1}$ – довільна стала;
4. $F = (u_t)^{-\frac{n+1}{n-1}}$: $\quad D = 2x\partial_x + (n-1)u\partial_u$, $\ K = x^2\partial_x + (n-1)xu\partial_u$.

Доведення цих теорем проведемо одночасно. Скористаємося технікою, запропонованою в [22]. Оскільки (22) є еволюційним рівнянням, то в силу леми з [16] будь-який інфінітезимальний оператор його лівської симетрії має вигляд

$$X = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u.$$

Після переходу на многовид, заданий рівнянням (23) в продовженому просторі, і розщеплення по похідним u_x, u_2, …, u_{n-1} отримаємо систему визначальних рівнянь

$$\xi^1_u = \eta_{uu} = 0, \quad \eta_{k\,u} = \frac{n-k}{k+1}\xi^1_{k+1},\ k \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

$$[\eta_t + (\eta_u - \xi^0_t)u_t - \xi^1_t u_x]\dot{F} = [\eta_u - n\xi^1_x]F + \eta_n. \tag{25}$$

Якщо F – довільна функція, то розщеплюючи (25) по F і $\dot{F}$, отримаємо рівняння $\eta_u = n\xi^1_x = \xi^0_t$, $\xi^1_t = \eta_t = \eta_n = 0$, розв'язком яких є функції $\xi^0 = c_1 t + c_2$, $\xi^1 = c_1 n^{-1} x + c_3$, $\eta = c_1 u + P_{n-1}(x)$, де c_1, c_2,

c_3 – довільні сталі, P_{n-1} – довільний поліном $n-1$ степеня відносно змінної x, що доводить теорему 7.

Максимальна група еквівалентності класу рівнянь (23) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних перетворень груп локальних симетрій системи

$$u_n = F(u_t), \quad F_t = F_x = 0, \quad F_{u_l} = 0, \ l = \overline{1, n-1}, \tag{26}$$

інфінітезимальні оператори яких мають вигляд

$$E = \xi^0(t,x,u)\partial_t + \xi^1(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u + \zeta(t,x,u,F)\partial_F.$$

З умови інваріантності [2] системи (26) відносно оператора E, після розщеплення за незв'язанними змінними отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора E, розв'язки якої задають оператори, котрі породжують групу перетворень еквівалентності $G^{\sim}$. Теорема 8 доведена.

Опишемо всі можливі розширення МАІ в класі рівнянь (23). Розв'язавши перші три рівняння з (24), отримаємо

$$\eta = a(t,x)u + b(t,x), \quad \xi^1 = \xi^1(t,x), \tag{27}$$

де a, b – гладкі функції.

Структурне рівняння для (25) має вигляд

$$(k_1 u_t + k_2)\dot{F} = k_3 F + k_4, \tag{28}$$

де $k_1, \ldots, k_4$ – деякі сталі. В залежності від співвідношень між коефіцієнтами k_i з точністю до перетворень з $G^{\sim}$ отримуємо різні вигляди функції F. Зазначимо, що при $k_1 = k_2 = 0$ маємо $a_t = b_t = a - \xi^0_t = \xi^1_t = 0$, тобто розширення МАІ немає.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то $k_2 = 0$ і без обмеження загальності можна вважати $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = (u_t)^m$. Підставивши F в рівняння (25) та розщепивши по похідній u_t, отримуємо:

$$(m-1)a = m\xi^0_t - n\xi^1_x, \quad a_t = b_t = \xi^1_t = 0, \quad b_n = 0.$$

В залежності від значення m, з врахуванням рівнянь (24), маємо або третій, або четвертий випадки теореми 9.

Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 = 0$, то $k_2 = 0$, $k_1 = 1$, а розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = \ln u_t$. Підставивши F у (26), аналогічно попередньому випадку маємо

$$a - \xi^0_t = b_n, \quad a_t = b_t = \xi^1_t = 0, \quad a - n\xi^1_x = 0.$$

В результаті отримуємо другий випадок теореми 9.

У випадку $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ розв'язком рівняння (28) з точністю до перетворень з групи $G^{\sim}$ є функція $F = e^{u_t}$, а рівняння (26) розпадається на систему рівнянь:

$$a - \xi^0_t = 0, \quad a_t = \xi^1_t = 0, \quad b_t = a - n\xi^1_x, \quad b_n = 0,$$

які разом з (27) задають перший випадок теореми 9. Теорему 9 доведено.

Твердження теореми 9 щодо рівняння $u_t = (u_n)^{\frac{n+1}{n-1}}$ узгоджуються з результатами, одержаними Магадеєвим [18, 23].

5. Системи еволюційних рівнянь n-го порядку. Розглянемо систему еволюційних рівнянь, що узагальнює рівняння (8) на випадок двох функцій відносно двох невідомих t, x:

$$U_t = F(t, x, U_{(n)}), \tag{29}$$

де $F = (f^1, f^2)$ – довільні гладкі функції, $U = (u^1, u^2)$, $U_t = (u^1_t, u^2_t)$, $U_{(n)} = (u^1_{(n)}, u^2_{(n)})$.

Розв'яжемо задачу: виділити з класу систем (29) ті, які є інваріантними відносно розширеної конформної алгебри (6). Аналогічно теоремі 1 можна довести наступне твердження.

Теорема 10. *Система* (29) *інваріантна відносно алгебри* (6) *тоді і тільки тоді, коли вона має вигляд:*

$$U_t = u^1 g, \tag{30}$$

де $g = (g^1, g^2)$ – довільні гладкі функції змінних $\omega^{01} = u^1/u^2$, $\omega^{02} = u^2 u^1_x - u^1 u^2_x$, $\omega^{ak} = ((u^a)^2\partial_x)^{k-1}((u^a)^3 u^a_{xx})$ (суми по індексу a немає), $k = \overline{1, n-1}$, $a = 1, 2$.

6. Висновки. У цій статті розв'язано низку прямих і обернених задач групової класифікації, внаслідок чого побудовано нелінійні еволюційні рівняння і системи, інваріантні відносно розширеної конформної алгебри. Перерахуємо отримані результати:

1. Показано, що у класі еволюційних рівнянь вигляду (8) тільки рівняння (9) є інваріантними відносно розширеної конформої алгебри.
2. Встановлено, що найширшу алгебру симетрій у класі рівнянь (10) мають рівняння (18) та (19), а в класі рівнянь (11) – рівняння (20).
3. Показано, що найширшу алгебру симетрій у класі рівнянь довільного порядку (22) має рівняння $u_t = (u_n)^{\frac{n+1}{n-1}}$.
4. Встановлено, що у класі систем еволюційних рівнянь вигляду (29) тільки система (30) є інваріантною відносно розширеної конформної алгебри (6).

Виражаю щиру подяку М.І. Серову та Р.О. Поповичу за постановку задач і цінні рекомендації під час обговорення результатів досліджень.

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир. – 1989. – 581 с.

[3] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy. – 1994. – № 12. – P. 42–44.

[4] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry–Dym-type equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1994. – **27**. – P. 4549–4556.

[5] Heredero R.H., Sokolov V.V., Svinolupov S.I. Toward the classification of third-orderintegrable evolution equations // J. Phys. A: Math.Gen. – 1994. – **27**. – P. 4557–4568.

[6] Pava J.A. On the Cauchy problem for a Boussinesq-type system // Adv. Diff. Equations. – 1999. – **4**. – P. 457–492.

[7] Фущич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики // Доклады АН Украины. – 1991. – № 11. – С. 27–33.

[8] Фущич В.І., Черніга Р.М. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень // Доповіді АН України. – 1993. – № 8. – С. 44–51.

[9] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Симметрийный анализ и решенния уравнений матфизики. – Киев: Ин–т математики. – 1988. – С. 49–53.

[10] Андреєва Н.В. Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – **19**. – С. 10–13.

[11] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука. – 1978. – 400 с.

[12] Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen differential Gleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten // Math. Ann. – 1888. – **32**. – S. 213–281.

[13] Nesterenko M.O. Transformation groups on real plane and their differential invariants // Intern. J. Math. Math. Sci. – 2006. – **2006**, 17410. – 17 pp.

[14] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations// Lie Groups Appl. – 1994. – **1**. – P. 177–192.

[15] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн. физ. – 1960. – № 3. – С. 126–145.

[16] Бойко В.М., Попович В.О. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – **36**. – С. 45–50.

[17] Serova M., Andreeva N. Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Phisics". – Kyiv: Institute of Mathematics. – 1997. – **1**. – P. 217–221.

[18] Магадеев Б.А. Структура симметрии эволюционных уравнений / Дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Уфа. – 1990. – 103 с.

[19] Gazizov R.K. Contact transformations of equations of the type of nonlinear filtration / CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 1. – Boca Raton: Chemical Rubber Company, 1994. – P. 125–135.

[20] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. – 1989. – **34**. – С. 3–83.

[21] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations / Energy methods in continuum mechanics (Oviedo, 1994). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. – P. 75–99.

[22] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. мат. журн. – 2001. – **51**. – С. 1053–1060.

[23] Магадеев Б.А. О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений // Алгебра и анализ. – 1993. – **5**, вып.2. – С. 141–156.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 170–181

УДК 517.912:512.816

Q-conditional symmetry as a source of exact solutions of generalized Burgers equation

E.V. KUTAFINA, V.A. VLADIMIROV

AGH University of Science and Technology, Kraków, Poland
E-mail: kutafina@mat.agh.edu.pl, vladimir@mat.agh.edu.pl

В роботі проаналізовано умовну симетрію гіперболічного узагальнення рівняння Бюргерса. Використання узагальненої симетрії дозволило одержати нові точні розв'язки, що описують різноманітні хвильові структури.

In this paper the conditional symmetry to a hyperbolic generalization of Burgers equation is studied. Employment of the generalized symmetry enabled to obtain new exact solutions, describing the evolution of various wave patterns.

1. Introduction. In last few years we dealt with different methods of obtaining analytical solutions of nonlinear PDE's that are not completely integrable [1–3], paying special attention to the following generalization of Burgers equation (GBE) [4]:

$$\tau u_{tt} - \kappa u_{xx} + A u u_x + B u_t + H u_x = f(u).$$

Here and henceforth lower indices mean partial derivatives with respect to corresponding variables. The classical symmetry methods [5, 6] are very popular in obtaining exact solutions to nonlinear PDEs, but for non-zero constants classical symmetries of GBE are reduced to the generators of translations ∂_t and ∂_x, giving rise to travelling-wave solutions. So in this study we proceed further on and look for solutions which cannot be described in terms of travelling waves. To do this we employ so-called Q-conditional symmetry methods [7–11].

Let us consider equation

$$F(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0. \tag{1}$$

It is of common knowledge, that within the classical Lie algorithm [5, 6] we look for the operator

$$Q = \xi_1 \partial_x + \xi_2 \partial_t + \phi \partial_u, \tag{2}$$

such that

$$\hat{Q} F|_{F(x,t,u,u_x,u_t,\dots)=0} = 0, \tag{3}$$

where $\hat{Q}$ denotes the proper prolongation of Q.

Looking for the Q-conditional symmetry, we pose the additional condition:

$$Q(u(x,t) - u) = 0 = \xi_1\, u_x + \xi_2\, u_t - \phi \tag{4}$$

and solve the equations:

$$\hat{Q} F|_{F(x,t,u,u_x,u_t,\dots)=0,\, Q=0,\, Q_1=0,\, Q_2=0,\dots} = 0, \tag{5}$$

where $Q = 0$, $Q_1 u = 0$, $Q_2 u = 0$, ... denote equation (4) and its differential consequences of the corresponding orders. The additional condition allows finding much wider classes of reductions to GBE.

2. Brief overview of the cases. We deal with the equation:

$$\begin{aligned} &\tau u_{tt} - \kappa u_{xx} + A u u_x + B u_t + H u_x = \\ &\quad = f(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3. \end{aligned} \tag{6}$$

To examine the conditional symmetry of (6), we consider it together with the equation (4). Here ξ_1, ξ_2, ϕ depend on the variables x, t, u. We assume that τ, κ, A, λ_3 are non-zero and examine symmetries of the system (4), (6). Let us notice, that whenever ξ_1 (or ξ_2) is non-zero, it can be scaled to 1.

Case I: $\xi_2 = 1$, $\xi_1 \neq 0$. Using (6), (4) and its differential consequences we can eliminate u_t and all the second derivatives of $u(t, x)$[1]. After computing the prolongation of Q and performing the splitting procedure we obtain four determining equations:

$$e1 = 3f(u)(\kappa - \tau\xi_1^2)\xi_{1u} + \tau\phi^2(2\tau\xi_1\xi_{1u}{}^2 + \kappa\xi_{1uu} - \tau\xi_1^2\xi_{1uu}) -$$

[1]Let us notice that in case when $\kappa - \tau\xi_1^2 = 0$ the above procedure fails. This situation is thoroughly examined in section 3.

$$\begin{aligned}
&-2\kappa\tau\xi_{1u}\phi_t+2\tau^2\xi_1^2\xi_{1u}\phi_t+B\kappa\xi_{1t}-2H\tau\xi_1\xi_{1t}-2Au\tau\xi_1(\xi_{1t}+\\
&+B\tau\xi_1^2\xi_{1t}+2\kappa\tau\phi_u\xi_{1t}+2\tau^2\xi_1^2\phi_u\xi_{1t}+2\tau^2\xi_1{\xi_{1t}}^2+2\kappa\tau\xi_1\phi_{tu}-\\
&-2\tau^2\xi_1^3\phi_{tu}+\phi(-2\tau^2\xi_1^3\phi_{uu}+2\tau\xi_1(\kappa\phi_{uu}-\xi_{1u}(H+Au-\\
&-2\tau\xi_{1t}))-\kappa(A+2B\xi_{1u}-2\tau\xi_{1tu})+\tau\xi_1^2(A+4(B+\tau\phi_u)\xi_{1u}-\\
&-2\tau\xi_{1tu}))+\kappa\tau\xi_{1tt}-\tau^2\xi_1^2\xi_{1tt}-H\kappa\xi_{1x}-Au\kappa\xi_{1x}+2B\kappa\xi_1\xi_{1x}-\\
&-H\tau\xi_1^2\xi_{1x}-Au\tau\xi_1^2\xi_{1x}+4\kappa\tau\xi_1\phi_u\xi_{1x}-2\kappa\tau\xi_1\xi_{1x}^2+2\kappa^2\phi_{xu}-\\
&-2\kappa\tau\xi_1^2\phi_{xu}-\kappa^2\xi_{1xx}+\kappa\tau\xi_1^2\xi_{1xx}=0,\\
e2&=-\tau\phi^2(2\xi_1(B+\tau\phi_{1u})\xi_{1u}+\kappa\phi_{1uu}-\tau\xi_1^2\phi_{1uu})-B\kappa\phi_t+\\
&+B\tau\xi_1^2\phi_t-2\tau^2\xi_1\phi_t(\xi_{1t}-\kappa\tau(\phi_{tt}+\tau^2\xi_1^2(\phi_{tt}-H\kappa\phi_x-\\
&-Au\kappa\phi_x+H\tau\xi_1^2\phi_x+Au\tau\xi_1^2\phi_x+2\kappa\tau(\xi_{1t}\phi_x-2\kappa\tau\phi_t\xi_{1x}+\\
&+2\kappa\tau\xi_1\phi_x\xi_{1x}+f(u)((-\kappa+\tau\xi_1^2)(\phi_u+2(\tau\xi_1(\xi_{1t}+\kappa\xi_{1x}))+\\
&+\phi((\kappa-\tau\xi_1^2)f'(u)-2(-(\tau f(u)\xi_1\xi_{1u})+\tau\xi_1(\tau\xi_{1u}\phi_t+(B+\\
&+\tau\phi_u\xi_{1t}-\tau^2\xi_1^2\phi_{xu}+\kappa(\tau\phi_{xu}-\tau\xi_{1u}\phi_x+(B+\tau\phi_u\xi_{1x})))+\\
&+\kappa^2\phi_{xx}-\kappa\tau\xi_1^2\phi_{xx}=0,\\
e3&=-4\tau^2\phi\xi_1^2\xi_{1u}^2-2\xi_{1u}((H+Au)\kappa+\tau\xi_1^3(B+\tau\phi_u-\\
&-\tau\xi_1^2(H+Au-2\tau\xi_{1t}-\kappa\xi_1(B+\tau(\phi_u-2\tau\xi_{1x}))+(\kappa-\\
&-\tau\xi_1^2)((\kappa-\tau\xi_1^2)\phi_{uu}-2(\tau\phi\xi_1\xi_{1uu}+\tau\xi_1(\xi_{1xt}+\kappa\xi_{1xt}))=0,\\
e4&=2\tau\xi_1\xi_{1u}^2+\kappa\xi_{1uu}-\tau\xi_1^2\xi_{1uu}=0.
\end{aligned}$$

Since the first three equations are very complicated, we start our analysis from the last and the simplest one.

Case Ii: $\xi_{1u}\neq 0$. Introducing the new function $\xi_{1u}=\Psi(\xi_1)$ and consequently $\xi_{1uu}=\Psi'(\xi_1)\Psi(\xi_1)$, we obtain the integrable equation:

$$2\tau\xi_1\Psi(\xi_1)^2+\kappa\Psi'(\xi_1)\Psi(\xi_1)-\tau\xi_1^2\Psi'(\xi_1)\Psi(\xi_1)=0. \tag{7}$$

Equation (7) is satisfied by the following function:

$$\xi_1=\sqrt{\frac{\kappa}{\tau}}\tanh\left(\sqrt{\kappa\tau}c_1(x,t)(u+c_2(x,t)\right). \tag{8}$$

Function ϕ can be calculated from e3=0. Unfortunately e1=0 gives us either $\tau=0$ or $\kappa=0$ or $\lambda_3=\lambda_2=A=0$. So all the possibilities are in contradiction with our assumptions.

Case Iii: $\xi_{1u}=0$. To solve $e4=0$ we can also put $\xi_{1u}=0$. Then the third determining equation ($e3=0$) takes the form: $(\kappa-\tau\xi_1^2)\phi_{uu}=0$. Since $(\kappa-\tau\xi_1^2)\neq 0$, then $\phi_{uu}=0$. In other words, $\phi=a(x,t)u+b(x,t)$ and the remaining determining equations are as follows:

$$\begin{aligned}
e1&=-(A\kappa(ua+b))+A\tau(ua+b)\xi_1^2+2\kappa\tau\xi_1a_t-2\tau^2\xi_1^3a_t+\\
&+B\kappa\xi_{1t}+2\kappa\tau a\xi_{1t}-2H\tau\xi_1(\xi_{1t}-2Au\tau\xi_1\xi_{1t}+B\tau\xi_1^2\xi_{1t}+\\
&+2\tau^2a\xi_1^2\xi_{1t}+2\tau^2\xi_1\xi_{1t}^2+\kappa\tau\xi_{1tt}-\tau^2\xi_1^2\xi_{1tt}+2\kappa^2a_x-\\
&-2\kappa\tau\xi_1^2a_x-H\kappa\xi_{1x}-Au\kappa\xi_{1x}+2B\kappa\xi_1\xi_{1x}+4\kappa\tau a\xi_1\xi_{1x}-\\
&-H\tau\xi_1^2\xi_{1x}-Au\tau\xi_1^2\xi_{1x}-2\kappa\tau\xi_1\xi_{1x}^2-\kappa^2\xi_{1xx}+\kappa\tau\xi_1^2\xi_{1xx}=0,\\
e2&=-\kappa af(u)+\tau af(u)\xi_1^2+\kappa(ua+b)f'(u)-\tau(ua+b)\xi_1^2f'(u)-\\
&-2\kappa\tau(ua+b)a_t+2\tau^2(ua+b){\xi_1}^2a_t-B\kappa(ua_t+b_t)+\\
&+B\tau\xi_1^2(ua_t+b_t)-2B\tau(ua+b)\xi_1\xi_{1t}-2\tau^2a(ua+b)\xi_1\xi_{1t}+\\
&+2\tau f(u)\xi_1\xi_{1t}-2\tau^2\xi_1(ua_t+b_t)\xi_{1t}-\kappa\tau(ua_{tt}+b_{tt})+\\
&+\tau^2\xi_1^2(ua_{tt}+b_{tt})-H\kappa(ua_x+b_x)-Au\kappa(ua_x+b_x)+\\
&+H\tau\xi_1^2(ua_x+b_x)+Au\tau\xi_1^2(ua_x+b_x)+2\kappa\tau(\xi_{1t}(ua_x+b_x)-\\
&-2B\kappa(ua+b)\xi_{1x}-2\kappa\tau a(ua+b)\xi_{1x}+2\kappa f(u)\xi_{1x}-\\
&-2\kappa\tau(ua_t+b_t)\xi_{1x}+2\kappa\tau\xi_1(ua_x+b_x)\xi_{1x}+\kappa^2(ua_{xx}+b_{xx})-\\
&-\kappa\tau\xi_1^2(ua_{xx}+b_{xx}).
\end{aligned}$$

Taking into account that $f(u)=\lambda_3u^3+\lambda_2u^2+\lambda_1u+\lambda_0$, we collect the terms at different powers of u. Nullifying them, we obtain (among others) the following equations:

$$\begin{aligned}
&a(x,t)(\kappa-\tau\xi_1)^2+2\tau\xi_1\xi_{1t}+\kappa\xi_{1x}+\tau\xi_1^2\xi_{1x}=0,\\
&a(x,t)(\kappa-\tau{\xi_1}^2)+\tau\xi_1\xi_{1t}+\kappa\xi_{1x}=0.
\end{aligned}$$

The above system can be presented in the following equivalent form:

$$a(x,t)=-\xi_{1x},\quad \xi_1\xi_{1x}=-\xi_{1t}.$$

The second equation is a model equation of gas dynamics. Its general solution is as follows [12]:

$$x=t\xi_1+\Phi(\xi_1),$$

where $\Phi(\cdot)$ is an arbitrary function.

For $\Phi(\xi_1) = 0$

$$\xi_1(x,t) = x/t, \quad a(x,t) = -1/t$$

and remaining equations of this group are satisfied providing the following conditions are fulfilled:

$$b(x,t) = \frac{-\lambda_2}{3t\lambda_3}, \quad B = 0, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_2^3}{27\lambda_3^2},$$
$$A = \frac{-3H\lambda_3}{\lambda_2}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda_2^2}{3\lambda_3}.$$

Using the ansatz

$$u(x,t) = \frac{-\lambda_2 x + 3\lambda_3 R(\frac{t}{x})}{3\lambda_3 x},$$

we get in this case the reduced equation

$$\lambda_2(\kappa\xi_1^2 - \tau)R''(\xi_1) + 3H\lambda_3\xi_1 R'(\xi_1)R(\xi_1) + \lambda_3\lambda_2 R(\xi_1)^3 + \\ + 4\kappa\lambda_2\xi_1 R'(\xi_1) + 3H\lambda_3 R(\xi_1)^2 + 2\kappa\lambda_2 R(\xi_1) = 0. \tag{9}$$

Equation (9) is a nonlinear non-autonomous ODE which is, generally speaking, nonintegrable. A particular solution can be obtained using the ansatz-based method [1], slightly modified for the purposes of non-autonomous case. Thus, we represent the solution in the form

$$R(\xi_1) = \frac{p}{1 + q(\xi_1)\exp(\alpha(\xi_1))}. \tag{10}$$

The numerator of equation (9) contains then different powers of $\operatorname{Exp}(\alpha(\xi_1))$. Splitting the equation we can calculate the constants:

$$p = \pm\sqrt{2\kappa/\lambda_3}, \quad H = \mp 2/3\sqrt{2\kappa/\lambda_3}\lambda_2,$$

and the function $q(\xi_1)$. The simplified solutions are as follows

$$R(\xi_1) = \pm\frac{\sqrt{2\kappa}F(\xi_1)}{\sqrt{\lambda_3}(F(\xi_1) + \sqrt{\kappa\xi_1^2 - \tau})},$$
$$R(\xi_1) = \pm\frac{\sqrt{2\kappa}}{\sqrt{\lambda_3}(1 + F(\xi_1)\sqrt{\kappa\xi_1^2 - \tau})},$$

where $F(\xi_1) = \operatorname{arctanh}(\sqrt{\kappa/\tau}\xi_1)$.

Case II: $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = 0$. With these assumptions determining equations are as follows:

$$e1 = \phi_{uu} = 0,$$
$$e2 = f(u)\phi_u + B\phi_t - \phi(f'(u) - 2\tau\phi_{tu}) + \tau\phi_{tt} + \\ + H\phi_x + Au\phi_x - \kappa\phi_{xx} = 0,$$
$$e3 = A\phi - 2\kappa\phi_{xu} = 0.$$

From the firs equation we get the representation for u:

$$\phi(x,t,u) = a(x,t)u + b(x,t).$$

On virtue of this, the last equation becomes as follows:

$$A[b(x,t) + a(x,t)u] - 2\kappa a_x(x,t) = 0.$$

Since $a(x,t)$ and $b(x,t)$ are independent of u and $A \neq 0$ we must put $a(x,t) = 0$ and as a consequence $b(x,t) = 0$. The condition (4) gives $u_t(x,t) = 0$ and then $u = u(x)$.

Case III: $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = 1$. We get in this case three determining equations:

$$e1 = \phi_{uu} = 0,$$
$$e2 = \phi_{ut} = 0,$$
$$e3 = A\phi^2 + f(u)\phi_u + B\phi_t + \tau\phi_{tt} + H\phi_x + Au\phi_x - \\ - \phi(f'(u) + 2\kappa\phi_{xu}) - \kappa\phi_{xx} = 0.$$

From the first two equations we obtain that

$$\phi(x,t,u) = a(x)u + b(x,t).$$

The last equation then takes the form:

$$af(u) + A(b + au)^2 - 2\kappa a_x(b + au) + Bb_t + H(a_x u + b_x) + \\ + Au(a_x u + b_x) - (b + au)f'(u) + \tau b_{tt} - \kappa(a_{xx}u + b_{xx}) = 0. \tag{11}$$

Expression (11) can be splitted by powers of u. The coefficient of u^3 is $-2\lambda_3 a(x)$ while that of u^2 is $-\lambda_2 a + Aa^2 - 3\lambda_3 b + Aa'$. If we put $a(x) = 0$, then this implies $b(x,t) = 0$ and we again encounter the situation where

u is function of one independent variable. So we rather put $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Then $a(x)$ can be easily calculated:

$$a(x) = \frac{\lambda_2 e^{\frac{x\lambda_2}{A}}}{Ae^{\frac{x\lambda_2}{A}} - e^{\lambda_2 c_1}}. \tag{12}$$

Nullifying the coefficient of u in (11), we obtain a first order linear equation, which gives us the form of $b(x,t)$:

$$b(x,t) = \frac{e^{\frac{x\lambda_2}{A}}(\lambda_2 e^{\lambda_2 c_1}(-AH + \kappa\lambda_2) + A^2 e^{\frac{x\lambda_2}{A}} c_2(t))}{A^2(e^{\lambda_2 c_1} - Ae^{\frac{x\lambda_2}{A}})^2}. \tag{13}$$

Substituting (12), (13) into (11) and equating to zero the coefficient of u^0 (the free term), we obtain a very complicated expression which determines an unknown function $c_2(t)$. To our luck, this expression can be splitted as well. This time we equate to zero coefficients of $e^{3c1\lambda_2}$, $e^{3x\lambda_2/A}$, $e^{2c1\lambda_2 + x\lambda_2/A}$ and $e^{(c1+2x/A)\lambda_2}$ (equations obtained this way we denote as (eqn1)–(eqn4)).

Solving (eqn1) we get

$$\lambda_0 = \frac{1}{A^4}(AH - \kappa\lambda_2)(A^2\lambda_1 - AH\lambda_2 + \kappa\lambda_2^2). \tag{14}$$

Adding (eqn2) to (eqn3), we obtain the expression

$$A\left[H\lambda_2 - c_2(t)\right]\left[\lambda_2\left(AH - \kappa\lambda_2\right) - Ac_2(t)\right] = 0.$$

Thus, $c_2(t)$ must be constant. Under this assumption we finally solve equations (eqn3)–(eqn4) and conclude that

$$c_2 = \lambda_2(H - \kappa\lambda_2/A).$$

Now equation (4) takes on the form

$$u_x = \frac{\lambda_2 e^{\frac{x\lambda_2}{A}}}{Ae^{\frac{x\lambda_2}{A}} - e^{\lambda_2 c_1}} u + \frac{e^{\frac{x\lambda_2}{A}}\lambda_2(-AH + \kappa\lambda_2)}{A^2(e^{\lambda_2 c_1} - Ae^{\frac{x\lambda_2}{A}})}. \tag{15}$$

Solving (15), we obtain:

$$u = \frac{1}{A^2}\left[-AH + k\lambda_2 + A^2\left(e^{c_1\lambda_2} - Ae^{\frac{x\lambda_2}{A}}\right)c_3(t)\right]. \tag{16}$$

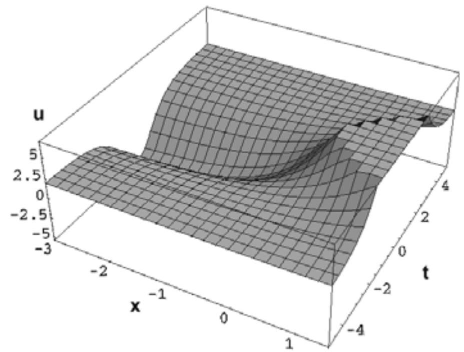

Fig. 1. The example solution of the form (16), $A = \lambda_2 = c = \tau = \kappa = 1$, $H = -1$, $c_4 = c_5 = 0$.

Finally, inserting (16) into (6), we obtain determining equation for unknown function $c_3(t)$:

$$\begin{aligned} &A^2(\tau c_3''(t) + Bc_3'(t)) - A^2 c\lambda_2 c_3(t)^2 - \\ &\quad - (A^2\lambda_1 - 2AH\lambda_2 + 2\kappa\lambda_2^2)c_3(t) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

where $c = e^{c_1\lambda_2}$. Some special solutions to this equation can be easily found. Let us introduce the new variable $g(c_3) = c_3'(t)$. Then $c_3''(t) = g'g$ and (17) becomes as follows:

$$\begin{aligned} &A^2(\tau g'(c_3)g(c_3) + Bg(c_3)) - A^2 c\lambda_2 c_3^2 - \\ &\quad - (A^2\lambda_1 - 2AH\lambda_2 + 2\kappa\lambda_2^2)c_3 = 0. \end{aligned}$$

For $B = 0$ it can be solved just by two integrations:

$$\begin{aligned} &\int \tau g'(c_3)g(c_3)dg - A^2 c\lambda_2 c_3^3 - (A^2\lambda_1 - 2AH\lambda_2 + 2\kappa\lambda_2^2)c_3 dc_3 = \\ &= \tfrac{1}{2}g(c_3)^2 - \tfrac{1}{3}A^2 c\lambda_2 c_3^2 - \tfrac{1}{2}(A^2\lambda_1 - 2AH\lambda_2 + 2\kappa\lambda_2^2)c_3^2 = c_4. \end{aligned} \tag{18}$$

Returning back to the variable $c_3(t)$ we obtain:

$$c_3'(t) = \pm\sqrt{a_3 c_3^3 + a_2 c_3^2 + a_0}, \tag{19}$$

where $a_3 = 2c\lambda_2/(3\tau), a_2 = (A^2\lambda_1 - 2AH\lambda_2 + 2\kappa\lambda_2^2))/(A^2\tau)$, $a_0 = 2c_4/(A^2\tau)$. After integration the function $c_3(t)$ can be written in terms of elliptic functions. In case when $c_4 = 0$ we get:

$$t + c_5 = \frac{-2}{\sqrt{a_2}} \operatorname{arctanh}\sqrt{\frac{a_2 + a_3 c_3(t)}{a_2}}.$$

Under additional conditions $A = \lambda_2 = c = \tau = \kappa = 1$, $H = -1$, $c_5 = 0$ the solution of the GBE takes the form:

$$u(x,t) = 2 + (\exp(x) - 1)\left(\tfrac{15}{2}\operatorname{sech}^2\left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}t\right)\right), \tag{20}$$

and it is illustrated in Fig. 1.

3. Solutions of the case $\boldsymbol{\xi_2 = 1,\ \kappa - \tau\xi_1^2 = 0}$. Let us consider system (6), (4) in the case then $\xi_2 = 1$, $\xi_1 = \epsilon\sqrt{\kappa/\tau}$, $\epsilon = \pm 1$. After using the condition (4), together with the proper differential consequences, equation (6) becomes as follows:

$$\begin{aligned}&[H - B\epsilon\sqrt{\kappa/\tau} + Au - 2\epsilon\sqrt{\kappa\tau}\phi_u]u_x + \\ &\quad + (B + \tau\phi_u)\phi + \tau - \epsilon\sqrt{\kappa\tau}\phi_x - f(u) = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Next we denote the coefficient of u_x by $k1$ and the rest of (21) by $k2$. Solving the system $k1 = k2 = 0$ we get:

$$\phi = \phi(u) = \frac{1}{2\epsilon\sqrt{\kappa\tau}}(A/2\sqrt{\tau}u^2 + u(H\sqrt{\tau} - \epsilon B\sqrt{\kappa})) + c$$

with an extra conditions

$$\lambda_0 = 1/2c(B + \epsilon H\sqrt{\kappa/\tau}), \quad \lambda_1 = \frac{-B^2\kappa + H^2\tau + 2Ac\epsilon\sqrt{\kappa}\tau^{3/2}}{4\kappa\tau},$$
$$\lambda_2 = \frac{A(3H - \epsilon B\sqrt{\kappa/\tau})}{8\kappa}, \qquad \lambda_3 = \frac{A^2}{8\kappa}.$$

To calculate the solution $u(x,t)$, let us return to equation (4):

$$u_t + \sqrt{\kappa/\tau}u_x = \phi = a_0 + a_1 u + a_2 u^2,$$

where $a_0 = c$, $a_1 = (H\sqrt{\tau} - \epsilon B\sqrt{\kappa})/(2\epsilon\sqrt{\kappa\tau})$, $a_2 = A/(4\epsilon\sqrt{\kappa\tau})$. Writing it in the characteristic form

$$\frac{dx}{\sqrt{\kappa/\tau}} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{a_0 + a_1 u + a_2 u^2},$$

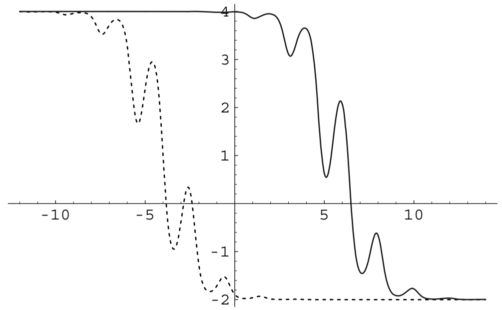

Fig. 2. Temporal evolution of solution described by formula (25) in case when $\Gamma(\omega) = \sin[2.25\omega]$.

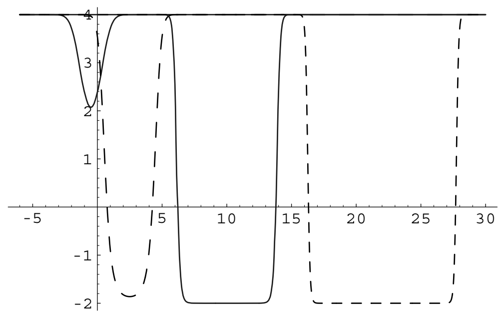

Fig. 3. Temporal evolution of solution described by formula (25) in case when $\Gamma(\omega) = -\omega^2$.

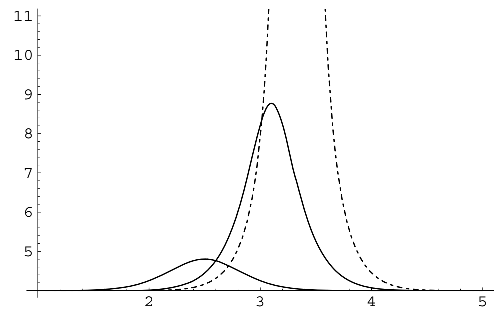

Fig. 4. A blow-up regime described by the formula (26) in case when $\Gamma(\omega) = -3.75\omega^2 + 5$.

we easily get the general solution

$$x + \Psi(\sqrt{\kappa/\tau}t - x) = \sqrt{\frac{\kappa}{\tau}} \int \frac{du}{a_0 + a_1 u + a_2 u^2}, \tag{22}$$

where $\Psi(\cdot)$ is and arbitrary function. Below we present some special solutions of (22).

For $A = \tau = \kappa = \epsilon = B = 1$, $H = 0$ equation (4) takes the form

$$u_t + u_x = \frac{1}{4}\left(u^2 - 2u + 4c\right). \tag{23}$$

General solution of this equation depends on whether $\Delta = 1 - 4c$ is positive or not. For $c < 1/4$ solution of (23) is as follows:

$$u(t, x) = \frac{u_2 G(\omega) e^{x\frac{\sqrt{\Delta}}{2}} - u_1}{G(\omega) e^{x\frac{\sqrt{\Delta}}{2}} - 1}, \tag{24}$$

where $u_1 = 1 + \sqrt{\Delta}$, $u_2 = 1 - \sqrt{\Delta}$, $G(\cdot)$ is an arbitrary function of $\omega = x - t$. Putting $c = -2$ and $G(\omega) = -e^{\Gamma(\omega)}$ we obtain the formula

$$u(x, t) = 2\frac{2 - \exp[3x/2 + \Gamma(\omega)]}{1 + \exp[3x/2 + \Gamma(\omega)]}. \tag{25}$$

For $c = -2$ and $G(\omega) = e^{\Gamma(\omega)}$ we get the solution

$$u(x, t) = 2\frac{\exp[3x/2 + \Gamma(\omega)] + 2}{1 - \exp[3x/2 + \Gamma(\omega)]}. \tag{26}$$

If $c > 1/4$ then solution to (23) is as follows:

$$u(x, t) = 1 + \beta \mathrm{arctg}\left[\frac{\beta x}{4} + G(\omega)\right], \tag{27}$$

where $\beta = \sqrt{|1 - 4c|}$. This solution is always singular.

If $c = 1/4$ then solution to (23) is as follows:

$$u(x, t) = 1 + \frac{1}{G(\omega) - \frac{x}{4}}. \tag{28}$$

This solution is also singular.

Let us give examples of solutions corresponding to formulae (25) and (26). Thus, inserting $\Gamma(\omega) = \sin[2.25\omega]$ into equation (26), we obtain an oscillating kink-like solution, shown in Fig. 2. For $\Gamma(\omega) = -\omega^2$ this solution produces a "dark" soliton with growing "support" (Fig. 3).

In contrast to (25), solution (26) is always singular. For $\Gamma(\omega) = -3.75\omega^2 + 5$ its evolution is shown in Fig. 4, in which we see how an initial localized wave pack grows in amplitude and in a finite time gives rise to a blow-up regime.

[1] Vladimirov V.A., Kutafina E.V. Exact travelling wave solutions of some nonlinear evolutionary equations // Rep. Math. Phys. – 2004. – **54**. – P. 261–271.

[2] Vladimirov V.A., Kutafina E.V. Toward an approximation of solitary-wave solutions of non-integrable evolutionary PDEs via symmetry and qualitative analysis // Rep. Math. Phys. – 2005. – **56**. – P. 421–436.

[3] Vladimirov V.A., Kutafina E.V., Pudełko A. Constructing soliton and kink solutions of PDE models in transport and biology // SIGMA. – 2006. – **2**, Paper 061. – 15 p.

[4] Makarenko A.S. Mathematical modelling of memory effects influence on fast hydrodynamic and heat conduction processes // Control and Cybernetics. – 1996. – **25**. – P. 621–630.

[5] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[6] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1993.

[7] Fushchich W., Tsifra I. On a reduction and solutions of non-linear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **20**. – L45–L48.

[8] Olver P., Rosenau P. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**. – P. 107–112.

[9] Fushchych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Publishers, 1993.

[10] Clarkson P., Mansfield L. Symmetry reduction and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. – 1993. – **70**. – P. 250–288.

[11] Olver P., Vorob'jev E. Nonclassical and conditional symmetries / CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 3, Editor N. Ibragimov. – CRC Press, 2000.

[12] Zajtsev V.F., Polyanin A.D. A reference book of the ordinary differential equations. – Moscow: Fiz.-Mat. Lit. Publ., 2001.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 182–186

УДК 517.9

On equations of Korteweg–de Vries type with highest symmetry properties

H. LAHNO †, ***V. SMALIJ*** ‡

† *Poltava State Pedagogical University*
E-mail: laggo@poltava.bank.gov.ua

‡ *National Agrarian University, Kyiv*

Представлено результати групової класифікації одного класу нелінійних еволюційних рівнянь третього порядку, що допускать чотирьохвимірні алгебри Лі операторів симетрії.

We present results on group classification of one class of third-order nonlinear evolution equations admitting four-dimensional solvable Lie algebras of symmetry operators.

The standard Korteweg–de Vries equation $u_t = u_{xxx} + uu_x$ belongs to the family of evolution equations

$$u_t = u_{xxx} + F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \tag{1}$$

where $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

The problem of group classification of equation (1) was solved by F. Güngor, V. Lahno and R. Zhdanov [1]. But their result of group classification is not complete. They obtained all classes of nonlinear equations of the form (1) that admit one-, two-, three- and four-dimensional solvable Lie algebras.

Here we investigate the symmetry properties of nonlinear equations of the form (1) whose invariance algebras are isomorphic to solvable Lie algebras $2A_{2.2} = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3, e_4\rangle$ ($[e_1, e_2] = e_2, [e_3, e_4] = e_4$), $A_{2.2} \oplus 2A_1 = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle \oplus \langle e_4\rangle$ ($[e_1, e_2] = e_2$) and $A_{3.3} \oplus A_1 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle \oplus \langle e_4\rangle$ ($[e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$).

According to [1] the complete list of such equations contains following nine equations:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad u_t = u_{xxx} + u_x^3 - 3u_x u_{xx} + x^{-2} u_x \tilde{F}(\omega),\\
&\qquad \omega = x(u_x^{-1} u_{xx} - u_x);\\
&2)\quad u_t = u_{xxx} + \tfrac{\lambda}{3t}\omega_1 \ln|\omega_1| + \tfrac{\omega_1}{t}\tilde{F}(\omega), \quad \omega_1 = t^{\frac{1}{3}} u_x,\\
&\qquad \omega = t^{\frac{1}{3}} u_x^{-1} u_{xx}, \quad \lambda \in \mathbb{R};\\
&3)\quad u_t = u_{xxx} - \lambda x u_x - \lambda u_x \ln|u_x| + u_x \tilde{F}(\omega),\\
&\qquad \omega = u_x^{-1} u_{xx}, \quad \lambda \neq 0;\\
&4)\quad u_t = u_{xxx} - (1 + \lambda^{-1}) u_x + e^{-x}\tilde{F}(\omega),\\
&\qquad \omega = e^x(u_x + u_{xx}), \quad \lambda \neq 0;\\
&5)\quad u_t = u_{xxx} - \gamma^{-1}(1 + \gamma^3) u_x + e^{(\gamma - \beta^{-1})x - t}\tilde{F}(\omega),\\
&\qquad \omega = e^{t + (\beta^{-1} - \gamma)x}(\gamma u_x - u_{xx}), \quad \gamma\beta \neq 0;\\
&6)\quad u_t = u_{xxx} - u_x + e^{-x}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = e^x(u_x + u_{xx});\\
&7)\quad u_t = u_{xxx} + u_x\tilde{F}(\omega), \quad \omega = u_{xx} u_x^{-1};\\
&8)\quad u_t = u_{xxx} - (\lambda^3 + 1)\lambda^{-1} u_x + e^{-t + \lambda x}\tilde{F}(\omega),\\
&\qquad \omega = e^{t - \lambda x}(\lambda u_x - u_{xx}), \quad \lambda \neq 0;\\
&9)\quad u_t = u_{xxx} + \lambda^{-1} x - \beta u_x + \tilde{F}(u_{xx}), \quad \lambda > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Using the standard Lie approach we prove that the maximal invariance group of equations (1) is generated by the operator

$$\mathrm{v} = \tau(t)\partial_t + \left(\tfrac{1}{3}\dot{\tau} x + \rho(t)\right)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \tag{3}$$

where the functions τ, ρ, η and F are arbitrary solutions of a single partial differential equation

$$
\begin{aligned}
&-3u_x\dot{\rho} - x u_x \ddot{\tau} - 9u_x u_{xx}\eta_{uu} - 3u_x^3\eta_{uuu} + 3\eta_t - 9u_{xx}\eta_{xu} -\\
&\quad - 9u_x^2\eta_{xuu} - 9u_x\eta_{xxu} - 3\eta_{xxx} + 3(\eta_u - \dot{\tau})F + (2u_{xx}\dot{\tau} -\\
&\quad - 3u_{xx}\eta_u - 3u_x^2\eta_{uu} - 6u_x\eta_{xu} - 3\eta_{xx})F_{u_{xx}} + (u_x\dot{\tau} - 3u_x\eta_u -\\
&\quad - 3\eta_x)F_{u_x} - 3\eta F_u - 3\tau F_t - (3\rho + x\dot{\tau})F_x = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Here the dot over a symbol stands for the time derivative.

The equations (2) contain arbitrary functions of one variable. Therefore we utilize the Lie–Ovsyannikov method [2,3] of group classification of differential equations. We consider in more detail first and sixth equations (2).

In first equation (2)

$$F = u_x^3 - 3u_x u_{xx} + x^{-2}u_x\tilde{F}(\omega), \quad \omega = x(u_x^{-1}u_{xx} - u_x).$$

From the equation (4) we find that the functions τ, ρ, η in the operator (3) and the function $\tilde{F}$ satisfy following system of equations:

$$\begin{aligned}
&\eta_{uuu} - \eta_u = 0;\\
&x^{-1}[\eta_{uu} - \eta_u]\tilde{F}_\omega + 3x^{-1}[\eta_{uu} - \eta_u]\omega + 3[\eta_{xuu} - \eta_{xu}] = 0;\\
&x^{-1}[x^{-2}\rho\omega - 2\eta_x + 2\eta_{xu}]\tilde{F}_\omega - 2x^{-3}\rho\tilde{F} =\\
&\quad = 3x^{-1}(\eta_x - \eta_{xu})\omega + 3(\eta_{xx} - \eta_{xxu}) - \tfrac{1}{3}x\ddot{\tau} - \dot{\rho};\\
&[x^{-2}\eta_x\omega - x^{-1}\eta_{xx}]\tilde{F}_\omega - x^{-2}\eta_x\tilde{F} = \eta_{xxx} - \eta_t.
\end{aligned} \tag{5}$$

If $\tilde{F}$ is arbitrary function, then from (5) we obtain that corresponding operator v has following form:

$$\mathrm{v} = (C_1t + C_2)\partial_t + \tfrac{1}{3}C_1x\partial_x + C_3e^u\partial_u + C_4\partial_u,$$

where $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$.

The corresponding invariance algebra is isomorphic to solvable Lie algebra $2A_{2.2}$: $e_1 = -t\partial_t\frac{1}{3}x\partial_x$, $e_2 = \partial_t$, $e_3 = \partial_u$, $e_4 = e^u\partial_u$.

The extension of symmetry properties of first equation (2) takes place in two cases:

(1) $\tilde{F} = \lambda\omega^2$ $\left(\lambda \neq 0, -\frac{3}{2}\right)$: here
$\tau = C_1t + C_2$, $\rho = C_3$, $\eta = C_4e^u + C_5$,
$C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$;

(2) $\tilde{F} = -\frac{3}{2}\omega^2$: here
$\tau = C_1t + C_2$, $\rho = C_3$, $\eta = C_4e^u + C_5e^{-u} + C_6$,
$C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

In sixth equation (2) $F = -u_x + e^{-x}\tilde{F}(\omega)$, $\omega = e^x(u_x + u_{xx})$, $\tilde{F}_{\omega\omega} \neq 0$, and from the equation (4) we find that the functions τ, ρ, η, $\tilde{F}$ satisfy following system of equations:

$$\begin{aligned}
&\eta_{uuu} = 0; \quad \eta_{uu}(1 - \tilde{F}_\omega) - \eta_{xuu} = 0;\\
&(\dot{\tau} + 6\eta_{xu})\tilde{F}_\omega = -9e^{-x}\omega\eta_{uu} - 3\dot{\rho} - x\ddot{\tau} + 9\eta_{xu} - 9\eta_{xxu};\\
&[e^x(2\dot{\tau} - 3\eta_u - 3\rho - x\dot{\tau})\omega - 3\eta_x - 3\eta_{xx}]\tilde{F}_\omega +\\
&\quad + e^{-x}(3\eta_u - 3\dot{\tau} + 3\rho + x\dot{\tau})\tilde{F} - 9e^{-x}\omega\eta_{xu} +\\
&\quad + 3\eta_t - 3\eta_x - 3\eta_{xxx} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

From second equation (6) we obtain the condition

$$\eta_{uu}\tilde{F}_{\omega\omega} = 0,$$

consequently $\eta_{uu} = 0$.

From third equation (6) we obtain the condition

$$(\dot{\tau} + 6\eta_{xu})\tilde{F}_{\omega\omega} = 0,$$

consequently

$$\dot{\tau} + 6\eta_{xu} = 0, \quad -3\dot{\rho} - x\ddot{\tau} + 2\dot{\tau} + 9\eta_{xu} - 9\eta_{xxu} = 0.$$

From obtained relations we obtain following values of the functions τ, ρ, η :

$$\begin{aligned}
&\tau = C_1t + C_2, \quad \rho = \tfrac{1}{6}C_1t + C_3,\\
&\eta = \left[-\tfrac{1}{6}C_1x + \gamma(t)\right]u + \beta(t, x), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Fourth equation (6) transforms into following system:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}C_1\tilde{F}_\omega = -3\dot{\gamma} + \tfrac{1}{2}C_1,\\
&\left[e^{-x}\left(2C_1 - \tfrac{1}{2}xC_1 - 3\gamma - \tfrac{1}{2}C_1t - 3C_3\right)\omega - 3\beta_x - 3\beta_{xx}\right]\tilde{F}_\omega +\\
&\quad + e^{-x}\left(-3C_1 + \tfrac{1}{2}xC_1 + \tfrac{1}{2}C_1t + 3C_3 + 3\gamma\right)\tilde{F} =\\
&\quad = -\tfrac{3}{2}e^{-x}C_1\omega - 3\beta_t - 3\beta_x + 3\beta_{xxx}.
\end{aligned} \tag{7}$$

From first equation (7) we obtain condition

$$C_1\tilde{F}_{\omega\omega} = 0,$$

consequently $C_1 = 0$, $\gamma = C_4$, $C_4 \in \mathbb{R}$. Second equation (7) reduces to equation

$$[(C_3 + C_4)\omega + \beta_x + \beta_{xx}]\tilde{F}_\omega - (C_3 + C_4)\tilde{F} = e^x(\beta_t + \beta_x - \beta_{xxx}),$$

from which we obtain condition

$$[(C_3 + C_4)\omega + \beta_x + \beta_{xx}]\tilde{F}_{\omega\omega} = 0.$$

Consequently, $C_3 + C_4 = 0$, $\beta_x + \beta_{xx} = 0$, $\beta_t + \beta_x - \beta_{xxx} = 0$, and the operator v (3) has following form:

$$\mathrm{v} = C_2\partial_t + C_3\partial_x + (-C_3u + C_5 + e^{-x}C_6)\partial_u,$$

$C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$. The corresponding invariance algebra is isomorphic to solvable Lie algebra $A_{2.2} \oplus 2A_1$: $e_1 = \partial_x - u\partial_u$, $e_2 = \partial_u$, $e_3 = \partial_t$, $e_4 = e^{-x}\partial_u$.

So we have obtained that sixth equation (2) does not suppose the extension of symmetry properties. Analogous results we have obtained for 3, 4, 5 and 8 equations (2). The rest equations (2) suppose the extensions of symmetry properties. We give these equations with the corresponding invariance algebras:

1) $u_t = u_{xxx} + u_x^3 - 3u_x u_{xx} + \lambda u_x (u_x^{-1} u_{xx} - u_x)^2, \lambda \neq 0, -\frac{3}{2}$:
$\langle t\partial_t + \frac{1}{3} x\partial_x, \partial_t, \partial_x, e^u\partial_u, \partial_u \rangle$;

2) $u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} u_x^{-1} u_{xx}^2 - \frac{1}{2} u_x^3$:
$\langle t\partial_t + \frac{1}{3} x\partial_x, \partial_t, \partial_x, e^u\partial_u, e^{-u}\partial_u, \partial_u \rangle$;

3) $u_t = u_{xxx} + \lambda^{-1} x + m \ln |u_{xx}| - \beta u_x, \lambda \cdot m \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$:
$\langle t\partial_t + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\beta t\right)\partial_x + \left[u + \frac{1}{3} t \left(\lambda^{-1} x + \frac{1}{2}\beta\lambda^{-1} t + m\right)\right]\partial_u,$
$\partial_x + \lambda^{-1} t\partial_u, (x - \beta t)\partial_u, \partial_t, \partial_u \rangle$;

4) $u_t = u_{xxx} + \lambda^{-1} x - \beta u_x + m|u_{xx}|^p, \lambda m \neq 0, p \neq 0, 1, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\langle t\partial_t + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\beta t\right)\partial_x + \left[\frac{2p-3}{3(p-1)} u + \frac{2p-1}{3\lambda(p-1)} tx + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta}{6\lambda(1-p)} t^2\right]\partial_u, \quad \partial_x + \lambda^{-1} t\partial_u, (x - \beta t)\partial_u, \partial_t, \partial_u \rangle;$$

5) $u_t = u_{xxx} + \lambda^{-1} x - \beta u_x + m e^{n u_{xx}}, \lambda m n \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$:
$$\langle t\partial_t + \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\beta t\right)\partial_x + \left[\frac{2}{3} u + \frac{1}{6n} x^2 + \left(\frac{2}{3\lambda} - \frac{\beta}{3n}\right) tx + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^2}{6n} t^2\right]\partial_u, \quad \partial_x + \lambda^{-1} t\partial_u, (x - \beta t)\partial_u, \partial_t, \partial_u \rangle.$$

[1] Güngör F., Lahno V., Zhdanov R. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 2280–2113.

[2] Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic, 1982.

[3] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 187–196

УДК 512.816:53.072.2:531.01

π-теорема в проблеме параметрической редукции динамических систем

В.И. ЛЕГЕНЬКИЙ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: victor@imath.kiev.ua

Проаналізована роль π-теореми в проблемі параметричної редукції динамічних систем. На прикладах показано, що передчасне застосування π-теореми звужує можливості такої редукції та ускладнює подальший груповий аналіз вихідної динамічної системи.

We analyze the role of π-theorem in the problem of parametric reduction of dynamical systems. Several examples show that the premature application of π-theorem in the problem of minimal-parametric description of the dynamical systems restricts the utility of such reduction, and further group analysis becomes more complicated.

1. Введение. Известному американскому математику Ричарду Беллману принадлежит замечательное наблюдение [1, с. 17]: "...беспокойные инженеры и экономисты, безусловно, хотели бы иметь "поваренную" книгу математических рецептов на все случаи жизни – нечто вроде прославленной таблицы интегралов или даже логарифмов ...". Роль такого рецепта в проблеме параметрической редукции динамических систем (т.е. в проблеме приведения уравнений модели к минимально-параметрическому виду) играет так называемая π-теорема. Мы приведем ее в редакции Л.В. Овсянникова [2, с. 263]:

Теорема 1 (π-теорема). *Любая безразмерная функция физических величин является функцией от безразмерных "комбинаций" этих величин; любое соотношение между физическими величинами равносильно некоторому соотношению между их безразмерными "комбинациями".*

Суть теоремы подсказывает естественный путь уменьшения параметров: из фазовых координат, времени и параметров модели следует образовать безразмерные комбинации и переписать исходные уравнения в терминах этих комбинаций. Так как число этих комбинаций заведомо меньше совокупного числа координат и параметров, следовательно, число параметров в редуцированной модели будет также меньшим.

Пример 1. Рассмотрим математическую модель осциллятора с квадратичным сопротивлением и линейным трением:

$$m\ddot{x} + k\dot{x}^2 + cx = 0, \tag{1}$$

где x означает линейную координату, m – массу, k, c – коэффициенты сопротивления и трения соответственно, дифференцирование производится по времени t. Размерности величин следующие:

$$[x] = \text{м}, \quad [t] = \text{с}, \quad [m] = \text{кг}, \quad [k] = \text{кг/м}, \quad [c] = \text{кг/с}^2.$$

Безразмерные комбинации будем искать в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [3]. Вначале составим таблицу размерностей:

	t	x	m	k	c
t	1	0	0	0	-2
x	0	1	0	-1	0
m	0	0	1	1	1

По приведенной таблице формируем матрицу размерностей A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} & \vdots & 0 & -2 \\ E & \vdots & -1 & 0 \\ & \vdots & 1 & 1 \end{array} \right)$$

и находим ядро (нуль-пространство) этой матрицы, т.е. все вектора s, удовлетворяющие уравнению $A_1 s = 0$. Эта процедура автоматизирована в большинстве систем аналитических вычислений. Например, в системе MATLAB результат получается применением к матрице A_1 оператора null$(A_1, `r')$, а в системе REDUCE – оператора nullspace(A_1). Результат в обеих системах представляется также в виде матрицы B_1, столбцы которой и есть искомые вектора. Для

нашего примера матрица B_1 принимает вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0,5 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ей соответствует таблица показателей степени для безразмерных комбинаций:

	$\pi_{11} = \hat{t}$	$\pi_{12} = \hat{x}$
t	1	0
x	0	1
m	$-0,5$	-1
k	0	1
c	0,5	0

Новые безразмерные переменные принимают вид:

$$\pi_{11} = \hat{t} = t\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \pi_{12} = \hat{x} = x\frac{k}{m},$$

а исходное уравнение может быть записано в виде:

$$\ddot{\hat{x}} + \dot{\hat{x}}^2 + \hat{x} = 0.$$

Приведенный пример – это так сказать “success story” π-теоремы: редуцированная модель содержит только новые координаты и уже не содержит характерных физических констант, как и гарантирует теорема. Не всегда, однако, дело обстоит так.

Пример 2. Рассмотрим похожую модель

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0, \tag{2}$$

отличающуюся от вышерассмотренной только тем, что производная $\dot{x}$ входит линейно, а не квадратично. Соответственно, размерности прежние, за исключением коэффициента α:

$$[x] = \text{м}, \quad [t] = \text{с}, \quad [m] = \text{кг}, \quad [\alpha] = \text{кг/с}, \quad [c] = \text{кг/с}^2.$$

Таблица размерностей принимает вид:

	t	x	m	α	c
t	1	0	0	−1	−2
x	0	1	0	0	0
m	0	0	1	1	1

Ей соответствует матрица размерностей A_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & -1 & -2 \\ E & \vdots & 0 & 0 \\ & \vdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеющая ядро

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

которому соответствует таблица

	$\pi_{21} = \tilde{t}$	$\pi_{22} = \tilde{m}$
t	1	0
x	0	0
m	0	1
α	−1	−2
c	1	1

Новые безразмерные переменные принимают вид:

$$\pi_{21} = \tilde{t} = t\frac{c}{\alpha}, \quad \pi_{22} = \tilde{m} = m\frac{c}{\alpha^2},$$

а уравнение может быть представлено как:

$$\tilde{m}\ddot{\tilde{x}} + \dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = 0.$$

Для удобства сравнения с примером 1, можно выбрать другую комбинацию безразмерных переменных (по правилу: функция от инварианта – тоже инвариант):

$$\tilde{t} = \frac{\pi_{21}}{\sqrt{\pi_{22}}} = t\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi_{22}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{cm}}.$$

Тогда преобразованное уравнение (штрих обозначает дифференцирование по преобразованному безразмерному времени) примет вид:

$$x'' + \tilde{\alpha}x' + x = 0. \tag{3}$$

Таким образом, замечаем, что хотя время в обоих примерах преобразуется одинаково, но второе уравнение во-первых, содержит одну безразмерную константу $\tilde{\alpha}$, а, во-вторых, мы замечаем, что координата x в нем – не преобразовывалась(!) – ей не с чем было “комбинироваться”, а, значит, уравнение по-прежнему остается размерным, только имеет уже не размерность силы, а размерность длины. Для того, чтобы разобраться в этой ситуации, потребуются средства группового анализа.

2. Параметрическая редукция как задача группового расслоения. Начнем с терминологического замечания. Термин “редукция”, который в буквальном смысле означает “приведение”, в русскоязычной литературе все же приобрел смысл “уменьшение”. Поэтому, когда говорят, например, “редуцированное уравнение”, то, главным образом, имеют ввиду уравнение, у которого уменьшился порядок, либо уменьшилось количество неизвестных и т.д. Как правило, преобразование, с помощью которого уравнение приобрело другой вид, рассматривается отдельно от самого этого уравнения. По мнению автора более точным является рассмотрение и самого преобразования и нового уравнения совместно.

В дальнейшем мы будем вести речь о групповых преобразованиях, при которых редуцированное уравнение играет роль разрешающей системы, а само преобразование – роль автоморфной системы. Необходимые теоретические положения можно найти в работах Л.В. Овсянникова [2] и Ю.Н. Павловского [4,5]. В рамках такого подхода для расслоения дифференциального уравнения с параметрами (обозначим через p вектор параметров)

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, p) = 0$$

следует прежде всего найти его инфинитезимальные симметрии вида

$$X = \tau(t, x, p)\partial_t + \xi(t, x, p)\partial_x + \varphi(t, x, p)\partial_p, \tag{4}$$

причем для наших целей интерес представляют операторы, для которых выполняется условие $\{\varphi \neq 0\}$. Тогда в качестве интересующих нас замен можно использовать инварианты этих операторов, а само уравнение надо записать в терминах этих инвариантов.

Сразу же заметим, что вышеприведенным преобразованиям, полученным из соображений размерности, соответствуют операторы растяжений, образующие абелеву подалгебру в общей алгебре симметрий. В первом случае – это операторы

$$X_1 = t\partial_t - 2c\partial_c, \quad X_2 = x\partial_x - k\partial_k, \quad X_3 = m\partial_m + k\partial_k + c\partial_c,$$

а во втором случае – это операторы

$$Y_1 = t\partial_t - \alpha\partial_\alpha - 2c\partial_c, \quad Y_2 = x\partial_x, \quad Y_3 = m\partial_m + \alpha\partial_\alpha + c\partial_c.$$

Обратим внимание на оператор Y_2. Он не удовлетворяет вышеприведенному условию и именно это является причиной того, что в первом примере удалось полностью освободиться от параметров, а во втором – нет. Это также проливает свет на то, что преобразованное уравнение во втором примере осталось размерным: причина состоит в том, что оно (уравнение) – дифференциальное, а не функциональное. В последнем случае (т.е. для уравнения $F(x, \pi^1, \pi^2) = 0$) наличие оператора Y_2 означало бы его однородность по x, что позволило бы представить его в виде $F(x, \pi^1, \pi^2) = xG(\pi^1, \pi^2) = 0$, а следовательно, в виде $G(\pi^1, \pi^2) = 0$. Для дифференциального уравнения – это не так, поэтому фразу "любое соотношение" в теореме 1 следует заменить на "любое функциональное соотношение".

Безусловно, разыскивая операторы симметрии в более широком классе, у нас есть надежда получить большее число необходимых для редукции операторов. Но при этом возникает ситуация, подобная отысканию операторов точечной симметрии для дифференциальных уравнений первого порядка (или их систем), а именно: определяющие уравнения для коэффициентов операторов являются недоопределенными (что, вообще говоря, приводит к появлению бесконечномерных групп симметрий) и их решение по сложности не уступает интегрированию исходного уравнения. Поэтому мы можем сузить класс операторов симметрии, наложив те или иные условия. Например, положив $\tau_p = 0$, $\xi_p = 0$, мы будем разыскивать т.н. "группу эквивалентностей", а при $\varphi_t = \varphi_x = 0$ – ее подгруппу (иногда называемую "сепарабельной"). Примеры подобного балансирования между общностью результата и возможностью провести вычисления "до конца" хорошо известны (см., например, работу Н.Х. Ибрагимова [6] или работу Л.В. Овсянникова [7]).

Возвращаясь к примеру 2, можно показать, что в классе операторов (4), для которых выполняются дополнительные условия $\tau_p = 0$, $\xi_p = 0$, $\varphi_t = \varphi_x = 0$, уравнение допускает еще 2 оператора симметрии:

$$Y_4 = \partial_t, \quad Y_5 = tx\partial_x - 2m\partial_\alpha - \alpha\partial_c.$$

Оператор Y_4 для нас интереса не представляет (так же, как и оператор Y_2, это оператор из ядра, т.е. допускается исходным уравнением при любых значениях коэффициентов). Напротив, оператор Y_5 для нас полезен. Прежде, чем проводить редукцию с учетом этого дополнительного оператора, заметим, что подалгебра $\langle Y_1, Y_3, Y_5\rangle$ – неабелева. Действительно, анализируя попарные коммутаторы

$$[Y_1, Y_3] = 0, \quad [Y_1, Y_5] = Y_5, \quad [Y_5, Y_3] = 0,$$

замечаем, что центр алгебры образован оператором Y_3, а оператор Y_5 принадлежит идеалу. В силу этого, редукцию следует проводить в порядке: $Y_3 \longrightarrow Y_5 \longrightarrow Y_1$. Как видно, наличие оператора Y_5 изменило порядок редукции по сравнению с π-теоремой и нам предстоит выяснить, насколько он существенен.

Итак, начинаем с оператора Y_3. Для него выполнено еще условие $\tau = \xi = 0$ и это означает, что из 3 коэффициентов m, α, c существенны только два. Выбирая в качестве инвариантов величины α/m и c/m, получим то же уравнение (2), в котором можно считать $m = 1$:

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx = 0.$$

Оператор Y_1 останется без изменений, а оператор Y_5 преобразуется к виду: $Y_5 = tx\partial_x - 2\partial_\alpha - \alpha\partial_c$. Его инварианты получаются в результате интегрирования системы

$$\frac{dx}{tx} = -\frac{d\alpha}{2} = -\frac{dc}{\alpha}$$

и могут быть взяты в виде:

$$\hat{x} = xe^{\frac{\alpha t}{2}}, \quad q = \frac{\alpha^2}{4} - c,$$

а уравнение преобразуется к виду:

$$\ddot{x} + qx = 0.$$

Как видим, у нас не только уменьшилось число параметров, но и изменилось само уравнение: исчез аддитивный член, содержащий первую производную. Такое явление не случайно: его закономерности проанализированы в работе [8]. Что же произошло с оператором Y_1? В новых переменных он выглядит так: $Y_1 = t\partial_t - 2q\partial_q$ и имеет инвариант $\hat{t} = t\sqrt{q}$. После этой замены уравнение примет окончательный вид:

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{5}$$

и уже не содержит характерных физических констант.

Теперь ответим на главный вопрос статьи: что же произойдет, если редукция была проведена "неправильно", т.е. на первом этапе использованы операторы π-теоремы и уравнение уже имеет вид (3). Могут ли помочь средства группового анализа на этом этапе? У нас есть две возможности: первая состоит в том, чтобы вычислить оператор симметрии, допускаемый уравнением (3) по известному нам оператору Y_5, используя формулу преобразования векторных полей, а второй путь – прямые вычисления. Идя по первому пути, получим

$$\tilde{Y}_5 = -\tilde{\alpha}t\partial_t + 2tx\partial_x + (\tilde{\alpha}^2 - 4)\partial_{\tilde{\alpha}}.$$

Таким образом, мы нашли оператор симметрии, допускаемый уравнением (3). Для нахождения инвариантов следует решить систему

$$-\frac{dt}{\tilde{\alpha}t} = \frac{dx}{2tx} = \frac{d\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}^2 - 4}.$$

Решения могут быть взяты в форме $\hat{x} = xe^{\frac{\tilde{\alpha}t}{2}}$, $\hat{t} = t\sqrt{1 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{4}}$, после чего уравнение примет в точности вид (5). Но сможем ли мы найти этот оператор симметрии прямыми вычислениями, ведь он уже принадлежит классу операторов

$$Y = \tau(t, x, \tilde{\alpha})\partial_t + \xi(t, x, \tilde{\alpha})\partial_x + \varphi(\tilde{\alpha})\partial_{\tilde{\alpha}}? \tag{6}$$

Система определяющих уравнений для коэффициентов последнего оператора имеет вид:

$$2\xi_{tx} - \tau_{tt} + 3x\tau_x + \tilde{\alpha}\tau_t + \varphi = 0, \quad \xi_{xx} - 2\tau_{tx} + 2\tilde{\alpha}\tau_x = 0,$$
$$\xi_{tt} - x\xi_x + 2x\tau_t + \tilde{\alpha}\xi_t + \xi = 0, \quad \tau_{xx} = 0.$$

Анализ этой системы в общем случае достаточно сложен, так как в процессе решения возникают уравнения, в точности совпадающие с исходным. Поэтому был выбран такой путь: коэффициенты, для которых получались такие уравнения, полагались равными нулю. Результат подобной стратегии таков: удалось показать, что:

Утверждение 1. *Уравнение* (3) *в классе операторов*

$$Y = \tau(t, x)\partial_t + \xi(t, x)\partial_x + \varphi(\tilde{\alpha})\partial_{\tilde{\alpha}}$$

допускает только операторы ∂_t, $x\partial_x$, *т.е. операторы из ядра.*

Утверждение 2. *Уравнение* (3) *допускает оператор бесконечномерной симметрии*

$$Y_h = -\tfrac{1}{2}(h_t + \tilde{\alpha}h)\partial_t + hx\partial_x - \tfrac{1}{2}[h_{ttt} - (\tilde{\alpha}^2 - 4)h_t]\partial_{\tilde{\alpha}}, \quad h = h(t).$$

Из последнего утверждения следует, что при $h = 2t$ уравнение допускает оператор $Y_h = \hat{Y}_5 - \partial_t$, т.е. уже полученный ранее оператор, расширенный оператором из ядра.

6. Заключение. Как нам удалось показать на примерах, основные группы, допускаемые динамическими системами с параметрами, не всегда являются группами растяжений и, соответственно, могут иметь неабелеву структуру. В последнем случае использование на начальном этапе редукции операторов симметрии, соответствующих π-теореме (которые не принадлежат в этом случае идеалу алгебры), может привести к усложнению процедуры поиска дополнительных операторов симметрии. Это проявляется в том, что искомый класс операторов симметрии приходится расширять – и, следовательно, усложнять систему определяющих уравнений. Достичь результата, т.е. получить полное аналитическое решение в этом случае удается редко. Причина состоит в том, что искомые группы оказываются бесконечномерными, а соответствующие им определяющие уравнения не проще исходного уравнения. Поэтому приходится проводить сужение класса искомых операторов симметрии непосредственно в процессе анализа этих определяющих уравнений, но это вряд ли можно отнести к регулярным методам решения.

[1] Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. – Москва: Наука, 1964. – 360 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[4] Павловский Ю.Н. Проблема декомпозиции в математическом моделировании // Матем. моделирование. 1991. – **3**, № 6. – С. 93–122.

[5] Павловский Ю.Н. Декомпозиция моделей управляемых систем. – Москва: Знание, 1985. – 32 с.

[6] Ибрагимов Н.Х. Алгебра Вессио–Гулдберга–Ли и ее использование при интегрировании нелинейных уравнений / Современный групповой анализ. – Москва: МФТИ, 1993. – С. 43–48.

[7] Ovsyannikov L.V. On x-autonomy property // Dokl. Akad. Nauk RAS. – 1993. – **330**. – P. 559–561.

[8] Легенький В.И. Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t, x, \dot{x}, \ldots) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \ldots) = 0$ к виду $G(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\dot{x}}, \ldots) = 0$ // Проблемы управления и информатики. – 2004. – № 2, С. 94–102.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 197–200

УДК 517.95

Реалізації двох п'ятивимірних алгебр Лі

М.В. ЛУТФУЛЛІН, Л.О. МАТЯШ

Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка
E-mail: mwl@imath.kiev.ua, math@pdpu.poltava.ua

Побудовано нееквівалентні реалізації двох п'ятивимірних алгебр Лі в класі векторних полів з довільною скінченною кількістю змінних. Знайдено також відповідні групи автоморфізмів та множини мегаідеалів.

Inequivalent realizations of two five-dimensional Lie algebras are constructed. The corresponding groups of automorphisms and sets of megaideal are found.

Однією з важливих проблем сучасного групового аналізу диференціальних рівнянь є задача опису реалізацій алгебр Лі в певному класі векторних полів. Відомі реалізації більш широких класів алгебр Лі дозволяють ефективно розв'язувати задачі групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними, опису гравітаційних полів загального вигляду, інваріантних відносно групи рухів та групи конформних перетворень, інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, опису систем звичайних диференціальних рівнянь, що допускають нелінійний принцип суперпозиції тощо (див., наприклад [1–8]).

Важливі та елегантні результати щодо класифікації реалізацій алгебр Лі отримано самим С. Лі. Він прокласифікував невироджені реалізації алгебр у класі векторних полів в просторі однієї дійсної змінної, однієї комплексної змінної та двох комплексних змінних [9,10]. Використовуючи геометричні підходи, Лі також одержав реалізації у двох дійсних змінних [11, Vol. 3] (сучасний виклад цих результатів див. в [12]). У цій же роботі С. Лі вказує метод повної класифікації всіх алгебр Лі векторних полів у трьох комплексних змінних, проте не наводить відповідних результатів.

Реалізаціям різних частинних класів алгебр Лі присвячено багато робіт. Наприклад, нещодавно побудовано повний опис реалізацій всіх алгебр Лі розмірності $n < 5$ в просторах довільної скінченної кількості змінних [14]. Запропонований в [14] метод, що спирається на поняття мегаідеала, можна застосувати для класифікації реалізацій алгебр Лі більш високих розмірностей. Нами побудовано нееквівалентні реалізації для ряду п'ятивимірних алгебр Лі. Оскільки мегаідеал – це ідеал алгебри Лі, інваріантний відносно довільних її автоморфізмів, то як додатковий результат знайдено відповідні групи автоморфізмів. Як і в [15], використано канонічні комутаційні співвідношення алгебр Лі з класифікації Мубаракзянова [13].

У цій роботі наведено повні переліки нееквівалентних реалізацій для двох п'ятивимірних алгебр Лі. Для кожної розглянутої алгебри A подано ненульові комутаційні співвідношення, загальний вигляд матриць, що визначають повну групу автоморфізмів $\mathrm{Aut}(A)$ та групу внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(A)$, множину M_0 власних мегаідеалів (окрім $\{0\}$ та самої алгебри A) і перелік нееквівалентних реалізацій в класі векторних полів з довільною скінченною кількістю змінних.

Нижче використано такі позначення: e_i – базисні елементи алгебри Лі; θ_i, α_{ij} – довільні дійсні параметри; що задовольняють умови, за яких відповідні матриці невироджені; $i, j = 1, 2, \ldots, 5$; $\partial_k = \partial/\partial_{x_k}$; c – довільна стала.

$\boldsymbol{A_{5.27}}$: $[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_5] = e_1,\ [e_3, e_5] = e_3 + e_4,\ [e_4, e_5] = e_1 + e_4$;

$$\mathrm{Int}: \begin{pmatrix} e^{\theta_5} & -\theta_3 & e^{\theta_5}\theta_2 & \theta_5 e^{\theta_5} & \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\theta_5} & 0 & \theta_3 \\ 0 & 0 & \theta_5 e^{\theta_5} & e^{\theta_5} & \theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{33} & -\alpha_{35} & \alpha_{13} & -\alpha_{33}\alpha_{25} + \alpha_{43} & \alpha_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & \alpha_{35} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_0: $\langle e_1\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_4\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$;

Реалізації:

1) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ (x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_4)\partial_2 + x_4\partial_4 + \partial_5$;
2) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ (x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_4)\partial_2 + x_4\partial_4$;
3) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3,\ \partial_2,\ (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3 - \partial_4 - x_5\partial_5$;
4) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \ln(cx_4)\partial_2 + x_4\partial_3,\ \partial_2,\ (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \ln(cx_4)\partial_3 - x_4\partial_4$;
5) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ \partial_2,\ (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4)\partial_3 - \partial_4$;
6) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ x_2\partial_1,\ (x_1 + x_2 x_4)\partial_1 - \partial_2 + x_4\partial_4$;
7) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 - \partial_2 - x_2\partial_3 - x_4\partial_4$;
8) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + ce^{x_2}\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 - \partial_2 - x_2\partial_3$.

$\boldsymbol{A_{5.29}}$: $[e_2, e_3] = e_1,\ [e_1, e_5] = e_1,\ [e_2, e_5] = e_2,\ [e_3, e_5] = e_4$;

$$\mathrm{Int}: \begin{pmatrix} e^{\theta_5} & -\theta_3 e^{\theta_5} & \theta_2 & 0 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_5} & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_5 & 1 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{Aut}: \begin{pmatrix} \alpha_{22}\alpha_{33} & \alpha_{12} & \alpha_{33}\alpha_{25} & 0 & \alpha_{15} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 & \alpha_{25} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

M_0: $\langle e_1\rangle, \langle e_4\rangle,\ \langle e_1, e_2\rangle,\ \langle e_1, e_4\rangle,\ \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$;

Реалізації:

1) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + x_3\partial_3 + \partial_5$;
2) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + x_3\partial_3 + x_5\partial_4$;
3) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + x_3\partial_3 + c\partial_4$;
4) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_3 - \partial_4 + x_5\partial_5$
5) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \ln(cx_4)\partial_2 + x_4\partial_3,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_3 + x_4\partial_4$;
6) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_2,\ \partial_2,\ x_1\partial_1 + x_3\partial_3 - \partial_4$;
7) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + \partial_4,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3$;
8) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + x_4\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (x_3 - x_2)\partial_3 + x_4\partial_4$;
9) $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1 + cx_2\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (x_3 - x_2)\partial_3$.

Відзначимо, що наведені результати є відносно компактними. Побудова реалізацій для інших п'ятивимірних алгебр Лі, яких загалом більше 60, хоча і не викликає принципових труднощів, але пов'язана із громіздкими обчисленнями. У зв'язку з цим доцільно розробити алгоритм їх знаходження, який можна повністю реалізувати в системах символьних обчислень.

Автори висловлюють щиру вдячність Р.О. Поповичу за увагу до роботи.

[1] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[2] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[3] Крючкович Г.И. Класификация трехмерных римановых пространств по группам движений // Усп. мат. наук. – 1954. – **9**, № 1 (59). – С. 3–40.

[4] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – Москва: Наука, 1966. – 495 с.

[5] Mahomed F.M., Leach P.G.L. Symmetry Lie algebras on nth order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – **151**. – P. 80–107.

[6] Schmucker A., Czichowski G. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations // J. Lie Theory. – 1998. – **8**. – P. 129–137.

[7] Bountis T.C., Papageorgiou V., Winternitz P. On the integrability of systems of nonlinear ordinary differential equations with superposition principles // J. Math. Phys. – 1986. – **27**. – P. 1215–1224.

[8] Carinena J.F., Grabowski J., Ramos A. Reduction of time-dependent systems admitting a superposition principle // Acta Appl. Math. – 2001. – **66**. – P. 67–87.

[9] Lie S. Gruppenregister, Gesammetle Abhandlungen, Vol. 5. – Leipzig: B.G. Teubner, 1924. – S. 767–773.

[10] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen // Math. Ann. – 1880. – **16**. – P. 441–528; див. також Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6. – Leipzig: B.G. Teubner, 1927. – S. 1–94.

[11] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 1–3. – Leipzig: B.G. Teubner, 1888, 1890, 1893.

[12] González-López A., Kamran N., Olver P.J. Lie algebras of vector fields in the real plane // Proc. London Math. Soc. (3). – 1992. – **64**. – P. 339–368.

[13] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. – 1963. – № 3 (34). – С. 99–106.

[14] Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360 (see math-ph/0301029).

[15] Олексійчук Ю.Ф., Лутфуллін М.В. Про реалізації одного класу п'ятивимірних алгебр Лі / Матеріали звітної наукової конференції викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фіз.-мат. ф-ту // Наукові записки. – Полтава: ПДПУ, 2005. – С. 52–56.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 201–210

УДК 517.9

Симетрійна класифікація одного класу хвильових рівнянь

О.В. МАГДА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: magda@imath.kiev.ua

Здійснено повну групову класифікацію квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з довільним елементом, що залежить від трьох змінних.

Complete group classification of quasi-linear hyperbolic-type differential equations with arbitrary element dependent on three variables is presented.

1. Вступ. Диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу займають важливе місце серед фундаментальних рівнянь математичної фізики. До них, зокрема, приводять задачі (наближеного) опису процесів коливань різноманітної природи в термінах диференціальних рівнянь. При цьому, як правило, обмежуються першим наближенням, одержуючи лінійні рівняння. Основна перевага такого підходу полягає у тому, що лінійні диференціальні рівняння задовольняють принцип лінійної суперпозиції. Цей принцип обумовлює ефективність застосування існуючого на даний час математичного апарату для аналізу та розв'язування таких рівнянь.

В ряді випадків опис процесів коливань в термінах лінійних рівнянь є незадовільним, оскільки відповідна математична модель не "відчуває" більш тонких нелінійних ефектів, притаманних досліджуваному процесові. Класичним прикладом є солітонні рівняння, що описують суттєво нелінійний ефект фазового зсуву взаємодіючих солітонних розв'язків. Розв'язки лінеаризованих солітонних рівнянь очевидно не мають такої властивості. Отже, наступному (більш точному) наближенню реального процесу відповідає нелінійна математична задача, для розв'язування і дослідження якої є досить обмежений математичний апарат. Більше цього, якщо досліджуються диференціальні рівняння з довільними функціями, то взагалі не існує загальних методів для їх точного інтегрування.

Ця ситуація суттєво змінюється, якщо відповідні нелінійні диференціальні рівняння мають нетривіальні симетрійні властивості.

Дійсно, за цієї умови для їх аналізу можна застосувати потужні методи теорії груп та алгебр Лі (див., наприклад, [1–4]). У зв'язку із цим актуальною є задача виокремлення із заданого класу нелінійних рівнянь тих, які допускають нетривіальні групи симетрії. Відзначимо, що задача класифікації рівнянь за їх групами симетрії є центральною проблемою класичного групового аналізу диференціальних рівнянь [1]. Відповідна процедура називається груповою класифікацією диференціальних рівнянь. Групова класифікація дозволяє окреслити коло задач, до яких можна застосовувати потужні теоретико-групові методи. Одним із результатів такої класифікації є можливість побудови точних розв'язків складних нелінійних рівнянь.

Дана стаття присвячена груповій класифікації квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$u_{tx} = f(t, x, u), \quad f_{uu} \neq 0. \tag{1}$$

Тут і далі, $u = u(t, x)$. Проблему групової класифікації лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними вивчав ще С. Лі. Він, зокрема, довів теорему, яка стверджує, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними допускає не більш ніж трипараметричну групу нетривіальних перетворень [5]. Повний розв'язок задачі групової класифікації лінійних рівнянь вигляду (1) було одержано Л.В. Овсянніковим [6] (див., також, [1]). Також відзначимо роботу [7], де було проведено групову класифікацію лінійних хвильових рівнянь

$$u_{tt} = f^2(x) u_{xx}.$$

Також слід відзначити роботи, де одержано (повний або частковий) розв'язок задачі групової класифікації таких одновимірних нелінійних хвильових рівнянь:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u), && [3,9],\\
&u_{tt} = -\lambda u_{xx} + F(u, u_x), && [10],\\
&u_{tt} = [f(u) u_x]_x, && [11,12],\\
&u_{tt} = f(u_x) u_{xx}, && [13],\\
&u_{tt} = [f(x, u) u_x]_x, && [14],\\
&u_{tt} = [f(u) u_x + g(x, u)]_x, && [15],\\
&u_{tt} = f(x, u_x) u_{xx} + g(x, u_x)_x, && [16].
\end{aligned}$$

2. Метод класифікації та деякі попередні результати. До класу рівнянь (1) був застосований метод групової класифікації, алгоритм якого розроблений в [17]. Оскільки виконання першого кроку алгоритму методу групової класифікації для рівняння (1) вимагає хоча й громіздких, але стандартних обчислень, ми тут на них не зупиняємося, а відразу наводимо отримані результати.

Твердження 1. *Група інваріантності рівняння* (1) *генерується інфінітезимальним оператором*

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + (ku + r(t, x))\partial_u, \tag{2}$$

де стала k та функції τ, ξ, r, f задовольняють рівність

$$r_{tx} + [k - \tau' - \xi'] f = \tau f_t + \xi f_x + [ku + r] f_u. \tag{3}$$

Твердження 2. *Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння* (1) *складають перетворення*

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = X(x), \quad v = mu + Y(t, x),\\
&2)\ \ \bar{t} = T(x), \quad \bar{x} = X(t), \quad v = mu + Y(t, x), \quad T'X'm \neq 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Із рівності (3) випливає, що у випадку довільного значення f $\tau = \xi = k = r = 0$, тобто оператор Q (2) є нульовим. Тому, перш за все, проводимо класифікацію рівнянь вигляду (1), які допускають однопараметричні групи перетворень.

Лема. *З точністю до перетворень з групи $\mathcal{E}$* (4)*, існує тільки три нееквівалентних оператора* (2)*, які можуть бути вибрані у вигляді:*

$$\begin{aligned}
&Q = \partial_t + \partial_x + \epsilon u\partial_u \quad (\epsilon = 0, 1);\\
&Q = \partial_t + \epsilon u\partial_u \quad (\epsilon = 0, 1);\\
&Q = u\partial_u, \quad Q = g(t, x)\partial_u \quad (g \neq 0).
\end{aligned}$$

Теорема 1. *З точністю до еквівалентності існують два нелінійні рівняння вигляду* (1)*, які інваріантні відносно однопараметричних груп локальних перетворень. Відповідні одновимірні алгебри Лі та значення функцій f у цих рівняннях такі:*

$$A_1^1 = \langle \partial_t + \partial_x + \epsilon u\partial_u \rangle \ \ (\epsilon = 0, 1): \quad f = e^{\epsilon t} \tilde{f}(\theta, \omega),$$

$$\theta = t - x, \quad \omega = e^{-\epsilon t}u, \quad \tilde f_{\omega\omega} \neq 0;$$

$$A_1^2 = \langle \partial_t + \epsilon u \partial_u \rangle \quad (\epsilon = 0, 1): \quad f = e^{\epsilon t}\tilde f(x, \omega),$$

$$\omega = e^{-\epsilon t}u, \quad \tilde f_{\omega\omega} \neq 0.$$

Для доведення теореми достатньо відібрати ті із операторів, що наведені у формулюванні леми, які будуть складати базис одновимірної алгебри інваріантності нелінійного рівняння вигляду (1). Для цього потрібно для кожного з отриманих в лемі операторів розв'язати рівняння (3).

Використовуючи оператори A_1^1 та A_1^2 знаходимо відповідні нелінійні рівняння. Для двох останніх операторів безпосередні обрахунки показали, що вони можуть допускатися лише лінійними рівняннями вигляду (1). Також, безпосереднє використання стандартного алгоритму Лі–Овсяннікова показало, що алгебри A_1^1 та A_1^2, у випадку довільних значень функцій $\tilde f$ у відповідних рівняннях, є максимальними алгебрами інваріантності цих рівнянь.

3. Класифікація рівнянь (1), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю. Опис нелінійних рівнянь, які допускають алгебри інваріантності розмірності вищої за 1, ми розпочинаємо з класифікації рівнянь, алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі, або містять такі алгебри як підалгебри. Виявляється, що в класі операторів (2) не існують реалізації алгебри $so(3)$, а реалізації алгебри $sl(2,\mathbb{R})$ з точністю до еквівалентності, яку визначають перетворення (4) з групи $\mathcal{E}$ рівняння (1), вичерпуються такими алгебрами Лі:

1) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}\partial_t, -\frac{1}{2}e^{-2t}\partial_t \rangle$;
2) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}(\partial_t + \partial_u), -\frac{1}{2}e^{-2t}(\partial_t - \partial_u) \rangle$;
3) $\langle \partial_t, \frac{1}{2}e^{2t}(\partial_t + x\partial_u), -\frac{1}{2}e^{-2t}(\partial_t - x\partial_u) \rangle$;
4) $\langle \partial_t + \partial_x, \frac{1}{2}e^{2t}\partial_t + \frac{1}{2}e^{2x}\partial_x, -\frac{1}{2}e^{-2t}\partial_t - \frac{1}{2}e^{-2x}\partial_x + {} + \epsilon[e^{-2x} - e^{-2t}]\partial_u \rangle, \quad \epsilon = 0, 1.$

Перш ніж переходити до опису $sl(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь вигляду (1), зупинимося на рівнянні Ліувілля

$$u_{tx} = \lambda e^u, \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Добре відомо, що максимальна група інваріантності цього рівняння

є нескінченнопараметричною групою локальних перетворень, яка генерується оператором

$$Q = h(t)\partial_t + g(x)\partial_x - (h' + g')\partial_u,$$

де функції h та g є довільними гладкими функціями своїх аргументів. Це рівняння лінеаризується (але нелокальними замінами змінних) й інтегрується у загальному вигляді.

Повернемося до отриманих реалізацій алгебри $sl(2,\mathbb{R})$. Подальший їх розгляд як алгебр інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1) показав що, реалізації (1), (3), (4), де $\epsilon = 1$, не можуть бути алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1). Реалізація (2) є алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tx} = \tilde f(x)e^{-2u}, \quad \tilde f \neq 0.$$

Але заміна змінних

$$\bar t = t, \quad \bar x = x, \quad u = -\tfrac{1}{2}(v - \ln|\tilde f|), \quad v = v(t, x)$$

показує, що воно є еквівалентним рівнянню (5).

Нарешті, скориставшись заміною змінних

$$\bar t = e^{-2t}, \quad \bar x = e^{-2x}, \quad v = u,$$

ми замість реалізації 4), де $\epsilon = 0$, розглянули реалізацію (в початкових позначеннях змінних)

$$\langle \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x \rangle$$

і отримали, що відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = (t - x)^{-2}\tilde f(u), \quad \tilde f_{uu} \neq 0. \tag{6}$$

Якщо в (6) функція $\tilde f$ є довільною функцією змінної u, то відповідна реалізація є максимальною алгеброю інваріантності цього рівняння. Подальше використання методу Овсяннікова показало, що розширення симетрії рівняння (6) має місце лише тоді, коли $\tilde f = \lambda e^u + 2$. Але заміна змінних

$$\bar t = t, \quad \bar x = x, \quad u = v(t, x) + 2\ln|t - x|$$

зводить таке рівняння до рівняння Ліувілля.

Отже, з точністю до еквівалентності нелінійні рівняння (1), алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі або містять їх як підалгебри, вичерпуються рівняннями (5), (6).

Для повної групової класифікації рівняння (1) залишилося описати рівняння, алгебри інваріантності яких є розв'язними алгебрами Лі, розмірність яких вища за одиницю. З даною метою ми, перш за все, провели побудову тих реалізацій двовимірних алгебр Лі $A_{2.1}$, $A_{2.2}$, які можуть бути алгебрами інваріантності нелінійних рівнянь вигляду (1).

Виявилося, що в класі операторів (2) з точністю до еквівалентності існує одна реалізація алгебри $A_{2.1}$:

$$\langle \partial_t + \epsilon_1 u\partial_u, \partial_x + \epsilon_2 u\partial_u \rangle \quad (\epsilon_1 = 0, 1;\ \epsilon_2 = 0, 1),$$

яка задовольняє умовам сформульованої задачі. Відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = \exp(\epsilon_1 t + \epsilon_2 x)\tilde{f}(\omega), \quad \omega = u\exp(-\epsilon_1 t - \epsilon_2 x). \tag{7}$$

Подальше дослідження рівняння (7) показало, що у випадку $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$ дана реалізація є максимальною алгеброю інваріантності рівняння (7). Якщо ж $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, тобто рівняння має вигляд

$$u_{tx} = f(u), \tag{8}$$

то його максимальною алгеброю інваріантності є тривимірна алгебра Лі операторів симетрії

$$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t - x\partial_x \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{3.6}$. Рівняння (8) допускає більш широку симетрію, коли воно є еквівалентним рівнянню Ліувілля (5) або рівнянню

$$u_{tx} = \lambda|u|^{n+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad n \neq 0, -1. \tag{9}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) (воно ще відоме в літературі як нелінійне рівняння Даламбера) є чотиривимірна алгебра Лі

$$\langle t\partial_t - \tfrac{1}{n}u\partial_u, x\partial_x - \tfrac{1}{n}u\partial_u, \partial_t, \partial_x \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $A_{2.2} \oplus A_{2.2}$.

Подальший аналіз рівняння (7), в якому $\epsilon_1 + \epsilon_2 \neq 0$ показав таке.

Якщо $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = 0$, то рівняння (7) допускає розширення симетрійних властивостей у таких двох випадках:

$$u_{tx} = \lambda e^{-mt}|u|^{m+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, -1; \tag{10}$$

$$u_{tx} = \lambda e^{t}\exp(ue^{-t}), \quad \lambda \neq 0. \tag{11}$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (9) є чотиривимірна алгебра Лі

$$\langle \partial_t + u\partial_u, e^{mt}\partial_t, \partial_x, x\partial_x - \tfrac{1}{m}u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі Лі $A_{2.2} \oplus A_{2.2}$ і яке заміною змінних

$$\bar{t} = e^{-mt}, \quad \bar{x} = x, \quad u = v(\bar{t}, \bar{x})$$

зводить рівняння (10) до рівняння вигляду (9).

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11) є тривимірна алгебра Лі

$$\langle \partial_t + u\partial_u, \partial_x, x\partial_x - e^t\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_1 \oplus A_{2.2}$.

Опис $A_{2.2}$-інваріантних рівнянь привів до таких результатів. В класі операторів (2) існують шість нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{2.2}$, які задовольняють умовам сформульованої задачі:

$$\begin{aligned}
&1)\ \langle -t\partial_t + x\partial_u, \partial_t \rangle;\\
&2)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + \partial_x \rangle;\\
&3)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u, \partial_t + \partial_x \rangle;\\
&4)\ \langle -t\partial_t + \partial_u, \partial_t \rangle;\\
&5)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x - u\partial_u, \partial_t \rangle;\\
&6)\ \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t \rangle.
\end{aligned} \tag{12}$$

Інваріантне рівняння, відповідне реалізації 1) має вигляд

$$u_{tx} = \exp(x^{-1}u). \tag{13}$$

Його максимальною алгеброю інваріантності є тривимірна алгебра Лі

$$\langle -t\partial_t + x\partial_u, \partial_t, x\partial_x + u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2} \oplus A_1$.

Прямою перевіркою неважко переконатися, що заміна змінних

$$\bar{t} = x, \quad \bar{x} = e^t, \quad u = v(\bar{t}, \bar{x})$$

зводить отримане вище рівняння (11) до рівняння (13).

Інваріантне відносно другої з переліку (12) реалізації рівняння має вигляд (6) і вже досліджене під час опису $sl(2,\mathbb{R})$-інваріантних рівнянь.

Реалізація 3) з переліку (11) є максимальною алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tx} = (t-x)^{-3}\tilde{f}(\omega), \quad \omega = (t-x)u. \tag{14}$$

Подальший аналіз рівняння (14) показав, що розширення його симетрії має місце, коли воно зводиться до вже отриманих вище рівнянь.

Інваріантне відносно реалізації 4) з переліку (12) рівняння зводиться до рівняння Ліувілля, а відносно реалізації 6) – до рівняння (8).

До нових результатів привів ще розгляд п'ятої реалізації (11). Відповідне інваріантне рівняння має вигляд

$$u_{tx} = x^{-1}\tilde{f}(\omega), \quad \omega = x^{-1}u,$$

і у випадку довільного значення функції $\tilde{f}$ задає базис його максимальної алгебри інваріантності. Подальша групова класифікація цього рівняння привела до такого, ще невідомого рівняння:

$$u_{tx} = \lambda|x|^{-m-2}|u|^{m+1}, \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0, -1, -2,$$

максимальна алгебра інваріантності якого є тривимірною алгеброю Лі

$$\langle \partial_t, t\partial_t + x\partial_x + u\partial_u, x\partial_x + \tfrac{m+1}{m}u\partial_u \rangle,$$

яка ізоморфна алгебрі $A_{2.2} \oplus A_1$.

Отримані результати групової класифікації рівнянь вигляду (1), алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю, зведено в наступному твердженні.

Теорема 2. *Найширшу симетрію серед нелінійних рівнянь вигляду (1) має рівняння Ліувілля*

$$u_{tx} = \lambda e^u, \quad \lambda \neq 0,$$

максимальна група інваріантності якого є нескінченнопараметричною групою локальних перетворень. Ця група генерується інфінітезимальними операторами вигляду

$$Q = h(t)\partial_t + g(x)\partial_x - (h'(t) + g'(x))\partial_u,$$

де h та g – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Також з точністю до еквівалентності існують ще дев'ять рівнянь вигляду (1), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу за одиницю. Вигляд функцій f у цих рівняннях, оператори симетрії та тип алгебри інваріантності наведено в таблиці.

№	Вигляд функції f	Оператори симетрії	Тип алгебри інваріантності
1	$f = e^t\tilde{f}(\omega)$, $\omega = ue^{-t}$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$\partial_t + u\partial_u$, ∂_x	$A_{2.1}$
2	$f = e^{t+x}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = ue^{-t-x}$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$\partial_t + u\partial_u$, $\partial_x + u\partial_u$	$A_{2.1}$
3	$f = (t-x)^{-3}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = (t-x)u$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$-t\partial_t - x\partial_x + u\partial_u$, $\partial_t + \partial_x$	$A_{2.2}$
4	$f = x^{-1}\tilde{f}(\omega)$, $\omega = x^{-1}u$, $\tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0$	$-t\partial_t - x\partial_x - u\partial_u$, ∂_t	$A_{2.2}$
5	$f = (t-x)^{-2}\tilde{f}(u)$, $\tilde{f}_{uu} \neq 0$	$\partial_t + \partial_x$, $t\partial_t + x\partial_x$, $t^2\partial_t + x^2\partial_x$	$sl(2,\mathbb{R})$
6	$f = e^{x^{-1}u}$	$-t\partial_t + x\partial_u$, ∂_t, $x\partial_x + u\partial_u$	$A_{2.2} \oplus A_1$
7	$f = \lambda\|x\|^{-m-2}\|u\|^{m+1}$, $\lambda \neq 0$, $m \neq 0, -1, -2$	∂_t, $t\partial_t - \frac{1}{m}u\partial_u$, $x\partial_x + \frac{m+1}{m}u\partial_u$	$A_{2.2} \oplus A_1$
8	$f = \tilde{f}(u)$, $\tilde{f}_{uu} \neq 0$	∂_t, ∂_x, $-t\partial_t - x\partial_x$	$A_{3.6}$
9	$f = \lambda\|u\|^{n+1}$, $\lambda \neq 0$, $n \neq 0, -1$	$t\partial_t - \frac{1}{n}u\partial_u$, $x\partial_x - \frac{1}{n}u\partial_u$, ∂_t, ∂_x	$A_{2.2} \oplus A_{2.2}$

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978.

[2] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наукова думка, 1989.

[4] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. – Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers, 1997.

[5] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Inegrale einer Klasse linearer partiallen Differentialgleichungen // Arch. Math. – 1881. – **6**, № 3. – S. 328–368.

[6] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. – 1960. – № 3. – P. 126–145.

[7] Bluman G.W., Kumei S. On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. – 1987. – **28**. – P. 307–318.

[8] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. – 1881. – **8**, № 1. – S. 112–125.

[9] Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non-Linear Mech. – 1986. – **21**, № 2. – P. 147–152.

[10] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. – 1987. – **12**, № 4. – P. 71–87.

[11] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non-Linear Mech. – 1981. – **16**, № 5–6. – P. 439–447.

[12] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**, № 4. – P. 172–176.

[13] Suhubi E.S., Bakkaloğlu A. Group poperties and similarity solutions for a quasilinear wave equation in the plane // Int. J. Non-Linear Mech. – 1991. – **26**. – P. 567–584.

[14] Torrisi M., Valenti A. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation // Int. J. Non. Mech. – 1985. – **20**. – P. 135–144.

[15] Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1990. – **38**. – P. 445–458.

[16] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. – 1991. – **32**. – P. 2988–2995.

[17] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – 7405–7418.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 211–216

УДК 517.912:512.816

Ортогонально-симплектична супералгебра: структура і реалізації

В.О. МАРЧЕНКО, Ю.Д. МОСКАЛЕНКО

Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка
E-mail: math@pdpu.poltava.ua

Проведено класифікацію градуйованих підалгебр ортогонально-симплектичної супералгебри $Osp(2, n)$. Побудовано реалізації супералгебри $Osp(2, 1)$ в класі диференціальних операторів першого порядку з матричними коефіцієнтами.

Subalgebras of the orthogonal-symplectic superalgebra $Osp(2, n)$ are classified. Some realizations of superalgebra $Osp(2, 1)$ in vector fields are constructed.

1. Вступ. Дослідження структури алгебр Лі є важливим для розв'язування багатьох задач групового аналізу диференціальних рівнянь, основи якого заклав С. Лі [1]. Систематичне дослідження підалгебр алгебр симетрій квантової механіки було розпочато у роботі Патери, Вінтернітца і Цассенхауза [2], у якій був запропонований загальний метод класифікації підалгебр скінченновимірної алгебри Лі. У запропонованій роботі проведено дослідження підалгебр ортогонально-симплектичної супералгебри.

2. Ортогонально-симплектична супералгебра. Ортогонально-симплектична супералгебра $Osp(2, n)$ має таке матричне представлення [3]:

$$\begin{pmatrix} X & \overline{\theta} & \overline{\omega} \\ -\overline{\omega}^T & \alpha & \beta \\ \overline{\theta}^T & \gamma & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{де } X \in AO(n);\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R};\ \overline{\theta}, \overline{\omega} \in \mathbb{R}^n.$$

Нехай I_{ab} – матриця порядку $n + 2$, яка містить одиницю на перетині a-го рядка і b-го стовпця, а решта елементів є нулями. Тоді базис $Osp(2, n)$ можна задати такими матрицями:

$$J_{ab} = I_{ab} - I_{ba}, \quad D = I_{n+2,n+2} - I_{n+1,n+1}, \quad S = -I_{n+2,n+1},$$

$$T = I_{n+1,n+2}, \quad G_a = I_{a,n+1} + I_{n+2,a}, \quad P_a = I_{a,n+2} - I_{n+1,a},$$

де $a,\ b = 1, 2, \ldots, n;\ a < b$.

Елементи J_{ab}, D, S, T утворюють базис парної частини супералгебри, елементи P_a, G_a – базис непарної частини супералгебри. Базисні елементи задовольняють таким комутаційним і антикомутаційним співвідношенням:

$$\begin{aligned}
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad}J_{bc} + \delta_{bc}J_{ad} - \delta_{ac}J_{bd} - \delta_{bd}J_{ac},\\
&[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab}P_c - \delta_{ac}P_b, \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab}G_c - \delta_{ac}G_b,\\
&[D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \quad [S, P_a] = G_a, \quad [S, G_a] = 0,\\
&[T, P_a] = 0, \quad [T, G_a] = -P_a, \quad [D, S] = 2S, \quad [D, T] = -2T,\\
&[T, S] = D, \quad [G_a, G_b]_+ = -2\delta_{ab}S, \quad [P_a, P_b]_+ = -2\delta_{ab}T,\\
&[G_a, P_b]_+ = \delta_{ab}D - J_{ab},
\end{aligned}$$

де $a, b, c, d = 1, 2, \ldots, n$; δ_{ab} – символ Кронекера. Тут символ $[\cdot,\cdot]$ означає комутатор, а $[\cdot,\cdot]_+$ – антикомутатор елементів алгебри.

Легко бачити, що всі ці комутаційні співвідношення збігаються з аналогічними для базисних елементів алгебри Галілея [4], тому ортогонально-симплектичну супералгебру $Osp(2, n)$ можна розглядати як одне з можливих суперузагальнень алгебри Галілея.

3. Підалгебри ортогонально-симплектичної супералгебри. Нехай $L = L^0 + L^1$ – супералгебра Лі, L^0 – її парна частина, L^1 – непарна частина. Підалгебру супералгебри L, яка є теж супералгеброю, будемо називати градуйованою підалгеброю. Градуйована підалгебра F супералгебри L має вигляд $F = F^0 + F^1$, де F^0 – підалгебра алгебри L^0, $[F^0, F^1] \subset F^1$, $[F^1, F^1] \subset F^0$. Отже, задача класифікації градуйованих підалгебр супералгебри L зводиться до класифікації підалгебр F^0 алгебри L^0, знаходження підпросторів F^1 простору L^1, інваріантних відносно F^0, і перевірки умови $[F^1, F^1] \subset F^0$. Структуру супералгебри L будемо досліджувати відносно G-спряженості, де G – група внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі L^0. Стосовно супералгебри $Osp(2, n)$ такою групою G буде група $O(n) \times Sl(2, \mathbb{R})$.

Нехай

$$\begin{aligned}
&W[k, l] = \langle P_a \mid a = k, \ldots, l\rangle, \quad V[k, l] = \langle G_a \mid a = k, \ldots, l\rangle,\\
&X_{ab} = J_{2a-1,2b-1} + J_{2a,2b}, \quad Y_{ab} = J_{2a-1,2b} + J_{2a,2b-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&X[k, l] = \langle X_{ab} \mid a = k, \ldots, l\rangle, \quad Y[k, l] = \langle Y_{ab} \mid a = k, \ldots, l\rangle,\\
&J[k, l] = \langle J_{ab} \mid a = k, \ldots, l\rangle,\\
&L_a = \langle G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2a} - P_{2a-1}\rangle, \quad L[k, l] = \sum_{i=k}^{l} L_i,\\
&(\lambda(S + T) + J)[k, l] = \langle \lambda(S + T) + J_{2a-1,2a} \mid a = k, \ldots, l\rangle.
\end{aligned}$$

Теорема. *З точністю до $O(n) \times Sl(2, \mathbb{R})$-спряженості градуйовані підалгебри супералгебри $Osp(2, n)$ визначаються такими супералгебрами:*

$$\begin{aligned}
&A; \quad AO(k) \oplus ASl(2, R) + W[1, k] + V[1, k] + C_{k+1};\\
&B + \langle T\rangle + W[1, k]; \quad \langle J_{12} + S + T, G_1 + P_2\rangle \oplus C_3;\\
&\langle S + T\rangle + J[1, k] + X[1, k] + Y[1, k] + L[1, k] + C_{2k+1};\\
&(S + T + J)[1, k] + X[1, k] + Y[1, k] + L[1, k] + C_{2k+1},
\end{aligned}$$

де A – підалгебра алгебри $AO(n) \oplus ASl(2, \mathbb{R})$, B – підалгебра алгебри $AO(k) \oplus AO[k + 1, n] \oplus \langle D\rangle$, C_i – підалгебра алгебри $AO[i, n]$.

Доведення. Нехай $F = F^0 + F^1$ – градуйована підалгебра супералгебри $Osp(2, n)$, F^0 – її парна частина, F^1 – непарна частина.

Якщо $F^1 = 0$, то F є підалгеброю алгебри $AO(n) \oplus ASl(2, R)$. Нехай $F^1 \neq 0$, тоді з точністю до спряженості можливі випадки [4]:

$$1)\ P_1 \in F^1; \quad 2)\ G_1 + P_2 \in F^1.$$

Випадок 1. $P_1 \in F^1$, тому $-P_1^2 = T \in F^0$, а тому $F^1 = W[1, k] + I(V[1, k] + W[k + 1, l])$, де $I(A, B)$ – підпряма сума просторів A та B [4]. Отже, або $F^1 = W[1, k]$, або F^1 містить елемент вигляду $G_1 + \sum_{i=k+1}^{l} a_iP_i$. Але в останньому випадкові $[G_1 + \sum_{i=k+1}^{l} a_iP_i, P_1]_+ = D \in F^0$, тому $\langle T, D\rangle$ – підалгебра F^0, а $F^1 = W[1, k] + V[1, k]$ [4]. Маємо $G_1 \in F^1$, отже $S = -G_1^2 \in F^0$, $J_{ab} = -[G_a, P_b]_+ \in F^0$ для всіх $a, b = 1, \ldots, k$. Звідси випливає, що $F^0 = AO(k) \oplus ASl(2, R) \oplus C_{k+1}$.

Випадок 2. $G_1 + P_2 \in F^1$, тому $-(G_1 + P_2)^2 = J_{12} + S + T \in F^0$. Тоді F^1 збігається з одним із просторів $R = \langle G_1 + P_2\rangle + \langle G_3 + \lambda_1P_4, G_4 + \lambda_1^{-1}P_3\rangle + \cdots + \langle G_{2k-1} + \lambda_{k-1}P_{2k}, G_{2k} + \lambda_{k-1}^{-1}P_{2k-1}\rangle$ або $R + \langle G_2 - P_1\rangle$, де $0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{k-1} \leq 1$ [4].

Якщо $\dim F^1 = 1$, то маємо супералгебру $\langle J_{12} + S + T, G_1 + P_2\rangle$. Нехай $\dim F^1 > 1$, тоді або $F^1 = \langle G_1 + P_2, G_2 - P_1\rangle$, або оператори $G_3 + \lambda_1P_4$ та $G_4 + \lambda_1^{-1}P_3$ належать F^1. В останньому випадкові

$[G_3 + +\lambda_1 P_4, G_4 + \lambda_1^{-1} P_3]_+ = (\lambda_1 - \lambda_1^{-1}) D \in F^0$. Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_1^{-1}$, то $D \in F^0$, але тоді $ASl(2,R)$ виключається в F^0 і все зводиться до випадку 1. Отже, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k-1} = 1$ і тому $R = \langle G_1 + P_2 \rangle + L[2,k]$. Але внаслідок співвідношень $-(G_3+P_4)^2 = J_{34} + S + T$, $[J_{34} + S + T, G_1 + P_2] = G_2 - P_1$ випливає, що $F^1 = R + \langle G_2 - P_1 \rangle = L[1,k]$. Залишається скористатися рівностями: $X_{ab} = -[G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2b-1} + P_{2b}]_+$, $Y_{ab} = -[G_{2a-1} + P_{2a}, G_{2b} + P_{2b-1}]_+$, $J_{2a-1,2a} + S + T = -(G_{2a-1} + P_{2a})^2$, і тому $(S+T+J)[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k]$ міститься в F. Легко перевірити, що одержана структура є супералгеброю. Єдиним її нетривіальним розширенням є супералгебра $\langle S+T \rangle + J[1,k] + X[1,k] + Y[1,k] + L[1,k]$. Відсутність інших розширень цих супералгебр випливає з того, що включення в алгебру інших елементів з $AO(2k)$ призводить до випадку $F^0 = AO(2k) \oplus \langle S+T \rangle$, але простір $L[1,k]$ не є інваріантним відносно $AO(2k)$. Теорема доведена.

4. Реалізації ортогонально-симплектичної супералгебри. Нехай $L = L^0 + L^1$ – деяка супералгебра, $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ – базис парної частини L^0, $\langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ – базис непарної частини L^1. Будемо шукати реалізації L вигляду $X_i = \xi_i^p \partial_{x_p}$, $Y_j = f_j^g \partial_{x_g}$, де $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; $p, g = 1, \ldots, k$, причому $\xi_i^p = \xi_i^p(x_1, \ldots, x_k)$ – скалярні функції, $\dot{f}_j = f_j^g(x_1, \ldots, x_k)$ – матричні функції дійсної змінної. Дві реалізації $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle + \langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle$ та $\langle X_1', \ldots, X_n' \rangle + \langle Y_1', \ldots, Y_m' \rangle$ супералгебри L будемо називати еквівалентними, якщо існує невироджена заміна змінних $x_p' = h_p(x)$, $p = 1, \ldots, k$, яка одну реалізацію переводить в іншу з точністю до подібності матричних коефіцієнтів.

Нехай $Osp(2,1) = F^0 + F^1$ – ортогонально-симплектина супералгебра, $F^0 = \langle T, D, S \rangle$, $F^1 = \langle P, G \rangle$, причому

$$
\begin{aligned}
&[D,S] = 2S, \quad [D,T] = -2T, \quad [T,S] = D, \quad [D,P] = -P,\\
&[D,G] = G, \quad [S,P] = G, \quad [S,G] = 0, \quad [T,P] = 0,\\
&[T,G] = -P, \quad [G,P]_+ = D, \quad P^2 = -T, \quad G^2 = -S. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Будемо шукати реалізації супералгебри $Osp(2,1)$ в класі операторів вигляду:

$\alpha\partial_t + \beta\partial_x$ – для парних елементів супералгебри,

$a\partial_t + b\partial_x + c$ – для непарних елементів супералгебри,

де α, β – скалярні; a, b, c – матричні функції від t, x.

Існує чотири нееквівалентні реалізації алгебри $ASl(2,R) = \langle D, T, S \rangle$ у класі вказаних операторів [5]:

1) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t, \quad S = t^2\partial_t;$

2) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x;$

3) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = (t^2 + x^4)\partial_t + tx\partial_x;$

4) $T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = (t^2 - x^4)\partial_t + tx\partial_x.$

Відзначимо, що для всіх реалізацій $T = \partial_t$, тому з умови $[T,P] = 0$ випливає, що $P = a\partial_t + b\partial_x + c$, де a, b, c – матричні функції лише від x.

Розглянемо реалізацію 1 алгебри $ASl(2,\mathbb{R})$. З комутаційних співвідношень маємо, що $P = [P,D]$, тобто $a\partial_t + b\partial_x + c = 2a\partial_t$, звідси, $a = b = c = 0$, $P = 0$, що неможливо. Отже, відповідної реалізації супералгебри не існує.

Інші реалізації алгебри $ASl(2,\mathbb{R})$ об'єднаємо за формулою $S = (t^2 + \varepsilon x^4)\partial_t + x\partial_x$, де $\varepsilon = 0, \pm 1$. З умови $P = [P,D]$ випливає, що $P = xA\partial_t + B\partial_x + \frac{1}{x}C$, де A, B, C – сталі матриці. Але $T = -P^2$, тому матимемо систему рівнянь для визначення матриць A, B, C:

$$
\begin{aligned}
&A^2 = B^2 = [A,B]_+ = [B,C]_+ = O, \quad C^2 = BC,\\
&BA + [A,C]_+ = -E, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

де O – нульова матриця, E – одинична матриця.

$G = [S,P]$, тому $G = -(txA + 4\varepsilon x^3 B)\partial_t - (x^2 A + tB)\partial_x - \frac{t}{x}C$. Але тоді, враховуючи співвідношення (2) між матрицями A, B, C, одержимо $G^2 = -(t^2 + 8\varepsilon x^4 BA)\partial_t + tx\partial_x + 4\varepsilon x^2 BC$. З іншого боку $G^2 = -S = -(t^2 + \varepsilon x^4)\partial_t - tx\partial_x$. Прирівнюючи відповідні коефіцієнти, маємо систему рівнянь

$$8\varepsilon BA = \varepsilon E, \quad 4\varepsilon BC = 0.$$

Якщо $\varepsilon = \pm 1$, то $BA = \frac{1}{8}E$, $BC = 0$. Але $[A,B]_+ = 0$, отже, $AB = -\frac{1}{8}E$. Маємо одночасно $B = \frac{1}{8}A^{-1}$ і $B = -\frac{1}{8}A^{-1}$, що неможливо. Реалізацій $OSp(2,1)$ в цих випадках не існує.

Залишається проаналізувати випадок $\varepsilon = 0$. Безпосередні обчислення свідчать, що оператори

$$
\begin{aligned}
&T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x,\\
&P = xA\partial_t + B\partial_x + \frac{1}{x}C, \quad G = -txA - (x^2 A + tB)\partial_x - \frac{t}{x}C,
\end{aligned}
$$

де A, B, C – сталі матриці, які визначаються умовами (2), задовольняють співвідношенням (1), тобто реалізують супералгебру $Osp(2,1)$.

Знайдемо розв'язок системи (2) у випадку, коли A, B, C – матриці порядку 2. З умови $A^2 = 0$ випливає, що з точністю до подібності $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($A \neq 0$, так як $BA + [A, C]_+ \neq 0$).

Але тоді з рівності $B^2 = [A, B]_+ = 0$ легко одержати, що $B = \lambda A$, де $\lambda \in \mathbb{R}$. Якщо $\lambda \neq 0$, то $-E = BA + [A, C]_+ = \lambda A^2 + \frac{1}{\lambda}[B, C]_+ = 0$, тому $\lambda = 0$, $B = 0$. Матрицю C знаходимо з системи рівнянь $C^2 = 0$, $[A, C]_+ = -E$, загальним розв'язком якої є $C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Але ця сукупність матриць подібна до такої:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(достатньо розглянути перетворення $\widetilde{X} = VXV^{-1}$, де $V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Отже, маємо єдину (з точністю до еквівалентності) реалізацію супералгебри $Osp(2, 1)$ у класі вказаних операторів

$$T = \partial_t, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x, \quad S = t^2\partial_t + tx\partial_x,$$
$$P = \begin{pmatrix} 0 & x\partial_t \\ -\frac{1}{x} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -tx\partial_t - x^2\partial_x \\ \frac{t}{x} & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Lie S., Engel F. Theorie der Transformations Gruppen. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd. 1–3.

[2] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. – 1975. – **16**. – P. 1597–1624.

[3] Березин Ф.А. Введение в алгебру и анализ с антикомутирующими переменными. – Москва: Изд-во МГУ, 1983. – 208 с.

[4] Фущиц В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгруповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.

[5] Жданов Р.З., Лагно В.И. О новых реализациях групп Пуанкаре $P(1, 2)$ и $P(2, 2)$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 447–462.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 217–224

УДК 517.9:519.46

Редукція та розв'язки одного класу систем нелінійних рівнянь реакції-дифузії зі степеневими нелінійностями

Л.П. МИРОНЮК [†], ***Р.М. ЧЕРНІГА*** [‡]

[†] *Волинський державний університет імені Лесі Українки, Луцьк*

[‡] *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: cherniha@imath.kiev.ua

Проведено неліївську редукцію та знайдено точні розв'язки класу нелінійних систем рівнянь реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії та взаємодії. Зокрема, у явному вигляді отримано вибухаючі розв'язки для окремих систем такого вигляду.

Non-Lie reduction and exact solutions of a class of nonlinear reaction-diffusion systems with power coefficients of diffusivity and interaction are obtained. In the particular case, the blow up solutions for some systems are constructed.

1. Вступ. В цій роботі розглядаються нелінійні системи рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= (U^{\alpha_1}U_x)_x + U(a_1 + b_1 U^{\alpha_1}) + c_1 U V^{\alpha_2}, \\ V_t &= (V^{\alpha_2}V_x)_x + V(a_2 + b_2 V^{\alpha_2}) + c_2 V U^{\alpha_1}, \end{aligned} \qquad (1)$$

де α_k, a_k, b_k, c_k, $k = 1, 2$ – довільні сталі, $U = U(t, x)$, $V = V(t, x)$ – шукані функції. У випадку $\alpha_k = 1$, $k = 1, 2$, ця система набуває вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= (UU_x)_x + U(a_1 + b_1 U) + c_1 UV, \\ V_t &= (VV_x)_x + V(a_2 + b_2 V) + c_2 VU. \end{aligned} \qquad (2)$$

Система (2) є природнім узагальненням дифузивної системи Лотки–Вольтера на випадок змінних коефіцієнтів дифузії. Зокрема, у випадку $V \equiv 0$ система (2) набуває вигляду так званого пористого рівняння Фішера, яке вивчалося в багатьох роботах (див., наприклад, [1]). Як відомо, класична дифузійна система Лотки–Вольтера (тобто (2) зі сталими коефіцієнтами дифузії) була запропонована для опису взаємодії двох біологічних видів, зокрема, в залежності від знаків коефіцієнтів, вона є моделлю "хижак U – жертва V" або моделлю змагання чи симбіозу двох видів. Проте давно встановлено, що вона недостатньо точно описує ці процеси і має суттєві недоліки (див. детальніше [1, п. 3.1]), тому на теперішній час вивчаються різноманітні узагальнення цієї системи (див., наприклад, [2] та цитовану там літературу). Як одне з таких узагальнень може розглядатися і система (1).

Робота побудована таким чином. В пункті 2 система (1) зі степеневими нелінійностями заміною залежних змінних зводиться до системи з квадратичними нелінійностями. Отримана система методом додаткових породжуючих умов редукована до систем звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). В пункті 3 знайдено окремі випадки, для яких побудовані розв'язки отриманих систем ЗДР в термінах елементарних функцій. Для цих випадків отримано в явному вигляді точні розв'язки відповідних систем реакції-дифузії.

2. Редукція системи. Застосовуючи заміну $U = u^{\frac{1}{\alpha_1}}$, $V = v^{\frac{1}{\alpha_2}}$ (див. [2]), зведемо систему (1) до вигляду:

$$\begin{aligned} u_t &= uu_{xx} + \tfrac{1}{\alpha_1}u_x^2 + \alpha_1(a_1 u + b_1 u^2) + \alpha_1 c_1 uv, \\ v_t &= vv_{xx} + \tfrac{1}{\alpha_2}v_x^2 + \alpha_2(a_2 v + b_2 v^2) + \alpha_2 c_2 uv. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки (3) містить лише квадратичні нелінійності, то використовуємо підхід, запропонований в [3]. Як додаткову породжуючу умову виберемо систему лінійних ЗДР третього порядку

$$\begin{aligned} \beta_1(t)\frac{du}{dx} + \beta_2(t)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^3u}{dx^3} = 0, \\ \beta_1(t)\frac{dv}{dx} + \beta_2(t)\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^3v}{dx^3} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – довільні гладкі функції, а змінна t розглядається як параметр. З теорії ЗДР відомо, що в залежності від $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ розв'язки системи (4) можуть мати один з таких виглядів:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)x^2, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2(t)x^2, \end{aligned} \tag{5}$$

якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)x + \varphi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)x + \psi_2 e^{\gamma(t)x}, \end{aligned} \tag{6}$$

якщо $\beta_1 = 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \varphi_2(t)e^{\gamma_2(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma_1(t)x} + \psi_2 e^{\gamma_2(t)x}, \end{aligned} \tag{7}$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{D} - \beta_2)$, $D = \beta_2^2 - 4\beta_1 > 0$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}\left(\varphi_1(t)\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x + \varphi_2(t)\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right), \\ v &= \psi_0(t) + e^{-\frac{\beta_2 x}{2}}\left(\psi_1(t)\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x + \psi_2(t)\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x\right), \end{aligned} \tag{8}$$

якщо $D < 0$;

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\varphi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \\ v &= \psi_0(t) + \psi_1(t)e^{\gamma(t)x} + x\psi_2(t)e^{\gamma(t)x}, \end{aligned} \tag{9}$$

якщо $D = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$.

В формулах (5)–(9) $\varphi_i(t)$, $\psi i(t)$, $i = 0, 1, 2$ є новими невідомими функціями. Виявляється, що анзаци (5)–(9) редукують (3)до систем ЗДР для функцій $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ лише при певних додаткових умовах на коефіцієнти (3).

Розгляньмо це детально на прикладі анзацу (5). Знайшовши u_t, u_x та u_{xx} і підставивши в (3), одержимо такі вирази:

$$\begin{aligned} &\dot\varphi_0(t) + \dot\varphi_1(t)x + \dot\varphi_2(t)x^2 = 2\varphi_0\varphi_1 + \tfrac{1}{\alpha_1}\varphi_1^2 + \alpha_1 a_1\varphi_0 + \alpha_1 b_1\varphi_0^2 + \\ &\quad + \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_0 + (2\varphi_1\varphi_2 + \tfrac{4}{\alpha_1}\varphi_1\varphi_2 + \alpha_1 a_1\varphi_1 + 2\alpha_1 b_1\varphi_0\varphi_1 + \\ &\quad + \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_1 + \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_0)x + (2\varphi_2^2 + \tfrac{4}{\alpha_1}\varphi_2^2 + \alpha_1 a_1\varphi_2 + \\ &\quad + \alpha_1 b_1\varphi_1^2 + 2\alpha_1 b_1\varphi_0\varphi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_0\psi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_0 + \\ &\quad + \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_1)x^2 + (2\alpha_1 b_1\varphi_1\varphi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_1\psi_2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_1)x^3 + \\ &\quad + (\alpha_1 b_1\varphi_2^2 + \alpha_1 c_1\varphi_2\psi_2)x^4, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\dot\psi_0(t) + \dot\psi_1(t)x + \dot\psi_2(t)x^2 = 2\psi_0\psi_1 + \tfrac{1}{\alpha_2}\psi_1^2 + \alpha_2 a_2\psi_0 + \alpha_2 b_2\psi_0^2 +$$

$$+ \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_0 + (2\psi_1\psi_2 + \tfrac{4}{\alpha_2}\psi_1\psi_2 + \alpha_2 a_2 \psi_1 + 2\alpha_2 b_2 \psi_0 \psi_1 + \\ + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_1 + \alpha_2 c_2 \varphi_1 \psi_0)x + (2\psi_2^2 + \tfrac{4}{\alpha_2}\psi_2^2 + \alpha_2 a_2 \psi_2 + \\ + \alpha_2 b_2 \psi_1^2 + 2\alpha_2 b_2 \psi_0 \psi_2 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_2 + \alpha_2 c_2 \varphi_2 \psi_0 + \\ + \alpha_2 c_2 \varphi_1 \psi_1)x^2 + (2\alpha_2 b_2 \psi_1 \psi_2 + \alpha_2 c_2 \varphi_1 \psi_2 + \alpha_2 c_2 \varphi_2 \psi_1)x^3 + \\ + (\alpha_2 b_2 \psi_2^2 + \alpha_2 c_2 \varphi_2 \psi_2)x^4. \quad (11)$$

Розчеплення виразів (10)–(11) за степенями x веде до 10 ЗДР та алгебраїчних рівнянь для функцій $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i = 0, 1, 2$. Аналіз показує, що ця система рівнянь є сумісною лише у випадку таких співвідношень між коефіцієнтами системи (3):

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2, \quad \alpha_1 c_1 = \alpha_2 b_2, \quad \alpha_2 c_2 = \alpha_1 b_1, \\ 1 + \tfrac{2}{\alpha_1} = \big(1 + \tfrac{2}{\alpha_2}\big)\big(-\tfrac{b_1}{c_1}\big). \quad (12)$$

Враховуючи ці співвідношення, для знаходження функцій φ_0, ψ_0, φ_1 отримуємо систему ЗДР:

$$\dot\varphi_0 = 2C_0\varphi_0\varphi_1 + \tfrac{1}{\alpha_1}\varphi_1^2 + \alpha_1 a_1 \varphi_0 + \alpha_1 b_1 \varphi_0^2 + \alpha_2 b_2 \varphi_0 \psi_0, \\ \dot\psi_0 = -2C_0\tfrac{b_1}{c_1}\psi_0\varphi_1 + \tfrac{1}{\alpha_2}\big(\tfrac{b_1}{c_1}\big)^2\varphi_1^2 + \alpha_1 a_1 \psi_0 + \alpha_2 b_2 \psi_0^2 + \alpha_1 b_1 \varphi_0 \psi_0, \\ \dot\varphi_1 = 2\big(1 + \tfrac{1}{\alpha_1}\big)\varphi_1\varphi_2 + \alpha_1 a_1 \varphi_1 + \alpha_2 b_2 \varphi_1 \psi_0 + \alpha_1 b_1 \varphi_0 \varphi_1, \quad (13)$$

а решту функцій знаходимо за формулами:

$$\varphi_2 = C_0\varphi_1, \quad \psi_1 = -\frac{b_1}{c_1}\varphi_1, \quad \psi_2 = -\frac{b_1}{c_1}C_0\varphi_1,$$

де C_0 – довільна стала.

Таким чином, маючи довільний розв'язок системи ЗДР (13), отримуємо розв'язок системи (1) з умовами (12) на коефіцієнти за формулами:

$$U = (\varphi_0 + \varphi_1 x + C_0\varphi_1 x^2)^{\frac{1}{\alpha_1}}, \\ V = \big(\psi_0 - \tfrac{b_1}{c_1}\varphi_1 x - \tfrac{b_1}{c_1}C_0\varphi_1 x^2\big)^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Провівши аналогічні викладки у випадку анзацу (7), отримуємо таку систему ЗДР для знаходження функцій φ_0, ψ_0, φ_1:

$$\dot\varphi_0 = \alpha_1 a_1 \varphi_0 + \alpha_1 b_1 \varphi_0^2 + \alpha_1 c_1 \varphi_0 \psi_0 - \tfrac{4}{\alpha_1}\gamma^2 C_0 \varphi_1^2,$$

$$\dot\psi_0 = \alpha_1 a_1 \psi_0 + \alpha_2 b_2 \psi_0^2 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_0 - \tfrac{4}{\alpha_2}\gamma^2\kappa^2 C_0 \varphi_1^2, \\ \dot\varphi_1 = \alpha_1 a_1 \varphi_1 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \varphi_1 + \alpha_1 c_1 \varphi_1 \psi_0, \quad (14)$$

а для знаходження решти функцій отримуємо співвідношення:

$$\varphi_2 = C_0\varphi_1, \quad \psi_1 = \kappa\varphi_1, \quad \psi_2 = \kappa C_0 \varphi_1,$$

де $C_0 = \mathrm{const}$. Таку редукцію можна здійснити лише у випадку, коли коефіцієнти (3) задовольняють умови:

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2, \quad \gamma^2 = \alpha_1(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2) = \alpha_2(\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1) > 0, \\ \kappa = -\frac{\alpha_1(\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2) + 2\alpha_1 b_1 - \alpha_2 c_2}{\alpha_1 c_1} = \\ = -\frac{\alpha_2 c_2}{\alpha_2(\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1) + 2\alpha_2 b_2 - \alpha_1 c_1}. \quad (15)$$

Отже, довільний розв'язок системи (14) (з умовами (15) на коефіцієнти) породжує розв'язок системи (1) такого вигляду:

$$U = (\varphi_0 + \varphi_1 e^{\gamma x} + C_0\varphi_1 e^{-\gamma x})^{\frac{1}{\alpha_1}}, \\ V = (\psi_0 + \kappa\varphi_1 e^{\gamma x} + \kappa C_0 \varphi_1 e^{-\gamma x})^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Врешті-решт, у випадку використання анзацу (8), отримуємо таку систему ЗДР для функцій φ_0, ψ_0, φ_1:

$$\dot\varphi_0 = \alpha_1 a_1 \varphi_0 + \alpha_1 b_1 \varphi_0^2 + \alpha_1 c_1 \varphi_0 \psi_0 + \tfrac{1}{\alpha_1}\gamma^2 \varphi_1^2 (1 + C_0^2), \\ \dot\psi_0 = \alpha_1 a_1 \psi_0 + \alpha_2 b_2 \psi_0^2 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \psi_0 + \tfrac{1}{\alpha_2}\gamma^2\kappa^2 \varphi_1^2 (1 + C_0^2), \\ \dot\varphi_1 = \alpha_1 a_1 \varphi_1 + \alpha_2 c_2 \varphi_0 \varphi_1 + \alpha_1 c_1 \varphi_1 \psi_0, \quad (16)$$

а решта функцій визначаються за формулами:

$$\varphi_2 = C_0\varphi_1, \quad \psi_1 = \kappa\varphi_1, \quad \psi_2 = \kappa C_0 \varphi_1,$$

причому таку редукцію можна здійснити лише у випадку, коли коефіцієнти (3) задовольняють умови:

$$\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2, \quad \gamma^2 = \alpha_1(\alpha_2 c_2 - \alpha_1 b_1) = \alpha_2(\alpha_1 c_1 - \alpha_2 b_2) > 0, \\ \kappa = -\frac{2\alpha_1 b_1 - \alpha_1(\alpha_2 c_2 - \alpha_1 b_1) - \alpha_2 c_2}{\alpha_1 c_1} =$$

$$= -\frac{\alpha_2 c_2}{2\alpha_2 b_2 - \alpha_2(\alpha_1 c_1 - \alpha_2 b_2) - \alpha_1 c_1}, \quad (17)$$

Отже, довільний розв'язок системи (16) породжує розв'язок системи (1)(з умовами (17) на коефіцієнти) вигляду:

$$U = (\varphi_0 + \varphi_1\cos(\gamma x) + C_0\varphi_1\sin(\gamma x))^{\frac{1}{\alpha_1}},$$
$$V = (\psi_0 + \kappa\varphi_1\cos(\gamma x) + \kappa C_0\varphi_1\sin(\gamma x))^{\frac{1}{\alpha_2}}.$$

Нами також встановлено, що за допомогою анзаців (6) і (9) можливо провести редукцію системи (3) до систем ЗДР лише у випадку, коли вони стають частинними випадками відповідно анзаців (5) і (7).

3. Точні розв'язки. Отримані системи ЗДР (13), (14), (16) є нелінійними і жодна з них в загальному вигляді не інтегрується в термінах елементарних функцій. Проте нам вдалося знайти випадки, коли можна знайти їх частинні розв'язки. Зокрема для системи (14) при $C_0 = 0$ можна побудувати її частинні розв'язки, наклавши деякі додаткові умови на коефіцієнти.

I. Нехай $a_2 = -a_1$, $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = b$, $\alpha_1 = \pm\sqrt{2}$, $\alpha_2 = \mp\sqrt{2}$, $\kappa = -(2\pm\sqrt{2}+3)$. При цих умовах отримуємо розв'язки системи (14) вигляду

$$\varphi_0 = C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t}, \quad \psi_0 = -C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t},$$
$$\varphi_1 = C_2 \exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \tfrac{2bC_1}{a_1} e^{\pm\sqrt{2}a_1 t}\right).$$

У підсумку отримуємо відповідні розв'язки

$$U^{\pm\sqrt{2}} = u = C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} + \\ + C_2\exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \tfrac{2bC_1}{a_1}e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} \pm \sqrt{2b} \pm \sqrt{2}x\right),$$
$$V^{\mp\sqrt{2}} = v = -C_1 e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} + \quad (18)$$
$$+ \kappa C_2 \exp\left(\pm\sqrt{2}a_1 t - \frac{2bC_1}{a_1} e^{\pm\sqrt{2}a_1 t} \pm \sqrt{2b} \pm \sqrt{2}_1 x\right),$$

де $C_1 \geq 0$, C_2 – довільні сталі, системи

$$U_t = (U^{\pm\sqrt{2}}U_x)_x + U(a_1 + bU^{\pm\sqrt{2}}) + bUV^{\mp\sqrt{2}},$$
$$V_t = (V^{\mp\sqrt{2}}V_x)_x + V(-a_1 + bV^{\mp\sqrt{2}}) + bVU^{\pm\sqrt{2}}.$$

II. Нехай $a_2 = -a_1(\alpha_1+1) \neq 0$, $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = c$ та $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$. Тоді розв'язками системи (14) є

$$\varphi_0 = (1+\alpha_1)a_1 e^{\alpha_1 a_1 t}A(t), \quad \psi_0 = -a_1 e^{\alpha_1 a_1 t}A(t),$$
$$\varphi_1 = C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t}A^2(t),$$

де $A(t) = (ce^{\alpha_1 a_1 t} + C_1 a_1(1+\alpha_1))^{-1}$ і C_1, C_2 – довільні сталі.

У підсумку отримуємо відповідні розв'язки

$$U^{\alpha_1} = u = (1+\alpha_1)a_1 e^{\alpha_1 a_1 t}A(t) + C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t}A^2(t)e^{\pm\sqrt{\frac{c}{1+\alpha_1}}\alpha_1 x},$$
$$V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} = v = -a_1 e^{\alpha_1 a_1 t}A(t) - C_2 c^2 e^{\alpha_1 a_1 t}A^2(t)e^{\pm\sqrt{\frac{c}{1+\alpha_1}}\alpha_1 x} \quad (19)$$

системи

$$U_t = (U^{\alpha_1}U_x)_x + a_1 U + cUV^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}},$$
$$V_t = (V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}}V_x)_x - (\alpha_1+1)a_1 V + cVU^{\alpha_1}.$$

III. Нехай $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = c$ та $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}$. Розв'язками системи (14) є

$$\varphi_0 = \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 c(t-t_0)}, \quad \psi_0 = -\frac{1}{\alpha_1 c(t-t_0)}, \quad \varphi_1 = \frac{C_1}{(t-t_0)^2}.$$

Отже, розв'язками системи

$$U_t = (U^{\alpha_1}U_x)_x + cUV^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}},$$
$$V_t = (V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}}V_x)_x + cVU^{\alpha_1},$$

є функції

$$U^{\alpha_1} = u = \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 c(t-t_0)} + \frac{C_1}{(t-t_0)^2}e^{\pm\sqrt{\frac{c}{\alpha_1+1}}\alpha_1 x},$$
$$V^{-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+1}} = v = -\frac{1}{\alpha_1 c(t-t_0)} + \frac{C_1}{(t-t_0)^2}e^{\pm\sqrt{\frac{c}{\alpha_1+1}}\alpha_1 x}. \quad (20)$$

Важливо відзначити, що розв'язки (19) (при $C_1 c a_1(1+\alpha_1) < 0$) та (20) є прикладами вибухаючих розв'язків спеціального типу – неодночасно вибухаючі (non-simultaneous blow-up), які порівняно недавно стали вивчатися (див. [4, 5]). Справді при $\alpha_1 > 0$ компонента U

в (19) і (20) перетворюється в нескінченність відповідно за скінченний проміжок часу $t = \frac{1}{\alpha_1 a_1} \ln|\frac{C_1 a_1(1+\alpha_1)}{c}|$ та $t = t_0$. Одночасно компонента V залишається обмеженою. Якщо ж $-1 < \alpha_1 < 0$, то за скінченний проміжок часу "вибухає" компонента V, а компонента U залишається обмеженою. Врешті-решт при $\alpha_1 < -1$ цей ефект неодночасного вибухання зникає, а U та V стають обмеженими для будь-якого скінченного моменту часу t.

[1] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[2] Cherniha R.M., King J.R. Nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities: Lie symmetries, ansätze and exact solutions // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 11–35.

[3] Cherniha R.M. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996. – **38**. – P. 301–312.

[4] Quiros F., Rossi J.D. Non-simultaneous blow-up in a semilinear parabolic system // Z. Angew. Math. Phys. – 2001. – **52**. – P. 342–346.

[5] Brändle C., Quiros F., Rossi J.D. The role of non-linear diffusion in non-simultaneous blow-up // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – **308**. – P. 92–104.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 225–230

УДК 517.9

Про щільність неінтегровних гамільтонових систем редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії

С.І. ПІДКУЙКО

Львівський національний університет імені Івана Франка
E-mail: s_pidkuyko@franko.lviv.ua

Розглядається клас гамільтонових систем редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії. Доведено, що неінтегровні гамільтонові системи в цьому класі утворюють всюди щільну підмножину.

The class of Hamiltonian systems of the reduced three-body problem with pairwise interaction is considered. It is proved that nonintegrable Hamiltonian systems in that class make up an everywhere dense subset.

Розглядається клас гамільтонових систем задачі трьох тіл (точок) на прямій з потенціалом попарної взаємодії, які описуються гамільтоніанами вигляду

$$H = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(x_1 - x_2) + V(x_2 - x_3) + W(x_1 - x_3), \quad (1)$$

де x_j, p_j $(j = 1, 2, 3)$ позначають, відповідно, координату та імпульс j-ої точки, а функції V, W – потенціали взаємодії, відповідно, між першою і другою та другою і третьою точками, і між першою та третьою точками даної гамільтонової системи. Взаємодія між першою та третьою точками, взагалі кажучи, може бути відмінною від взаємодії між першою і другою та другою і третьою точками.

Позначимо $\mathfrak{A}(x)$ сукупність всіх функцій f, аналітичних в точці $x \in \mathbb{R}$, що задовольняють умови:

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) > 0.$$

На потенціали V, W гамільтонової системи (1) накладемо такі умови:

$$V \in \mathfrak{A}(a), \quad W \in \mathfrak{A}(2a), \tag{2}$$

де $a \in \mathbb{R}$ деяка фіксована точка.

Тоді в кожній точці $(a_1, a_2, a_3, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^6$ (де $a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = a$) фазового простору нашої гамільтонової системи гамільтоніан (1) буде аналітичним і матиме локальний мінімум.

Канонічним перетворенням

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - x_2, & q_1 &= \tfrac{1}{3}(2p_1 - p_2 - p_3), \\ y_2 &= x_2 - x_3, & q_2 &= \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 - 2p_3), \\ y &= x_1 + x_2 + x_3, & q &= \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3), \end{aligned}$$

гамільтоніан гамільтонової системи (1) зводиться до вигляду

$$H = \tfrac{3}{2}q^2 + (q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2) + V(y_1) + V(y_2) + W(y_1 + y_2). \tag{3}$$

Гамільтонова система (вимірність фазового простору якої зменшилась з 6 до 4) з гамільтоніаном

$$K = q_1^2 - q_1 q_2 + q_2^2 + V(y_1) + V(y_2) + W(y_1 + y_2) \tag{4}$$

називається гамільтоновою системою редукованої задачі трьох тіл на прямій з потенціалом попарної взаємодії. Згідно з умовами, накладеними на функції V, W, гамільтоніан K є аналітичним в точці $(a, a, 0, 0)$ і має в цій точці локальний мінімум.

Оскільки гамільтоніан H не залежить від координати (повний імпульс є першим інтегралом гамільтонової системи (1)) y, то кожен перший інтеграл F гамільтонової системи (4), функціонально незалежний з K, буде першим інтегралом гамільтонової системи (3), до того ж, трійка (H, q, F) буде утворювати повний набір перших інтегралів гамільтонової системи (4) (тобто функції цього набору утворюють функціонально незалежну трійку перших інтегралів, які перебувають попарно в інволюції). Зокрема, звідси отримуємо, що з інтегровності за Ліувіллем гамільтонової системи (4) випливає інтегровність за Ліувіллем гамільтонової системи (3) (а отже й гамільтонової системи (1)).

В даній роботі доводиться аналог відомого результату Зігеля [1] (і його узагальнення, доведеного автором [6]) про щільність в класі гамільтонових систем (4) множини неінтегровних гамільтоніанів (з цього ж класу).

Надалі ми будемо розглядати гамільтонову систему редукованої задачі трьох тіл на прямій, початок координат конфігураційного простору якої перенесено в точку (a, a):

$$K = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V(a + x_1) + V(a + x_2) + W(2a + x_1 + x_2).$$

Гамільтоніан K є аналітичним в точці $(0, 0, 0, 0)$ і має в цій точці локальний мінімум.

Основний результат роботи сформульовано в теоремі:

Теорема 1. Нехай $\{\varepsilon_k\}$ довільна додатня послідовність, потенціали V, W задовольняють умови (2). Тоді знайдеться такий потенціал $\widetilde{V} \in \mathfrak{A}(a)$, що має властивості:

1) $|V^{(k)}(a) - \widetilde{V}^{(k)}(a)| < \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \ldots.$
2) будь-який аналітичний в точці $(0, 0, 0, 0)$ перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$\begin{aligned} \widetilde{K} = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + \widetilde{V}(a + x_1) + \widetilde{V}(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2), \end{aligned}$$

є функцією від $\widetilde{K}$.

Доведення цієї теореми спирається на кілька лем і використовує метод Зігеля побудови неінтегровного гамільтоніана.

Лема 1. Існує потенціал $V_1 \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

1) $|V_1''(a) - V''(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon_2, \quad V_1^{(k)}(a) = V^{(k)}(a), \quad k = 3, 4, \ldots.$
2) існує лінійне канонічне перетворення фазових змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) у фазові змінні (u_1, u_2, v_1, v_2), для якого квадратична частина гамільтоніана

$$\begin{aligned} K = p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + V_1(a + x_1) + V_1(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2), \end{aligned}$$

зводиться до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{11} u_1 v_1 + \lambda_{12} u_2 v_2,$$

де числа λ_{11}, λ_{12} чисто уявні і раціонально незалежні.

Згідно з процедурою побудови, запропонованої в [1], виберемо два цілих числа r, q, що задовольняють нерівності:

$$q > 1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + 2|\lambda_{12}|\varepsilon_2^{-1}, \quad \left|q\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} + r\right| < 1,$$

і побудуємо три послідовності $\{q_m\}$, $\{r_m\}$, $\{l_m\}$ $(m \in \mathbb{N})$, згідно з формулами

$$l_m = q_m + |r_m|, \quad r_m = q_m\left(\frac{r}{q} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{q_m}\right), \quad q_1 = q^2,$$

а q_{m+1} є мінімальним степенем q, що задовольняє нерівність

$$q_{m+1} > q_m^2 + 4|\lambda_{12}|\varepsilon_{l_m}^{-1} l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Покладемо

$$\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_{12}, \quad \widetilde{\lambda}_1 = \lambda_{12}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k} - \frac{r}{q}\right).$$

Тоді побудовані послідовності і числа $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$ мають такі властивості:

1) послідовність $\{q_m\}$ є строго зростаючою, $l_1 \geq 4$,
2) числа $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$ є чисто уявними і раціонально незалежними, до того ж, справедлива нерівність $|\widetilde{\lambda}_1 - \lambda_{11}| < \varepsilon_2$,
3) справедливі нерівності:

$$q_m|\widetilde{\lambda}_1 q_m + \widetilde{\lambda}_2 r_m|^{-1}\varepsilon_{l_m} > 2l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Лема 2. Існує потенціал $V_2 \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

1) $|V_2''(a) - V''(a)| < \varepsilon_2, \quad V_2^{(k)}(a) = V^{(k)}(a), \quad k = 3, 4, \ldots.$
2) існує лінійне канонічне перетворення фазових змінних (x_1, x_2, p_1, p_2) у фазові змінні (u_1, u_2, v_1, v_2), для якого квадратична частина гамільтоніана

$$K = p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + V_2(a + x_1) + V_2(a + x_2) + \\ + W(2a + x_1 + x_2),$$

зводиться до нормальної форми

$$E_2 = \lambda_{21}u_1v_1 + \lambda_{22}u_2v_2,$$

де коефіцієнти λ_{21}, λ_{22} чисто уявні і раціонально незалежні, до того ж, задовольняють такі умови

$$\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}} = \frac{\widetilde{\lambda}_1}{\widetilde{\lambda}_2}, \quad \left|\frac{\lambda_{22}}{\widetilde{\lambda}_2}\right| < 2.$$

Нехай E позначає гамільтоніан K, записаний у нових фазових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2). Гамільтоніан E задовільняє канонічні рівняння Гамільтона

$$\dot{u}_k = E_{v_k}, \quad \dot{v}_k = -E_{u_k}, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

В околі точки $(0, 0, 0, 0)$ його можна розкласти в ряд Тейлора

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n,$$

де E_n позначає однорідну степеня n частину E.

Відомо [1], що існує перший інтеграл s (який називається інтегралом Біркгофа і, зазвичай, є розбіжним степеневим рядом) гамільтонової системи (5),

$$s = u_1v_1 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n, \tag{6}$$

де розклад (6) не містить членів вигляду

$$c\prod_{k=1}^{n}(u_kv_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 2.$$

Нехай $\widetilde{E}$ позначає гамільтоніан

$$\widetilde{K} = p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + \widetilde{V}(a + x_1) + \widetilde{V}(a + x_2) + \tag{7}$$

$$+ W(2a + x_1 + x_2), \tag{8}$$

записаний у нових фазових змінних (u_1, u_2, v_1, v_2), $\widetilde{s}$ – відповідний інтеграл Біркгофа гамільтонової система з гамільтоніаном $\widetilde{E}$.

Лема 3. Існує потенціал $\widetilde{V} \in \mathfrak{A}(a)$ з такими властивостями:

$$\widetilde{V}^{(n)}(a) = V^{(n)}(a), \quad n \notin \{l_m \mid m \in \mathbb{N}\},$$
$$\widetilde{V}^{(l_m)}(a) = V^{(l_m)}(a) \pm \frac{1}{2}\varepsilon_{l_m}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

де знаки $(+)$ або $(-)$ в (9) можна вибрати так, що справедливі нерівності

$$\overline{|\widetilde{s}_{l_m}|} > \frac{1}{2} l_m^{ml_m}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

У формулюванні даної леми використовується таке позначення: для однорідного полінома G від кількох змінних через $\overline{|G|}$ позначається максимальна з абсолютних величин коефіцієнтів полінома G.

Зазначимо, що внаслідок умови (10) гамільтонова система з гамільтоніаном (7) не може мати незалежного з $\widetilde{E}$ першого інтеграла, аналітичного в околі $(0,0,0,0)$.

[1] Ziegel C.L. On the integrals of canonical systems // Ann. Math. – 1941. – (**2**) **42**. – P. 806–822.

[2] Ziegel C.L. Über die Existenz einer Normalform analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung // Math. Ann. – 1954. – **128**. – P. 144–170.

[3] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – Москва: Наука, 1974. – 472 с.

[4] Брюно А.Д. Нормальная форма системы, близкой к гамильтоновой // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 5. – С. 35–46.

[5] Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. – 1983. – **38**, № 1. – С. 3–67.

[6] Пидкуйко С.И. О плотности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Изв. Росс. Акад. Наук. – Сер. Матем. – 1992. – **56**. – С. 863–876.

[7] Пидкуйко С.И., О массивности множества неинтегрируемых гамильтонианов // Мат. сборник. – 1994. – **185**, № 12. – С. 101–122.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 231–238

УДК 517.912:512.816

No-go theorem on reduction operators of linear second-order parabolic equations

R.O. POPOVYCH

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
E-mail: rop@imath.kiev.ua

Доведено, що проблема опису всіх операторів редукції, тобто операторів некласичної (умовної) симетрії, довільного лінійного рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними еквівалентна в певному сенсі розв'язанню вихідного рівняння.

The problem on description of the reduction operators, i.e. the operators of nonclassical (conditional) symmetry, of an arbitrary second-order linear parabolic partial differential equation in two independent variables proves to be equivalent, in some sense, to solving the initial equation.

1. Introduction. The notion of nonclassical symmetry (called also Q-conditional or, simply, conditional symmetry) was introduced in [1] by the example of the one-dimensional linear heat equation and a partial class of operators. A precise and rigorous definition was suggested later (see e.g. [4,5,14]). In contrast to classical Lie symmetry, the system of determining equations on the coefficients of conditional symmetry operators of the heat equation was found to be nonlinear and less overdetermined. First this system was investigated in [12] in detail, where the system was partially linearized and its Lie symmetries were found. The problem on conditional symmetries of the heat equation was completely solved in [3]. Namely, in the both arising cases the maximal Lie invariance algebras of the determining equations were calculated and the determining equations were reduced to the initial equation with nonlocal transformations. Results of [3] were in [2,6,7] extended to a class of linear transfer equations which generalize the heat equation. Thus, for these equations the "no-go" theorems on reduction of determining equations for coefficients of conditional symmetry operators to the initial equations were proved in detail and wide multi-parametric families of exact solutions were constructed with non-Lie reductions. It was observed in [13] that the proof of the theorem from [3] on linearization of determining equations in case of conditional symmetry operators with vanishing coefficients of ∂_t are extended to the class of one-dimensional evolution equations. This theorem was also generalized to multi-dimensional evolution equations [8] and even systems of such equations [11].

In this paper we investigate the class of second-order linear parabolic partial differential equation in two independent variables, which have the general form

$$Lu = u_t - a^2(t,x)u_{xx} - a^1(t,x)u_x - a^0(t,x)u = 0, \tag{1}$$

where the coefficients a^i, $i = 1, 2, 3$, are (real or complex) analytic functions of t and x, $a^2 \neq 0$. The "no-go" theorems on reduction of determining equations for coefficients of conditional symmetry operators to the initial equations are proved for class (1). All possible reductions to ordinary differential equations are described.

Conditional invariance of a differential equation with respect to a vector field is equivalent to that any ansatz associated with the vector field reduces the equation to a differential equation with the lesser by 1 number of independent variables [14]. That is why, below we use the shorter and more natural term "reduction operator" instead of "operator of conditional symmetry" and say that an operator reduces a differential equation in case the equation is reduced by the associated ansatz.

2. Determining equations for reduction operators. Preliminary description of reduction operators of equations (1) is given by the following theorem.

Theorem 1. *Any reduction operator of equation* (1) *is equivalent to either an operator* $\partial_t + g^1(t,x)\partial_x + (g^2(t,x)u + g^3(t,x))\partial_u$ *with the coefficients* g^1, g^2 *and* g^3 *satisfying the system*

$$\begin{aligned} &\tilde{L}g^1 + Ha^1 + a^1_x g^1 + 2a^2 g^2_x + a^1_t = 0, \\ &\tilde{L}g^2 - Ha^0 - a^0_x g^1 - a^0_t = 0, \\ &\tilde{L}g^3 - a^0 g^3 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

where $\tilde{L} = \partial_t - a^2\partial_{xx} - a^1\partial_x + H$ *and* $H = 2g^1_x - (a^2_x g^1 + a^2_t)/a^2$, *or an operator* $\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$, *where the function* η *is a solution of the equation*

$$\begin{aligned} \eta_t = {}& a^2(\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu}) + a^2_x(\eta_x + \eta\eta_u) \\ &+ (a^1\eta)_x + a^0(\eta - u\eta_u) + a^0_x u. \end{aligned} \tag{3}$$

Proof. In the case of two independent variables t and x, reduction operators are written as $Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$, where $(\tau,\xi) \neq (0,0)$. The conditional invariance criterion for equation (1) and the operator Q has the form [4]

$$Q_{(2)}Lu \,\Big|_{\,Lu=0,\;\; Q[u]=0,\;\; D_tQ[u]=0,\;\; D_xQ[u]=0} = 0, \tag{4}$$

where $Q_{(2)}$ is the standard second prolongation of Q, $Q[u] = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ is its characteristic, D_t and D_x denote the total differentiation operators with respect to t and x. All equalities hold true as algebraic relations in the second-order jet space $J^{(2)}$ over the space of the independent variables (t,x) and the dependent variable u.

Since (1) is an evolution equation, there are two principally different cases of finding Q: $\tau \neq 0$ and $\tau = 0$.

If $\tau \neq 0$ we can assume $\tau = 1$ up to the usual equivalence of reduction operators. There is only one unconstrained variable in (4). We choose the derivative u_x as such variable and express the other derivatives being in $Q_{(2)}Lu$ via (t,x,u) and u_x on the constrained set of $J^{(2)}$:

$$u_t = \eta - \xi u_x, \quad u_{xx} = \frac{\eta - \xi u_x - a^1 u_x - a^0}{a^2}.$$

Splitting in the obtained equation with respect to u_x results in the determining equations for coefficients ξ and η which imply $\xi_u = 0$, $\eta_{uu} = 0$, i.e. $\xi = g^1(t,x)$, $\eta = g^2(t,x)u + g^3(t,x)$. Further splitting with respect to u leads to system (2).

The condition $\tau = 0$ gives $\xi \neq 0$ since $(\tau,\xi) \neq (0,0)$. Therefore, without loss of generality we can put $\xi = 1$ in view of the usual equivalence of reduction operators. All derivatives being in $Q_{(2)}Lu$ are expressed on the constrained set of $J^{(2)}$ via the variables (t,x,u):

$$u_x = \eta, \quad u_{xx} = \eta_x + \eta\eta_u, \quad u_t = a^2(\eta_x + \eta\eta_u) + a^1\eta + a^0 u.$$

After substituting these expressions to the equation $Q_{(2)}Lu = 0$, we obtain equation (3). □

Note 1. We can essentially simplify and order investigation of reduction operators, additionally taking into account Lie symmetry transformations in case of a single equation [9] and transformations from the equivalence group or the whole set of admissible transformations in case of a class of equations [10]. Up to the equivalence relation generated by the equivalence group of class (1) on the set of pairs "(an equation of form (1), its reduction operator)", it is enough to investigate only the subclass of equations (1) with $a_2 = 1$, $a_1 = 0$.

3. No-go theorems. There is a connection of system (2) and equation (3) with initial equation (1) via non-point transformations.

Theorem 2. *Nonlinear coupled system* (2) *is reduced by the transformation*

$$g^1 = -a^2\frac{v^1v^2_{xx} - v^1_{xx}v^2}{v^1v^2_x - v^1_xv^2} - a^1, \quad g^2 = -a^2\frac{v^1_xv^2_{xx} - v^1_{xx}v^2_x}{v^1v^2_x - v^1_xv^2} + a^0,$$
$$g^3 = \frac{a^2}{v^1v^2_x - v^1_xv^2}\begin{vmatrix} v^1 & v^1_x & v^1_{xx} \\ v^2 & v^2_x & v^2_{xx} \\ v^3 & v^3_x & v^3_{xx}\end{vmatrix} \tag{5}$$

to the uncouple linear system of three copies $v^i_t - a^2v^i_{xx} - a^1v^i_x - a^0v^i = 0$ *of equation* (1) *for the functions* $v^i = v^i(t,x)$, *and the functions* v^1 *and* v^2 *being linearly independent. Hereafter* $i = 1, 2, 3$.

Note 2. Let $W(\varphi^1,\dots,\varphi^n) = \det(\partial^{l-1}\varphi^k/\partial x^{l-1})^n_{k,l=1}$ be the Wronskian of the functions $\varphi^k = \varphi^k(t,x)$, $k = \overline{1,n}$, with respect to the variable x. Then transformation (5) can be rewritten as

$$g^1 = -a^2\frac{(W(v^1,v^2))_x}{W(v^1,v^2)} - a^1, \quad g^2 = -a^2\frac{W(v^1_x,v^2_x)}{W(v^1,v^2)} + a^0,$$
$$g^3 = a^2\frac{W(v^1,v^2,v^3)}{W(v^1,v^2)}.$$

Proof. For any tuple of functions $g^i = g^i(t,x)$ there exists functions v^i determined by (5). Really, relations (5) can be rewritten in the form

$$\widehat{Q}v^1 = 0, \quad \widehat{Q}v^2 = 0, \quad \widehat{Q}v^3 = g^3, \tag{6}$$

where $\widehat{Q} = \bar{Q} - L = a^2\partial_{xx} + (a^1+g^1)\partial_x + a^0 - g^2$. (Here $\bar{Q} = \partial_t + g^1\partial_x - g^2$ and $L = \partial_t - a^2(t,x)\partial_{xx} - a^1(t,x)\partial_x - a^0(t,x)$ are linear differential operators acting in the space of functions of (t,x). $\bar{Q}$ is associated with the operator Q and L is taken from equation (1).) System (6) with respect to v^i is a system of three uncoupled second-order linear ordinary differential equations with the independent variable x, and t being treated as a parameter. We can take any fundamental tuple of solutions of the equation $\widehat{Q}v = 0$ as (v^1,v^2) and any partial solution of the equation $\widehat{Q}v = g^3$ as v^3. The functions v^i are determined by (6) ambiguously, namely up to the transformations

$$\tilde{v}^p = \varphi^{pq}(t)v^q, \quad \tilde{v}^3 = v^3 + \psi^q(t)v^q \qquad \text{or}$$
$$v^p = \tilde{\varphi}^{pq}(t)\tilde{v}^q, \quad v^3 = \tilde{v}^3 + \tilde{\psi}^q(t)\tilde{v}^q,$$

where φ^{pq} and ψ^q are arbitrary functions of t, $|\varphi^{pq}| \neq 0$, $(\tilde{\varphi}^{pq}) = (\varphi^{pq})^{-1}$, $\tilde{\psi}^q = -\psi^p\tilde{\varphi}^{pq}$. Hereafter $p,q = 1,2$ and the summation over the repeated indices is implied.

Let (v^1,v^2,v^2) be a fixed solution of (6), where the parameter-functions $g^i = g^i(t,x)$ satisfy system (2). We will show that the functions φ^{pq} and ψ^q (or $\tilde{\varphi}^{pq}$ and $\tilde{\psi}^q$) can be chosen in such way that the functions $\tilde{v}^i = 0$ will satisfy equation (1), i.e. $L\tilde{v}^i = 0$.

The left parts of equations (2) can be rewritten with representation (5) as

$$R^1 = a^2\frac{v^2}{v^1}\bar{R}^1 + a^2\frac{v^1}{v^2}\bar{R}^2, \ \ R^2 = a^2\frac{v^2_x}{v^1}\bar{R}^1 + a^2\frac{v^1_x}{v^2}\bar{R}^2, \ \ R^3 = \widehat{Q}Lv^3,$$

where

$$\bar{R}^1 = \left(\frac{W(v^1,Lv^1)}{W(v^1,v^2)}\right)_x = \left(\frac{(Lv^1/v^1)_x}{(v^2/v^1)_x}\right)_x,$$
$$\bar{R}^2 = \left(\frac{W(v^2,Lv^2)}{W(v^2,v^1)}\right)_x = \left(\frac{(Lv^2/v^2)_x}{(v^1/v^2)_x}\right)_x.$$

Two first equations $R^1 = R^2 = 0$ of (2) is a linear system of algebraic equations with respect to the values $\bar{R}^1$ and $\bar{R}^2$ with the non-vanishing determinant $(a^2)^2W(v^1,v^2)/(v^1v^2)$. Therefore, its unique solution is $\bar{R}^1 = \bar{R}^2 = 0$. Integration the latter equations and the equation $R^3 = \widehat{Q}Lv^3 = 0$ with respect to x leads to the conclusion that $Lv^i = \zeta^{ip}(t)v^p$, where ζ^{ip} are functions of t. If the functions $\tilde{\varphi}^{pq}$ and $\tilde{\psi}^q$ being in the "ambiguity" transformations satisfy the system of ODEs $\tilde{\varphi}^{pq}_t = \zeta^{pq'}\tilde{\varphi}^{q'q}$, $\tilde{\psi}^q_t = \zeta^{3q'}\tilde{\varphi}^{q'q}$ then $L\tilde{v}^i = 0$.

And vice versa, if the functions $v^i = v^i(t,x)$ satisfy the equation $Lv = 0$, and the functions v^1 and v^2 being linearly independent, then the corresponding expressions R^1, R^2 and R^3 vanish identically. It means that the functions $g^i = g^i(t,x)$ determined by (5) give a solution of system (2). □

Theorem 3. *Nonlinear equations* (3) *is reduced by composition of the nonlocal substitution* $\eta = -\Phi_x/\Phi_u$*, where* Φ *is a function of* (t,x,u)*, and the hodograph transformation*

$$\begin{aligned} &\textit{the new independent variables:}\quad \tilde t = t,\quad \tilde x = x,\quad \varkappa = \Phi,\\ &\textit{the new dependent variable:}\quad \tilde u = u \end{aligned}\tag{7}$$

to the equation $L\tilde u = \tilde u_{\tilde t} - a^2(\tilde t,\tilde x)\tilde u_{\tilde x\tilde x} - a^1(\tilde t,\tilde x)\tilde u_{\tilde x} - a^0(\tilde t,\tilde x)\tilde u = 0$*, where* $\varkappa$ *plays the role of a parameter.*

We do not adduced the proof of theorem 3 since it has already proved for both some equations [3] or subclasses [6] from class (1) and much more general classes of evolution equations [8, 11, 13].

4. Ansatzes and solutions. Inverting of theorem 3 gives the following true statement [8, 11].

Theorem 4. *For any one-parametric family of solutions of equation* (1) *there exists an operator* $\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$ *which reduces equation* (1) *and with respect to which the family of solutions is invariant.*

An ansatz associated with the operator $\partial_x + \eta\partial_u$, where $\eta = -\Phi_x/\Phi_u$ and the function $\Phi = \Phi(t,x,u)$ is obtained from the one-parametric solution $u = f(t,x,\varkappa)$ of equation (1) with the inverse hodograph transformation to (7), has the form $u = f(t,x,\varphi(\omega))$, $\omega = t$. Here ω and φ are the new ("invariant") independent and dependent variables correspondingly. Substitution of the ansatz to equation (1) implies the reduced equation $\varphi_\omega = 0$, i.e. $\varphi = C = \text{const}$. As a result, we obtain the obvious one-parametric solution $u = f(t,x,C)$.

Theorems 3 and 4 can be united to the single statement.

Theorem 5. *For any equation of form* (1)*, there exists one-to-one correspondence between one-parametric families of its solutions and reduction operators with zero coefficients of* ∂_t*. Namely, each operator of such kind corresponds to the family of solutions which are invariant with respect to this operator. The problems of construction of all one-parametric families of solutions of equation* (1) *and complete description of its reduction operators with zero coefficients of* ∂_t *are completely equivalent.*

An ansatz associated with the operator $\partial_t + g^1\partial_x + (g^2u + g^3)\partial_u$, has the form $u = v^1\varphi(\omega) + v^3$, $\omega = v^2/v^1$. Here ω and φ again denote the new ("invariant") independent and dependent variables. The functions $v^i = v^i(t,x)$ are solutions of equation (1), which are connected with the reduction operator coefficients $g^i = g^i(t,x)$ via transformation (5), and v^1 and v^2 being linearly independent. Integration of the corresponding reduced equation $\varphi_{\omega\omega} = 0$ gives $\varphi = C_2\omega + C_1$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. After substituting the expression for φ to the ansatz, we obtain the two-parametric solution

$$u = C_1v^1 + C_2v^2 + v^3. \tag{8}$$

And vice versa, given a two-parametric solution of form (8), the coefficients g^1, g^2 and g^3 are unambiguously repaired by formula (5).

Supposed triviality of the above ansatzes and reduced equations is connected with usage of the special representations for the solutions of the determining equations. Under this approach difficulties in construction of ansatzes and integration of reduced equations are replaced by difficulties in obtaining of the representations for coefficients of reduction operators.

4. Conclusion. The "no-go" results of this paper can be extended with investigation of Lie symmetries and Lie reductions of determining equations (2) and (3). Indeed, the maximal Lie invariance algebras of (2) and (3) are isomorphic to the maximal Lie invariance algebras of equation (1). This result is well known for the linear heat equation [3].

Let us note also that the term "no-go" has to be treated only as impossibility of exhaustive solving of the problem. At the same time, imposing additional constraints on the coefficients, one can construct a number of particular examples of reduction operators and then apply them to finding exact solutions of the initial equation. Since the determining equation has more independent variables and, therefore, more freedom degrees, it is more convenient often to guess a simple solution or a simple ansatz for the determining equation, which can give a parametric set of complicated solutions of the initial equation. (It is similar to situation with Lie symmetries of first-order ordinary differential equations.) This approach was applied to interesting subclass of equations (1), which arises under symmetry reduction of the Navier–Stokes equations [2,6,7], and allowed to construct series of multi-parametric solutions.

The research of the author was supported by the Austrian Science Fund (FWF), Lise Meitner project M923-N13.

[1] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. of Math. and Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.

[2] Fushchych W.I., Popowych R.O. Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. I // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 75–113.

[3] Fushchych W. I., Shtelen W.M., Serov M.I., Popovych R.O. Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. – 1992. – N 12. – P. 28–33.

[4] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – P. L45–L48.

[5] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Conditional symmetry and reduction of partial differential equations // Ukr. Math. J. – 1992. – **44**, N 7. – P. 970–982.

[6] Popovych R.O. On the symmetry and exact solutions of a transport equation // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**. – P. 142–148.

[7] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, July 7–13, 1997). – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – **2**. – P. 437–443.

[8] Popovych R.O. On a class of Q-conditional symmetries and solutions of evolution equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 1998. – **19**. – P. 194–199 (in Ukrainian).

[9] Popovych R.O. Equivalence of Q-conditional symmetries under group of local transformation // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2000. – V.30, Part 1. – P. 184–189 (see math-ph/0208005).

[10] Popovych R.O., Vaneeva O.O., Ivanova N.M. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation // Phys. Lett. A, in press. – 8 p. (see math-ph/0506067).

[11] Vasilenko O.F., Popovych R.O. On class of reducing operators and solutions of evolution equations // Vestnik PGTU. – 1999. – **8**. – P. 269–273 (in Russian).

[12] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system // J. Phys. A: Math. Gen. – 1990. – **23**. – P. 3885–3894.

[13] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Phys. D. – 1998. – **122**. – P. 178–186.

[14] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**, N 1. – P. 101–123 (see math-ph/0207023).

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 239–254

УДК 517.912:512.816

Classification of admissible transformations of differential equations

R.O. POPOVYCH

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
E-mail: rop@imath.kiev.ua

Концепцію групової класифікації модифіковано і поширено до класифікації допустимих перетворень у класах диференціальних рівнянь. З цією метою переглянуто існуючі поняття групового аналізу. Описано недавно введені поняття (умовна група еквівалентності, нормалізований клас диференціальних рівнянь) та досліджено їх властивості.

The framework of group classification is modified and extended to classification of admissible transformations in classes of differential equations. For this purpose, existing notions of group analysis are revised. Recently introduced notions (conditional equivalence group, normalized class of differential equations) are described and their properties are investigated.

1. Introduction. The beginnings of the theory of Lie groups and Lie algebras were inseparably linked with group analysis of differential equations and, in particular, with group classification problems. Inspired by the idea of creating a universal theory of integration of ordinary differential equations similar to the Galois theory of solving algebraic equations, S. Lie developed the theory of continuous transformation groups, classified such locally non-singular groups acting on the complex and real planes, described their differential invariants and then carried out group classification of second-order ordinary differential equations.

At present there is a substantial number of papers devoted to studying important classes of differential equations of theoretical and mathematical physics, biology, financial mathematics and other sciences from the Lie symmetry point of view (see e.g. all references in this paper and citation therein). The group classification in a class of (systems of) differential equations is reduced to integration of a complicated overdetermined system of partial differential equations with respect to both coefficients of infinitesimal symmetry operators and arbitrary elements. That is why it is a considerably more complicated problem than finding the Lie symmetry group of a single differential equation. Whereas programs for solving the latter problem had been created for most existing symbolic calculations packages a significant progress in computer realization of the group classification algorithm was achieved only recently.

Classes of differential equations are usually chosen based on their importance for applications without any mathematical background, although such choice is an important step in successful and exhaustive classification. It is a well-established fact that in the presence of certain properties with respect to point transformations the implementation of group classification is simplified and final results can be formulated in a clear and complete form. As is often the case, before mathematical notions are defined in a rigorous and precise form, they can be implicitly used for a long time. This commonplace is particularly true for the notion of a normalized class of differential equations, which was introduced recently [6, 18, 19] and may become a cornerstone of the framework of classification problems of group analysis. Knowledge that a class of differential equations is normalized allows to reduce the group classification problem in this class to subgroup analysis of the corresponding equivalence group.

Development of techniques of group analysis also allows to formulate and to solve new classification problems concerning transformational properties of differential equations. In particular, the notions of conditional equivalence group and normalized class of differential equations gives a language to describe complete sets of admissible transformations for classes of differential equations.

In this paper we outline extension of the framework of group classification to classification of admissible transformations in classes of differential equations. For this purpose, existing notions of group analysis (class of differential equations, equivalence group, gauge equivalence group [15], form-preserving transformation [8–10]) are discussed and revised. Recently introduced notions (conditional equivalence group [20], normalized class of differential equations [6,19]) are described and their properties are investigated.

Note 1. All functions are assumed to be smooth (e.g. analytical) and defined on certain subsets of their variables. A point transformation in the space of the variables $z=(z_1,\dots,z_k)$ is a smooth function φ: $\tilde z=\varphi(z)$ which is invertible at least locally.

2. Classes of systems of differential equations. Let $\mathcal{L}_\theta$ be a system $L(x,u_{(p)},\theta(x,u_{(p)}))=0$ of l differential equations for m unknown functions $u=(u^1,\dots,u^m)$ of n independent variables $x=(x_1,\dots,x_n)$. Here $u_{(p)}$ denotes the set of all the derivatives of u with respect to x of order no greater than p, including u as the derivatives of the zero order. $L=(L^1,\dots,L^l)$ is a tuple of l fixed functions depending on x, $u_{(p)}$ and θ. θ denotes the tuple of arbitrary (parametric) functions $\theta(x,u_{(n)})=(\theta^1(x,u_{(p)}),\dots,\theta^k(x,u_{(p)}))$ running the set $\mathcal{S}$ of solutions of the auxiliary system $S(x,u_{(p)},\theta_{(q)}(x,u_{(p)}))=0$. This system consists of differential equations with respect to θ, where x and $u_{(p)}$ play the role of independent variables and $\theta_{(q)}$ stands for the set of all the partial derivatives of θ of order no greater than q. Sometimes the set $\mathcal{S}$ is additionally constrained by the non-vanish condition $S'(x,u_{(p)},\theta_{(q)}(x,u_{(p)}))\neq 0$ with another tuple S' of differential functions. In what follows we call the functions θ as arbitrary elements. Denote *the class of systems $\mathcal{L}_\theta$ with the arbitrary elements θ running $\mathcal{S}$* as $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$.

Let $\mathcal{L}^k_\theta$ denote the set of all algebraically independent differential consequences of $\mathcal{L}_\theta$, which have, as differential equations, orders no greater than k. We identify $\mathcal{L}^k_\theta$ with the manifold determined by $\mathcal{L}^k_\theta$ in the jet space $J^{(k)}$. In particular, $\mathcal{L}_\theta$ is identified with the manifold determined by $\mathcal{L}^p_\theta$ in $J^{(p)}$.

It should be noted that the above definition of a class of systems of differential equations is not complete. The problem is that correspondence $\theta\to\mathcal{L}_\theta$ between arbitrary elements and systems (treated not as formal algebraic expressions but as real systems of differential equations or manifolds in $J^{(p)}$) may be not one-to-one. Namely, the same system may correspond to different values of arbitrary elements. A reason of this indeterminancy is that different values θ and $\tilde\theta$ of arbitrary elements can result after substitution of them to L in the same expression in x and $u_{(p)}$. Moreover, it is enough for $\mathcal{L}^p_\theta$ and $\mathcal{L}^p_{\tilde\theta}$ to coincide if the associated system completed with independent differential consequences differ each from other with a nonsingular matrix being a function in the variables of $J^{(p)}$.

The values θ and $\tilde\theta$ of arbitrary elements are called *gauge-equivalent* ($\theta\overset{\mathrm{g}}{\sim}\tilde\theta$) if $\mathcal{L}_\theta$ and $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ are the same system of differential equations. For the correspondence $\theta\to\mathcal{L}_\theta$ to be one-to-one, the set $\mathcal{S}$ of arbitrary elements should be factorized with respect to the gauge equivalence relation. We formally consider $\mathcal{L}_\theta$ and $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ as different representations of the same system from $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. It is often possible to realize gauge informally via changing the chosen representation of the class under consideration with replacement of the number k of arbitrary elements and the differential functions L and S although then this may result in more complicated calculations.

Definition 1. The classes $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ and $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ are called *similar* if $n = n'$, $m = m'$, $p = p'$, $k = k'$ and there exists a point transformation $\Psi\colon (x,u_{(p)},\theta) \to (x',u'_{(p)},\theta')$ which is projectible on the space of $(x,u_{(q)})$ for any $0\le q\le p$, and $\Psi|_{(x,u_{(q)})}$ being the q-th order prolongation of $\Psi|_{(x,u)}$, $\Psi\mathcal{S}=\mathcal{S}'$ and $\mathcal{L}_{\theta'}=\Psi|_{(x,u)}\mathcal{L}_\theta$.

Hereafter the action of a such point transformation Ψ in the space of $(x,u_{(p)},\theta)$ on arbitrary elements from $\mathcal{S}$ as pth-order differential functions is given by the formula:

$$\tilde\theta=\Psi\theta \quad \text{if} \quad \tilde\theta(x,u_{(p)})=\Psi^\theta\Big(\Theta(x,u_{(p)}),\theta\big(\Theta(x,u_{(p)})\big)\Big),$$

where $\Theta=(\mathrm{pr}_p\Psi|_{(x,u)})^{-1}$ and pr_p denotes the operation of standard prolongations of a point transformations to the derivatives of orders not greater than p.

The set of transformations used in definition 1 can be extended via admitting different kinds of dependence on arbitrary elements in the ways as it is made for equivalence groups below.

Similar classes of systems have similar properties with the group analysis point of view.

Subclasses are singled out in the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ with additional auxiliary systems (or non-vanish conditions) which are attached to the main auxiliary system and the set of non-vanish conditions. Note that unions and intersections of subclasses of $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ also are subclasses of $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}\cup\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}=\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cup\mathcal{S}''},\quad \mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}\cap\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}=\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''},\quad \mathcal{S}',\mathcal{S}''\subset\mathcal{S}.$$

3. Admissible transformations. For $\theta,\tilde\theta\in\mathcal{S}$ we call the set of point transformations which maps the system $\mathcal{L}_\theta$ into the system $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ as the *set of admissible transformations from $\mathcal{L}_\theta$ into $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$* and denote it by $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$. The maximal point symmetry group G_θ of the system $\mathcal{L}_\theta$ coincides with $\mathrm{T}(\theta,\theta)$. If the systems $\mathcal{L}_\theta$ and $\mathcal{L}_{\tilde\theta}$ are equivalent with respect to point transformations then $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)=G_\theta\circ\varphi^0=\varphi^0\circ G_{\tilde\theta}$, where φ^0 is a fixed transformation from $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)$. Otherwise, $\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)=\varnothing$.

The set $\mathrm{T}(\theta,\mathcal{L}|_\mathcal{S})=\{\,(\tilde\theta,\varphi)\mid\tilde\theta\in\mathcal{S},\ \mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\ne\varnothing,\ \varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\,\}$ is called the *set of admissible transformations of the system $\mathcal{L}_\theta$ in the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$*.

Analogously, $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})=\{(\theta,\tilde\theta,\varphi)\mid\theta,\tilde\theta\in\mathcal{S},\ \mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\ne\varnothing,\ \varphi\in\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta)\}$ is called the *set of admissible transformations in $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$*.

First the set of admissible transformations was described by Kingston and Sophocleous for a class of generalised Burgers equations. These authors call transformations of such type *form-preserving ones* [8–10].

Notions and results adduced in this and the next sections can be reformulated in the infinitesimal terms by means of using the notions of vector fields, Lie algebras instead of point transformations, Lie groups etc. For instance, see [3] for the definition of “cones of tangent equivalences”, which is the infinitesimal analogue of the definition of $\mathrm{T}(\theta,\mathcal{L}|_\mathcal{S})$. Ibid a non-trivial example of semi-normalized classes of differential equations (see definition 7) is investigated in the framework of the infinitesimal approach.

In the case of one dependent variable ($m=1$) we can extend above and below notions to contact transformations.

An element $(\theta,\tilde\theta,\varphi)$ from $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ is called *a gauge admissible transformations in $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$* if $\theta\overset{\mathrm{g}}{\sim}\tilde\theta$ and φ is the identical transformation.

Proposition 1. *Similar classes have similar sets of admissible transformations. Namely, a similarity transformation Ψ from the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ into the class $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ generates a one-to-one mapping Ψ^T from $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ into $\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ via the rule $(\theta',\tilde\theta',\varphi')=\Psi^\mathrm{T}(\theta,\tilde\theta,\varphi)$ if $\theta'=\Psi\theta$, $\tilde\theta'=\Psi\tilde\theta$ and $\varphi'=\Psi|_{(x,u)}{}^{-1}\circ\varphi\circ\Psi|_{(x,u)}$. Here $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$, $(\theta',\tilde\theta',\varphi')\in\mathrm{T}(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$.*

Proposition 2. *$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\subset\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ for any subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. If $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ is another subclass of $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ then $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\cap\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})=\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$.*

A number of notions connected with admissible transformations in classes of systems of differential equations can be reformulated in terms of the category theory [23].

4. Equivalence groups. The usual equivalence group of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ is defined in a rigorous way via the notion of admissible transformations. Namely, any element Φ from the *usual equivalence group* $G^\sim=G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ is a point transformation in the space of $(x,u_{(p)},\theta)$, which is projectible on the space of $(x,u_{(p')})$ for any $0\le p'\le p$, and $\Phi|_{(x,u_{(p')})}$ being the p'-th order prolongation of $\Phi|_{(x,u)}$, and $\forall\theta\in\mathcal{S}$: $\Phi\theta\in\mathcal{S}$ and $\Phi|_{(x,u)}\in\mathrm{T}(\theta,\Phi\theta)$.

Let us remind that the point transformation φ: $\tilde z=\varphi(z)$ in the space of the variables $z=(z_1,\dots,z_k)$ is called projectible on the space of the variables $z'=(z_{i_1},\dots,z_{i_{k'}})$, where $1\le i_1<\dots<i_{k'}\le k$, if the

expressions for $\tilde z'$ depend only on z'. We denote the restriction of φ on the space of z' as $\varphi|_{z'}$: $\tilde z' = \varphi|_{z'}(z')$.

If the arbitrary elements θ explicitly depend on x and u only (one always can do it formally, assuming derivatives as new dependent variables), we can admit dependence of transformations of (x, u) on θ and consider the *generalized equivalence group* $G^\sim_{\rm gen} = G^\sim_{\rm gen}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ [16]. Any element Φ from $G^\sim_{\rm gen}$ is a point transformation in the space of (x, u, θ) such that $\forall\theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ and $\Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)} \in \mathrm{T}(\theta, \Phi\theta)$.

The action of $\Phi \in G^\sim_{\rm gen}$ on arbitrary elements as functions of (x, u) is given by the formula: $\tilde\theta = \Phi\theta$ if $\tilde\theta(x, u) = \Phi^\theta(\Theta(x, u), \theta(\Theta(x, u)))$, where $\Theta = (\Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)})^{-1}$.

Roughly speaking, $G^\sim$ is the set of admissible transformations which can be applied to any $\theta \in \mathcal{S}$ and $G^\sim_{\rm gen}$ is formed by the admissible transformations which can be separated to classes parameterized with θ running whole $\mathcal{S}$.

It is possible to consider other generalizations of equivalence groups, e.g. groups with transformations which are point with respect to independent and dependent variables and include nonlocal expressions with arbitrary elements [7,24]. Let us give definitions of some generalizations.

Definition 2. The *extended equivalence group* $\bar G^\sim = \bar G^\sim(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ is formed by the transformations each of which are compositions $\Phi^1 \circ \Phi^2$, where $\forall\theta \in \mathcal{S}$: $(\Phi^1 \circ \Phi^2)\theta \in \mathcal{S}$ and $\Phi^1|_{(x,u)} \in \mathrm{T}(\theta, (\Phi^1 \circ \Phi^2)\theta)$. Here Φ^1 is a point transformation in the space of $(x, u_{(p)}, \theta)$, which is projectible on the space of $(x, u_{(p')})$ for any $0 \le p' \le p$, and $\Phi^1|_{(x,u_{(p')})}$ being the p'-th order prolongation of $\Phi^1|_{(x,u)}$. Φ^2 is an invertible transformation in the space of arbitrary elements assumed as functions of $(x, u_{(p)})$, and Φ^2 having certain special properties.

Definition 3. A transformation Φ is called to belong to the *extended generalized equivalence group* $\bar G^\sim_{\rm gen} = \bar G^\sim_{\rm gen}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ iff $\forall\theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ and, after fixing θ, Φ becomes a point transformation from $\mathrm{T}(\theta, \Phi\theta)$.

The classes of chosen transformations with respect to arbitrary elements should be specified depending on the investigated classes of systems of differential equations. We do not point out a fixed kind of equivalence group where it is possible, implying any of the above kind.

Similar classes of systems of differential equations have similar equivalence groups.

The equivalence group generates an equivalence relations on the set of admissible transformations. Namely, the admissible transformations $(\theta^1, \tilde\theta^1, \varphi^1)$ and $(\theta^2, \tilde\theta^2, \varphi^2)$ from $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_\mathcal{S})$ are called $G^\sim$*-equivalent* if there exist $\Phi \in G^\sim$ such that $\theta^2 = \Phi\theta^1$, $\tilde\theta^2 = \Phi\tilde\theta^1$ and $\varphi^2 = \Theta^{-1} \circ \varphi^1 \circ \Theta$, where $\Theta = \Phi|_{(x,u)}$ (or $\Theta = \Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)}$ in case of $G^\sim_{\rm gen}$).

5. Group classification problems. Let $G^\cap = G^\cap(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} G_\theta$ be the common part of G_θ, $\theta \in \mathcal{S}$, which is called the *kernel of the maximal point symmetry groups* of systems from the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Note that $G^\cap$ can be naturally embedded into $G^\sim$ via trivial (identical) prolongation of the kernel transformations to the arbitrary elements. The associated subgroup of $G^\sim$ is normal.

The group classification problem for the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ is to describe all $G^\sim$-inequivalent values of $\theta \in \mathcal{S}$ together with the corresponding groups G_θ, for which $G_\theta \ne G^\cap$. The solution of the group classification problem is the list of pairs $(\mathcal{S}_\gamma, \{G_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Here $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ is a family of subsets of $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ contains only $G^\sim$-inequivalent values of θ with $G_\theta \ne G^\cap$, and for any $\theta \in \mathcal{S}$ with $G_\theta \ne G^\cap$ there exists $\gamma \in \Gamma$ such that $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Structures of G_θ are similar for different values of $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ under fixed γ. In particular, G_θ, $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, have the same arbitrariness of group parameters.

Group classification problems in the above formulation are very complicated and, in the general case, are impossible to be solved since they leads to systems of functional differential equations. That is why, one usually considers only the connected component $G^{\rm p}_\theta$ of unity for each θ instead of the whole group G_θ. $G^{\rm p}_\theta$ is called the *principal (symmetry) group* of the system $\mathcal{L}_\theta$. The generators of one-parametric subgroups of $G^{\rm p}_\theta$ form a Lie algebra A_θ of vector fields in the space of (x, u), which is called the *maximal Lie invariance (or principal) algebra* of infinitesimal symmetry operators of $\mathcal{L}_\theta$. The kernel of principal groups of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ is the group $G^{\cap\rm p} = G^{\cap\rm p}(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} G^{\rm p}_\theta$ for which the Lie algebra is $A^\cap = A^\cap(\mathcal{L}|_\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta\in\mathcal{S}} A_\theta$.

Knowing A_θ, one can reconstruct G_θ. Then the problem of group classification is reformulated in finding all possible inequivalent cases of extensions for A_θ, i.e. in listing all $G^\sim$-inequivalent values of the arbitrary parameters θ together with A_θ satisfying the condition $A_\theta \ne A^\cap$ [1,17].

6. Gauge equivalence groups. The equivalence group $G^\sim$ of the class $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ can contain transformations which act only on arbitrary elements and do not really change systems, i.e. which generate gauge admissible transformations. In general, transformations of such type can be considered as trivial [15] (gauge) equivalence transformations and form the *gauge* subgroup $G^{g\sim} = \{\Phi \in G^\sim \mid \Phi x = x,\ \Phi u = u,\ \Phi\theta \overset{g}{\sim} \theta\}$ of the equivalence group $G^\sim$. Moreover, $G^{g\sim}$ is a normal subgroup of $G^\sim$.

Application of gauge equivalence transformations is equivalent to rewriting systems in another form. In spite of regular equivalence transformations, their role in group classification comes not to choice of representatives in equivalence classes but to choice of form of these representatives. It is quite common that the gauge equivalence relation on the set of arbitrary elements of a class of differential equations is generated by its gauge equivalence group.

We use the name "gauge equivalence transformation" since there exist really trivial equivalence transformations which do not transform even arbitrary elements. Such transformations arise if the auxiliary system implies functional dependence of arbitrary elements. They form normal subgroups in the corresponding equivalence groups and in the corresponding gauge equivalence groups. We will neglect these transformations and assume that equivalence groups coincide if they have the same factor group with respect to the trivial equivalence subgroups.

7. Conditional equivalence groups. The concept of *conditional equivalence* arises as an extension of the notion of conditional symmetry transformations of a single system of differential equations [4] to equivalence transformations in classes of systems. It is even more natural than the concept of conditional symmetry since description of any class includes, as a necessary element, an auxiliary system (a *condition*) for arbitrary elements. Imposing additional constraints on arbitrary elements, we may single out a subclass in the class under consideration, the equivalence group of which is not contained in the equivalence group of the whole class.

Let $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'}$ denote the subclass of the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, which is singled out with the additional constrained system $S'(x,u_{(p)},\theta_{(q)}(x,u_{(p)}))=0$. Here $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ is the set of solutions of the united system $S=0$, $S'=0$. We assume that the united system is compatible for the subclass to be nonempty.

Definition 4. The equivalence group $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'})$ of the subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'}$ is called a *conditional equivalence group* of the whole class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ under the condition $S'=0$. The conditional equivalence group is called *nontrivial* iff it is not a subgroup of the equivalence group $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.

The equivalence group $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ generates an equivalence relation on the set of pairs of additional auxiliary conditions and the corresponding conditional equivalence groups. Namely, if a transformation from $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ transforms the system $S'=0$ to the system $S''=0$ then the conditional equivalence groups $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'})$ and $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}''})$ are similar with respect to this transformation and will be called $G^\sim$*-equivalent*.

Basing on the concept of conditional equivalence, we can formulate the problem of description of $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ similarly to the group classification problem. Nontrivial additional auxiliary conditions for arbitrary elements naturally arise under studying $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Steps of investigation could be the following:

1. Construction of $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ (or $G^\sim_{\rm gen}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ etc).
2. Description of conditional equivalence transformations in $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, i.e. searching for a complete family of $G^\sim$-inequivalent additional auxiliary conditions S_γ, $\gamma\in\Gamma$, such that any S_γ determines the set $\mathcal{S}_\gamma$ of arbitrary elements, for which $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\cap\mathcal{S}_\gamma})\not\subset G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.
3. Finding admissible transformations which belong to no conditional equivalence groups.

Actually, the proposed procedure is wide of optimality. We return to discussion of it after presentation of a more developed technique.

8. Normalized classes of differential equations. Solving group classification problems is essentially simpler if the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ of system differential equations under consideration has an additional property of normalization with respect to point transformations. The procedure of investigation of $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ can also be additionally enhanced with consideration of conditional equivalence groups for subclasses possessing this property.

Definition 5. The class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is called *normalized* if $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ $\exists\Phi\in G^\sim$: $\tilde\theta=\Phi\theta$ and $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$.

The class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is called *normalized in generalized sense* if $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ $\exists\Phi\in G^\sim_{\rm gen}$: $\tilde\theta=\Phi\theta$ and $\varphi=\Phi(\cdot,\cdot,\theta(\cdot,\cdot))|_{(x,u)}$.

Proposition 3. *If the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized (in usual or generalized sense) then for any $\theta^0\in\mathcal{S}$ the point symmetry group G_{θ^0} coincides with restriction, on the space of (x,u), of the subgroup of $G^\sim$ (or $G^\sim_{\rm gen}$) preserving the value $\theta=\theta^0(x,u_{(p)})$.*

Definition 6. The class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is called *strongly normalized* if it is normalized and $G^{\sim}|_{(x,u)}=\prod_{\theta\in\mathcal{S}}G_\theta$.

The class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is called *strongly normalized in generalized sense* if it is normalized in generalized sense and $\forall\theta^0\in\mathcal{S}$: $G^{\sim}_{\rm gen}|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)}=\prod_{\theta\in\mathcal{S}_{\theta^0}}G_\theta$, where $\mathcal{S}_{\theta^0}=\{\theta'\in\mathcal{S}\mid G^{\sim}_{\rm gen}|^{\theta=\theta'}_{(x,u)}=G^{\sim}_{\rm gen}|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)}\}$.

Definition 7. The class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is called *semi-normalized* if $\forall(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ $\exists\tilde\varphi\in G_\theta$, $\exists\Phi\in G^{\sim}$: $\varphi=\tilde\varphi\circ\Phi|_{(x,u)}$, i.e.

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=\{(\theta,\Phi\theta,\tilde\varphi\circ\Phi|_{(x,u)})\mid\theta\in\mathcal{S},\ \tilde\varphi\in G_\theta,\ \Phi\in G^{\sim}\}.$$

($\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=\{(\theta^0,\Phi\theta^0,\tilde\varphi\circ\Phi|^{\theta=\theta^0}_{(x,u)})\mid\theta^0\in\mathcal{S},\ \tilde\varphi\in G_\theta,\ \Phi\in G^{\sim}_{\rm gen}\}$ if $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is *semi-normalized in generalized sense.*)

Roughly speaking, the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized if any admissible transformation in this class belongs to the equivalence group $G^{\sim}$ and is strongly normalized if additionally $G^{\sim}|_{(x,u)}$ is generated by elements from G_θ, $\theta\in\mathcal{S}$. The set of admissible transformations of a semi-normalized class is generated by the transformations from the equivalence group of the whole class and the transformations from the Lie symmetry groups of equations of this class.

Intersection of normalized subclasses of the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ with the same equivalence group $G^{\sim}_0$ is a normalized subclass possessing $G^{\sim}_0$ as a subgroup of the equivalence group, which generates the whole corresponding set of admissible transformations. Indeed, let $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ and $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ be normalized subclasses of the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ and $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})=G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})=G^{\sim}_0$. If $\Phi\in G^{\sim}_0$ then $(\theta,\Phi\theta,\Phi|_{(x,u)})\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$ for any $\theta\in\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''$, i.e. $\Phi\in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$. In view of normalization of $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ or $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$, for any $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''})$ there exist $\Phi\in G^{\sim}_0$ such that $\tilde\theta=\Phi\theta$ and $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$. Therefore, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'\cap\mathcal{S}''}$ is a normalized subclass. The proof in case of normalization in generalized sense is analogous.

9. Examples of normalized classes. There exist a number of obvious examples of normalized classes. Thus, it is intuitively understandable that the extreme cases of classes formed by either a single system of differential equations or all systems having a fixed number of independent variables, unknown functions and differential equations with or without restriction of order are normalized. Let us demonstrate it within the framework of the above formal approach.

Consider a system $L(x,u_{(p)})=0$ of l differential equations for m unknown functions u of n independent variables x, which admits the maximal point symmetry group G. We assume that the tuple θ consists of a single arbitrary element denoted also as θ and L depends on θ constantly. The auxiliary system $\mathcal{S}$ for the arbitrary element θ is possible to be chosen in different ways. Here we discuss two possibilities.

The first one is to constrain θ with a single (algebraic or differential) equation, for example, $\theta=0$. Hence, $\mathcal{S}$ is a one-element set consisting of the function identically vanishing on $J^{(p)}$, $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=\{(0,0,\varphi)\mid\varphi\in G\}$ and $G^{\sim}=\{(\tilde x,\tilde u)=\varphi(x,u),\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\theta\mid\varphi\in G,\ F(\cdot,\cdot,0)\neq0\}$, i.e. in view of definition 1 the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized. It possesses the nonempty trivial equivalence group $G^{\sim}_{\rm triv}=\{(\tilde x,\tilde u)=(x,u),\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\theta\mid F(\cdot,\cdot,0)\neq0\}$ which should be neglected, and $G^{\sim}/G^{\sim}_{\rm triv}=\{(\tilde x,\tilde u)=\varphi(x,u),\ \tilde\theta=\theta\mid\varphi\in G\}$.

The second possibility is to demand no constraints on θ, so $\mathcal{S}$ is the whole set of p-th order differential functions of (x,u), $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=\{(\theta,\tilde\theta,\varphi)\mid\theta,\tilde\theta\in\mathcal{S},\ \varphi\in G\}$ and $G^{\sim}=\{(\tilde x,\tilde u_{(p)})=\mathrm{pr}_p\,\varphi(x,u_{(p)}),\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\theta)\mid\varphi\in G,\ \partial F/\partial\theta\neq0\}$. Therefore, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized. This class gives an example of classes without one-to-one correspondence between arbitrary elements and systems of differential equations.

The class of all systems of l differential equations for m unknown functions of n independent variables, which have order no greater than p, (here l, m, n and p are fixed integers) can be included within the framework of the formal approach after putting the left part of equations themselves as arbitrary elements and taking the empty auxiliary system S, i.e. $k=l$, $L\equiv\theta$ and $\mathcal{S}$ is the whole set of l-tuples of functionally independent p-th order differential functions of (x,u). Then $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=\{(\theta,\tilde\theta,\varphi)\mid\theta\in\mathcal{S},\ \tilde\theta=F(x,u_{(p)},\mathrm{pr}_p\,\varphi)\circ\theta,\ |\partial\varphi/\partial(x,u)|\neq0,\ \partial F/\partial\theta|_{\theta=0}\neq0\}$ and $G^{\sim}=\{\Phi=(\varphi(x,u),F(x,u_{(p)},\theta))\mid|\partial\varphi/\partial(x,u)|\neq0,\ \partial F/\partial\theta|_{\theta=0}\neq0\}$ that obviously shows normalization of this class.

Normalization property has been proved in some ways for a number of different classes of differential equations being important for application. For example, generalized Burgers equations [8], eikonal equations of space dimensions 1, 2 and 3 [3], quasi-linear one-dimensional evolutions equations [2, 25], different multi-dimensional quasi-linear parabolic equations [23], $(1+1)$-dimensional generalized nonlinear wave equations [14], different kinds of $(1+1)$-dimensional nonlinear Schrödingher equations [5, 6, 19, 21, 22, 26], multi-dimensional generalized nonlinear Schrödingher equations [11].

10. Normalized classes and group classification problems. The notion of normalized classes was implicitly used in solving the group classification problems for many classes of system of differential equations. The most known classical group classification problems such as the Lie's classifications of second-order ordinary differential equations [13] and of second-order two-dimensional linear partial differential equations [12] were solved with essential usage of strong normalization of the above classes. Similar classification technique implicitly based on the properties of normalized classes was recently applied in solving group classification problems by a number of authors (see e.g. [2,3,5,14,21,25,26]).

Proposition 4. *Let the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ be normalized and G^i, $i=1,2$, be local groups of point transformations in the space of (x,u), for which $\mathcal{S}^i=\{\theta\in\mathcal{S}\mid G^{\rm p}_\theta=G^i\}\neq\varnothing$. Then $\mathcal{S}^1\sim\mathcal{S}^2 \bmod G^\sim$ iff $G^1\sim G^2 \bmod G^\sim$.*

Proposition 5. *Two systems from a semi-normalized class are transformed each to other by a point transformation iff they are equivalent with respect to the equivalence group of this class.*

Proposition 6. *Any normalized class of systems of differential equations is semi-normalized.*

Proposition 7. *Let the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ be normalized and a subset $\mathcal{S}'$ of $\mathcal{S}$ determine a subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ which is invariant under action of $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Then the subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ is normalized (in the same sense). $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ is a subgroup of $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$, which generates $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ and, if $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized in usual sense, coincides with $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ up to gauge equivalence transformations in $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.*

Proof. $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\supset G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, since for any $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ and for any $\theta\in\mathcal{S}'$ we have $\Phi\theta\in\mathcal{S}'$, i.e. $(\theta,\Phi\theta,\Phi|_{(x,u)})\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ that implies $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Since $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\subset\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, for any $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ there exists $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ such that $\tilde\theta=\Phi\theta$ and $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$, i.e. the subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ is normalized. The above part of the proof is simply extended to the generalized case.

Any $\Psi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ and any $\theta\in\mathcal{S}'$ give the admissible transformation $(\theta,\Psi\theta,\Psi|_{(x,u)})\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Therefore, there exists $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ such that $\Psi|_{(x,u)}=\Phi|_{(x,u)}$ and $\Psi\theta=\Phi\theta$. □

Note that under the above supposition the subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}\setminus\mathcal{S}'}$ has similar properties.

Given the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ and a local (connected) group G of point transformations of (x,u) such that $G=G^{\rm p}_\theta$ for some $\theta\in\mathcal{S}$, consider the subsets of $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_G=\{\,\theta\in\mathcal{S}\mid G^{\rm p}_\theta\supset G\},\quad \bar{\mathcal{S}}_G=\{\,\theta\in\mathcal{S}\mid G^{\rm p}_\theta\supset G \mod G^\sim\},$$
$$\mathcal{S}'_G=\{\,\theta\in\mathcal{S}\mid G^{\rm p}_\theta=G\},\quad \bar{\mathcal{S}}'_G=\{\,\theta\in\mathcal{S}\mid G^{\rm p}_\theta=G \mod G^\sim\}.$$

Corollary 1. *Let the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ be normalized. Then $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G}$ and $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G}$ are normalized subclasses of $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ is a subgroup of $G^\sim(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ and $G^\sim(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$ and generates $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ and $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$.*

Proposition 8. *The subclass $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ is invariant with respect to $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, where $\mathcal{S}_0=\mathcal{S}'_{G^\cap}$, $G^\cap=G^{\cap{\rm p}}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.*

Proof. Let us fix any $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ and any $\theta\in\mathcal{S}_0$. It is necessary to show that $\Phi\theta\in\mathcal{S}_0$. $G^{\rm p}_{\Phi\theta}=\mathrm{Ad}_\Phi G^{\rm p}_\theta=\mathrm{Ad}_\Phi G^\cap$, where Ad_Φ is the action of Φ on transformation groups: $G\ni\psi\to\varphi^{-1}\circ\psi\circ\varphi\in\mathrm{Ad}_\Phi G$, $\varphi:=\Psi|_{(x,u)}$. Since $\Phi\theta\in\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, $G^{\rm p}_{\Phi\theta}\supset G^\cap$. If $G^{\rm p}_{\Phi\theta}=\mathrm{Ad}_\Phi G^\cap\neq G^\cap$ then $G^\cap\neq\mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}}G^\cap\subset G^\cap$. But $\mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}}G^\cap=G^{\rm p}_{\Phi^{-1}\theta}$, $\Phi^{-1}\theta\in\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ and, therefore, $\mathrm{Ad}_{\Phi^{-1}}G^\cap\supset G^\cap$ that implies a contradiction. That is why, $G^{\rm p}_{\Phi\theta}=G^\cap$, i.e. $\Phi\theta\in\mathcal{S}_0$. □

Proposition 9. *$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}$ is normalized in usual sense if $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized in usual sense. $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ is generated by the group $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})\cap G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ the projection of which in (x,u) is the normalizer of G in $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$.*

Proof. Let us fix arbitrary $(\theta,\tilde\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. Since $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})\subset\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, there exists $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ such that $\tilde\theta=\Phi\theta$ and $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$, $\theta,\tilde\theta\in\mathcal{S}'_G$, hence $G=G^{\rm p}_{\tilde\theta}=\varphi^{-1}\circ G^{\rm p}_\theta\circ\varphi=\varphi^{-1}\circ G\circ\varphi$, i.e. $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$ belongs to the normalizer of G in $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$.

Consider any $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ such that $\varphi=\Phi|_{(x,u)}$ belongs to the normalizer of G in $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x,u)}$. Then $(\theta,\Phi\theta,\varphi)\in\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ for arbitrary $\theta\in\mathcal{S}'_G$ since $\Phi\theta\in\mathcal{S}'_G$. Indeed, $\Phi\theta\in\mathcal{S}$ and $G=G^{\rm p}_{\Phi\theta}=\varphi^{-1}\circ G^{\rm p}_\theta\circ\varphi=\varphi^{-1}\circ G\circ\varphi=G$. Therefore, $\Phi\in G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. □

Proposition 10. *$G^{\cap{\rm p}}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})=G$. $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})\subset G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. If $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is normalized in usual sense, projections of these groups in (x,u) coincide.*

Proof. The first statement trivially follows from the definition of $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}$. Then in view of proposition 8 $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}$ is invariant with respect to $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})$, i.e. $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})\subset G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$. Proposition 9 implies the latter statement. In particular, $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G})\cap G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})=G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})\cap G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. □

Note 2. In general, the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}$ is not normalized.

In view of the above propositions, the group classification problem in any normalized class of differential equations is reduced to subgroup analysis of the corresponding equivalence group. The property of strong normalization allows us to hope that essential part of subgroups will be Lie symmetry groups of systems from the class under consideration. Moreover, under classification a hierarchy of normalized classes corresponding to symmetry extension cases are naturally obtained.

11. Normalized subclasses and admissible transformations. Investigation of normalization of the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ or its subclasses is necessary for description of $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ and can be included as a step in studying $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. The problem of classification of admissible transformations can be assumed solved, for example, in the following cases.

In view of the definition of normalized classes, the set of admissible transformations is known if the class proves to be normalized and its equivalence group are calculated. Then

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{\, (\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \mid \theta \in \mathcal{S}, \Phi \in G^{\sim}\}.$$

Suppose that the class $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ is presented as a union of disjoint normalized subclasses, and there are no admissible transformations between systems from different subclasses. That is, $\mathcal{S} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{S}_\gamma$, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma}$ is normalized for any $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{S}_\gamma \cap \mathcal{S}_{\gamma'} = \varnothing$ and $\mathrm{T}(\theta, \theta') = \varnothing$, where $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, $\theta' \in \mathcal{S}_{\gamma'}$, $\gamma \neq \gamma'$. Then obviously $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma}) \supset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ for any $\gamma \in \Gamma$ and $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ is the union of the simply constructed sets $\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})$ of admissible transformations in the subclasses:

$$\mathrm{T}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{\, (\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \mid \theta \in \mathcal{S}_\gamma, \Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma})\,\}.$$

The class of nonlinear Schrödinger equations with potentials and general modular nonlinearities has the set of admissible transformations of the above structure for all space dimensions [11, 18, 19].

A more nontrivial situation is when normalized subclasses intersect each other. Let $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' \neq \varnothing$, the subclasses $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ and $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ are normalized, $\mathcal{S}' = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})\ \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$ and $\mathcal{S}'' = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})\ \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Then any admissible transformation $(\theta', \theta'', \varphi)$ with $\theta' \in \mathcal{S}'$ and $\theta'' \in \mathcal{S}''$, can be presented in the form $(\theta', \Phi^2(\Phi^1\theta'), (\Phi^1 \circ \Phi^2)|_{(x,u)})$, where $\Phi^1 \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$, $\Phi^2 \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$ and $\Phi^1\theta' \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$.

A set of admissible transformations of such structure arises under investigation of a class of variable coefficient diffusion–reaction equations [24].

12. Conclusion. Consideration in this paper is quite informal. The aim was to give a description of major tools of modern group analysis and to present a new treatment of group classification problems. Most of adduced definitions and statements are flexible and can be made rigorous after fixing a class of system of differential equations under investigation.

The author is grateful to Prof. M. Kunzinger for fruitful discussion. The research of the author was supported by the Austrian Science Fund (FWF), Lise Meitner project M923-N13.

[1] Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Nonlocal symmetries. A heuristic approach // Itogi Nauki i Tekhniki, Current problems in mathematics. Newest results. – 1989. – **34**. – P. 3–83 (in Russian); translated in J. Soviet Math. – 1991. – **55**, N 1. – 1401–1450.

[2] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equation // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**. – P. 43–94.

[3] Borovskikh A.V. Group classification of the eikonal equations for a three-dimensional nonhomogeneous medium // Mat. Sb. – 2004. – **195**, N 4. – P. 23–64 (in Russian); translation in Sb. Math. – 2004. – **195**, N 3–4. – P. 479–520.

[4] Fushchych W.I. Conditional symmetry of equations of nonlinear mathematical physics // Ukrain. Mat. Zh. – 1991. – **43**. – P. 1456–1470 (in Russian); translation in Ukrainian Math. J. – 1991. – **43**. – P. 1350–1364.

[5] Gagnon L., Winternitz P. Symmetry classes of variable coefficient nonlinear Schrödinger equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993. – **26**. – P. 7061–7076.

[6] Ivanova N.M., Popovych R.O., Eshraghi H. On symmetry properties of nonlinear Schroedinger equations with potentials // Sveske Fiz. Nauka. – 2005. – **18** (A1). – P. 451–456.

[7] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Conservation laws of variable coefficient diffusion-convection equations // Proceedings of Tenth International Conference in Modern Group Analysis (Larnaca, Cyprus, 2004). – 2005. – P. 107–113.

[8] Kingston J.G., Sophocleous C. On point transformations of a generalised Burgers equation // Phys. Lett. A. – 1991. – **155**. – P. 15–19.

[9] Kingston J.G., Sophocleous C. On form-preserving point transformations of partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 1597–1619.

[10] Kingston J.G., Sophocleous C. Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2001. – **36**. – P. 987–997.

[11] Kunzinger M., Popovych R. Normalized classes of multi-dimensional nonlinear Schrödinger equations, in preparation.

[12] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung // Arch. for Math. – 1881. – **6**. – N 3. – P. 328–368. (Translation by N.H. Ibragimov: S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals // CRC handbook of Lie group analysis of differential equations, Vol. 2, 1994. – P. 473–508).

[13] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. – Leipzig: B.G. Teubner, 1891.

[14] Lahno V., Zhdanov R., Magda O. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations // Acta Appl. Math. – 2006. – **91**. – P. 253–313.

[15] Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations. – Thesis. – University of British Columbia, 1992.

[16] Meleshko S.V. Homogeneous autonomous systems with three independent variables // J. Appl. Math. Mech. – 1994. – **58**. – P. 857–863.

[17] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[18] Popovych R.O., Normalized classes of nonlinear Schrödinger equations // Bulg. J. Phys. – 2006. – **33** (s2). – P. 211–222.

[19] Popovych R.O., Eshraghi H. Admissible point transformations of nonlinear Schrödinger equations // Proceedings of 10th International Conference in MOdern GRoup ANalysis (Larnaca, Cyprus, 2004). – P. 167–174.

[20] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 2004, **37**. – P. 7547–7565 (math-ph/0306035).

[21] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Lie symmetries of (1+1)-dimensional cubic Schrödinger equation with potential // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 219–224 (math-ph/0310039).

[22] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Group classification of (1+1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearities // J. Math. Phys. – 2004. – **45**. – P. 3049–3057 (math-ph/0311039).

[23] Prokhorova M. The structure of the category of parabolic equations. – math.AP/0512094, 24 p.

[24] Vaneeva O.O., Johnpillai A.G., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – in press (math-ph/0605081).

[25] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

[26] Zhdanov R., Roman O. On preliminary symmetry classification of nonlinear Schrödinger equation with some applications of Doebner–Goldin models // Rep. Math. Phys. – 2000. – **45**. – P. 273–291.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 255–269

УДК 517.9

Симетрійні властивості та перетворення еквівалентності рівнянь нелінійної математичної фізики

М.І. СЄРОВ

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.poltava.ua

Наведено основні результати в області симетрійного аналізу диференціальних рівнянь, одержані за останні 10 років групою науковців Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка.

Basic results in the field of symmetry analysis of differential equations, which were obtained for 10 last years by the scientific group of the Yury Kondratyuk Poltava National Technical University, are presented.

1. Вступ. Ця робота присвячена пам'яті видатного українського математика, фундатора школи симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики на Україні, Вільгельма Ілліча Фущича. Доктор фіз.-мат. наук, професор, член-кореспондент НАН України, завідувач відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, лауреат державної премій України, В.І. Фущич добре відомий своїми науковими працями серед учених, які займаються тематикою даного напряму математичної фізики, не тільки в нашій країні, але й за її межами – в США, Канаді, Японії, Італії, Австралії, Німеччині, Польщі, Росії та інших країнах. Він є автором понад 300 наукових статей та 9 монографій. Але не тільки ці досягнення є основними в роботі Вільгельма Ілліча. Одним з основних і найбільш вагомих його досягнень є те, що він зумів повести за собою по шляху наукових досліджень своїх учнів, молодих науковців не тільки Інституту математики НАН України, а й багатьох інших інститутів та університетів Києва, Ужгорода, Полтави, Житомира, Миколаєва, Вінниці, Дніпропетровська та деяких інших міст України. Усі свої знання, весь багатий досвід наукових досліджень Вільгельму Іллічу вдалось передати своїм учням та послідовникам. Група вчених згуртована Вільгельмом Іллічем навколо відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України по праву заслуговує носити ім'я наукової школи симетрійного аналізу рівнянь математичної фізики.

Відзначаючись великою працездатністю і широкою обізнаністю в своїй області досліджень, Вільгельм Ілліч Фущич своєю енергійністю, глибоким розумінням багатьох проблем надихав нас, його учнів, до пошуку шляхів розв'язання все нових і нових важливих задач.

Науковий шлях Вільгельма Ілліча починався з вивчення симетрійних властивостей лінійних рівнянь та систем математичної фізики. Разом зі своїми учнями В.А. Салогубом, Л.П. Сокуром, А.Г. Нікітіним, С.П. Онуфрійчуком, Ю.М. Сегедою, В.В. Наконечним, В.А. Владіміровим та іншими, він досяг значних успіхів в цій галузі. В той же час, багато його наукових досягнень відносяться до симетрійного аналізу рівнянь нелінійної математичної фізики.

Перші нелегкі кроки в цьому напрямі Вільгельм Ілліч робив разом зі своїми учнями Ю.М. Сегедою, С.С. Москалюком, В.М. Штеленем у кінці 70-х – на початку 80-х років минулого століття. Поряд з широкими дослідженнями в галузі симетрійного аналізу лінійних рівнянь, вивчення нелінійних задач у той час тільки починалось. Кожне нелінійне рівняння, зі слів Вільгельма Ілліча, потребувало індивідуального підходу, вимагало розробки спеціальних методів його дослідження. Незважаючи на ці принципову рису нелінійних рівнянь, Вільгельму Іллічу вдалося розробити ряд важливих підходів дослідження нелінійних диференціальних рівнянь і узагальнити їх для цілих класів рівнянь та систем нелінійної математичної фізики.

Вільгельм Ілліч відзначав [1] важливість відбору серед всіх допустимих математичних моделей тих, які описують конкретні фізичні процеси і мають багаті симетрійні властивості, а саме задовольняють принципам відносності Галілея та Пункаре–Ейнштейна. У зв'язку з цим всі рівняння з частинними похідними він поділяв на два великих класи: рівняння релятивістської та рівняння нерелятивістської фізики. Багато його робіт разом з А.Г. Нікітіним, В.М. Штеленем, Р.М. Чернігою, Р.З. Ждановим, Р.М. Поповичем та іншими присвячено цій тематиці.

Важливий напрям, розроблений Вільгельмом Іллічем та його учнями Ю.М. Сегедою, В.М. Штеленем, В.М. Федорчуком, Л.Ф. Баранником, А.Ф. Баранником, В.І. Лагном та багатьма іншими, полягає в застосуванні алгебр та груп інваріантності нелінійних диференціальних рівнянь до знаходження їх розв'язків. За допомогою підалгебр алгебри інваріантності диференціальних рівнянь будують спеціальні підстановки, які названо "анзацами". Анзаци редукують вихідне рівняння до рівняння з меншою кількістю незалежних змінних. Це дало можливість одержати цілі класи точних розв'язків багатьох основних рівнянь та систем нелінійної математичної фізики: Дірака, Даламбера, Шрьодінгера, Ламе, Максвелла тощо.

Продовжуючи вивчення нелокальних симетрій диференціальних рівнянь, які Вільгельм Ілліч розпочинав сумісно з А.Г. Нікітіним для лінійних задач (ця тематика одержала назву неліївської симетрії диференціальних рівнянь), разом з В.А. Тичиніним було отримано ряд важливих результатів і для нелінійних рівнянь Кортевега–де Фріза, Борна–Інфельда, Даламбера та деяких інших.

Одним з найвагоміших в області симетрійного аналізу є напрям, який одержав назву "умовна симетрія диференціальних рівнянь". Цей напрям розроблено Вільгельмом Іллічем сумісно з І.М. Цифрою, В.І. Чопиком та автором. Вільгельм Ілліч стверджував, що з розробкою методу та концепції умовної симетрії виникла необхідність перегляду з цієї точки зору всіх результатів для всеможливих рівнянь як лінійної, так і нелінійної математичної фізики, одержаних раніше класичними методами С. Лі.

Наукові ідеї Вільгельма Ілліча Фущича живуть і розвиваються в роботах його учнів і послідовників. Групи молодих вчених, які займаються дослідженнями в цій області, зосереджені в кількох містах України і закордоном. Робота цих груп координується відділом прикладних досліджень Інституту математики НАН України на чолі з доктором фіз.-мат. наук, професором А.Г. Нікітіним. Одна з таких груп складається з викладачів та аспірантів кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка. Основні публікації та результати, одержані ними за останні десять років, наведено в цій статті та деяких інших статтях цього збірника.

2. Конформна інваріантність. Розглянемо клас квазілінійних рівнянь з частинними похідними другого порядку вигляду

$$F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})u_{\mu\nu} + G(u,\underset{1}{u}) = 0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})$, $G(u,\underset{1}{u})$, $u = u(x)$ – гладкі функції, $x = (x_0, x_1)$, $\underset{1}{u} =$

(u_0, u_1), $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu = 0, 1$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування.

До класу (1) входять такі класичні рівняння як рівняння ейконалу $u_\mu u^\mu = F(u)$ та нелінійні хвильові рівняння

$$\Box u + G(u, \underset{1}{u}) = 0.$$

Якщо $F^{\mu\nu} = (1 - u_\alpha u^\alpha) g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$, $G = 0$, то рівняння (1) співпадає з рівнянням Борна–Інфельда $(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0$. Наведені рівняння володіють широкими алгебрами ліївських симетрій. Вони інваріантні відносно алгебр Пуанкаре, розширеної алгебри Пуанкаре, конформної алгебри. В [2] доведено таке твердження.

Теорема 1. *Рівняння* (1) *інваріантне відносно конформної алгебри* $AC(1,1)$, *базисні елементи якої задаються операторами*

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad J_{01} = x_0\partial_1 + x_1\partial_0,$$
$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + ku\partial_u, \quad K_\mu = 2x_\mu D - (x^2 - ku^2)\partial^\mu, \quad \mu = 0, 1,$$

тоді і тільки тоді, коли воно або має вигляд

$$\Box u = (u_0^2 - u_1^1) f(u)$$

при $k = 0$ *або*

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = \frac{2}{u}\big(1 - u_\nu u^\nu\big)\big(1 + \lambda\sqrt{1 - u_\nu u^\nu}\big) \qquad (2)$$

при $k = 1$, *де* λ *– довільна стала,* $f = f(u)$ *– довільна функція.*

Рівняння (2) можна розглядати як рівняння Борна–Інфельда з правою частиною. Відомо, що максимальною алгеброю інваріантності (МАІ) рівняння Борна–Інфельда є розширена алгебра Пуанкаре $AP_1(1, n+1)$. Отже, права частина розширює алгебру інваріантності рівняння Борна–Інфельда до конформної алгебри $AC(1, n)$. У [2] також одержано узагальнення цього результату на випадок довільної кількості змінних.

Відомо [3], що багатовимірне узагальнення рівняння Борна–Інфельда

$$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \qquad (3)$$

інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1, n+1)$ в просторі $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, де роль змінної x_{n+1} відіграє функція u. Симетрії цього рівняння можна застосувати для побудови інваріантних анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків рівняння (3). Оскільки невідома функція $u = u(x)$ в інваріантні анзаци входить неявно, проведення редукції рівняння (3) пов'язане зі значними технічними труднощами. Так, наприклад, у випадку $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ загальний вигляд інваріантного анзаца для рівняння (3) задається формулою

$$z = \varphi(\omega, \theta),$$

де $\omega = \omega(x, u), \theta = \theta(x, u)$, $z = z(x, u)$ – інваріанти алгебри $AP_1(1, 3)$, φ – нова невідома функція. Тільки після того, як редуковане рівняння для функції φ вдалося записати у коваріантному вигляді [4], процес редукції значно спростився, що дало змогу побудувати класи точних розв'язків рівняння (3).

Одним з основних рівнянь геометричної оптики є рівняння ейконалу

$$u_\mu u^\mu = F(u). \qquad (4)$$

За допомогою локальної заміни змінних рівняння (4) можна звести до одного з таких трьох випадків:

$$u_\mu u^\mu = 0, \quad u_\mu u^\mu = 1, \quad u_\mu u^\mu = -1. \qquad (5)$$

Симетрійні властивості рівнянь (5) добре вивчені (див., наприклад, [3]). МАІ двох останніх рівнянь (5) є конформні алгебри $AC(1, n+1)$ та $AC(1+1, n)$ відповідно. Причому роль x_{n+1} для алгебри $AC(1, n+1)$ та роль другої часової змінної для алгебри $AC(1+1, n)$ відіграє функція u.

Природною є задачу опису рівнянь чи систем рівнянь, які, наприклад, при $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, інваріантні відносно алгебр $AC(1, 5)$, $AC(2, 4)$ чи $AC(3, 3)$. Якщо розглянути систему двох рівнянь ейконалу для двох функцій u та w

$$u_\mu u^\mu = \pm 1, \quad w_\mu w^\mu = \pm 1, \qquad (6)$$

то виявляється, що вона не є конформно інваріантною. Конформно інваріантною система (6) стає лише при додатковій умові

$$u_\mu w^\mu = 0, \qquad (7)$$

яка задає свого роду взаємодію двох полів u та w. Встановлено [5], що при додатковій умові (7) системи

$$\begin{array}{lll} u_\mu u^\mu = 1, & u_\mu u^\mu = 1, & u_\mu u^\mu = -1, \\ w_\mu w^\mu = 1; & w_\mu w^\mu = -1; & w_\mu w^\mu = -1, \end{array}$$

інваріантні відносно алгебр $AC(1,5)$, $AC(2,4)$ та $AC(3,3)$ відповідно.

Подібну задачу розв'язано в [6] для рівняння Гамільтона–Якобі, яке є параболічним аналогом рівняння ейконалу.

При дослідженні симетрійних властивостей рівнянь та систем математичної фізики виникає задача класифікації зображень можливих алгебр інваріантності. Було розглянуто задачу опису нееквівалентні лінійні представлення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри, відносно яких інваріантні рівняння гіперболічного типу у випадку $u \in \mathbb{R}^2$ при умові, що вихідна система допускає лінійні перетворення еквівалентності. Одержано 6 нееквівалентних лінійних зображень [7] загальної лінійної алгебри порядку два, на основі яких у [8] отримано нееквівалентні лінійні зображення розширеної алгебри Пуанкаре $AP_1(1,1)$ та конформної алгебри $AC(1,1)$ для випадку $u \in \mathbb{R}^2$. Побудовані лінійні зображення алгебр Пуанкаре та конформної алгебри застосовано для дослідження симетрійних властивостей систем квазілінійних хвильових рівнянь вигляду

$$\Box u = (F^0(u)\partial_0 + F^1(u)\partial_1)u,$$

де $u = (u^1, u^2)$, F^0, F^1 – функціональні матриці розмірності 2×2.

3. Інваріантність відносно узагальненої алгебри Галілея. У роботах [7, 9] досліджено інваріантність систему нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$u_0 = \triangle u + F^a(u) u_a, \tag{8}$$

відносно узагальненої алгебри Галілея для різних розмірностей векторного поля u та просторових змінних $\vec{x}$. Тут $u = u(x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, F^a – функціональні матриці розмірності $m \times m$, $a = \overline{1,n}$. Вивчено всі випадки для $m \leq 3$ та $n \leq 3$. У [7] встановлено, що у випадку $n = 1$, $m = 2$ існує 5 систем, інваріантних відносно названої алгебри, наприклад, система

$$u_0 + u^1 u_1 + u_{11} = 0$$

інваріантна відносно алгебри $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1}. \end{aligned} \tag{9}$$

У роботі [9] показано, що у випадку $n = 1$, $m = 3$ таких систем 20. При $n = m = 2$ є лише одна система, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея; вона співпадає з класичною системою рівнянь Бюргерса. У випадку $n = 2$, $m = 3$ таких систем чотири. Крім того, встановлено (8), що в класі систем для двовимірного та тривимірного векторних полів при $n > m$ не існує систем, інваріантних відносно узагальненої алгебри Галілея.

Системи рівнянь третього порядку вигляду

$$u_0 + F(u)u_1 + Ku_{11} + \Lambda u_{111} = 0, \tag{10}$$

де $u \in \mathbb{R}^2$, F – функціональна, а K і Λ – сталі матриці розмірності 2×2, при конкретних нелінійностях знаходять широке застосування в теорії щільних частотних полів, у загальних розтягах і деформаціях скінченних середовищ, подібних до розтягів Хабла Всесвіту в астрофізиці [10], в явищах турбулентної дифузії [11], в процесах, пов'язаних з рідинами Ван-дер-Ваальса [12]. Для деяких систем (10) досліджено симетрійні властивості і методами ліївської та умовної симетрії знайдено точні розв'язки [13–16].

Розглянуто також задачу про побудову функцій F^{ab}, при яких система (10) інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Тобто, серед всеможливих допустимих математичних моделей вигляду (10) відібрано ті, що задовольняють принцип відносності Галілея. Доведено [17], що в класі систем (10) існує лише 5 локально нееквівалентних систем третього порядку, інваріантних відносно реалізацій розширеної алгебри Галілея $AG_2(1,1)$. Серед них, наприклад, система

$$\begin{aligned} &u_0^1 + u^1u_1^1 + k_{11}u_{11}^1 + \lambda_{12}u_{111}^2 = 0, \\ &u_0^2 + u^1u_1^2 + k_{22}u_{11}^2 = 0, \end{aligned}$$

для якої максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності породжена операторами (9).

Важливість цього результату полягає ще й тому, що серед систем диференціальних рівнянь третього порядку вперше виокремлено системи, що інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея.

4. Інваріантність циліндрично-симетричних рівнянь. Добре відомо (див., наприклад, [3]), що нелінійне хвильове рівняння $\Box u = F(u)$, де $u = u(x)$, $x = (x_0, \ldots, x_n)$, $F = F(u)$ – довільна гладка функція, інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,n)$, якщо воно має вигляд

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \quad \lambda = \text{const}. \tag{11}$$

Аналогічний результат встановлено також і для нелінійного рівняння Шрьодінгера

$$i\psi_t - \frac{1}{2m} \triangle \psi = F(\psi, \overline{\psi}). \tag{12}$$

Рівняння (12) інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$i\psi_t - \frac{1}{2m} \triangle \psi = \lambda |\psi|^{\frac{4}{n}} \psi, \quad \lambda = \text{const}. \tag{13}$$

Під час обговорення цих результатів Вільгельм Ілліч Фущич ставив запитання: "Чому степені нелінійностей $\frac{n+3}{n-1}$ та $\frac{4}{n}$ рівнянь (11) та (13) так жорстко зафіксовані? В той час, як з фізичної точки зору дані степені нічим особливим не відрізняються від інших степенів". Цю "жорсткість" вдалося послабити для кількох рівнянь, які володіють циліндричною симетрією [18].

Теорема 2. *Циліндрично-симетричне нелінійне хвильове рівняння*

$$\Box u - \frac{N}{x_n} u_n = F(u) \tag{14}$$

інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1, n-1)$ тоді і тільки тоді, коли $F = \lambda u^k$, де λ, $k \neq 1$ – довільні сталі, $N = 1 - n + \frac{4}{k-1}$.

Теорема 3. *Циліндрично-симетричне нелінійне рівняння Шрьодінгера*

$$i\psi_t - \frac{1}{2m}\Big(\triangle \psi + \frac{N}{x_n}\psi_n \Big) = F(\psi, \overline{\psi})$$

інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, n-1)$, тоді і тільки тоді, коли $F(\psi, \overline{\psi}) = \lambda |\psi|^k \psi$, де λ, k—довільні сталі, $N = \frac{4}{k} - n$.

При описанні процесів теорії проникання (див., наприклад, [19]) використовують систему рівнянь

$$\begin{aligned} &u_t + \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho), \\ &v_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0, \\ &\rho_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho \triangle u = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

та відповідну циліндрично-симетричну систему

$$\begin{aligned} &u_t + \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla} u)^2 = F(\rho), \\ &v_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v = 0, \\ &\rho_t + \vec{\nabla} u \vec{\nabla} \rho + \rho\big(\triangle u + \tfrac{N}{x_n} u_n \big) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

де $u = u(t, \vec{x})$ – потенціал поля швидкостей частинки, $v = v(t, \vec{x})$ – ентропія, $\rho = \rho(t, x)$ – густина.

Для систем (15) та (16) в [17,20] отримано результати, аналогічні результатам щодо рівнянь (14).

Теорема 4. *Система* (15) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG(1,n)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\rho) = \lambda \rho^{\frac{2}{n}}$, де λ – довільні стала.*

Теорема 5. *Система рівнянь* (16) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG(1, n-1)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\rho) = \lambda \rho^k$ де λ, k – довільні сталі, $N = \frac{2}{k} - n$.*

5. Умовна симетрія. При дослідженні Q-умовної симетрії диференціального рівняння виникає проблема інтегрування системи визначальних рівнянь для визначення координат інфінітезимального оператора. Ця система досить складна, причому складність її розв'язання, як правило, перевищує складність розв'язання вихідного рівняння.

Поняття Q-умовної симетрії бере початок з роботи Блумена і Коула [21], де вони ввели означення так званої некласичної симетрії. Розглянувши приклад лінійного рівняння теплопровідності, вони зіткнулися з проблемою інтегрування складної нелінійної системи визначальних рівнянь, розв'язати яку їм не вдалося. Можливо це стало однією з причин того, що в своїх подальших дослідженнях вони до теми некласичної симетрії не поверталися.

У зв'язку з цим після введення поняття умовної симетрії в [3] та ряді наступних робіт розв'язувалася задача про побудову хоча б частинних розв'язків визначальної системи, що, безумовно, давало нові результати, порівняно з ліївською симетрією.

Нелінійне рівняння акустики $u_{00} = uu_{11}$ було першим, для якого нам вдалося повністю розв'язати задачу дослідження Q-умовної симетрії [22, 23]. Одержано ряд операторів, один з яких має вигляд

$$Q_6=\partial_0+\left(\frac{\dot{\wp}}{\wp}-\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)\partial_1+\left[\frac{\dot{\wp}}{\wp}u+\left(\dot{\wp}-\wp\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}\right)x_1^2+\frac{x_1}{\Lambda}+\frac{c_0}{\wp}\right]\partial_u,$$

де c_0 – довільна стала, $\wp = \wp(x_0)$ – функція Веєрштрасса, $\Lambda = \Lambda(x_0)$ – функція Ламе.

В [23] поставлено та розв'язано задачу знаходження інволютивної множини двох операторів умовної інваріантності двовимірного рівняння акустики

$$u_{00} = u(u_{11} + u_{22}).$$

Клас нелінійних $(1 + 2)$-вимірних рівнянь теплопровідності

$$H(u)u_0 + u_{11} + u_{22} = F(u), \tag{17}$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2)$, $H(u)$ та $F(u)$ — довільні гладкі функції, розглянуто в [17]. Якщо у випадку рівняння акустики вдалося повністю розв'язати задачу знаходження операторів Q-умовної інваріантності для одного конкретного рівняння, то в [17] проведено повний опис операторів Q-умовної інваріантності для класу рівнянь (17), в який входять дві довільні функції $H(u)$ і $F(u)$.

Теорема 6 [17]. *Будь-який оператор Q-умовної симетрії нелінійного рівняння теплопровідності* (17) *або є еквівалентним оператору ліївської симетрії цього рівняння, або з точністю до перетворень з групи еквівалентності та додаткових перетворень є еквівалентним одному з наступних операторів:*

1. $Q = \partial_0 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u$ *у випадку* $F = (\lambda_1 u + \lambda_2)(H + \lambda_0)$;
2. $Q = \partial_0 + [\lambda_2 u - b(\vec{x})]\partial_u$, *де* $\triangle b = b^2 + \lambda_1 b + \lambda_2\lambda_0$,
   $H = u$, $F = \lambda_2 u^2 + \lambda_1 u + \lambda_0$;
3. $Q = \partial_1 + a(x_0, x_1)u\partial_u$, *де* $a_0 + a_{11} = -2aa_1 + \lambda a$,
   $H = 1$, $F = \lambda u \ln u$, $\lambda \neq 0$.

Тут λ, λ_0, λ_1, λ_2 – довільні сталі.

Для класу (17) знайдено в явному вигляді широкі класи інволютивних множин двох операторів Q-умовної симетрії.

Отримані оператори використано для побудови анзаців та проведення редукції відповідних рівнянь до диференціальних рівнянь з двома змінними. Показано, що наслідком Q-умовної симетрії для рівнянь такого типу є можливість розділення змінних та проведення антиредукції.

У роботі [24] умовна інваріантність нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u = F(u) \tag{18}$$

вивчалась при додатковій умові, що складається з двох рівнянь

$$u_\mu u^\mu = G(w, u), \quad Qu = 0. \tag{19}$$

Тут $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $F = F(u)$, $G = G(w, u)$, $H = H(w, u)$ – довільні гладкі функції, $w = \alpha x = \alpha_\mu x^\mu$, α – довільний сталий вектор,

$$Q = \alpha_\mu\partial_\mu - H(w, u)\partial_u. \tag{20}$$

Теорема 7. *Рівняння* (18) *інваріантне відносно оператора* (20) *при умові* (19), *якщо функції F, G, H задовольняють систему*

$$2H_w + G_u = 2F, \quad \alpha^2 G_w + HG_u - 2(H_u G + HH_w) = 0.$$

Наведемо деякі з знайдених у явному вигляді функцій F, G, H:

1. $F = \lambda u$, $G = u^2(\lambda - \cosh^{-2} w)$, $H = u\tanh w$;
2. $F = \lambda\sinh u$, $G = 4\lambda\sinh^2\dfrac{u}{2} + \dfrac{16}{\cosh^2 w}\sinh^2\dfrac{u}{4}$,
   $H = 2\tanh w\sinh\dfrac{u}{2}$;
3. $F = \lambda\sin u$, $G = 4\lambda\sin^2\dfrac{u}{2} - \dfrac{16}{\cosh^2 w}\sin^2\dfrac{u}{4}$,
   $H = 2\tan w\sin\dfrac{u}{2}$;
4. $F = -\sin u$, $H = -\dfrac{2[(x_1 + C)\cos\frac{u}{2} + \cosh x_1\sin\frac{u}{2}]}{(x_1 + C)\sinh x_1 - \cosh x_1}$,
   $G = \dfrac{4}{H}(H\cos u - H_u\sin u + 2HH_{1u} - H_{11})$.

6. Нелокальні перетворення еквівалентності. Розглянемо систему нелінійних рівнянь дифузії

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \tag{21}$$

де $u \in \mathbb{R}^2$, $f(u) = (f^{ab})$; $u^a = u^a(t,x)$, $f^{ab} = f^{ab}(u)$ – довільні гладкі функції, $a, b = 1, 2$. Застосувавши до системи (21) ланцюжок нелокальних перетворень

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{22}$$

де $v^a = v^a(t,x)$ – нові невідомі функції;

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{23}$$

де x_0, x_1 – нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні,

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w^1_1 = z^1, \quad w^2_1 = z^2, \tag{24}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ – нові залежні змінні, одержимо систему

$$z_0 = \partial_1[F(z)z_1], \tag{25}$$

де $z \in \mathbb{R}^2$, $z_\mu = \frac{\partial z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $F(z) = (F^{ab})$, $F^{ab} = F^{ab}(z)$, $\mu = 0, 1$, причому функції $F^{ab}(z)$ пов'язані із функціями f^{ab} співвідношеннями

$$\begin{aligned}
&F^{11} = (z^1)^{-2}\big[f^{11} + z^2 f^{12}\big],\\
&F^{12} = -(z^1)^{-1} f^{12},\\
&F^{21} = (z^1)^{-3}\big[z^2(f^{11} + z^2 f^{12}) - (f^{21} + z^2 f^{22})\big],\\
&F^{22} = (z^1)^{-2}\big[f^{22} - z^2 f^{12}\big],
\end{aligned} \tag{26}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$, $F^{ab} = F^{ab}(z)$.

Таким чином [25], ланцюжок замін (22)–(24) зводить систему (21) до системи рівнянь(25) того ж вигляду і навпаки, неважко переконатися, що система (25) за допомогою вказаних замін зводиться до системи (21).

Якщо припустити, що система (21) лінійна, тобто $f(u) = \Lambda$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$ – стала матриця, то, використавши формули (26), одержимо систему

$$\begin{aligned}
&z^1_0 = \partial_1\left[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{12}z^2}{(z^1)^2} z^1_1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z^2_1\right],\\
&z^2_0 = \partial_1\left[\frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12}z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22}z^2)}{(z^1)^3} z^1_1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}z^2}{(z^1)^2} z^2_1\right],
\end{aligned} \tag{27}$$

яка за допомогою перетворень (22)–(24) зводиться до лінійної системи вигляду $u_t = \Lambda u_{xx}$.

Розглянемо неінваріантна відносно алгебри Галілея систему

$$\begin{aligned}
&z^1_0 = \partial_1\left[\frac{z^1_1}{2(z^1)^2}\right],\\
&z^2_0 = \partial_1\left[-\frac{z^2}{(z^1)^3}\left(\frac{1}{2} + g\left(\frac{z^2}{z^1}\right)\right) z^1_1 + g\left(\frac{z^2}{z^1}\right)\frac{z^2_1}{(z^1)^2}\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

Неважко переконатися, що ця система одержується дією перетворень (22)–(24) на систему

$$\begin{aligned}
&u^1_t = \partial_x\left[\frac{1}{2}u^1_x\right],\\
&u^2_t = \partial_x\left[\frac{u^2}{u^1}u^1_x + g(u^2)u^2_x\right],
\end{aligned} \tag{29}$$

яка інваріантна [26] відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$. Побудувавши по операторах алгебри $AG(1,1)$ анзаци для системи (29) та подіявши на них перетвореннями (22)–(24), одержимо нелокальні анзаци для системи (28) [27], які неможливо отримати в рамках теорії С. Лі. Ці анзаци редукують систему (28) до систем звичайних диференціальних рівнянь, розв'язавши які за допомогою відповідних анзаців, можна знайти розв'язки системи (28).

В даній роботі зроблено огляд основних досягнень другого покоління полтавських вчених з наукової школи, створеної Вільгельмом Іллічем Фущичем. Наведені результати свідчать про те, що його ідеї живуть і розвиваються молодими науковцями.

[1] Fushchych W.I. Anzatz'95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2.** – C. 216–235.

[2] Блажко Л.М. Інваріантність квазілінійного рівняння відносно конформної алгебри // Праці Інституту математики НАН України. – 2001. – **36**. – С. 40–44.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наукова думка, 1989. – 339 с.

[4] Сєров М.І., Блажко Л.М. Симетрійна редукція двовимірного і тривимірного рівняння Борна–Інфельда // Вісник Харківського ун-ту. – 2000. – № 475. – С. 394–399.

[5] Фущич В.І., Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г. Конформна інваріантність системи рівнянь ейконалу // Доп. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 43–47.

[6] Фущич В.І., Сєров М.І., Сєрова М.М., Глєба А.В. Ліївська та умовна симетрія системи рівнянь Гамільтона–Якобі // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С.49–52.

[7] Глєба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь // Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – 120 с.

[8] Сєров М.І., Жадан Т.О., Блажко Л.М. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**. – С. 1128–1145.

[9] Жадан Т.О. Інваріантність системи рівнянь дифузії-конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея // Вісник Київського ун-ту. Серія: математика, механіка. – 2004. – Випуск 12. – С. 70–75.

[10] Woyczynski W.A. Burgers–KPZ turbulence Göttingen lectures – Berlin: Springer, 1998. – 320 p.

[11] Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion // Nonlinear Analysis. – 1999. – **37**. – P. 635–675.

[12] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.-Y. The global attractor of a dissipative nonlinear evolution system // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 124–142.

[13] Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions // J. Nonlinear Math.Phys. – 1995. – **2**. – P. 374–383.

[14] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system // J. Phys. A: Math. Gen. – 1990. – **23**. – P. 3885–3894.

[15] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg–de Vries and Burgers equations // Доп. НАН України. – 1994. – № 12. – P. 42–44.

[16] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 1262–1270.

[17] Ічанська Н.В. Ліївська та умовна симетрії деяких нелінійних еволюційних рівнянь // Дис. . . . канд.фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – 148 с.

[18] Фущич В.І., Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г. Конформна симетрія нелінійного циліндрично-симетричного хвильового рівняння // Доп. НАН України. – 1998. – № 4. – С. 64–68.

[19] Сагомонян А.Я. Проникание. – Москва: Изд-во Московского ун-та, 1974. – 300 с.

[20] Сєрова М.М., Ічанська Н.В. Інваріантність рівнянь теорії проникання відносно розширеної алгебри Галілея // Вісник Київського ун-ту. – № 4. – 2000. – С. 107–111.

[21] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.

[22] Подошвелев Ю.Г. Q-умовна інваріантність рівняння акустики // Праці Інституту математики НАН України. – 1998. – **19**. – С. 174–177.

[23] Подошвелев Ю.Г. Класична та умовна симетрія нелінійних хвильових рівнянь // Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. – 109 с.

[24] Сєров М.І., Подошвелев Ю.Г., Яковенко Т.П. Умовна симетрія нелінійного хвильового рівняння $\Box u = F(u)$ // Вісник Київського ун-ту. – 2000. – № 3. – С. 158–163.

[25] Сєров М.І., Омелян О.М., Черніга Р.М. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень // Доп. НАН України. – 2004. – № 10. – С. 39–45.

[26] Омелян О.М. Інваріантність нелінійної системи дифузії відносно алгебри Галілея / Матеріали 9-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (16–19 травня 2002, м. Київ). – Київ, 2002. – С. 149.

[27] Омелян О.М. Нелокальні формули розмноження розв'язків системи нелінійних рівнянь дифузії // Матеріали 10-ої Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука (13–15 травня 2004, м. Київ). – Київ, 2004. – С. 197.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 270–275

УДК 517.9

Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса

М.М. СЄРОВА

Полтавський нац. технічний університет ім. Юрія Кондратюка
E-mail: k26@pntu.poltava.ua

Система одновимірних рівнянь Нав'є–Стокса узагальнена на випадок двовимірного векторного поля та однієї просторової змінної із збереженням інваріантності відносно узагальненої алгебри Галілея.

The system of one-dimensional Navier–Stokes equations is generalized two the case of two-dimensional vector field and one space variable, with preserving invariance under generalized Galilei algebra.

1. Вступ. Основними рівняннями, які описують процеси гідродинаміки є система рівнянь Нав'є–Стокса. В одновимірному випадку дана система має вигляд:

$$\begin{aligned} &u_0 + uu_1 + u_{11} = -\tfrac{1}{\rho}\partial_1 p, \\ &\rho_0 + \partial_1(\rho u) = 0, \quad p = f(\rho), \end{aligned} \tag{1}$$

де $u = u(x)$ – швидкість, $\rho = \rho(x)$ – густина, $p = p(x)$ – тиск рідини, $x = x(x_0, x_1)$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$, $f(\rho)$ – довільна гладка функція.

У роботах [1–6] досліджені симетрійні властивості системи рівнянь Нав'є–Стокса та одержані її інваріантні розв'язки. При довільній гладкій функції $f(\rho)$ система (1) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1,1)$, базисні оператори якої мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_u. \tag{2}$$

Якщо ж $f(\rho) = \lambda\rho^k$ (λ, k – довільні сталі), то базисні елементи (2) розширюються оператором масштабних перетворень

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u + \tfrac{2}{1-k}\rho\partial_\rho. \tag{3}$$

Найбільш широку симетрію система Нав'є–Стокса (1) допускає у випадку $f(\rho) = \lambda\rho^3$. При такому значенні $f(\rho)$ максимальною в розумінні С. Лі алгеброю інваріантності системи (1) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u - \rho\partial_\rho, \\ &\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \rho\partial_\rho) + (x_1 - x_0 u)\partial_u. \end{aligned} \tag{4}$$

Класичним узагальненням системи (1) на випадок довільної кількості незалежних змінних $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$ є система:

$$\begin{aligned} &u_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + m\triangle\vec{u} = -\tfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ &\rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0, \quad p = f(\rho). \end{aligned} \tag{5}$$

Таке узагальнення (5) є правильним як з фізичної точки зору, так і з точки зору симетрійного аналізу, оскільки симетрійні властивості системи (5) відповідають симетрійним властивостям системи (1), враховуючи розширення простору $(\vec{x}, \vec{u})$, тобто максимальною алгеброю інваріантності системи (5) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,n)$ з наступними базисними операторами:

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G_a = x_0\partial_a + \partial_{u^a}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - u^a\partial_{u^a} - n\rho\partial_\rho, \\ &\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho) + (x_a - x_0 u^a)\partial_{u^a}. \end{aligned}$$

Але, незважаючи на це, система (5) має недолік: вона може застосовуватися тільки тоді, коли кількість функцій $\vec{u}$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x}$. Зауважимо, що при описанні деяких гідродинамічних процесів виникають ситуації, коли розмірність простору незалежних змінних $\vec{x}$ не співпадає з розмірністю векторного поля $\vec{u}$ (див. наприклад, [7, 8]). У таких випадках дані процеси моделюються іншими рівняннями.

Одним із прикладів такого моделювання може бути симетрійний принцип, на основі якого в даній роботі пропонуються інші математичні моделі, які узагальнюють одновимірну систему (1) і інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея, у яких розмірність вектора поля $\vec{u}$ не співпадає з кількістю просторових змінних $\vec{x}$.

Оскільки основу системи Нав'є–Стокса складає рівняння Бюргерса

$$u_0 + uu_1 + u_{11} = 0, \tag{6}$$

то спочатку необхідно його узагальнити на випадок багатьох залежних змінних.

Добре відомо, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння (6) є узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,1)$, базисні елементи якої

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u\partial_u - \rho\partial_\rho,$$
$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \rho\partial_\rho) + (x_1 - x_0u)\partial_u \tag{7}$$

задовольняють комутаційним співвідношенням

$$[\partial_0, \partial_1] = 0, \quad [\partial_0, G] = \partial_1, \quad [\partial_0, D] = 2\partial_0,$$
$$[\partial_0, \Pi] = D, \quad [\partial_1, G] = 0, \quad [\partial_1, D] = \partial_1,$$
$$[\partial_1, \Pi] = G, \quad [G, D] = -G, \quad [G, \Pi] = 0, \quad [D, \Pi] = 2\Pi. \tag{8}$$

Розглянемо випадок $\vec{u} = \vec{u}(x_0, x_1) = \{u^1, u^2\} \in \mathbb{R}^2$. Рівняння (6) узагальнимо наступною системою

$$u_0^a + F^{ab}(u)u_1^b + u_{11}^a = 0, \tag{9}$$

де F^{ab} – довільні гладкі функції, $a, b = 1, 2$.

Будемо вимагати, щоб система (9) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами вигляду

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \eta^a(x,u)\partial_{u^a},$$
$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \zeta^a(x,u)\partial_{u^a},$$
$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + \sigma^a(x,u)\partial_{u^a}. \tag{10}$$

У роботі [9] показано, що зображення операторів (10) можуть бути лише лінійними по змінних u, тобто

$$\eta^a = a^{ab}(x)u^b + b^a(x), \quad \zeta^a = \alpha^{ab}(x)u^b + \beta^a(x),$$
$$\sigma^a = c^{ab}(x)u^b + d^a(x), \tag{11}$$

де a^{ab}, α^{ab}, c^{ab}, b^a, β^a, d^a – довільні гладкі функції.

Для того щоб оператори (10) утворювали базис алгебри $AG_2(1,1)$, потрібно щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням (8).

Враховуючи формули (11) і (8), одержуємо що оператори (10) мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + Q_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2,$$

$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + x_1Q_1 + x_0Q_2, \tag{12}$$

де $Q_i = (m_{iab}u^b + n_{ia})\partial_{u^a}$, m_{iab}, n_{ia} – довільні сталі.

Таким чином, наша задача звелася до знаходження таких функцій $F^{ab}(u)$ і сталих m_{iab}, n_{ia}, при яких система рівнянь (9) буде інваріантна відносно алгебри з базисними операторами (12). Детальний опис таких систем проведено в [9].

Використавши, наприклад, наступну систему з [9]

$$u_0^1 + u^1u_1^1 + u_{11}^1 = 0, \quad u_0^2 + u^1u_1^2 + u_{11}^2 = 0,$$

яка інваріантна відносно узагальненої алгебри алгебри з базисними операторами вигляду

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1},$$
$$x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + (x_1 - x_0u^1)\partial_{u^1},$$

одновимірну систему рівнянь Нав'є–Стокса (1) будемо узагальнювати на випадок двовимірного векторного поля $\vec{u}$ та однієї просторової змінної x_1 наступним чином

$$\vec{u}_0 + u^1\vec{u}_1 + \vec{u}_{11} = \vec{f}(\rho)\rho_1, \quad \rho_0 + \partial_1[\vec{g}(\rho)\vec{u}] = 0, \tag{13}$$

де $\vec{f} = (f^1(\rho), f^2(\rho))$, $\vec{g} = (g^1(\rho), g^2(\rho))$ – довільні гладкі вектор-функції.

Вимагаємо щоб система (13) була інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$, базисні елементи якої з врахуванням комутаційних співвідношень (8) мають вигляд

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1},$$
$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + mu^2\partial_{u^2} + k\rho\partial_\rho,$$
$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} + mu^2\partial_{u^2} + k\rho\partial_\rho) + x_1\partial_{u^1}, \tag{14}$$

де m, k – довільні сталі. Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Система* (13) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея з базисними операторами* (14), *тоді і тільки тоді, коли*

$$k = -1, \quad m = 0,$$
$$f^1 = \lambda_1\rho, \quad f^2 = \lambda_2, \quad g^1 = \rho, \quad g^2 = \lambda_3\rho^2, \tag{15}$$

де λ_1, λ_2, λ_3 *– довільні сталі.*

Доведення. Використавши критерій С. Лі [10, 11] інваріантності системи (13) відносно алгебри з базисними операторами (14), одержуємо систему визначальних рівнянь відносно невідомих функцій $\vec{f}$, $\vec{g}$ та сталих k, m:

$$
\begin{aligned}
&k\rho f^1 + (k+2)f^1 = 0, \quad k\rho \dot{f}^2 + (k-m+1)f^2 = 0,\\
&m = 0, \quad k\ddot{g}^1 = 0, \quad \dot{g}^1 = 1, \quad k(\rho\dot{g}^1 - g^1) = 0, \quad g^1 = -k\rho,\\
&k\rho\ddot{g}^2 + (m+1)\dot{g}^2 = 0, \quad k\rho\dot{g}^2 + (m-k+1)g^2 = 0. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Неважко бачити, що система (16) сумісна лише при $k = -1$, $m = 0$ і її загальний розв'язок задається формулами (15). □

Отже, система

$$
\begin{aligned}
&u_0^1 + u^1u_1^1 - u_{11}^1 = \lambda_1\rho\rho_1, \quad u_0^2 + u^1u_1^2 - u_{11}^2 = \lambda_2\rho_1,\\
&\rho_0 + \partial_1[\rho(u^1 + \lambda_3\rho u^2)] = 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними операторами

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho,\\
&\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \rho\partial_\rho) + x_1\partial_{u^1}.
\end{aligned}
$$

Так як система (17) узагальнює одномірну систему рівнянь Нав'є–Стокса як по формі так і по симетрійних властивостях, то вона претендує на описання реальних процесів гідродинаміки у випадку двовимірного векторного поля $\vec{u}$, та однієї просторової змінної x_1.

Аналогічно для узагальнення системи (1) можна використати інші результати [9].

[1] Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье–Стокса, описывающих движение со свободной частицей // ДАН СССР. – 1972. – **202**. – С. 302–305.

[2] Сєров М.І., Тулупова Л.О. Симетрійні властивості узагальнених рівнянь Нав'є–Стокса // Записки фіз.-мат. ф-ту ПДПІ ім. В.Г. Короленка. – 1996. – С. 7–13.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Попович Р.Е. О редукции уравнений Навье–Стокса к линейным уравнениям теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1992. – № 2. – С. 23–30.

[4] Fuschysch W.I., Popovich R.O. Symmetry reduction and exact solutions of the Navier–Stokes equations. I, II // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 75–113, P. 158–188.

[5] Ludlow D.K., Clarkson P.A., Bassom A.P. Similarity reductions and exact solutions for the two-dimensional incompressible Novier–Stokes equations // Studies Appl. Math. – 1991. – **103**, № 3. – P. 183–240.

[6] Profiloa G., Solianib G., Tebaldic C. Some exact solutions of the two-dimensional Navier–Stokes equations // Intern. J. Eng. Sci. – 1998. – **36**. – P. 459–471.

[7] Fuschysch W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Ameron T.K. On nonlinear heat equation // Доповіді АН України. – 1992. – № 11. – P. 27–33.

[8] Woyczynski W.A. Burgers–KPZ turbulence. Göttingen lectures. – Berlin: Springer, 1998. – 318 p.

[9] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2003. – 120 с.

[10] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[11] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 276–283

УДК 517.9

Узагальнення бігамільтонових зображень Лакса та оператори перетворень типу Дарбу

Ю.М. СИДОРЕНКО

Львівський національний університет імені Івана Франка
E-mail: y_sydorenko@franko.lviv.ua

Запропоновано метод узагальнення бігамільтонових динамічних систем. Для інтегрування отриманих систем використовується метод бінарних одягаючих перетворень Дарбу.

A method of generalization of bi-Hamiltonian dynamical systems is proposed. For integrating the obtained generalized systems the binary Darboux dressing-method is applied.

1. Вступ. Робота складається із вступу, двох розділів і заключних зауважень. У розділі 2 наводяться основні поняття, означення і необхідні в подальших розділах формули і властивості з теорії формальних символів інтегродиференціальних операторів. У розділі 3 побудовано векторне узагальнення породжуючого оператора нелінійної моделі Шредінгера, знайдено для нього групу операторів перетворення типу Дарбу та доведена теорема Дарбу, яка дозволяє будувати широкі класи точних розв'язків для нелінійної багатокомпонентної моделі типу Шредінгера.

2. Вихідні положення. Розглянемо над полем $\mathbb{C}$ лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i : \, i, n(L) \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1}$$

де коефіцієнти a_i є матричними $(N \times N)$-функціями "просторової" змінної $x = t_1$: $a_i \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$ і еволюційних параметрів $t_2 := t$, t_3, $\ldots$. Матричні коефіцієнти $a_i(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots)$, вважаються

гладкими функціями векторної змінної t, яка має скінчену кількість компонент, і належать деякому функціональному простору $\mathcal{H}$, який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x}$.

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ визначається комутатором Лі $[\cdot,\cdot] : \zeta \times \zeta \to \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1L_2 - L_2L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$\mathcal{D}^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} \mathcal{D}^{n-j}, \tag{2}$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{H} \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in \mathcal{H} \subset \zeta$, $\mathcal{D}^n\mathcal{D}^m = \mathcal{D}^m\mathcal{D}^n = \mathcal{D}^{n+m}$, $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{j!}$, $j > 0$; $\binom{n}{0} := 1$.

Формула (2) задає композицію оператора $\mathcal{D}^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in \mathcal{H} \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $\mathcal{D}^k\{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Порядком оператора $L = \sum\limits_{i=-\infty}^{n(L)} a_i \mathcal{D}^i$, де $a_{n(L)} \neq 0$, називається ціле число $n(L)$: $\operatorname{ord} L = n(L)$.

Для оператора $S \in \zeta$ транспонований і спряжений оператори задаються формулами

$$S^\tau := \sum_{i=-\infty}^{n(S)} (-1)^i \mathcal{D}^i s_i^\top, \quad S^* := \sum_{i=-\infty}^{n(S)} (-1)^i \mathcal{D}^i s_i^*,$$

де $s_i^* := \bar{s_i}^\top$ – ермітово-спряжена матриця, тобто $S^* := \bar{S^\tau}$, "$\top$" – символ операції звичайного матричного транспонування.

Під символом $\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top \in \zeta$ згідно правила Лейбніца при $n = -1$ розуміємо формальний ряд

$$\varphi\mathcal{D}^{-1}\psi^\top = \varphi\psi^\top\mathcal{D}^{-1} - \varphi\psi_x^\top\mathcal{D}^{-2} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \varphi(\psi^{(i)})^\top \mathcal{D}^{-i-1},$$

де φ, $\psi \in \mathrm{Mat}_{N\times K}(\mathbb{R} \to \mathbb{C})$. Цей ряд є символом оператора Вольтери $\hat{K}$ по змінній x з виродженим ядром

$$\hat{K}\{f\} = \int^x K(x,y) f(y)\, dy, \quad K(x,y) = \varphi(x)\psi^\top(y).$$

Нехай $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\mathcal{I} \ni t_n$ – еволюційний параметр з деякої множини параметрів $\mathcal{I}$; $1 < n \in \mathbb{N}$, $\partial_{t_n} := \frac{\partial}{\partial t_n}$ – оператор диференціювання; $\partial_{t_n} f := f\partial_{t_n} + f_{t_n} = f\partial_{t_n} + \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\{f\} := \frac{\partial f}{\partial t_n}$, $\partial_{t_n}\mathcal{D}^j = \mathcal{D}^j\partial_{t_n}$. Позначимо через E елемент центру алгебри ζ. Розглянемо множину $\hat{\zeta}$, яка містить алгебру Лі ζ в якості підмножини:

$$\hat{\zeta} \ni (\alpha_n; S) \cong \alpha_n E\partial_{t_n} - S = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(S)} s_i\mathcal{D}^i,$$

$$[(\alpha_n; A), (\alpha_m; B)] := (0; \alpha_m E A_{t_m} - \alpha_n E B_{t_n} + [A, B]) \in \hat{\zeta}.$$

Зауваження. З попередньої формули видно, що $\hat{\zeta}$ є мультиплікативно-замкненою відносно операції Лі (комутатора) множиною.

Таким чином, елементами множини $\hat{\zeta}$ є еволюційні інтегродиференціальні оператори вигляду $\hat{\zeta} \ni L = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\geq 0} \ni L_{\geq 0} = \alpha_n E\partial_{t_n} - \sum_{i=0}^{n(L)} u_i\mathcal{D}^i$, $\hat{\zeta}_{\leq 0} = \zeta_{\leq 0}$.

Ермітово-спряжений оператор L^* має вигляд: $L^* := -\bar{\alpha}_n E^*\partial_{t_n} - \sum_{i=-\infty}^{n(L)} (-1)^i\mathcal{D}^i a_i^*$. Транспонований оператор L^τ і оператор L^* задовольняють співвідношення $L^* = \bar{L}^\tau$.

Надалі обмежимося випадком $E = I_\zeta := I$.

Нехай σ – невироджена стала матриця розмірності $N \times N$.

Означення 1. Інтегро-диференціальний оператор L називається σ-косоермітовим (ермітовим), якщо $L^* = -\sigma L\sigma^{-1}$ ($L^* = \sigma L\sigma^{-1}$).

Означення 2. Інтегро-диференціальний оператор L називається σ-кососиметричним (σ-симетричним), якщо $L^\tau = -\sigma L\sigma^{-1}$ ($L^\tau = \sigma L\sigma^{-1}$).

Очевидно, σ-косоермітові і σ-кососиметричні інтегро-диференціальні оператори утворюють мультиплікативно-замкнені множини стосовно операції Лі-комутатора ($[A, B] := AB - BA$).

Означення 3. Інтегро-диференціальний оператор W називається σ-унітарним, якщо $W^{-1} = \sigma W^*\sigma^{-1}$.

Означення 4. Інтегро-диференціальний оператор W називається σ-ортогональним, якщо $W^{-1} = \sigma W^\tau\sigma^{-1}$.

Надалі через σ_i позначено стандартні матриці Паулі, $i = 1, 2, 3$.

Лема 1. *Нехай $L_0 \in \zeta$ задовольняє 2 редукції:*

$$1)\ \ L_0^* = -\sigma_3 L_1\sigma_3, \quad 2)\ \ L_0^\tau = \sigma_2 L_1\sigma_2.$$

Тоді $L = WL_0W^{-1}$ задовольняє ці дві редукції тоді і лише тоді, коли виконуються умови:

1) W *– σ_3-унітарний,* 2) W *– σ_2-ортогональний.*

Доведення.

$$1)\ \ L_0^* = -\sigma_3 L_0\sigma_3,$$
$$L^* = (WL_0W^{-1})^* = (W^{-1})^* L_0^* W^* =$$
$$= \sigma_3 W\sigma_3(-\sigma_3 L_0\sigma_3)\sigma_3 W^{-1}\sigma_3 = -\sigma_3 WL_0W^{-1}\sigma_3 = -\sigma_3 L\sigma_3.$$
$$2.\ \ L_1^\tau = \sigma_2 L_0\sigma_2,$$
$$L_2^\tau = (WL_0W^{-1})^\tau = (W^{-1})^\tau L_0^\tau W^\tau =$$
$$= \sigma_2 W\sigma_2(\sigma_2 L_0\sigma_2)\sigma_2 W^{-1}\sigma_2 = \sigma_2 WL_1W^{-1}\sigma_2 = \sigma_2 L\sigma_2.$$

3. Побудова та інтегрування рекурсійних зображень Лакса для нелінійного рівняння Шрьодінгера. Для нелінійного рівняння Шрьодінгера (NS)

$$iq_{1t} = q_{1xx} + \mu|q_1|^2 q_1 = K[q_1], \tag{3}$$

де $q_1(x, t)$ – скалярна комплекснозначна функція, $\mu \in \mathbb{R}$, відоме операторне зображення Лакса:

$$-iL_t = [L, K'^\tau] \Longleftrightarrow [L, i\partial_t - K'^\tau] = 0,$$

де оператор L називається породжуючим (рекурсійним) оператором і факторизується узгодженою парою гамільтонових операторів (див., наприклад, [1–3]),

$$L = \sigma_3\mathcal{D} + \mu\begin{pmatrix} q_1 \\ \alpha\bar{q}_1 \end{pmatrix}\mathcal{D}^{-1}(\bar{q}_1 \quad -\bar{\alpha}q_1), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad |\alpha|^2 = 1,$$
$$K'^\tau = \sigma_3\mathcal{D}^2 + \begin{pmatrix} 2\mu|q_1|^2 & -\mu\bar{\alpha}q_1^2 \\ \mu\alpha\bar{q}_1^2 & -2\mu|q_1|^2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

K' – похідна Фреше оператора K.

Безпосередніми обчисленнями нескладно перевірити справедливість наступного твердження для операторів L і $M := i\partial_t - K'^\tau$ пари Лакса (4).

Твердження 1. 1) *Оператор L є σ_3-косоермітовим та σ_2-симетричним, тобто*

$$L^* = -\sigma_3 L \sigma_3, \quad L^\tau = \sigma_2 L \sigma_2.$$

2) *Оператор M є σ_3-ермітовим та σ_2-кососиметричним, тобто*

$$M^* = \sigma_3 M \sigma_3, \quad M^\tau = -\sigma_2 M \sigma_2.$$

В цьому розділі ми будуємо комутуючу пару операторів L_{NS} і M_{NS}, які є векторними узагальненнями пари Лакса L, M (4) і зберігають її властивості, сформульовані в твердженні 1.

Для пари операторів L_{NS} і M_{NS} побудовано також групу перетворень типу Дарбу, а відповідна теорема Дарбу дозволяє побудувати широкі класи точних розв'язків рівняння Лакса $[L_{NS}, M_{NS}] = 0$, яке рівносильне векторному узагальненню нелінійного рівняння Шрьодінгера (3).

Розглянемо пару операторів:

$$L = \sigma_3 \mathcal{D} + u + q\mathcal{D}^{-1} r^*, \tag{5}$$
$$M = i\partial_t - \sigma_3 \mathcal{D}^2 - v\mathcal{D} - w, \tag{6}$$

де

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1l} \\ q_{22}, q_{22}, \ldots, q_{2l} \end{pmatrix},$$
$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1l} \\ r_{22}, r_{22}, \ldots, r_{2l} \end{pmatrix},$$

і кожна з чотирьох систем функцій q_i, r_i є лінійно незалежною, $i = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$, $u = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ u_2 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$, тут u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}, $i, j = 1, 2$ – гладкі функції змінних x, t.

Теорема 1. *Оператори L, M (5)–(6) комутують і задовольняють твердження 1 тоді і тільки тоді, якщо вони мають вигляд*

$$L := L_{NS} = \sigma_3 \mathcal{D} + \begin{pmatrix} \mathbf{q_1} \\ \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E \end{pmatrix} N \mathcal{D}^{-1} (\mathbf{q_1}^* - E^* \bar{N} \mathbf{q_1}^\top) =$$
$$= \sigma_3 \mathcal{D} + \check{\Phi} N \mathcal{D}^{-1} \check{\Phi}^* \sigma_3,$$

$$M := M_{NS} = i\partial_t - \sigma_3 \mathcal{D}^2 - \begin{pmatrix} v_{11} & 0 \\ 0 & v_{11} \end{pmatrix} \mathcal{D} - \tag{7}$$
$$- \begin{pmatrix} 2\mathbf{q_1} N \mathbf{q_1}^* & -\mathbf{q_1} E^{-1} \mathbf{q_1}^\top \\ \bar{\mathbf{q}}_1 \bar{E}^{-1} \mathbf{q_1}^* & -2\bar{\mathbf{q}}_1 \bar{N} \mathbf{q_1}^\top \end{pmatrix}, \quad v_{11} = -\bar{v}_{11}, v_{11} = v_{11}(t).$$

де $\mathbf{q}_1 = (q_1, q_2, \ldots, q_l)(x)$ – l-компонентна комплекснозначна вектор-функція, $\check{\Phi} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{q_1} \\ \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E \end{smallmatrix}\right)$, $N \in \mathrm{Mat}_{l\times l}(\mathbb{C})$ – унітарна, $E \in Mat_{l\times l}(\mathbb{C})$ – симетрична, $N\bar{E}N^\top E^\top = I$, і вектор-функція $\mathbf{q_1}$ задовольняє рівняння типу Шрьодінгера

$$i\mathbf{q}_{1t} = \mathbf{q}_{1xx} + 2\mathbf{q}_1 N \mathbf{q}_1^* \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 E^{-1} \mathbf{q}_1^\top \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E.$$

Доведення. Коефіцієнти оператора M (6) виражаються через коефіцієнти оператора L (5) з умови комутативності $[L, M] = 0$. Зв'язки між коефіцієнтами оператора L (5) рівносильні редукційним обмеженням твердження 1. Векторне рівняння типу Шрьодінгера рівносильне умові комутативності операторів L_{NS} і M_{NS} (7).

Теорема 2. *Нехай $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{smallmatrix}\right)$ – фіксована $(2\times K)$-матриця розв'язків лінійної системи:*

$$\sigma_3 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} \Lambda, \quad \text{де} \quad \Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(i\mathbb{R}),$$
$$i \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix}_t = \sigma_3 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix}_{xx}, \tag{8}$$

а f – довільний розв'язок цієї системи. Тоді

$$1) \quad L := W \sigma_3 \mathcal{D} W^{-1} = \sigma_3 \mathcal{D} + \Phi \check{N} \mathcal{D}^{-1} \Phi^* \sigma_3, \tag{9}$$

де

$$W := I + \Phi \mathcal{D}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix}^\top, \tag{10}$$
$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i\bar{\varphi}_1 \end{pmatrix} \left(C + \int^x (\varphi_1^\top \bar{\varphi}_1 - \varphi_1^* \varphi_1) ds \right)^{-1} =: \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

$\varphi_1^\top \bar{\varphi}_1 - \varphi_1^* \varphi_1 \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{C})$ – ермітова та кососиметрична матрична функція, а сталі матриці $\check{N}$, C задовольняють співвідношення $\check{N} = \Lambda^\top C - C\Lambda \in \mathrm{Mat}_{K\times K}(\mathbb{R})$ – симетрична; $C^* = C$, $C = -C^\top$.

2) $f \to F = W\{f\}$, *де F є розв'язком рівняння: $L\{F\} = F\Lambda$.*

Доведення. Оператор W (10) отримується з оператора загальних бінарних перетворень Дарбу [4] після врахування редукційних обмежень твердження 1 на власні функції оператора L і спряженого оператора L^*. Неважко перевірити, що оператори $L_0 = \sigma_3\mathcal{D}$, $M_0 = i\partial_t - \sigma_3\mathcal{D}^2$ і W задовольняють умови леми 1, отже і оператори $L := WL_0W^{-1}$ та $M := WM_0W^{-1}$ задовольняють редукційні обмеження теореми 1. Явний вигляд операторів L (9) і M (7) можна знайти як в результаті безпосередніх обчислень, так і як частковий випадок загального інтегродиференціального оператора L, отриманого в роботі [4] після врахування редукційних обмежень твердження 1.

Наслідок 1. *При $K = l$ та $N = \check{N}$ функція*

$$\Phi_1 = (\Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1K})$$

є розв'язком l-компонентного нелінійного рівняння Шрьодінгера:

$$i\mathbf{q}_{1t} = \mathbf{q}_{1xx} + 2\mathbf{q}_1 N\mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 E^{-1}\mathbf{q}_1^\top \bar{\mathbf{q}}_1 N^\top E.$$

3. Заключні зауваження. Один із систематичних методів отримання векторно-матричних узагальнень відомих інтегровних моделей започатковано в роботах [5, 6] (див. також [7, 8]). Цей метод базується на використанні "нестандартних" – інтегродиференціальних зображень Лакса. Використання інших, специфічних зображень (теж інтегродиференціальних), пов'язаних з бігамільтоновістю більшості відомих інтегровних моделей, коли відповідні оператори Лакса (рекурсійні оператори, див. наприклад [1–3]) виникають як факторизація двох гамільтонових, було продемонстровано з цією ж метою в роботі [7] для скалярної алгебри ζ. В попередньому розділі ми розширили цей підхід на випадок матричної алгебри ζ, в якій крім рекурсійних зображень Лакса для НРШ міститься також багато інших цікавих зображень. Зокрема бігамільтонові зображення різних модифікованих систем типу Шрьодінгера [1, 2], для яких можна отримати аналогічні результати. Цим питанням планується присвятити окрему роботу.

[1] Сидоренко Ю.Н. О гамильтоновости некоторых двукомпонентных систем / Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. т. 6 // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1986. – **150**. – С. 143–153.

[2] Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.

[3] Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – Москва: Наука, 1986. – 528 с.

[4] Sydorenko Yu. Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev–Petviashvili (cKP) flows // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 470–477.

[5] Sidorenko Yu. KP-hierachy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems // Укр. мат журн. – 1993. – **25**. – С. 91–104.

[6] Sidorenko Yu., Strampp W. Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev–Petviashvilli hierarchy // J. Math. Phys. – 1993. – **34**. – P. 1429–1446.

[7] Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М. Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування // Математичні студії. – 2005.– **23**. – С. 31–51.

[8] Притула Н.М., Сидоренко Ю.М. Теорема Дарбу для породжуючого оператора нелінійної моделі Шредінгера / Тези доповідей міжнародної конференції "Математичний аналіз і суміжні питання". – Львів, 2005. – С. 83.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 284–292

УДК 517.912:512.816

Preliminary group classification of general two-dimensional quasi-linear elliptic type equations

S.V. SPICHAK

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: spichak@imath.kiev.ua

В статті розглядається задача групової класифікації квазілінійних рівнянь еліптичного типу в двовимірному просторі. Отримано переліки усіх рівнянь цього класу, які допускають напівпрості алгебри Лі операторів симетрії та алгебри Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві.

In the paper the problem of group classification of quasi-linear elliptic type equations in two-dimensional space is considered. We obtain the list of all equations of this type admitting semisimple Lie algebras of symmetry operators and Lie algebras of symmetry operators with non-trivial Levi decomposition.

We consider quasilinear two-dimensional equations of elliptic type

$$\Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

In (1) and below $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ is a two-dimensional Laplace operator, $u = u(x, y)$, F is an arbitrary smooth function in some domain of the space $W = \mathbb{R}^2 \times \underset{1}{V} = \langle x, y\rangle \times \langle u, u_x, u_y\rangle$, that is nonlinear, at least, with respect to one variable u, u_x, u_y.

Statement 1. *The Lie invariance group of equation* (1) *is generated by the infinitesimal operator*

$$\mathrm{v} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + c(x, y, u)\partial_u, \tag{2}$$

where functions a, b, c, F satisfy the following system of equations:

$$a_y + b_x = 0, \quad a_x - b_y = 0,$$

$$\begin{aligned} c_{xx} + c_{yy} + 2u_x c_{xu} + 2u_y c_{yu} + (u_x^2 + u_y^2)c_{uu} + (c_u - 2a_x)F = \\ = aF_x + bF_y + cF_u + [c_x + u_x(c_u - a_x) - u_y b_x]F_{u_x} + \\ + [c_y + u_y(c_u - b_y) - u_x a_y]F_{u_y}. \end{aligned} \tag{3}$$

It is not difficult to see that the first two equations are Cauchy–Riemann conditions, that means that functions a and b are harmonic ones.

The group $\mathcal{E}$ is formed by those transformations

$$\bar{x} = \alpha(x, y, u), \quad \bar{y} = \beta(x, y, u), \quad v = \gamma(x, y, u), \quad \frac{D(\bar{x}, \bar{y}, v)}{D(x, y, u)} \neq 0,$$

preserving differential structure of equation (1), that transform it to an equation of the form

$$v_{\bar{x}\bar{x}} + v_{\bar{y}\bar{y}} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, v, v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}}).$$

Statement 2. *The group $\mathcal{E}$ of equation* (1) *is formed by the following transformations:*

$$\bar{x} = \alpha(x, y), \quad \bar{y} = \beta(x, y), \quad v = \gamma(x, y, u), \tag{4}$$

where

$$\begin{aligned} &\alpha_x = \epsilon\beta_y, \quad \alpha_y = -\epsilon\beta_x \quad (\epsilon = \pm 1), \\ &\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \neq 0, \quad \gamma_u \neq 0. \end{aligned}$$

Lemma 1. *There exist such transformations from the group $\mathcal{E}$ that reduce operator* (2) *to one of the following operators:*

$$\mathrm{v} = \partial_x, \quad \mathrm{v} = \partial_u. \tag{5}$$

We start the group classification from the description of equations invariant with respect to Lie algebras with a non-trivial Levi decomposition.

First we will consider the following two equations of form (1):

$$\Delta u = f(u)(u_x^2 + u_y^2), \quad f \neq 0; \tag{6}$$

$$\Delta u = \lambda e^{\gamma u}, \quad \lambda, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \lambda\gamma \neq 0. \tag{7}$$

These equations are invariant with respect to groups of infinitesimal transformation with infinite number of parameters that are generated by operators of form (2).

Equation (6) can be reduced by the substitution

$$v = \int^u \Phi^{-1}(\xi) d\xi, \quad \Phi(u) = \exp\left(\int^u f(\eta) d\eta\right)$$

to the two-dimensional Laplace equation. Equation (7) is connected to the Laplace equation by the Bäcklund transformation.

Invariance of equation (1) with respect to Lie algebras of symmetry operators with non-trivial Levi decomposition. It is well known in the theory of abstract Lie algebras [1] that arbitrary Lie algebra with a non-trivial Levi decomposition contains some simple (semisimple) Lie algebra as a subalgebra. For this reason, first of all, we will describe equations that are invariant with respect to simple (semisimple) Lie algebras of symmetry operators.

Theorem 1. *Up to $\mathcal{E}$-equivalence, there are two classes of quasilinear equations of form* (1) *admitting Lie algebras of symmetry operators that are different realizations of the algebra* $so(3)$*:*

I. $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \operatorname{ch}^2 y :$

$$so^1(3) = \langle \partial_x, \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y, \\ - \operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y \rangle;$$

II. $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\xi \operatorname{ch} y, \eta \operatorname{ch} y), \quad \xi = (u_x - \operatorname{th} y) \sin u + u_y \cos u,$

$\eta = (u_x - \operatorname{th} y) \cos u - u_y \sin u :$

$$so^2(3) = \langle \partial_x, \operatorname{sh} y \cos x \partial_x - \operatorname{ch} y \sin x \partial_y + \operatorname{ch} y \cos x \partial_u, \\ - \operatorname{sh} y \sin x \partial_x - \operatorname{ch} y \cos x \partial_y - \operatorname{ch} y \sin x \partial_u \rangle.$$

Theorem 2. *Up to $\mathcal{E}$-equivalence, there are two classes of quasilinear equations of form* (1) *admitting Lie algebras of symmetry operators that are different realizations of the algebra* $sl(2, \mathbb{R})$*:*

I. $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = y^2 (u_x^2 + u_y^2) :$

$$sl^1(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \partial_x \rangle;$$

II. $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(v, \omega), \quad v = (1 - 2yu_x) \cos 2u + 2yu_y \sin 2u,$

$\omega = 2yu_y \cos 2u - (1 - 2yu_x) \sin 2u :$

$$sl^2(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_u, \partial_x \rangle.$$

It is well known from the theory of abstract Lie algebra over the field $\mathbb{R}$ that there exist four types of classical simple algebras:

1) type $A_{n-1} (n > 1)$ that contains four real forms of the algebra $sl(n, C)$: $su(n)$, $sl(n, \mathbb{R})$, $su(p, q)$ $(p + q = n, p \geq q)$, $su^*(2n)$;
2) type D_n $(n > 1)$ that contains three real forms of the algebra $so(2n, C)$: $so(2n)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n, p \geq q)$, $so^*(2n)$;
3) type B_n $(n > 1)$ that contains two real forms of the algebra $so(2n+1, C)$: $so(2n + 1)$, $so(p, q)$ $(p + q = 2n + 1, p > q)$;
4) type C_n $(n \geq 1)$ that contains three real forms of the algebra $sp(n, C)$: $sp(n)$, $sp(n, \mathbb{R})$, $sp(p, q)$ $(p + q = n, p \geq q)$.

and the following special cases of semisimple real algebras: G_1, F_4, E_6, E_7, E_8.

Theorem 3. *Equations of form* (1) *invariant with respect to a symmetry algebra with a non-trivial Levi decomposition are exhausted by ones presented in theorems* 1 *and* 2.

Sketch of proof. 1. $so(4) = \langle e_i | i = 1, 2, 3 \rangle \oplus \langle \bar{e}_i | i = 1, 2, 3 \rangle$. Then in accordance to the results of theorem 2 the operators e_i $(i = 1, 2, 3)$ represent a basis of realizations $so^1(3)$ or $so^2(3)$. Direct calculations show that in such case the operators $\bar{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ belong to the class of operators $c(u)\partial_u$, and in accordance to the statement obtained in the process of proof of theorem 2, there is no realizations of the algebra $so(3)$ in this class of operators. Thus, there exist no nonlinear equation of form (1) whose invariance algebra is isomorphic to the algebra $so(4)$.

2. The type G_2 contains one compact real form g_2 and one non-compact form g_2'. Since $g_2 \cap g_2' \sim su(2) \oplus su(2) \sim so(4)$ and algebra $so(4)$ does not have realizations in the given class of operators, in this class of operators the algebras g_2 and g_2' also do not have realizations.

3. For the algebras $so(3, 1)$ we will use Cartan's decomposition: $so(3, 1) = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \dot{\oplus} \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$, де $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = so(3)$, $[e_i, N_j] = \varepsilon_{ijl} N_l$, $[N_i, N_j] = -\varepsilon_{ijl} e_l$; $i, j, l = 1, 2, 3$; ε_{ijl} is antisymmetric tensor of third rank, $\varepsilon_{123} = 1$.

It can be proved that the realization has the form:

$$e_1 = \partial_x, \quad N_1 = \partial_y,$$

$$e_2 = \epsilon_1(\operatorname{sh} y \cos x\partial_x - \operatorname{ch} y \sin x\partial_y) + \operatorname{sh} y \sin x\partial_u,$$
$$e_3 = -\epsilon_1(\operatorname{sh} y \sin x\partial_x + \operatorname{ch} y \cos x\partial_y) + \operatorname{sh} y \cos x\partial_u,$$
$$N_2 = \epsilon_1(\operatorname{ch} y \sin x\partial_x + \operatorname{sh} y \cos x\partial_y) - \operatorname{ch} y \cos x\partial_u,$$
$$N_3 = \epsilon_1(\operatorname{sh} y \cos x\partial_x - \operatorname{sh} y \sin x\partial_y) + \operatorname{ch} y \sin x.$$

The respective invariant solution having the form

$$\Delta u = \lambda e^{2\epsilon_1 u}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0,$$

is the subcase of equation (7). □

Invariance with respect to decomposable algebras. In accordance to the above here we study existence of equations of form (1) invariant with respect to algebras of form $S \oplus N$, i.e. satisfying conditions

$$[S,S] \subset S, \quad [N,N] \subset N, \quad [S,N] = 0. \tag{8}$$

Possible realisations $so^1(3)$, $so^2(3)$, $sl^1(2,\mathbb{R})$, $sl^2(2,\mathbb{R})$ of semisimple algebras S (Levi factor) have been found in the theorems 1 and 2.

There exist six classes of nonlinear equations of form (1), whose maximal invariance algebras can be decomposed into the direct sum of the Levi factor and solvable Lie algebra:

1) $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2)\operatorname{ch}^2 y : \quad so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
2) $\Delta u = \operatorname{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y)^2 + u_y^2 \operatorname{ch}^2 y :$ $so^2(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
3) $\Delta u = y^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2)y^2 : \quad sl^1(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
4) $\Delta u = y^{-2}\tilde{F}(\omega), \quad \omega = 4y^2u_y^2 + (1-2yu_x)^2 : \quad sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
5) $\Delta u = \lambda \operatorname{ch}^{-1} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \lambda \neq 0 : \quad so^1(3) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle;$
6) $\Delta u = \lambda y^{-1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \quad \lambda \neq 0 : \quad sl^2(2,\mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, u\partial_u \rangle.$

Here $\tilde{F} = \tilde{F}(\omega)$ is an arbitrary smooth function, $\tilde{F}_{\omega\omega} \neq 0$.

Invariance with respect to non-decomposable algebras. Here we will investigate an existence of equations of form (1) invariant with respect to algebras of form $S \Subset N$, i.e. satisfying conditions

$$[S,S] \subset S, \quad [N,N] \subset N, \quad [S,N] \subset N. \tag{9}$$

In this investigation we will use results of the paper [2], where classification of Lie algebras of dimension not greater then eight, and whose Levi factor coincides with the algebras $so(3)$ and $sl(2,\mathbb{R})$.

Result. *There exist no nonlinear equations of form* (1) *with invariance algebras of such structure.*

Invariance with respect to solvable algebras of symmetry operators. For each two-dimensional and three-dimensional solvable algebras $A_{2.i} = \langle e_1, e_2 \rangle$, $(i = 1,2)$ and $A_{3.i} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ $(i = 1,\ldots,9)$ below we adduce realizations and corresponding forms of the functions F.

$A_{2.1}$ $([e_1, e_2] = 0)$:

$$A_{2.1}^1 = \langle \partial_x, \partial_y \rangle, \quad F = \tilde{F}(u, u_x, u_y);$$
$$A_{2.1}^2 = \langle \partial_x, \partial_u \rangle, \quad F = \tilde{F}(y, u_x, u_y);$$
$$A_{2.1}^3 = \langle \partial_u, g(x,y)\partial_u \rangle \ (g \neq \mathrm{const})$$
$$F = \frac{g_x u_x + g_y u_y}{g_x^2 + g_y^2}(g_{xx} + g_{yy}) + G(x,y,\omega),$$
$$\omega = g_y u_x - g_x u_y, \quad g_x^2 + g_y^2 \neq 0.$$

$A_{2.2}$ $([e_1, e_2] = e_2)$:

$$A_{2.2}^2 = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x \rangle : \quad F = (u_x^2 + u_y^2)\tilde{F}(u, \omega_1, \omega_2),$$
$$\omega_1 = yu_x, \ \omega_2 = yu_y;$$
$$A_{2.2}^1 = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle : \quad F = e^{-x}\tilde{F}(y, \omega_1, \omega_2),$$
$$\omega_1 = e^x u_x, \quad \omega_2 = e^x u_y;$$
$$A_{2.2}^3 = \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle : \quad F = (u_x + u_y)\tilde{F}(x,y,\omega), \quad \omega = u_x u_y^{-1}.$$

Let us note that for arbitrary forms of functions $\tilde{F}$ the respective realisations are the maximal invariance algebras of equations.

$A_{3.1}$ $([e_j, e_l] = 0, \ j,l = 1,2,3)$:

$$A_{3.1}^1 = \langle \partial_x, \partial_y, \partial_u \rangle, \quad F = G(u_x, u_y);$$
$$A_{3.1}^2 = \langle \partial_x, \partial_u, f(y)\partial_u \rangle, \quad f'(y) \neq 0, \quad F = \frac{f''}{f'}u_y + G(y, u_x);$$
$$A_{3.1}^3 = \langle \partial_u, f(x,y)\partial_u, g(x,y)\partial_u \rangle.$$

Further analysis of the determining equations for operators $f(x,y)\partial_u$ and $g(x,y)\partial_u$ shows that either the respective invariant equation is linear or

$g(x,y) = \lambda f(x,y) + \mu$, where λ, μ are constants, and then the case $A^3_{3.1}$ is reduced to the two-dimensional case.

$A_{3.2}$ ($[e_1,e_2] = e_2$, $[e_1,e_3] = [e_2,e_3] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.2} = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x, \partial_u\rangle, \quad F = u_x^2 G(yu_x, yu_y);\\
&A^2_{3.2} = \langle -u\partial_u, \partial_u, \partial_x\rangle, \quad F = (u_x+u_y)G\left(y, \frac{u_x}{u_y}\right);\\
&A^3_{3.2} = \langle \lambda\partial_y - u\partial_u, \partial_u, \partial_x\rangle, \quad \lambda \neq 0,\\
&\qquad F = (u_x+u_y)G(e^{y/\lambda}u_x, e^{y/\lambda}u_y);\\
&A^4_{3.2} = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u, f(y)e^{-x}\partial_u\rangle, \quad f(y)\neq 0,\\
&\qquad F = -\frac{f+f''}{f}u_x + e^{-x}G(y, e^x f' u_x + e^x f u_y).
\end{aligned}$$

$A_{3.3}$ ($[e_2,e_3] = e_1$, $[e_1,e_2] = [e_1,e_3] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.3} = \langle \partial_u, \partial_x, \lambda\partial_y + x\partial_u\rangle, \lambda \neq 0, \quad F = G(\lambda u_x - y, u_y);\\
&A^2_{3.3} = \langle \partial_u, (f(y)-x)\partial_u, \partial_x\rangle, \quad F = -f''u_x + G(y, u_y + f'u_x).
\end{aligned}$$

$A_{3.4}$ ($[e_1,e_3] = e_1$, $[e_2,e_3] = e_1+e_2$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.4} = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_x + y\partial_y + (u+x)\partial_u\rangle, \quad F = e^{-u_x}G(u_y, ye^{-u_x});\\
&A^2_{3.4} = \langle \partial_u, (f(y)-x)\partial_u, \partial_x + u\partial_u\rangle,\\
&\qquad F = \frac{f'u_y - u_x}{1+(f')^2}f'' + e^x G(y, f'e^{-x}u_x + e^{-x}u_y).
\end{aligned}$$

$A_{3.5}$ ($[e_1,e_3] = e_1$, $[e_2,e_3] = e_2$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\rangle, \quad F = (u_x+u_y)^2 G\left(u, \frac{u_x}{u_y}\right);\\
&A^2_{3.5} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u\rangle, \quad F = y^{-1}G(u_x, u_y);\\
&A^3_{3.5} = \langle \partial_u, f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u\rangle, \quad f' \neq 0,\\
&\qquad F = \frac{u_y}{f'}f'' + e^x G(y, f'e^{-x}u_x);\\
&A^4_{3.5} = \langle \partial_u, f(x,y)\partial_u . u\partial_u\rangle,
\end{aligned}$$

The equation that is invariant with respect to $A^4_{3.5}$ is linear.

$A_{3.6}$ ($[e_1,e_3] = e_1$, $[e_2,e_3] = -e_2$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.6} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u\rangle, \quad F = y^{-3}G(y^2u_x, y^2u_y);\\
&A^2_{3.6} = \langle \partial_u, e^{2x}f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u\rangle, \quad f(y)\neq 0,\\
&\qquad F = \frac{2fu_x + f'u_y}{4f^2+(f')^2}(f''+4f) + e^x G(y, f'e^{-x}u_x - 2fe^{-x}u_y);
\end{aligned}$$

$A_{3.7}$ ($[e_1,e_3] = e_1$, $[e_2,e_3] = qe_2$ $(0<|q|<1)$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.7} = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u\rangle, \quad F = y^{q-2}G(y^{1-q}u_x, y^{1-q}u_y);\\
&A^2_{3.7} = \langle \partial_u, \partial_x, qx\partial_x + qy\partial_y + u\partial_u\rangle,\\
&\qquad F = y^{(1-2q)/q}G(y^{(q-1)/q}u_x, y^{(q-1)/q}u_y);\\
&A^3_{3.7} = \langle \partial_u, e^{(1-q)x}f(y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u\rangle,\\
&\qquad F = \frac{(1-q)fu_x + f'u_y}{(1-q)^2f^2+(f')^2}(f'' + f(1-q)^2) +\\
&\qquad\quad + e^x G(y, f'e^{-x}u_x + (q-1)fe^{-x}u_y).
\end{aligned}$$

$A_{3.8}$ ($[e_1,e_3] = -e_2$, $[e_2,e_3] = e_1$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.8} = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y\rangle, \ F = G(u, u_x^2+u_y^2);\\
&A^2_{3.8} = \langle \partial_u, \operatorname{tg}(f(y)-x)\partial_u, \partial_x - u\operatorname{tg}(f(y)-x)\partial_u\rangle,\\
&\qquad F = \frac{f'u_y - u_x}{(f')^2+1}f'' + 2(f'u_y - u_x)\operatorname{tg}(f-x) +\\
&\qquad\quad + (f'u_x + u_y)G(y, \cos(f-x)(f'u_x+u_y)).
\end{aligned}$$

$A_{3.9}$ ($[e_1,e_3] = qe_1 - e_2$, $[e_2,e_3] = e_1 + qe_2$ $(q>0)$, $[e_1,e_2] = 0$):

$$\begin{aligned}
&A^1_{3.9} = \langle \partial_x, \partial_y, (qx+y)\partial_x + (qy-x)\partial_y\rangle,\\
&\qquad F = (u_x^2+u_y^2)G\left(u, \ln(u_x^2+u_y^2) + 2q\arctan\frac{u_x}{u_y}\right);\\
&A^2_{3.9} = \langle \partial_u, \operatorname{tg}(f(y)-x)\partial_u, \partial_x + (q - \operatorname{tg}(f(y)-x))u\partial_u\rangle,\\
&F = \frac{f'u_y - u_x}{(f')^2+1}f'' + 2(f'u_y - u_x)\operatorname{tg}(f-x) +\\
&\qquad\quad + (f'u_x + u_y)G(y, \cos(f-x)(f'u_x+u_y)e^{-qx}).
\end{aligned}$$

[1] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. – Москва: Мир, 1980. – 456 с.

[2] Turkowski P. Low-dimensional real Lie algebras // J. Math. Phys. – 1988. – **29**. – P. 2139–2144.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 400 с.

[4] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференцыальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[5] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 7405–7418.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 293–301

УДК 517.912:512.816

Симетрійний аналіз та редукція двовимірного рівняння Фоккера–Планка зі змінною матрицею дифузії

В.І. СТОГНІЙ

Національний технічній університет України
“Київський політехнічній інститут”, Київ
E-mail: valeriy_stogniy@mail.ru

В даній статті досліджено симетрію і знайдено точні розв’язки одного двовимірного рівняння Фоккера–Планка з теорії стохастичних процесів, яке має однорідний коефіцієнт знесення та змінний коефіцієнт дифузії.

Fokker–Planck equation from the stochastic theory, which has a homogeneous drift coefficient and a variable diffusion coefficient is considered. Lie symmetries are investigated and exact solutions are constructed.

Протягом багатьох років спостерігається стійкий інтерес до дослідження та побудови точних розв’язків рівняння Фоккера–Планка [1,2]

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u(t,x)] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[B_{ij}(t,x)u(t,x)], \qquad (1)$$

де $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$, коефіцієнти знесення $A(t,x)$ та дифузії $B(t,x)$ визначаються відповідно як вектор і матриця

$$A = A(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x), \ldots, A_n(t,x)),$$
$$B = B(t,x) = ||B_{ij}(t,x)||_{i,j=1}^{n}.$$

Одновимірне рівняння Фоккера–Планка є добре вивченим. Щодо рівнянь Фоккера–Планка в просторах вищої розмірності, то, наскільки нам відомо, було досліджено лише окремі класи рівнянь вигляду (1) у двовимірному випадкові.

Так, в роботі [6] було знайдено умови, при яких рівняння (1) з однорідним коефіцієнтом знесення і сталою діагональною матрицею дифузії є інваріантним відносно дев'яти параметричної групи локальних перетворень. З використанням підгруп групи інваріантності вільного рівняння Крамерса в [7] знайдено деякі його інваріантні розв'язки. Нарешті, в [8] було розглянуто задачу групової класифікації рівняння Фоккера–Планка з однорідним коефіцієнтом знесення та сталою діагональною матрицею дифузії, а також, для деяких з отриманих рівнянь з нетривіальною симетрією, було знайдено інваріантні розв'язки.

Отже, рівняння Фоккера–Планка у просторах розмірності вищої за одиницю ще потребують систематичного вивчення.

В даній статті досліджено симетрію і знайдено точні розв'язки одного двовимірного рівняння Фоккера–Планка з теорії стохастичних процесів [1], яке має однорідний коефіцієнт знесення та змінний коефіцієнт дифузії:

$$A = (\varepsilon - kx^2y, \varepsilon - kxy^2),$$
$$B = \begin{pmatrix} -kx^2 & 0 \\ 0 & -ky^2 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad k \neq 0, \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Використавши перетворення

$$t \to kt, \quad x \to x, \quad y \to y, \quad u \to u,$$

бачимо, що, не зменшуючи загальності міркувань, можемо досліджувати рівняння

$$u_t + 2(1-2xy)u + (2x + \varepsilon - x^2y)u_x + (2y + \varepsilon - xy^2)u_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2u_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2u_{yy} = 0, \tag{2}$$

в якому $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $u = u(t,x,y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ і т.д.

Використовуючи стандартний алгоритмом Лі [4, 5], можна довести наступне твердження.

Твердження. *Максимальною скінченновимірною алгеброю інваріантності рівняння (2), в якому $\varepsilon \neq 0$, є двовимірна абелева алгебра Лі $L_2 = \langle \partial_t, u\partial_u \rangle$. Якщо ж в (2) $\varepsilon = 0$, то максимальною скінченновимірною алгеброю інваріантності цього рівняння є чотиривимірна розв'язна алгебра Лі операторів симетрії L_4 з такими базисними операторами:*

$$P_0 = \partial_t, \quad I = u\partial_u, \quad D_1 = -x\partial_x + y\partial_y,$$
$$D_2 = -xt\partial_x + yt\partial_y - (\ln|x| - \ln|y|)u\partial_u.$$

Зауваження. Тут ми не враховуємо симетрії $\nu = \beta(t,x,y)\partial_u$, де функція β є розв'язком рівняння (2) і наявність якого обумовлюється лінійністю досліджуваного рівняння.

У подальшому дослідженні ми будемо використовувати одновимірні підалгебри алгебри L_2 та одно- і двовимірні підалгебри алгебри L_4. Класифікація підалгебр дійсних алгебр Лі невисоких розмірностей з точністю до спряженості, яку визначають групи внутрішніх автоморфізмів цих алгебр Лі, проведена в [9]. Згідно з результатами цієї роботи, одновимірні підалгебри алгебри L_2 вичерпуються алгебрами

$$\langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t + \alpha u\partial_u \rangle \quad (\alpha \neq 0), \quad \langle u\partial_u \rangle.$$

Для алгебри L_4 одновимірні підалгебри вичерпуються алгебрами

$$\langle I \rangle, \quad \langle D_1 \rangle, \quad \langle D_2 \rangle, \quad \langle P_0 \rangle, \quad \langle D_2 + \alpha P_0 \rangle,$$
$$\langle P_0 + \alpha I \rangle \quad (\alpha \neq 0),$$

а двовимірні підалгебри такими алгебрами:

$$\langle I, D_1 \rangle, \quad \langle I, P_0 \rangle, \quad \langle D_1, P_0 \rangle, \quad \langle I, D_2 \rangle,$$
$$\langle D_1, P_0 + \alpha I \rangle, \quad \langle I, D_2 + \alpha P_0 \rangle \quad (\alpha \neq 0).$$

Одним із застосувань симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними є симетрійна редукція рівнянь з нетривіальною симетрією до рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, зокрема, до звичайних диференціальних рівнянь (див., наприклад, [3–5]).

Рівняння (2), в якому $\varepsilon \neq 0$, допускає двовимірну алгебру інваріантності L_2. Оскільки оператор I не задовольняє необхідну умову існування інваріантних розв'язків [4], то тут для симетрійної редукції ми можемо використовувати лише одновимірні підалгебри

$$\langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t + \alpha u\partial_u \rangle \quad (\alpha \neq 0).$$

В просторі змінних t, x, y, u інваріантами оператора ∂_t є змінні x, y, u, тому відповідна підстановка (анзац) має вигляд

$$u = \varphi(x, y),$$

а відповідне редуковане рівняння буде таким:

$$2(1-2xy)\varphi + (2x+\varepsilon-x^2y)\varphi_x + (2y+\varepsilon-xy^2)\varphi_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Для оператора $\langle\partial_t + \alpha u\partial_u\rangle$ ($\alpha \neq 0$) інваріанти мають вигляд $\omega = ue^{-\alpha t}$, x, y, а тому відповідний анзац буде таким:

$$u = e^{\alpha t}\varphi(x, y). \tag{3}$$

Підстановка (3) в (2) приводить до такого диференціального рівняння:

$$(\alpha+2-4xy)\varphi + (2x+\varepsilon-x^2y)\varphi_x + (2y+\varepsilon-xy^2)\varphi_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Тепер зупинимося на рівнянні (2), в якому $\varepsilon = 0$. Тут необхідну умову існування інваріантних розв'язків задовольняють одновимірні підалгебри $\langle D_1\rangle$, $\langle D_2\rangle$, $\langle P_0\rangle$, $\langle D_2 + \alpha P_0\rangle$, $\langle P_0 + \alpha I\rangle$ ($\alpha \neq 0$), яким відповідає симетрійна редукція рівняння (2) до рівнянь з частинними похідними в просторі двох незалежних змінних. Розглянемо детально випадок алгебри $\langle D_1\rangle$. Анзац побудований по цій одновимірній підалгебрі має вигляд

$$u = \varphi(t, \omega), \quad \omega = xy, \tag{4}$$

де φ – нова невідома функція змінних t та ω, яка підлягає визначенню. Підстановка (4) в (2), де $\varepsilon = 0$, приводить до такого редукованого рівняння:

$$\varphi_t + 2(1-2\omega)\varphi + (4\omega - 2\omega^2)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} = 0.$$

Нижче для кожної з одновимірних підалгебр, що залишилися, наведено відповідні анзаци та редуковані рівняння:

$$\langle D_2\rangle: \quad u = \exp\left(\frac{\ln^2|\frac{x}{y}|}{4t}\right)\varphi(t, \omega), \quad \omega = xy,$$

$$\varphi_t + \left[2(1-2\omega) + \tfrac{1}{2t}\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} = 0;$$

$$\langle P_0\rangle: \quad u = \varphi(x, y), \quad 2(1-2xy)\varphi + (2x - x^2y)\varphi_x + \\ + (2y - xy^2)\varphi_y + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0;$$

$$\langle D_2 + \alpha P_0\rangle: \quad u = \exp\left(-\tfrac{t}{\alpha}\ln|\tfrac{x}{y}| - \tfrac{2}{3\alpha^2}t^3\right)\varphi(\omega, \upsilon), \\ \omega = xy, \quad \upsilon = \ln|\tfrac{x}{y}| + \tfrac{1}{\alpha}t^2, \quad \alpha \neq 0, \\ \left[2(1-2\omega) - \tfrac{1}{\alpha}\upsilon\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\upsilon\upsilon} = 0;$$

$$\langle P_0 + \alpha I\rangle: \quad u = e^{\alpha t}\varphi(x, y), \quad \alpha \neq 0, \\ \left[2(1-2xy) + \alpha\right]\varphi + (2x - x^2y)\varphi_x + (2y - xy^2)\varphi_y + \\ + \tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} = 0.$$

Серед двовимірних підалгебр алгебри L_4 необхідну умову існування інваріантних розв'язків задовольняють $\langle D_1, P_0\rangle$, $\langle D_1, P_0 + \alpha I\rangle$ ($\alpha \neq 0$). Їм відповідає симетрійна редукція рівняння (1), в якому $\varepsilon = 0$, до звичайних диференціальних рівнянь. Анзац, що відповідає підалгебрі $\langle D_1, P_0\rangle$,

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = xy,$$

зводить досліджуване рівняння до такого звичайного диференціального рівняння:

$$\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega(2-\omega)\dot{\varphi} + 2(1-2\omega)\varphi = 0, \tag{5}$$

де $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$.

Для алгебри $\langle D_1, P_0 + \alpha I\rangle$ ($\alpha \neq 0$)

$$u = e^{\alpha t}\varphi(\omega), \quad \omega = xy,$$

а редуковане рівняння має такий вигляд

$$\omega^2\ddot{\varphi} + 2\omega(2-\omega)\dot{\varphi} + [2 - 4\omega + \alpha]\varphi = 0. \tag{6}$$

Ще одним важливим застосуванням нетривіальних симетрійних властивостей, саме лінійних диференціальних рівнянь, є побудова систем координат, в яких такі рівняння допускають відокремлення змінних. Добре відомо (див., наприклад, [10]), що розв'язок з відокремленими змінними певного рівняння можна отримувати як власну функцію деяких наборів операторів симетрії першого та вищих порядків цього рівняння, що комутують між собою.

Зупинимося на цій проблемі для рівняння (2), в якому $\varepsilon = 0$, тобто для рівняння

$$
\begin{aligned}
Lu = u_t + 2(1 - 2xy)u + (2x - x^2y)u_x + (2y - x^2y)u_y +& \\
+ \tfrac{1}{2}x^2u_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2u_{yy} = 0,& \qquad (7)
\end{aligned}
$$

використовуючи знайдені вище оператори симетрії першого порядку.

Відразу зауважимо, що у відокремленні змінних оператор I відіграє тривіальну роль, тому у подальшому дослідженні ми використовуємо такі підалгебри алгебри L_4: $\langle D_1\rangle$, $\langle D_2\rangle$, $\langle P_0\rangle$, $\langle D_2 + \alpha P_0\rangle$ $(\alpha \neq 0)$, $\langle D_1, P_0\rangle$.

Повне відокремлення змінних дає двовимірна підалгебра $\langle D_1, P_0\rangle$, тому розглянемо її випадок детально. Розв'язок з відокремленими змінними рівняння (6) ми отримаємо проінтегрувавши таку систему диференціальних рівнянь:

$$
Lu = 0, \quad D_1u = -xu_x + yu_y = \lambda u, \quad P_0u = u_t = \gamma u, \qquad (8)
$$

де $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ – сталі відокремлення. Саме ж відокремлення змінних ми проводимо, інтегруючи два останні рівняння системи (8). Безпосередні обчислення показують, що власна функція операторів D_1 та P_0 має такий вигляд:

$$
u = |y|^{\lambda} e^{\gamma t}\varphi(\omega), \quad \omega = xy. \qquad (9)
$$

Здійснивши підстановку (9) в перше рівняння системи (8), ми отримуємо таке звичайне диференціальне рівняння для визначення функції φ:

$$
\begin{aligned}
\omega^2\ddot{\varphi} + [4 + \lambda - 2\omega]\,\omega\dot{\varphi} +& \\
+ \left[\gamma + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{3}{2}\lambda + 2 - (4+\lambda)\omega\right]\varphi = 0.& \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Отже, відповідний алгебрі $\langle D_1, P_0\rangle$ розв'язок з відокремленими змінними має вигляд (9), де функція φ задовольняє звичайне диференціальне рівняння (10).

Одновимірним підалгебрам алгебри L_4 відповідає часткове відокремлення змінних. Нижче ми наводимо для кожної з таких підалгебр вигляд функцій u та рівняння з частинними похідними для визначення функції φ:

$$
\langle D_1\rangle: \quad u = |y|^{\lambda}\varphi(t,\omega), \quad \omega = xy,
$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi_t + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \left[(4+\lambda)\omega - 2\omega^2\right]\varphi_\omega + \\
&\quad + \left[\tfrac{3}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + 2 - (\lambda+4)\omega\right]\varphi = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\langle D_2\rangle: \quad u = |\tfrac{x}{y}|^{-\frac{\lambda}{2}} \exp\left(\frac{\ln^2|\frac{x}{y}|}{4t}\right)\varphi(t,\omega), \quad \omega = xy,
$$

$$
\varphi_t + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \left[2(1-2\omega) + \tfrac{1}{2t} + \tfrac{\lambda^2}{4}\right]\varphi = 0;
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle P_0\rangle: \quad u = e^{\lambda t}\varphi(x,y), \\
&\tfrac{1}{2}x^2\varphi_{xx} + \tfrac{1}{2}y^2\varphi_{yy} + (2x - x^2y)\varphi_x + \\
&\quad + (2y - xy^2)\varphi_y + [2(1-2xy) + \lambda]\varphi = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\langle D_2 + \alpha P_0\rangle: \quad u = \exp\left(\frac{\lambda t}{\alpha} - \frac{t\ln|\frac{x}{y}|}{\alpha} - \frac{2t^3}{3\alpha^2}\right)\varphi(\omega,\upsilon), \\
&\omega = xy, \quad \upsilon = \ln|\tfrac{x}{y}| + \tfrac{1}{\alpha}t^2, \\
&\left[\tfrac{\lambda-\upsilon}{\alpha} + 2(1-2\omega)\right]\varphi + 2\omega(2-\omega)\varphi_\omega + \omega^2\varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\upsilon\upsilon} = 0.
\end{aligned}
$$

У наведених вище співвідношеннях $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ – стала відокремлення.

Використаємо результати симетрійної редукції та відокремлення змінних для побудови точних розв'язків рівняння (6). Безпосередня перевірка дозволяє переконатися, що загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$
\varphi = (C_1e^{2\omega} + C_2)\omega^{-2},
$$

де C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування. У відповідності з цим отримуємо такий частковий (стаціонарний) розв'язок рівняння (6):

$$
u = \tfrac{1}{x^2y^2}\left(C_1e^{2xy} + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
$$

Рівняння (10), в якому $\lambda = -4$, $\gamma = -6$ теж інтегрується в елементарних функціях і його загальний розв'язок має такий вигляд:

$$
\varphi = C_1\left(1 + \tfrac{1}{\omega}\right) + C_2\left(1 - \tfrac{1}{\omega}\right)e^{2\omega}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
$$

Відповідний частковий (нестаціонарний) розв'язок рівняння (6) такий:

$$
u = y^{-4}e^{-6t}\left[C_1\left(1 + \tfrac{1}{xy}\right) + C_2\left(1 - \tfrac{1}{xy}\right)e^{2xy}\right], \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.
$$

Аналогічний розгляд рівняння (10), в якому $\lambda = \gamma = -4$ приводить ще до такого розв'язку рівняння (6):

$$u = y^{-4}e^{-4t}(C_1 + C_2 e^{2xy}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Нарешті, рівняння (5) заміною змінних $\varphi = \omega^k \eta(\omega)$, де $k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{1-4\alpha}$ $(\alpha \leqslant \frac{1}{4})$ зводиться до рівняння

$$\omega\eta'' + [-2\omega + 2k + 4]\,\eta' - (2k+4)\eta = 0,$$

розв'язками якого є функції

$$\eta = \omega^{-k-2}e^{\omega}\eta(0, k+1, 2\omega),$$

де $\eta(0, k+1, 2\omega)$ – розв'язок рівняння Уіттекера (див., наприклад, [11]). Згідно з цим отримуємо ще такий клас точних розв'язків рівняння (6):

$$u = e^{\alpha t + xy}(xy)^{-2}\psi(0, k+1, 2\omega),$$

де $k = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{1-4\alpha}$ $(\alpha \leqslant \frac{1}{4})$, $\psi(0, k+1, 2\omega)$ – розв'язок рівняння Уіттекера

$$4\omega^2\psi'' = (\omega^2 + 4(k+1)^2 - 1)\psi, \quad \omega = xy.$$

Певну інформацію про структуру точних розв'язків рівняння (6) дають і диференціальні рівняння з частинними похідними, які були отримані в результаті редукції та відокремлення змінних за одновимірними підалгебрами. Так, наприклад, рівняння, отримане редукцією за підалгеброю $\langle D_2 \rangle$, заміною змінних

$$\varphi = t^{-\frac{1}{2}}\psi(t, \omega)$$

зводиться до рівняння

$$\psi_t + \omega^2\psi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\psi_\omega + 2(1-2\omega)\psi = 0. \tag{11}$$

Покладемо, наприклад,

$$\psi = e^{\beta t}\Phi(\omega) + e^{-\beta t}F(\omega), \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Підстановка (12) в (11) показує, що функція буде розв'язком рівняння (11) за умови, що функції Φ і F задовольняють рівняння

$$\omega^2\Phi_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)\Phi_\omega + [2(1-2\omega)+\beta]\,\Phi = 0,$$

$$\omega^2 F_{\omega\omega} + 2\omega(2-\omega)F_\omega + [2(1-2\omega)-\beta]\,F = 0,$$

які є рівняннями вигляду (5) і точні розв'язки яких, як було показано вище, визначаються через розв'язки рівняння Уіттекера. До аналогічного результату приводить і розгляд рівнянь, отриманих в результаті відокремлення змінних в рівнянні (6) за підалгебрами $\langle D_1 \rangle, \langle D_2 \rangle$.

Отримані результати дозволяють стверджувати, що наявність в диференціального рівняння хоча б невисоких симетрійних властивостей дозволяє редукувати багатовимірну задачу до задачі в просторі з меншою кількістю змінних. Наскільки нам відомо, останній тип розв'язків у рівнянь Фоккера–Планка в просторах розмірності вищої за два ще систематично не досліджувався. А як випливає з отриманих результатів, ці розв'язки є більш загальними, ніж інваріантні розв'язки, яким в основному приділялася увага дослідників.

[1] Gardiner C.W. Handbook of stochastic methods. – Berlin: Springer, 1985.

[2] Risken H. The Fokker–Planck equation. – Berlin: Springer, 1996.

[3] Bluman G., Kumei S. Symmetries and differential equations. – New York: Springer, 1989.

[4] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic, 1982.

[5] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986.

[6] Shtelen W.M., Stogny V.S. Symmetry properties of one- and two- dimensional Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – L539–L543.

[7] Saied E.A. On the similarity solutions for the free Kramers equation // Appl. Math. and Comp. – 1996. – **74**. – P. 59–63.

[8] Finkel F. Symmetries of the Fokker–Planck equations with a constant diffusion matrix in 2 + 1 dimensions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – **32**. – P. 2671–2684.

[9] Patera J., Winternitz P. Subalgebras of real three- and four-dimensonal Lie algebras // J. Math. Phys. – 1977. – **18**. – P. 1449–1455.

[10] Miller W. Symmetry and separation of variables. – Reading: Addison-Wesley, 1977.

[11] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 302–308

УДК 519.46

Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$

В.М. ФЕДОРЧУК [†‡], ***В.І. ФЕДОРЧУК*** [‡]

[†] *Ін-т математики, Педаг. акад. ім. Комісії Нар. Освіти, Краків*
E-mail: fedorchuk@ap.krakow.pl

[‡] *Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*
E-mail: vasfed@gmail.com, volfed@gmail.com

Проведено повну класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ розмірності ≤ 3.

The complete classification of all non-conjugate subalgebras of dimensions ≤ 3 of the Lie algebra of Poincaré group $P(1,4)$ is performed.

1. Вступ. Добре відомо, що неспряжені підгрупи груп Лі точкових перетворень широко використовуються при розв'язуванні різних задач математики, теоретичної та математичної фізики, механіки, газової динаміки тощо (див., наприклад, [1–6]). Виявилося однак, що можливості вищезгаданих застосувань, а також результати отримані внаслідок цього, суттєвим чином залежать від структурних властивостей неспряжених підгруп груп Лі точкових перетворень. Тому вивчення структурних властивостей неспряжених підгруп груп Лі точкових перетворень (неспряжених підалгебр алгебр Лі груп Лі точкових перетворень) є важливим з різних точок зору. Одним із способів вивчення структурних властивостей неспряжених підалгебр алгебр Лі є класифікація цих підалгебр в класи ізоморфних підалгебр. З розв'язанням цієї класифікаційної задачі тісно пов'язане розв'язування інших важливих задач. Так, наприклад, задача про побудову повної множини нееквівалентних реалізацій [7] дійсних низькорозмірних алгебр Лі і задача про опис всіх інваріантних операторів (узагальнених операторів Казіміра) [8] для дійсних низькорозмірних алгебр Лі базуються на класифікації цих алгебр Лі [9,10].

Всі можливі комплексні алгебри Лі розмірності ≤ 4 були описані ще С. Лі [1]. Повна класифікація дійсних структур алгебр Лі розмірності ≤ 5 отримана Г.М. Мубаракзяновим [9,10]. В [11] неспряжені підалгебри алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$ прокласифіковані в класи ізоморфних. Для кожного такого класу підалгебр знайдені всі інваріантні функції від групових генераторів. В [8] всі інваріантні функції від групових генераторів (узагальнені оператори Казіміра) знайдені для всіх дійсних алгебр Лі розмірності ≤ 5 і для всіх дійсних нільпотентних алгебр Лі розмірності 6.

Ця робота присв'ячена класифікації низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ в класи ізоморфних підалгебр. Група $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Вона широко використовується при розгляді різних питань теоретичної і математичної фізики (див., наприклад, [4, 12, 13]). Підгрупова структура групи $P(1,4)$ вивчена в роботах [14–18]. В основу нашої роботи покладено повний список неспряжених (з точністю до $P(1,4)$-спряженості) підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$, який можна знайти в [5]. На даний час, використовуючи класифікацію отриману Г.М. Мубаракзяновим [9,10], проведено класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірності ≤ 3, а також, більшості неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ розмірностей 4 і 5. Для представлення отриманих результатів потрібно розглянути алгебру Лі групи $P(1,4)$.

2. Алгебра Лі групи $P(1,4)$. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ і P'_μ $(\mu = 0,1,2,3,4)$, які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&[P'_\mu, P'_\nu] = 0, \quad [M'_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu, \\
&[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M'_{\nu\rho},
\end{aligned}
$$

де $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0,1,2,3,4)$ – метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Надалі перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до таких лінійних комбінацій:

$$
\begin{aligned}
&G = M'_{40}, \quad L_1 = M'_{32}, \quad L_2 = -M'_{31}, \quad L_3 = M'_{21}, \\
&P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \quad C_a = M'_{4a} + M'_{a0} \quad (a = 1,2,3), \\
&X_0 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 - P'_4\right), \quad X_k = P'_k \quad (k = 1,2,3), \quad X_4 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 + P'_4\right).
\end{aligned}
$$

3. Класифікація одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Відомо, що є тільки один тип дійсних алгебр Лі розмірності один [9]. Ми позначатимемо його A_1 [11]. Оскільки всі одновимірні алгебри Лі є ізоморфними, то вони будуть типу A_1. Нижче приводимо результати класифікації одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$\langle G\rangle;\ \langle L_3+eG,\ e>0\rangle;\ \langle P_3+C_3+2L_3\rangle;\ \langle P_3+C_3+eL_3,\ e>2\rangle;$$
$$\langle P_3+C_3+2L_3+\alpha(X_0+X_4),\ \alpha<0\rangle;\ \langle P_3+X_0\rangle;\ \langle P_3+X_1\rangle;$$
$$\langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,\ \alpha_0<0\rangle;\ \langle L_3+\tilde d(X_0+X_4),\ \tilde d<0\rangle;$$
$$\langle G+cX_1,\ c<0\rangle;\ \langle L_3+eG+\kappa_3X_3,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle;$$
$$\langle P_3\rangle;\ \langle L_3-P_3\rangle;\ \langle L_3\rangle;\ \langle X_0+X_4\rangle;\ \langle X_0-X_4\rangle;\ \langle X_4\rangle;$$
$$\langle P_3+C_3+eL_3+\alpha(X_0+X_4),\ e>2,\ \alpha<0\rangle;$$
$$\langle L_3+\alpha X_3,\ \alpha<0\rangle;\ \langle L_3-X_4\rangle.$$

4. Класифікація двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Існує два різні типи дійсних двовимірних алгебр Лі: розкладний $A_1\oplus A_1\equiv 2A_1$ і нерозкладний A_2 [9]. Алгебри Лі типу $2A_1$ – абелеві. Базисні елементи (e_1 і e_2) алгебр Лі типу A_2 задовольняють комутаційні співвідношення: $[e_1,e_2]=e_2$ [8]. Алгебри Лі типу A_2 є розв'язними [8,9]. Нижче приводимо результати класифікації двовимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $2A_1$:

$$\langle G,L_3\rangle;\ \langle G,X_1\rangle;\ \langle L_3+eG,X_3,\ e>0\rangle;\ \langle P_3+C_3,L_3\rangle;$$
$$\langle P_3+C_3+2L_3,X_0+X_4\rangle;\ \langle P_3+C_3+eL_3,X_0+X_4,\ e>2\rangle;$$
$$\langle P_1,P_2\rangle;\ \langle L_3,P_3\rangle;\ \langle P_3,X_1\rangle;\ \langle P_3,X_4\rangle;\ \langle L_3-P_3,X_4\rangle;\langle L_3,X_4\rangle;$$
$$\langle L_3,X_0+X_4\rangle;\ \langle L_3,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_0+X_4,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_1,X_4\rangle;$$
$$\langle X_1,X_0-X_4\rangle;\ \langle L_3-X_4,P_3+hX_0,\ h>0\rangle;\langle L_3-X_4,P_3\rangle;$$
$$\langle L_3,P_3+X_0\rangle;\ \langle G+aX_3,L_3,\ a<0\rangle;\ \langle G,L_3+dX_3,\ d<0\rangle;$$
$$\langle P_3+X_0,X_1\rangle;\ \langle P_3+X_2,X_1\rangle;\ \langle P_3+X_0,X_4\rangle;\ \langle P_3+X_1,X_4\rangle;$$
$$\langle L_3+d_3X_3,X_0+X_4,\ d_3<0\rangle;\ \langle L_3+d_3X_3,X_0-X_4,d_3<0\rangle;$$
$$\langle L_3+d_4X_4,X_0-X_4,d_4<0\rangle;\ \langle L_3+\alpha(X_0+X_4),X_4,\ \alpha<0\rangle;$$
$$\langle G+a_2X_2,X_1,\ a_2<0\rangle;\ \langle L_3-P_3+\alpha_0X_0,X_4,\ \alpha_0<0\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3,P_2\rangle;\ \langle P_1,P_2+X_2\rangle;\ \langle L_3+a_3X_3,X_4,\ a_3<0\rangle;$$

$$\langle L_3+\alpha(X_0+X_4),P_3+C_3+\beta(X_0+X_4),\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3,P_2+\gamma X_2,\ \gamma>0\rangle;\ \langle P_1,P_2+X_2+\beta X_3,\ \beta>0\rangle;$$
$$\langle P_3+C_3,L_3+d(X_0+X_4),\ d<0\rangle;\ \langle L_3-X_4,X_3\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3,P_2+\gamma X_2+\beta X_3,\ \gamma>0,\ \beta>0\rangle;$$
$$\langle G+\alpha X_3,L_3+\beta X_3,\ \alpha<0,\ \beta<0\rangle.$$

Алгебри Лі типу A_2:

$$\langle -G,P_3\rangle;\ \langle -G-\tfrac{1}{d}L_3,P_3,\ d>0\rangle;\ \langle -G-\tfrac{1}{e}L_3,X_4,\ e>0\rangle;$$
$$\langle -G-aX_1,P_3,\ a<0\rangle;\ \langle -G-cX_1,X_4,\ c<0\rangle;\ \langle -G,X_4\rangle;$$
$$\langle -\left(G+\tfrac{1}{e}L_3+\tfrac{\kappa_3}{e}X_3\right),X_4,\ e>0,\ \kappa_3<0\rangle.$$

5. Класифікація тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Утворюючи прямі суми одновимірних алгебр Лі типу A_1 з алгебрами Лі розмірності два, отримуємо два типи алгебр Лі розмірності три: $3A_1$, $A_2\oplus A_1$. Крім того, існує 9 типів дійсних нерозкладних алгебр Лі $A_{3.1},\ldots,A_{3.9}$ (див. [8,9]), два з яких залежать від параметрів (тобто складають континууми алгебр Лі). Надалі символ $A^a_{r.j}$ означатиме j-у алгебру Лі вимірності r (a – неперервний параметр від якого залежить алгебра). При заданні конкретної алгебри Лі ми виписуватимемо тільки відмінні від нуля комутаційні співвідношення. Нижче приводимо результати класифікації тривимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Алгебри Лі типу $3A_1$:

$$\langle G,L_3,X_3\rangle;\ \langle G,X_1,X_2\rangle;\ \langle P_3+C_3,L_3,X_0+X_4\rangle;$$
$$\langle P_1,P_2,P_3\rangle;\ \langle P_1,P_2,X_3\rangle;\ \langle P_1,P_2,X_4\rangle;\ \langle L_3,P_3,X_4\rangle;$$
$$\langle P_3,X_1,X_2\rangle;\ \langle P_3,X_1,X_4\rangle;\ \langle L_3,X_0,X_4\rangle;\ \langle L_3,X_3,X_4\rangle;$$
$$\langle L_3,X_3,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_0+X_4,X_1,X_0-X_4\rangle;\ \langle X_4,X_1,X_2\rangle;$$
$$\langle X_1,X_2,X_0-X_4\rangle;\ \langle L_3,P_3+X_0,X_4\rangle;\ \langle P_3+X_0,X_1,X_2\rangle;$$
$$\langle G+a_3X_3,X_1,X_2,a_3<0\rangle;\ \langle L_3+d_3X_3,X_0,X_4,\ d_3<0\rangle;$$
$$\langle L_3+\tilde d_4X_4,X_3,X_0+X_4,\ \tilde d_4<0\rangle;\ \langle P_1,P_2+X_2,X_3\rangle;$$
$$\langle L_3+\alpha(X_0+X_4),X_3,X_4,\ \alpha<0\rangle;\ \langle P_1,P_2+X_2,X_4\rangle;$$
$$\langle P_1+X_3,P_2,X_4\rangle;\ \langle P_1,P_2+\alpha X_2,P_3+\gamma X_3,\ \alpha>0\rangle;$$
$$\langle P_1+\gamma X_3,P_2+X_2+\delta X_3,X_4,\ \gamma>0\rangle;$$
$$\langle P_3+X_0,X_1,X_4\rangle;\langle P_3+X_2,X_1,X_4\rangle;$$

$\langle P_1, P_2 + X_2 + \delta X_3, X_4,\ \delta > 0\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_2 \oplus A_1$:

$\langle -G - aX_3, X_4,\ a < 0\rangle \oplus \langle L_3\rangle;\ \langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3,\ d < 0\rangle;$
$\langle -G, P_3\rangle \oplus \langle L_3\rangle;\ \langle -G, X_4\rangle \oplus \langle L_3\rangle;\ \langle -G, P_3\rangle \oplus \langle X_1\rangle;$
$\langle -G, X_4\rangle \oplus \langle X_1\rangle;\ \langle -G - \frac{1}{e}L_3, X_3,\ e > 0\rangle \oplus \langle X_4\rangle;$
$\langle -G - aX_3, X_4,\ a < 0\rangle \oplus \langle L_3 + dX_3,\ d < 0\rangle;$
$\langle -G - a_2X_2, P_3,\ a_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle;$
$\langle -G - \tilde{a}_2X_2, X_4,\ \tilde{a}_2 < 0\rangle \oplus \langle X_1\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.1}$ ($[e_2, e_3] = e_1$, нільпотентна):

$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \gamma X_3, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,\ \mu > 0,\ \gamma > 0\rangle;$
$\langle -2X_4, L_3 - P_3, X_3\rangle;\ \langle -2dX_4, L_3 + dX_3, P_3 + X_0,\ d < 0\rangle;$
$\langle 2X_4, P_3 + X_1, X_3\rangle;\ \langle -2X_4, L_3 - P_3 + \alpha_0X_0, X_3,\ \alpha_0 < 0\rangle;$
$\langle -2dX_4, L_3 + dX_3, P_3,\ d < 0\rangle;\ \langle 2X_4, P_3 + X_0, X_3\rangle;$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 + \mu X_2 + \delta X_3,\ \delta > 0\rangle;$
$\langle 2X_4, P_3, X_3\rangle;\ \langle 2bX_4, P_3, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle;$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1 + \mu X_2,\ \mu > 0\rangle;$
$\langle -4X_4, P_1 + X_2 + \beta X_3, P_2 - X_1,\ \beta > 0\rangle;$
$\langle 2bX_4, P_3 + X_2, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle;$
$\langle 2bX_4, P_3 + X_0, X_1 + bX_3,\ b > 0\rangle;\ \langle -4X_4, P_1 + X_2, P_2 - X_1\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.2}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$, розв'язна):

$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_1X_1 + a_3X_3,\ a_1 < 0,\ a_3 < 0\rangle;$
$\langle 2\frac{\alpha_3}{d}X_4, P_3, G + \frac{1}{d}L_3 + \frac{\alpha_3}{d}X_3,\ d > 0,\ \alpha_3 < 0\rangle;$
$\langle 2a_3X_4, P_3, G + a_3X_3,\ a_3 < 0\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.3}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, G + a_3X_3,\ a_3 < 0\rangle;\ \langle P_3, X_4, G + a_1X_1,\ a_1 < 0\rangle;$
$\langle P_1, P_2, G\rangle;\ \langle P_3, X_4, G\rangle;\ \langle P_3, X_4, G + \frac{1}{d}L_3,\ d > 0\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.4}$ ($[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = -e_2$, розв'язна):

$\langle X_0, X_4, -G - \frac{1}{e}L_3 - \frac{\kappa_3}{e}X_3,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle;$

$\langle X_0, X_4, -G\rangle;\ \langle X_0, X_4, -G - \frac{1}{e}L_3,\ e > 0\rangle;$
$\langle X_0, X_4, -G - cX_1,\ c < 0\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.6}$ ($[e_1, e_3] = -e_2$, $[e_2, e_3] = e_1$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, L_3 + d_3X_3,\ d_3 < 0\rangle;\ \langle -P_1 - X_1, P_2 + X_2, P_3 - L_3\rangle;$
$\langle -P_1, P_2, -L_3\rangle;\ \langle -P_1, P_2, P_3 - L_3\rangle;\ \langle -X_1, X_2, P_3 - L_3\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{e}(P_3 + C_3) + \frac{\alpha}{e}(X_0 + X_4),\ e > 2,\ \alpha < 0\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3) + \frac{\alpha}{2}(X_0 + X_4),\ \alpha < 0\rangle;$
$\langle X_3, X_0 - X_4, -\frac{1}{2}(P_3 + C_3) - \frac{e}{2}L_3,\ e > 0\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 + eG + \kappa_3X_3,\ e > 0,\ \kappa_3 < 0\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 + eG,\ e > 0\rangle;\ \langle X_1, X_2, L_3\rangle;\ \langle -P_1, P_2, X_4 - L_3\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 - X_4\rangle;\ \langle X_1, -X_2, -L_3 - \frac{1}{e}(P_3 + C_3),\ e > 2\rangle;$
$\langle -X_1, X_2, -L_3 - \tilde{d}(X_0 + X_4),\ \tilde{d} < 0\rangle;$
$\langle X_1, X_2, L_3 - P_3 + \alpha_0X_0,\ \alpha_0 < 0\rangle;$
$\langle -X_1, X_2, -L_3 - \alpha X_3,\ \alpha < 0\rangle;\ \langle X_1, X_2, L_3 + \frac{1}{2}(P_3 + C_3)\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.7}^a$ ($[e_1, e_3] = ae_1 - e_2$, $[e_2, e_3] = e_1 + ae_2$, $a > 0$, розв'язна):

$\langle P_1, P_2, L_3 + cG + bX_3,\ c > 0,\ b < 0\rangle;\ \langle P_1, P_2, L_3 + cG,\ c > 0\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.8}$ ($[e_1, e_3] = -2e_2$, $[e_1, e_2] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_3$, напівпроста):

$\langle -P_3, G, C_3\rangle.$

Алгебри Лі типу $A_{3.9}$ ($[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$, напівпроста):

$\langle \frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{4}(P_1 + C_1), \frac{1}{2}L_2 + \frac{1}{4}(P_2 + C_2), \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{4}(P_3 + C_3)\rangle;$
$\langle L_1, L_2, L_3\rangle.$

[1] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. – Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. – Bd. 1–3.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

[4] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – Москва: Наука, 1990. – 400 с.

[5] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф., Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 304 с.

[6] Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – Москва: Наука, 1966. – 495 с.

[7] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 7337–7360.

[8] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 986–994.

[9] Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. выс. учеб. завед. мат. – 1963 – № 1(32). – С. 114–123.

[10] Мубаракзянов Г.М. Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка // Изв. выс. учеб. завед. мат. – 1963. – № 3(34). – С. 99–106.

[11] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H. Subgroups of the Poincaré group and their invariants // J. Math. Phys. – 1976. – **17**. – P. 977–985.

[12] Фущич В.И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теорет. и мат. физика. – 1970. – **4**. – С. 360–382.

[13] Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**. – С. 5–39.

[14] Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. – 1978. – 36 с. – (Препр. / АН УССР. – Киев: Ин-т математики. – 78.18).

[15] Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**. – С. 717–722.

[16] Федорчук В.М., Фущич В.И. О подгруппах обобщенной группы Пуанкаре / Теоретико-групповые методы в физике, Тр. Междунар. семинара. (Звенигород, 1979). – Москва: Наука, 1980. – Т. 1. – С. 61–66.

[17] Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**. – С. 696–700.

[18] Fushchich W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M. Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**. – P. 2893–2899.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 309–315

УДК 517.912:512.816

Симетрійна редукція диференціальних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними

І.М. ЦИФРА

Інститут геофізики НАН України, Київ
Інститут математики Університету в Білостоці, Польща
E-mail: tsyfra@igph.kiev.ua, tsyfra@math.uwb.edu.pl

Вивчається симетрійна редукція рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними за допомогою операторів симетрії Лі–Беклунда нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. Метод редукції застосовується до нелінійних диференціальних рівнянь еволюційного та хвильового типу.

The symmetry reduction of nonlinear partial differential equations with two independent variables is studied. The method is based on the Lie–Bäcklund symmetry operators of nonlinear ordinary differential equations. The reduction method is applied to partial differential equations of evolution and wave types.

1. Вступ. Одним з ефективних методів побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь математичної фізики є метод симетрійної редукції, що дає можливість зводити диференціальне рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння. В роботах [1–3, 5, 6] запропоновано підходи, які узагальнюють класичний метод С. Лі і суттєво розширюють його можливості при побудові розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Серед цих методів слід відзначити метод умовної інваріантності [1–5] та метод антиредукції [6, 7]. За допомогою цих методів побудовані широкі класи нових розв'язків в явному вигляді багатьох нелінійних рівнянь математичної фізики. Для побудови анзаців, за допомогою яких проводиться редукція вихідного рівняння до звичайного рівняння або системи звичайних диференціальних рівнянь можуть використовуватись інфінітезимальні оператори точкових перетворень як класичної так і умовної симетрії, а також оператори Лі–Беклунда. В роботі [8] запропоновано метод редукції нелінійних еволюційних рівнянь, що базується на симетрії Лі–Беклунда звичайних лінійних однорідних диференціальних рівнянь і дає теоретико-групове обгрунтування методу "нелінійного розділення змінних". В [9] цей метод узагальнюється на нелінійні звичайні диференціальні рівняння і показується, що його можна застосовувати не тільки до рівнянь еволюційного типу, а й взагалі кажучи, до довільного диференціального рівняння з частинними похідними. У даній статті теорема 1 з [9] використовується для редукції і побудови часткових розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними.

2. Симетрії Лі–Беклунда звичайних диференціальних рівнянь і редукція рівнянь з частинними похідними. Розглянемо диференціальне рівняння

$$U(x_1, x_2, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u}) = 0, \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $u = u(x) \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$, а символом $\underset{k}{u}$ позначено набір всіх часткових похідних k-го порядку по змінним x_1, x_2. Розглянемо також звичайне диференціальне рівняння загального вигляду

$$H\left(x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right) = 0, \tag{2}$$

де H є довільною гладкою функцією своїх аргументів, яке не обов'язково має бути лінійним (як, наприклад, в [8])). Припустимо, що існує загальний розв'язок рівняння (2) і він може бути записаний в такому вигляді

$$u = F(x_1, x_2, C_1, \ldots, C_m),$$

де $C_1, \ldots, C_m$ є довільними функціями від змінної x_2, а F є деяка гладка функція своїх аргументів. Справедливим є твердження про симетрійну редукцію [9] а саме: якщо рівняння (2) є інваріантним (в класичному сенсі) відносно оператора

$$Q = U(x_1, x_2, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u}, \ldots, \underset{k}{u})\partial_u,$$

то рівняння (1) за допомогою анзацу

$$u = F(x_1, x_2, \varphi_1(x_2), \ldots, \varphi_m(x_2)) \tag{3}$$

редукується в загальному випадку до системи k_1 рівнянь для m невідомих функцій $\varphi_1(x_2), \ldots, \varphi_m(x_2)$, причому $k_1 \leq m$.

Зауваження. В цьому підході змінна x_2 є параметричною змінною, подібно як в методі оберненої задачі розсіювання.

Далі розглянемо застосування цього методу на кількох прикладах.

1. Розглянемо нелінійне еволюційне рівняння вигляду

$$u_t = f(u)u_{xx} + a(u), \tag{4}$$

де $f(u)$, $a(u)$ – деякі гладкі функції. Розглянемо також нелінійне звичайне диференціальне рівняння

$$u_{xx} = h(u), \tag{5}$$

де $h(u)$ є також деякою гладкою функцією. Виявляється, що рівняння (5) є інваріантним відносно групи Лі–Беклунда з інфінітезимальним оператором

$$Q = (u_t - f(u)u_{xx} - a(u))\partial_u,$$

тільки тоді, коли $h(u)$ є лінійною функцією, тобто $h(u) = \alpha u + \beta$, $\alpha, \beta = \mathrm{const}$. Нехай $h = -u$. Тоді $f(u) = \left(A + \frac{a(u)}{u}\right)$, де $A = \mathrm{const}$, для довільної функції $a(u)$. Отже анзац

$$u = \varphi_1(t)\sin x + \varphi_2(t)\cos x, \tag{6}$$

де φ_1, φ_2 є довільними функціями від змінної t, що задовольняє рівняння

$$u_{xx} = -u,$$

редукує нелінійне еволюційне рівняння

$$u_t = \left(A + \frac{a(u)}{u}\right)u_{xx} + a(u) \tag{7}$$

до системи двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\varphi_1' = -A\varphi_1, \quad \varphi_2' = -A\varphi_2. \tag{8}$$

З (8), (6) легко отримати розв'язок рівняння (7) у вигляді

$$u = (k_1 \sin x + k_2 \cos x)e^{-At},$$

де $k_1, k_2 = \text{const}$, для довільної функції $a(u)$.

2. Далі знайдемо оператори симетрії Лі–Беклунда нелінійного звичайного диференціального рівняння, що має вигляд

$$uu_{xx} = 3u_x^2 - 3uu_x + u^2. \tag{9}$$

За допомогою інфінітезимального методу [10] знаходимо оператори симетрії рівняння (9), що мають вигляд

$$Q_1 = [u_{xx} + (\lambda - 3u^2)u^{-3}(u - u_x)^2 + 3(u - u_x)]\partial_u, \quad Q_2 = u_t\partial_u,$$

де λ – довільна дійсна стала. Тоді, як випливає з теореми 1 з [9] відповідний анзац

$$u = \varphi_2(t)e^x(\varphi_1(t) + 2e^x)^{-1/2},$$

що породжується рівнянням (9), редукує рівняння

$$u_t = u_{xx} + (\lambda - 3u^2)u^{-3}(u - u_x)^2 + 3(u - u_x) \tag{10}$$

до системи двох звичайних диференціальних рівнянь в такому вигляді

$$\varphi_2' = \varphi_2, \quad \varphi_1' = -\frac{-2\lambda}{\varphi_2^2}.$$

Інтегруючи цю систему отримуємо частковий розв'язок рівняння (10) у вигляді

$$u(t,x) = C_1 e^t \left(\frac{\lambda}{C_1^2}e^{-2t} + 2e^x + C_2\right)^{-1/2},$$

де $C_1, C_2 = \text{const}$.

3. На наступному прикладі покажемо, як цей метод застосовується до диференціальних рівнянь, що не є рівняннями еволюційного типу. Для цього розглянемо оператори симетрії Лі–Беклунда звичайного диференціального рівняння

$$u_{xx} = u_x^3. \tag{11}$$

Оператор Лі–Беклунда класичної симетрії рівняння (11) має такий вигляд

$$Q_1 = u_{xt}u_x^{-3}u_t\partial_u.$$

Крім того ми побудували однопараметричну групу інваріантності контактних перетворень, що задається генератором

$$Q_2 = \left[G\left(u + \frac{1}{u_x}\right)u_x + H\left(u + \frac{1}{u_x}\right)\right]\partial_u,$$

де F і H є довільними гладкими функціями від однієї змінної. З рівняння (11) отримуємо анзац

$$u = \varphi_2(t) - \sqrt{\varphi_1(t) - 2x}, \tag{12}$$

який повинен редукувати рівняння

$$u_{xt} = \frac{u_x^3}{u_t}\left(Gu_x + H\right). \tag{13}$$

Справді підставляючи (12) в рівняння (13) отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь у вигляді

$$\varphi_1'\varphi_2' = -2H(\varphi_2), \quad (\varphi_1')^2 = 4G(\varphi_2)$$

при довільних функціях G, H.

4. В попередніх прикладах ми будували оператори симетрії звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, тому отримані анзаци містили дві невідомі функції, а відповідна редукована система була системою двох звичайних диференціальних рівнянь. Згідно з теоремою 1 [9] число рівнянь в редукованій системі не може бути більше двох. Покажемо на простому прикладі, що існують такі рівняння, що анзац з двома невідомими функціями редукує досліджуване рівняння до одного звичайного диференціального рівняння. Оскільки отримана система є недовизначеною, то в цьому випадку існує можливість побудови розв'язку з однією довільною функцією. Розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$u_{x_1x_1} = u_{x_1}. \tag{14}$$

Це рівняння допускає оператори симетрії

$$Q_1 = u_{x_1x_2}\partial_u, \quad Q_2 = u_{x_1}F(u_{x_1} - u)\partial_u,$$

де F є довільною гладкою функцією однієї змінної. Відповідний анзац

$$u = -\varphi_1(x_2) + e^{x_1}\varphi_2(x_2),$$

що породжується рівнянням (14), редукує рівняння

$$u_{x_1x_2} = u_{x_1}F(u_{x_1} - u) \tag{15}$$

до одного звичайного диференціального рівняння

$$\varphi_2' = \varphi_2 F(\varphi_1(x_2)). \tag{16}$$

Інтегруючи рівняння (16) знаходимо частковий розв'язок нелінійного рівняння (15) у вигляді

$$u = -\varphi_1(x_2) + Ce^{x_1+\int F(\varphi_1(x_2))dx_2},$$

де C – довільна стала, що містить довільну функцію $\varphi_1(x_2)$.

3. Висновки. Таким чином вищі симетрії Лі–Беклунда нелінійних звичайних диференціальних рівнянь дозволяють провести симетрійну редукцію досліджуваних рівнянь в частинних похідних з двома незалежними змінними до системи звичайних диференціальних рівнянь. У цій роботі ми розглядали звичайні диференціальні рівняння другого порядку. Відповідно збудовані анзаци містять дві невідомі функції. Максимальне число рівнянь в редукованій системі визначається порядком звичайного диференціального рівняння, а його оператори симетрії визначають вигляд диференціального рівняння, до якого може застосовуватись метод редукції. Ефективність цього методу виразно проявляється при застосуванні до нелінійних диференціальних рівнянь, які не допускають оператори вищих симетрій в класичному сенсі і не є "інтегровними". Однак, виявляється, що цей метод можна успішно також застосовувати до рівняння Кортевега–де Фріза вигляду

$$u_t = u_{xxx} + uu_x + \alpha(t)(xu_x + 2u) + \beta(t)u_x,$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – довільні гладкі функції змінної t. Метод є загальним в тому сенсі, що його можна застосовувати не тільки в двовимірному просторі, а довільному скінченовимірному, і не тільки до рівнянь еволюційного типу (див. рівняння (13), (15)). Тим не менше слід зауважити, що при дослідженні еволюційних рівнянь сам метод і відповідні обчислення суттєво спрощуються. Треба також відмітити, що цей підхід легко узагальнюється на оператори Лі–Беклунда умовної симетрії звичайних диференціальних рівнянь.

[1] Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн. – 1987 – **37**, № 1 – С. 116–123.

[2] Fushchich W.I., Tsifra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45–L48.

[3] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариатность нелинейных уравнений акустики // Докл. АН УССР. – 1988. – № 10 – С. 28–33.

[4] Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O. A precise definition of reduction of partial differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – **238**. – P. 101–123.

[5] Fushchych W. Ansatz'95 // J. Nonlinear Math. Phys. – 1995. – **2**. – P. 216–235.

[6] Fushchych W., Zhdanov R. Antireduction and exact solutions of nonlinear heat equations // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**. – P. 60–64

[7] Zhdanov R. Conditional Lie–Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**. – P. 3841–3850.

[8] Svirshchevskii S.R. Lie–Bäcklund symmetries of linear ODEs and generalised seperation of variables in nonlinear equations // Phys. Lett. A. – 1995. – **199**. – P. 344–348 .

[9] Tsyfra I.M. Symmetry reduction of nonlinear differential equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 266–270.

[10] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — Москва: Мир, 1989. — 639 с.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 316–330

УДК 517.9:519.46

Нові Q-умовні симетрії та розв'язки рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції зі степеневими нелінійностями

Р.М. ЧЕРНІГА, О.Г. ПЛЮХІН

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: cherniha@imath.kiev.ua, pliukhin@imath.kiev.ua

Зроблено вичерпний опис Q-умовних симетрій двох класів нелінійних рівнянь реакції-дифузії-конвекції зі степеневими коефіцієнтами дифузії. Використовуючи отримані симетрії, побудовано нові неліївські розв'язки.

A complete description of Q-conditional symmetries for two classes of reaction-diffusion-convection equations with power diffusivities is obtained. Using the symmetries obtained new non-Lie solutions are constructed.

1. Вступ. Нелінійні рівняння реакції-дифузії-конвекції (РДК) вигляду

$$U_t = [A(U)U_x]_x + B(U)U_x + C(U), \tag{1}$$

де $U = U(t, x)$ – невідома функція, $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$ – деякі задані гладкі функції, індекси t та x означають диференціювання за цими змінними, лежать в основі багатьох математичних моделей для опису найрізноманітніших процесів живої та неживої природи [1, 2]. Починаючи з відомої роботи Овсяннікова [3] велика кількість робіт присвячена дослідженням рівнянь вигляду (1) теоретико-алгебраїчними методами. Зокрема, вичерпно описано всі класичні симетрії цих рівнянь та побудовано велику кількість ліївських розв'язків (див. [4, 5] та цитовані там роботи).

В 1969 Блуман (Bluman) та Коул (Cole) [6] ввели суттєве узагальнення класичних симетрій, яке отримало назву некласичних симетрій [7] або умовних симетрій [8]. В [9] (див. детальніше в [10, Section 5.7]) Фущичем та його учнями було запропоновано подальше

узагальнення поняття некласичних симетрій, яке також отримало назву умовна симетрія. З метою уникнення двозначності ми користуватимемося поняттям Q-умовна симетрія для позначення некласичної симетрії, яке було запропоновано в [10].

Виявляється, що шляхом застосування поняття Q-умовна симетрія до рівнянь РДК вигляду (1) можна як розширити симетрію цих рівнянь, так і знайти нові неліївські розв'язки для рівнянь, які відомі у застосуваннях [4, 10–14]. Отже, настав час для вичерпного опису Q-умовних симетрій рівняння (1). Оскільки ця задача поки що виглядає занадто складною, в цій роботі ми її розв'яжемо в частковому випадку, а саме для рівнянь вигляду

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + C(U), \tag{2}$$

та

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1} U_x + C(U), \tag{3}$$

де $\lambda \neq 0$, $m \neq 0$ – довільні сталі, $C(U)$ – довільна гладка функція. Окрім того ми продемонструємо ефективність отриманих симетрій для побудови точних розв'язків рівнянь (2)–(3). Зауважимо, що ми скрізь нижче розглядатимемо рівняння з ненульовим конвективним членом, тобто $\lambda \neq 0$. Ефект нелінійної конвекції в рівняннях реакції-дифузії може мати вражаючий ефект для структури розв'язків. Якщо конвекція виникає, як природне розширення закону збереження, то ми отримуємо саме такі рівняння, оскільки найчастіше нелінійності мають степеневий характер (детальніше див. [2]).

2. Q-умовні симетрії. В роботі [4] (див. також [5]) отримано вичерпний опис симетрій Лі рівняння реакції-дифузії-конвекції (РДК) (1) при $B(U) \neq 0$. Проте для знаходження всеможливих Q-умовних операторів рівняння (1) в роботі [4] побудовано лише систему відповідних визначальних рівнянь та наведено окремі її часткові розв'язки як приклади. В цій роботі ми ставимо задачу про відшукання всіх Q-умовних операторів вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, U)\partial_x + \eta(t, x, U)\partial_U, \tag{4}$$

де ξ та η – невідомі функції, для рівнянь (2)–(3). Зауважимо, що ми не розглядаємо задачу відшукання всіх Q-умовних операторів вигляду

$$Q = \partial_x + \eta(t, x, U)\partial_U,$$

оскільки ця задача еквівалентна розв'язанню власне рівнянь (2)–(3) [15].

Теорема 1. *Рівняння* (2) *Q-умовно інваріантне відносно оператора вигляду* (4) *тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають вигляду*

$$(i)\quad U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + (\lambda_1 U^{m+1} + \lambda_2)(U^{-m} - \lambda_3), \tag{5}$$
$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m})\partial_U, \quad m \neq -1; \tag{6}$$
$$(ii)\quad U_t = [U^{-1} U_x]_x + \lambda U^{-1} U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3), \tag{7}$$
$$Q = \partial_t + (\lambda_1 U \ln U + \lambda_2 U)\partial_U; \tag{8}$$
$$(iii)\quad U_t = [U^{-\frac{1}{2}} U_x]_x + \lambda U^{-\frac{1}{2}} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3, \tag{9}$$
$$Q = \partial_t + f(t,x)\partial_x + 2(g(t,x)U + h(t,x)U^{\frac{1}{2}})\partial_U, \tag{10}$$

де трійка функцій f, g, h є довільним розв'язком нелінійної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&2ff_x + f_t + fg = 0, \quad f_{xx} - \lambda f_x - 2g_x - fh = 0,\\
&(g - \tfrac{\lambda_1}{2})(g + 2f_x) + g_t = 0,\\
&2gh - \lambda_1 h + 2f_x h - \lambda_2 f_x + h_t - \lambda g_x - g_{xx} = 0,\\
&h^2 - \tfrac{\lambda_2}{2} h - \lambda_3 f_x + \tfrac{\lambda_3}{2} g - \lambda h_x - h_{xx} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (2) *відносно операторів вигляду* (4) *є випадками класичної інваріантності в сенсі Лі.*

Зауваження 1. Незважаючи на те, що система (11) містить п'ять рівнянь на три невідомі функції, вона є сумісною. Зокрема, при $f = g = 0$, $\lambda_1 = 0$ вона зводиться до одного звичайного диференціального рівняння

$$h_{xx} + \lambda h_x + \tfrac{\lambda_2}{2} h - h^2 = 0 \tag{12}$$

і тоді оператор

$$Q = \partial_t + 2h(x)U^{\frac{1}{2}}\partial_U$$

є оператором Q-умовної симетрії для будь-якого ненульового розв'язку рівняння (12), причому при $h = \frac{\lambda_2}{2}$, отримуємо частинний випадок (i), коли $m = -\frac{1}{2}$, $\lambda_1 = 0$.

Зауваження 2. При $h = 0$ знайдено загальний розв'язок системи (11). Розв'язки дають нам лише оператори ліївської симетрії (див. випадки 8 та 11 в [4]).

Теорема 2. *Рівняння* (3) *при $m \neq 0$ Q-умовно інваріантне відносно оператора вигляду* (4) *тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають вигляду*

$$(i)\quad U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1, \tag{13}$$
$$Q = \partial_t - \lambda U^{m+1}\partial_x + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m})\partial_U; \tag{14}$$
$$(ii)\quad U_t = [U^{-\frac{1}{2}} U_x]_x + \lambda U^{\frac{1}{2}} U_x + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3)\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda^2} + U^{\frac{1}{2}}\right), \tag{15}$$
$$Q = \partial_t + \left(-\lambda U^{\frac{1}{2}} + \frac{3\lambda_1}{2\lambda}\right)\partial_x + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3)\partial_U; \tag{16}$$
$$(iii)\quad U_t = [U^{-1} U_x]_x + \lambda U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3), \tag{17}$$
$$Q = \partial_t - \lambda\partial_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)U\partial_U. \tag{18}$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (3) *відносно операторів вигляду* (4) *є випадками класичної інваріантності в сенсі Лі.*

Зауваження 3. Всі Q-умовні симетрії рівняння (3) при $m = 0$ побудовані в роботі [14]. Випадок (iii) локальною заміною $y = x + \lambda t$ зводиться до випадку без конвективного члена, а саме:

$$U_t = [U^{-1} U_y]_y + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3).$$

Оскільки доведення обох теорем досить громіздкі, то тут ми обмежимося лише доведенням другої (доведення першої буде наведено в іншій роботі).

Доведення теореми 2. Використавши для рівняння (3) заміну

$$V = \begin{cases} U^{m+1}, & m \neq -1,\\ \ln U, & m = -1, \end{cases} \tag{19}$$

отримаємо у випадку $m \neq -1$

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x + F(V), \tag{20}$$

де $n = -\frac{m}{m+1} \neq 0, -1$, $F(V) = -(m+1)C(V^{\frac{1}{m+1}})$, а у випадку $m = -1$

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda e^V V_x + F(V), \tag{21}$$

де $F(V) = C(e^V)$. Одночасно оператор (4) набуде вигляду

$$Q^* = \partial_t + \xi^*(t,x,V)\partial_x + \eta^*(t,x,V)\partial_V \tag{22}$$

(надалі зірочки ми опускаємо). Використаємо роботу [4], в якій побудовано систему відповідних визначальних рівнянь для всіх рівнянь РДК. Тоді для знаходження функцій ξ, η та F для рівняння (20) одержимо таку систему

$$\begin{aligned} &\xi_{VV} = 0, \quad \eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda V^{n+1} - \xi V^n) + 2\xi_{xV}, \\ &\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + n\eta^2 V^{n-1} + 2\xi_x \eta V^n + \\ &\quad + \eta_t V^n - \lambda V^{n+1}\eta_x - \eta_{xx} = 0, \\ &\lambda\xi_x V^{n+1} + \big((-2\xi_V + \lambda(n+1))\eta + 2\xi\xi_x + \xi_t\big)V^n + \\ &\quad + \xi\eta n V^{n-1} - 3\xi_V F + 2\eta_{xV} - \xi_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

А для рівняння (21) – систему

$$\begin{aligned} &\xi_{VV} = 0, \quad \eta_{VV} = 2\xi_V(-\lambda e^V - \xi e^V) + 2\xi_{xV}, \\ &\big(\xi_t + 2\xi\xi_x + (\lambda + \xi - 2\xi_V)\eta + \lambda\xi_x\big)e^V - 3\xi_V F + 2\eta_{xV} - \xi_{xx} = 0, \\ &\eta F_V + (2\xi_x - \eta_V)F + \eta^2 e^V + 2\xi_x \eta e^V + \eta_t e^V - \lambda\eta_x e^V - \eta_{xx} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Очевидно, що перші два рівняння систем (23)–(24) легко інтегруються відносно змінної V. Для повного розв'язання цих систем доцільно по черзі розглянути такі випадки:

$$\begin{aligned} &(a) \quad \xi = \xi(V), \quad \eta = \eta(V), \\ &(b) \quad \xi = f(t,x), \quad \eta = g(t,x)V + h(t,x), \\ &(c) \quad \xi = a(t,x)V + f(t,x), \quad a(t,x) \neq 0, \quad \eta = \eta(t,x,V). \end{aligned} \tag{25}$$

При цьому для випадку (c) та системи (23)

$$\begin{aligned} \eta = &-\frac{2a(a+\lambda)}{(n+2)(n+3)}V^{n+3} - \frac{2af}{(n+1)(n+2)}V^{n+2} + \\ &+ a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x), \end{aligned}$$

при $n \neq -2, -3$;

$$\begin{aligned} \eta = &-2a(a+\lambda)V\ln V + 2af\ln V + a_x V^2 + \\ &+ (2a(a+\lambda) + g(t,x))V + h(t,x), \end{aligned}$$

при $n = -2$;

$$\eta = 2a(a+\lambda)\ln V - afV^{-1} + a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x),$$

при $n = -3$.

А для системи (24)

$$\eta = -2a^2 V e^V - 2a(\lambda + f - 2a)e^V + a_x V^2 + g(t,x)V + h(t,x).$$

Випадок (а). Очевидно, що розв'язок першого рівняння в (23)–(24) має вигляд

$$\xi = \lambda_1^* V + \lambda_2^*, \tag{26}$$

де $\lambda_1^*, \lambda_2^* \in \mathbb{R}$. Тоді з другого рівняння (23) з врахуванням (26), отримаємо функцію

$$\eta = -\frac{2\lambda_1^*(\lambda + \lambda_1^*)}{(n+2)(n+3)}V^{n+3} - \frac{2\lambda_1^*\lambda_2^*}{(n+1)(n+2)}V^{n+2} + \lambda_3^* V + \lambda_4^*, \tag{27}$$

де $\lambda_3^*, \lambda_4^* \in \mathbb{R}$, $n \neq -2, -3$, підставляючи яку в четверте рівняння системи (23), знаходимо функцію

$$F = \frac{\eta}{3\lambda_1^*}\big[\big(\lambda_1^*(n-2) + \lambda(n+1)\big)V^n + n\lambda_2^* V^{n-1}\big], \quad \lambda_1^* \neq 0. \tag{28}$$

Зауважимо, що випадок $\lambda_1^* = 0$ для всіх $F(V)$ веде лише до ліївських операторів. Отже, залишилося задовольнити третє рівняння системи (23), яке з врахуванням (28) набуває вигляду

$$\eta\big[\big(1 + \tfrac{1}{3\lambda_1^*}(\lambda_1^*(n-2) + \lambda(n+1)\big)V^{n-1} + (n-1)\lambda_2^* V^{n-2}\big] = 0. \tag{29}$$

Припустивши $\eta \neq 0$ і розчепивши цей вираз за степенями V, отримуємо умови

$$(\lambda_1^* + \lambda)(n+1) = 0, \quad (n-1)\lambda_2^* = 0. \tag{30}$$

Оскільки $n \neq -1$, то перша умова з (30) дає $\lambda_1^* = -\lambda$, а друга дає $n = 1$ або $\lambda_2^* = 0$. Отже, беручи до уваги формули (26)–(28), одержуємо рівняння

$$V_{xx} = VV_t - \lambda V^2 V_x - \frac{\lambda_2^* + 3\lambda V}{3\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\lambda_2^*\lambda V^3 + \lambda_3^* V + \lambda_4^*\right), \tag{31}$$

та оператор Q-умовної симетрії

$$Q = \partial_t + (-\lambda V + \lambda_2^*)\partial_x + \left(\tfrac{1}{3}\lambda_2^*\lambda V^3 + \lambda_3^* V + \lambda_4^*\right)\partial_V, \tag{32}$$

при $n = 1$; рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x - (\lambda_3^* V + \lambda_4^*) V^n, \tag{33}$$

та оператор

$$Q = \partial_t - \lambda V \partial_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)\partial_V, \tag{34}$$

при $\lambda_2^* = 0$. Неважко переконатися, що розгляд випадків $n = -2$, $n = -3$ веде лише до частинних випадків (33) та оператора (34). Врешті-решт, зробивши в рівняннях (31), (33) та операторах (32), (34) заміну (19) та перепозначивши коефіцієнти біля степенів U ($\lambda_3^* = \lambda_1$, $\lambda_4^* = \lambda_2$ для рівняння (33), $\lambda_2^* = \frac{3\lambda_1}{2\lambda}$, $\lambda_3^* = \frac{\lambda_2}{2}$, $\lambda_4^* = \frac{\lambda_3}{2}$ для рівняння (31)) отримаємо відповідно випадки (ii) та (i) теореми 2.

Якщо $\eta = 0$ в (29), то отримаємо частинний випадок рівняння (33) та оператора (34) при $\lambda_3^* = \lambda_4^* = 0$.

Розгляньмо тепер систему (24). Підставивши (26) в друге рівняння (24), знаходимо функцію

$$\eta = 2\lambda_1^* e^V(-\lambda_1^* V + 2\lambda_1^* - \lambda - \lambda_2^*) + \lambda_3^* V + \lambda_4^*,$$

де $\lambda_3^*, \lambda_4^* \in \mathbb{R}$, а підставивши в третє рівняння – функцію

$$F = \frac{\eta e^V}{3\lambda_1^*}\left(\lambda_1^* V + \lambda + \lambda_2^* - 2\lambda_1^*\right), \quad \lambda_1^* \neq 0. \tag{35}$$

Враховуючи (35), четверте рівняння системи (24) набуває вигляду

$$e^V \eta \left(1 + \tfrac{1}{3\lambda_1^*}(\lambda_1^* V + \lambda + \lambda_2^* - \lambda_1^*)\right) = 0,$$

а це веде до $\eta = 0$, тобто, зокрема, $\lambda_1^* = 0$, проте $\lambda_1^* \neq 0$ (див. (35)).

Якщо $\lambda_1^* = 0$, то система (24) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\xi = \lambda_2^*, \quad \eta = \lambda_3^* V + \lambda_4^*, \quad (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)(\lambda_2^* + \lambda) = 0, \\ (\lambda_3^* V + \lambda_4^*) F_V - \lambda_3^* F = -e^V(\lambda_3^* V + \lambda_4^*)^2. \end{gathered} \tag{36}$$

Розв'язавши систему (36), отримаємо рівняння

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda e^V V_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)(\lambda_5^* - e^V), \tag{37}$$

та оператор

$$Q = \partial_t - \lambda\partial_x + (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)\partial_V. \tag{38}$$

Зробивши в (37) та (38) заміну (19) та перепозначивши коефіцієнти біля степенів U ($\lambda_3^* = \lambda_1$, $\lambda_4^* = \lambda_2$, $\lambda_5^* = \lambda_3$), отримаємо випадок (iii) теореми 2.

Випадок (b). Покажемо, що у цьому випадку не отримуються нові Q-умовні симетрії. Розгляньмо систему (23). Розв'язком першого та другого рівнянь системи (23) будуть вирази (25). Підставивши (25) в четверте рівняння системи (23) і об'єднавши коефіцієнти біля відповідних степенів V, отримаємо

$$\begin{aligned}&\lambda\big((n+1)g + f_x\big)V^{n+1} + \big(\lambda(n+1)h + f_t + 2ff_x + nfg\big)V^n + \\ &\quad + nfhV^{n-1} + 2g_x - f_{xx} = 0.\end{aligned}$$

Розгляньмо випадок $n \neq 1$, тоді розчеплення за степенями V відбувається таким чином

$$\begin{aligned}&(n+1)g + f_x = 0, \quad \lambda(n+1)h + f_t + 2ff_x + nfg = 0, \\ &fh = 0, \quad 2g_x - f_{xx} = 0.\end{aligned} \tag{39}$$

Для розв'язання системи (39) необхідно розглянути два випадки (див. третє рівняння): $f = 0$ і $h = 0$. Якщо $f = 0$, то негайно отримується $g = h = 0$, оскільки $n + 1 \neq 0$ і $\lambda \neq 0$, а це веде лише до частинного випадку (a). Якщо ж $h = 0$, то використовуючи перше і четверте рівняння системи (39), отримаємо

$$g = g(t), \quad f = -(n+1)gx + \varphi(t),$$

звідки за допомогою другого рівняння цієї системи одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$g_t - (n+2)g^2 = 0, \quad \varphi_t - (n+2)\varphi g = 0. \tag{40}$$

з загальним розв'язком

$$g = \frac{-1}{(n+2)t + c_1}, \quad \varphi = \frac{c_2}{(n+2)t + c_1}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Підставивши його в третє рівняння системи (23), одержуємо лінійне ЗДР

$$F_V - \frac{2n+3}{V}F = 0.$$

В підсумку, випадок (b) при $n \neq 1$ приводить до рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1} V_x + \lambda_1 V^{2n+3}, \tag{41}$$

та оператора

$$Q = \partial_t + \frac{(n+1)x + c_2}{(n+2)t + c_1}\partial_x - \frac{V}{(n+2)t + c_1}\partial_V. \tag{42}$$

Проте оператор (42) еквівалентний оператору

$$X = c_1\partial_t + c_2\partial_x + (n+2)t\partial_t + (n+1)x\partial_x - V\partial_V,$$

який є звичайним оператором інваріантності рівняння (41) [4].

При $n = 1$, отримаємо частинний випадок рівняння (41) та оператора (42).

Аналогічний розгляд системи (24) у випадку (b) приводить лише до операторів ліївської симетрії рівнянь вигляду (21) при $F = \lambda_1 + \lambda_2 e^V$ та $F = \lambda_1 e^{\lambda_2 V}$.

Випадок (c). Детальні викладки ми опускаємо, оскільки при $a(t,x) \neq \mathrm{const}$ не отримується жодного оператора Q-умовної симетрії, а при $a(t,x) = \mathrm{const}$ – лише частинні випадки (a) і (b). Теорему доведено.

3. Точні розв'язки деяких рівнянь РДК. Добре відомо [16–18], що знаходження нових операторів умовної симетрії та нових анзаців ще не гарантує побудову нових розв'язків відповідного нелінійного рівняння, оскільки отримані розв'язки можуть виявитися такими, що їх можна побудувати за допомогою класичних симетрій Лі. Нижче ми побудуємо точні розв'язки деяких нелінійних рівнянь РДК, для яких було знайдено нові умовні симетрії, та покажемо, що вони є неліївськими розв'язками. Для спрощення викладок будемо розглядати рівняння для залежної змінної $V(t,x)$, а потім зробимо заміну (19), тобто повернемося до початкової змінної $U(t,x)$.

Розгляньмо випадок (i) теореми 1. Рівняння (5) та відповідний оператор (6) після заміни (19) набувають вигляду

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V_x + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)(\lambda_3 - V^n), \tag{43}$$

та

$$Q = \partial_t + (\lambda_1^* V + \lambda_2^*)\partial_V \tag{44}$$

відповідно.

Побудуємо за оператором (44) анзац за стандартною процедурою, тобто шляхом розв'язування рівняння $Q(V) = 0$, або

$$\frac{dt}{1} = \frac{dV}{\lambda_1^* V + \lambda_2^*}.$$

В залежності від значення λ_1^* отримаємо два анзаци: при $\lambda_1^* = 0$, одержимо

$$V = \lambda_2^* t + \varphi(x), \tag{45}$$

а при $\lambda_1^* \neq 0$

$$V = \varphi(x) e^{\lambda_1^* t} - \tfrac{\lambda_2^*}{\lambda_1^*}, \tag{46}$$

де $\varphi(x)$ – нова невідома функція. Підставивши анзац (45) в рівняння (43), отримуємо таке звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x + \lambda_4^* = 0, \quad \lambda_4^* = -\lambda_2^*\lambda_3,$$

яке легко розв'язується і має загальний розв'язок

$$\varphi = c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \tfrac{\lambda_4^*}{\lambda} x, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2.$$

Отже, розв'язок рівняння (43) при $\lambda_1^* = 0$ має вигляд

$$V = \lambda_2^* t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \tfrac{\lambda_4^*}{\lambda} x.$$

Використавши заміну (19) отримаємо розв'язок

$$U = \left[\lambda_2(m+1)t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \tfrac{\lambda_4(m+1)}{\lambda} x\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

рівняння

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + \lambda_2 U^{-m} + \lambda_4, \quad m \neq -1.$$

Оскільки останнє рівняння при $\lambda_2 \neq 0$ допускає лише тривіальну алгебру інваріантності $\langle \partial_t, \partial_x \rangle$ [4], то використовуючи ці оператори ми можемо отримати тільки розв'язки вигляду $U = \varphi(c_3 x + c_4 t)$, $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Як ми бачимо, отриманий нами розв'язок при $c_2 \neq 0$ має інший вигляд, а тому є неліївськими. Так само показується, що і інші розв'язки, які отримано нижче, є неліївськими.

Підставивши анзац (46) в рівняння (43), знову отримаємо лінійне ЗДР

$$\varphi_{xx} + \lambda\varphi_x + \lambda_4\varphi = 0, \quad \lambda_4 = -\lambda_1^*\lambda_3,$$

розв'язки якого суттєво залежать від значення $\delta = \lambda^2 - 4\lambda_4$. Згідно з класичною теорією лінійних ЗДР отримуємо

$$\varphi_1 = c_1 \exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x\right) + c_2 \exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x\right)$$

при $\delta > 0$,

$$\varphi_2 = c_1 \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right) + c_2 x \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right)$$

при $\delta = 0$,

$$\varphi_3 = \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x\right)\left(c_1 \cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right)$$

при $\delta < 0$.

Отже, рівняння (43) має три типи розв'язків в залежності від значення δ, $\delta = \lambda^2 + 4\lambda_1\lambda_3(m+1)$. Знову використавши заміну (19), анзац (46) та отримані функції $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, будуємо розв'язки

$$\begin{aligned} U = \Bigg[& c_1 \exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + \\ & + c_2 \exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Bigg]^{\frac{1}{m+1}}, \\ U = \Bigg[& c_1 \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) + \\ & + c_2 x \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\Bigg]^{\frac{1}{m+1}}, \\ U = \Bigg[& \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1(m+1)t\right) \times \\ & \times \left(c_1 \cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Bigg]^{\frac{1}{m+1}} \end{aligned}$$

рівняння

$$\begin{aligned} U_t = {} & [U^m U_x]_x + \lambda U^m U_x + \\ & + (\lambda_1 U^{m+1} + \lambda_2)(U^{-m} - \lambda_3), \end{aligned} \tag{47}$$

де $m \neq -1$.

Зауважимо, що неліївські розв'язки рівняння (47) при $\lambda_2 = 0$ було отримано в роботі [18], проте легко помітити, що вищенаведені розв'язки мають іншу структуру, тобто є новими.

Розгляньмо випадок (ii) теореми 1. Рівняння (7) та відповідний оператор (8) після заміни (19) набувають виглядів

$$V_{xx} = e^V V_t - \lambda V_x + (\lambda_1 V + \lambda_2)(\lambda_3 - e^V),$$

та

$$Q = \partial_t + (\lambda_1 V + \lambda_2)\partial_V.$$

Аналогічним чином, як і при розгляді випадку (i) отримаємо такі два анзаци

$$V = \lambda_2 t + \varphi(x), \quad \lambda_1 = 0, \tag{48}$$

$$V = \varphi(x)e^{\lambda_1 t} - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \lambda_1 \neq 0. \tag{49}$$

Оскільки структура анзаців (48) і (49) така сама що й (45) і (46), то подальші викладки повністю аналогічні. У підсумку отримаємо розв'язок

$$U = \exp\left[\lambda_2 t + c_1 + c_2 e^{-\lambda x} - \tfrac{\lambda_4}{\lambda}x\right],$$

нелінійного рівняння РДК

$$U_t = [U^{-1}U_x]_x + \lambda U^{-1}U_x + \lambda_2 U + \lambda_4.$$

Та три розв'язки

$$\begin{aligned} U &= \exp\left[c_1 \exp\left(\tfrac{-\lambda+\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1 t\right) + c_2 \exp\left(\tfrac{-\lambda-\sqrt{\delta}}{2}x + \lambda_1 t\right) - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right], \\ U &= \exp\left[c_1 \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1 t\right) + c_2 x \exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1 t\right) - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right], \\ U &= \exp\left[\exp\left(-\tfrac{\lambda}{2}x + \lambda_1 t\right)\left(c_1 \cos\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x + c_2 \sin\tfrac{\sqrt{-\delta}}{2}x\right) - \tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right], \end{aligned}$$

рівняння

$$U_t = [U^{-1}U_x]_x + \lambda U^{-1}U_x + (\lambda_1 \ln U + \lambda_2)(U - \lambda_3)$$

в залежності від знаку $\delta = \lambda^2 + 4\lambda_1\lambda_3$.

Розгляньмо випадок (i) теореми 2. Рівняння (13) та відповідний оператор (14) після заміни (19) набувають відповідно вигляду (33) та (34). Рівняння $Q(V)=0$ для оператора (34) має вигляд

$$V_t = \lambda V V_x + \lambda_3^* V + \lambda_4^*. \tag{50}$$

У цьому випадку зручніше не будувати анзац, а спочатку виразити V_t з (50) та підставити в (33). Тоді отримується лінійне ЗДР $V_{xx}=0$, яке породжує анзац

$$V = \varphi(t)x + \psi(t), \tag{51}$$

де $\varphi(t)x$ і $\psi(t)$ – нові шукані функції. Підставивши анзац (51) у рівняння (50), одержимо вираз

$$\varphi_t x + \psi_t = \lambda(\varphi x + \psi)\varphi + \lambda_3^*(\varphi x + \psi) + \lambda_4^*, \tag{52}$$

розчеплення якого за змінною x веде до системи ЗДР

$$\varphi_t = \lambda\varphi^2 + \lambda_3^*\varphi, \quad \psi_t = \lambda\varphi\psi + \lambda_3^*\psi + \lambda_4^*. \tag{53}$$

Розв'язавши систему (53) і підставивши отримані вирази для φ та ψ в анзац (51), одержимо розв'язки

$$V = \tfrac{1}{\lambda t + c_1}\left(-x + \lambda_4^*\big(\tfrac{\lambda}{2}t^2 + c_1 t\big) + c_2\right),$$

та

$$V = \tfrac{1}{1+c_1 e^{-\lambda_3^* t}}\left(-\tfrac{\lambda_3^*}{\lambda}x + \lambda_4^*\big(t - \tfrac{c_1}{\lambda_3^*}e^{-\lambda_3^* t}\big) + c_2\right),$$

для рівняння

$$V_{xx} = V^n V_t - \lambda V^{n+1}V_x - (\lambda_3^* V + \lambda_4^*)V^n, \quad n \neq -1,$$

відповідно при $\lambda_3^*=0$ та $\lambda_3^*\neq 0$. Зробивши заміну (19) і перепозначивши сталі, отримаємо розв'язки

$$U = \left[\tfrac{1}{\lambda t + c_1}\left(-x + \lambda_2(m+1)\big(\tfrac{\lambda}{2}t^2 + c_1 t\big) + c_2\right)\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

та

$$U = \left[\tfrac{1}{1+c_1 e^{-\lambda_1(m+1)t}}\left(-\tfrac{\lambda_1(m+1)}{\lambda}x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda_2(m+1)\big(t - \tfrac{c_1}{\lambda_1(m+1)}e^{-\lambda_1(m+1)t}\big) + c_2\right)\right]^{\frac{1}{m+1}},$$

нелінійного рівняння РДК

$$U_t = [U^m U_x]_x + \lambda U^{m+1}U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1 \tag{54}$$

відповідно при $\lambda_1 = 0$ та $\lambda_1 \neq 0$. Зауважимо, що при $m \neq -1$ рівняння (54) допускає лише тривіальну алгебру інваріантності [4], тому отримані розв'язки є неліївськими.

4. Висновки. Таким чином в цій роботі ми встановили дві теореми, які дають вичерпний опис Q-умовних симетрій двох класів рівнянь реакції-дифузії-конвекції вигляду (2) та (3). Зауважимо, що отримані Q-умовні симетрії як правило можна використовувати і для випадку виродження рівняння РДК в рівняння реакції-дифузії, тобто при $\lambda=0$. Більше того, наскільки нам відомо, деякі Q-умовні симетрії є новими навіть у цьому частковому випадку.

В роботі також побудовано точні розв'язки деяких нелінійних РДК за допомогою отриманих симетрій. Показано при яких умовах ці розв'язки є неліївськими, тобто не можуть бути отримані класичним методом Лі. В майбутньому ми плануємо більш детально дослідити властивості отриманих розв'язків та питання щодо їх можливого застосування.

[1] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. – New York: Academic Press, 1972. – 495 p.

[2] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[3] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. – 1959. – **125**. – С. 492–495.

[4] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term // Euro. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527–542.

[5] Cherniha R., Serov M. Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term. II // Euro. J. Appl. Math., to appear.

[6] Bluman G.W., Cole I.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025-1042.

[7] Olver P., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – **47**. – P. 263–278.

[8] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2915-2924.

[9] Фущич В.І., Серов М.І., Чопик В.І. Умовна інваріантність та нелінійні рівняння теплопровідності // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 9. – С. 17–21.

[10] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Kluwer: Dordrecht, 1993. – 456 p.

[11] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**. – С. 1370–1376.

[12] Clarkson P.A., Mansfield E.L. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations // Phys. D. – 1993. – **70**. – P. 250–288.

[13] Arrigo D.J., Broadbridge P., Hill J.M. Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source // IMA J. Appl. Math. – 1994. – **52**. – P. 1–24.

[14] Cherniha R. New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology // J. Math. Anal. Appl., to appear.

[15] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Conditional symmetry of a porous medium equation // Phys. D. – 1998. – **122**. – P. 178–186.

[16] Cherniha R. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations // Rep. Math. Phys. – 1996.– **38**. – P. 301–312.

[17] Черніга Р.М. Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв‘язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**. – С. 814–827.

[18] Cherniha R. New non-Lie ansätze and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – **31**. – P. 8179–8198.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 331–336

УДК 517.912:512.816

Хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії

***І.І. ЮРИК* †, *Т.А. БАРАНННИК* ‡**

† *Національний університет харчових технологій, Київ*
E-mail: appmath@imath.kiev.ua

‡ *Полтавський держ. пед. університет ім. В.Г. Короленка*
E-mail: barannyk_ t@poltava.velton.ua

З використанням спеціального анзацу знайдено хвильові розв'язки нелінійного рівняння дифузії.

Wave solutions for a nonlinear diffusion equation are found by using the special ansatz.

Вступ. Робота присвячена побудові точних розв'язків нелінійного рівняння дифузії

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}} u_x + a_0 u^n + a_1 u + \\ + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}, \qquad (1)$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\lambda \geq 0$, $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, $n \neq 1$. Якщо $a_0 \neq 0$, то a_0 можна звести до 1 або -1, помноживши функцію u на відповідний скаляр. Рівняння (1) є узагальненням класичного рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + \mu u u_x$, а також відомих рівнянь Фішера [1] $u_t = u_{xx} = u(1-u)$ і Маррі [2] $u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \varepsilon u^2 + cu$. Важливим частинним випадком рівняння (1) є рівняння типу Колмогорова–Петровського–Піскунова

$$u_t = u_{xx} + a_0 u^n + a_1 u + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}, \qquad (2)$$

яке досліджувалося в [3]. Відзначимо, що систематичне вивчення умовної симетрії цього рівняння для $n = 3,\ a_4 = 0$ було започатковано в [4].

Для побудови точних розв'язків рівняння (1) ми використовуємо анзац

$$u = k\left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}}, \qquad (3)$$

де k – стала, $z = z(t,x)$, запропонований в [3] для побудови точних розв'язків рівняння (2).

В залежності від значення коефіцієнта a_0 виділимо два випадки.

Випадок $a_0 \neq 0$. Підставимо (3) в (1):

$$\begin{aligned}
&\frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xt} z^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_t z^{-\frac{n+1}{n-1}} = \\
&= \frac{2k(3-n)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{4-2n}{n-1}} z_{xx}^2 z^{-\frac{2}{n-1}} + \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xxx} z^{-\frac{2}{n-1}} - \\
&- \frac{4k}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{n+1}{n-1}} - \frac{2k(n+1)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{n+1}{n-1}} + \\
&+ \frac{2k(n+1)}{(n-1)^2} z_x^{\frac{2n}{n-1}} z^{-\frac{2n}{n-1}} + \lambda k^{\frac{n-1}{2}} z_x z^{-1} \times \\
&\times \left(\frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{3-n}{n-1}} z_{xx} z^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{2k}{n-1} z_x^{\frac{2}{n-1}} z_x z^{-\frac{n+1}{n-1}} \right) + \\
&+ a_0 k^n \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2n}{n-1}} + a_1 k \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{2}{n-1}} + a_2 k^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{n+1}{n-1}} + \\
&+ a_3 k^{\frac{3-n}{2}} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{3-n}{n-1}} + a_4 k^{2-n} \left(\frac{z_x}{z}\right)^{\frac{4-2n}{n-1}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Будемо вважати, що в рівнянні (4)

$$a_0 k^{n-1} - \frac{2\lambda}{n-1} k^{\frac{n-1}{2}} + \frac{2(n+1)}{(n-1)^2} = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) є квадратним відносно $k^{\frac{n-1}{2}}$ і має корені

$$k^{\frac{n-1}{2}} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2(n+1)a_0}}{a_0(n-1)}. \tag{6}$$

Помноживши обидві частини рівняння (4) на $z_x^{\frac{2n-4}{n-1}} z^{\frac{n+1}{n-1}}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
&z \left[\frac{2}{n-1} z_x z_{xt} - \frac{2}{n-1} z_x z_{xxx} - a_3 k^{\frac{1-n}{2}} z z_x - a_4 k^{1-n} z^2 - \right. \\
&\left. - \frac{2(3-n)}{(n-1)^2} z_{xx}^2 \right] = z_x^2 \left[\frac{2}{n-1} z_t + a_1 z + a_2 k^{\frac{n-1}{2}} z_x - \right. \\
&\left. - \frac{2(n+3)}{(n-1)^2} z_{xx} + \frac{2\lambda k^{\frac{n-1}{2}}}{n-1} z_{xx} \right].
\end{aligned}$$

Використовуючи позначення

$$\begin{aligned}
&a_1 = \frac{2\lambda_1}{n-1}, \quad a_2 = \frac{2\lambda_2}{n-1} k^{\frac{1-n}{2}}, \quad a_3 = \frac{2\lambda_3}{n-1} k^{\frac{1-n}{2}}, \\
&a_4 = \frac{2\lambda_4}{n-1} k^{1-n}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda k^{\frac{n-1}{2}},
\end{aligned} \tag{7}$$

попереднє рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&z \left[z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2 + \frac{n-3}{n-1} z_{xx}^2 \right] = \\
&= z_x^2 \left[z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x - \frac{n+3}{n-1} z_{xx} + \tilde{\lambda} z_{xx} \right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Розв'язок рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$z = \phi(\xi), \quad \xi = x + \mu t. \tag{9}$$

Підставивши (9) в (8), отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}
&\phi \left[\mu \phi' \phi'' - \phi' \phi''' - \lambda_3 \phi \phi' - \lambda_4 \phi^2 + \frac{n-3}{n-1} (\phi'')^2 \right] = \\
&= (\phi')^2 \left[\mu \phi' + \lambda_1 \phi + \lambda_2 \phi' - \frac{n+3}{n-1} \phi'' + \tilde{\lambda} \phi'' \right],
\end{aligned} \tag{10}$$

де $\phi' = \frac{d\phi}{d\xi}$.

Розв'язки рівняння (10) шукаємо у вигляді [5]

$$\phi = \nu_0 + \nu_1 \varphi + \nu_2 \varphi^2 + \cdots, \tag{11}$$

де $\nu_0, \nu_1, \ldots$ – сталі, а функція φ задовольняє рівняння

$$\varphi' = \varepsilon \sqrt{C_0 + C_1 \varphi + C_2 \varphi^2 + \cdots}, \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{12}$$

Для того, щоб функція (11) була розв'язком рівняння (10), ми повинні прирівняти окремо всі доданки, які містять парні і непарні степені квадратного кореня, визначеного формулою (12). Враховуючи це зауваження, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\mu \phi \phi' \phi'' - \lambda_3 \phi^2 \phi' = (\lambda_2 + \mu)(\phi')^3, \\
&\phi \left(\phi' \phi''' + \lambda_4 \phi^2 + \frac{3-n}{n-1} (\phi'')^2 \right) =
\end{aligned} \tag{13}$$

$$= (\phi')^2 \left(\frac{n+3}{n-1}\phi'' - \tilde{\lambda}\phi'' - \lambda_1 \phi \right). \qquad (14)$$

Поділимо обидві частини рівняння (13) на $\mu\phi^2\phi'$:

$$\frac{\phi''}{\phi} - \frac{\lambda_3}{\mu} = \left(\frac{\lambda_2}{\mu} + 1 \right) \frac{(\phi')^2}{\phi^2}.$$

Виконаємо заміну

$$Y = \frac{\phi'}{\phi}, \quad \frac{\phi''}{\phi} = Y' + Y^2,$$

яка перетворює рівняння (13) в рівняння Ріккаті

$$Y' - \frac{\lambda_2}{\mu} Y^2 = \frac{\lambda_3}{\mu}. \qquad (15)$$

Загальний розв'язок рівняння (15) утворюють функції

$$Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right),$$

$$Y = \sqrt{\frac{-\lambda_3}{\lambda_2}} \left(\tanh\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right) \right)^{-1}, \quad \text{якщо} \quad \lambda_2\lambda_3 < 0, \qquad (16)$$

$$Y = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \tan\left(\frac{\sqrt{\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right), \quad \text{якщо} \quad \lambda_2\lambda_3 > 0, \qquad (17)$$

$$Y = -\frac{\mu}{\lambda_2(\xi + C)}, \quad \text{якщо} \quad \lambda_3 = 0, \qquad (18)$$

де C – стала інтегрування.

Поділимо обидві частини рівняння (14) на ϕ^3:

$$\frac{\phi'''}{\phi}\frac{\phi'}{\phi} + \lambda_4 + \frac{3-n}{n-1}\frac{(\phi'')^2}{\phi^2} = \frac{(\phi')^2}{\phi^2} \left(\frac{n+3}{n-1}\frac{\phi''}{\phi} - \tilde{\lambda}\frac{\phi''}{\phi} - \lambda_1 \right).$$

Заміна

$$Y = \frac{\phi'}{\phi}, \quad \frac{\phi''}{\phi} = Y' + Y^2, \quad \frac{\phi'''}{\phi} = Y'' + 3YY' + Y^3,$$

перетворює рівняння (14) в рівняння

$$YY'' - \frac{n+1}{n-1}Y^4 + \lambda_4 + \frac{3-n}{n-1}(Y')^2 +$$

$$+ \tilde{\lambda}Y'Y^2 + \tilde{\lambda}Y^4 + \lambda_1 Y^2 = 0. \qquad (19)$$

З'ясуємо, наприклад, при яких значеннях параметрів λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 і μ функція (16) буде задовольняти рівняння (19). Підставивши (16) в (19) і прирівнявши коефіцієнти при відповідних степенях $\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{-\lambda_2\lambda_3}}{\mu}\xi + C \right)$, отримаємо систему рівнянь

$$2\frac{\lambda_3^2}{\mu^2} - \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 + \frac{3-n}{n-1}\frac{\lambda_3^2}{\mu^2} -$$
$$- \tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(-\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{\mu} + \tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 = 0, \qquad (20)$$

$$-2\frac{\lambda_3^2}{\mu^2} + 2\frac{n+1}{n-1}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 + \tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(-\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{2}}}{\mu} -$$
$$- 2\tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2} = 0, \qquad (21)$$

$$-\frac{n+1}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 + \lambda_4 + \tilde{\lambda}\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2 - \lambda_1\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) = 0. \qquad (22)$$

З рівняння (20) випливає, що

$$\mu = \pm\lambda_2, \quad \text{якщо} \quad \tilde{\lambda} = 0, \qquad \mu = |\lambda_2|, \quad \text{якщо} \quad \tilde{\lambda} \neq 0.$$

З рівняння (21) знаходимо, що

$$\lambda_1 = \left(-\frac{4}{n-1} + \tilde{\lambda} \right) \frac{\lambda_3}{\lambda_2}. \qquad (23)$$

Підставивши в рівняння (22), отримуємо

$$\lambda_4 = \frac{n-3}{n-1}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right)^2. \qquad (24)$$

Отже, рівняння (1) має розв'язок

$$u = k\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \right)^{\frac{2}{n-1}} \left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x + |\lambda_2|t) + C \right) \right]^{\frac{2}{n-1}},$$

де k визначається формулою (6), а коефіцієнти a_1, a_2, a_3, a_4 рівняння (1) визначаються співвідношеннями (7), (23), (24). Відзначимо, що розв'язки рівняння (1) для $\lambda = 0$ наведені в [3].

Аналогічно показуємо, що розв'язками рівняння (1) є функції

$$u = k\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

якщо $\lambda_2\lambda_3 < 0$;

$$u = k\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{1}{n-1}}\left[\tan\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}},$$

якщо $\lambda_2\lambda_3 > 0$.

Випадок $\boldsymbol{a_0 = 0}$. Рівняння (1) набуває вигляду

$$u_t = u_{xx} + \lambda u^{\frac{n-1}{2}}u_x + a_1 u + a_2 u^{\frac{n+1}{2}} + a_3 u^{\frac{3-n}{2}} + a_4 u^{2-n}. \qquad (25)$$

Будемо вважати, що в рівнянні (25) $\lambda \neq 0$. З рівняння (5) знаходимо, що

$$k^{\frac{n-1}{2}} = \frac{n+1}{\lambda(n-1)}.$$

Отже, розв'язками рівняння (25) є функції

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}},$$

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tanh\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{-\frac{2}{n-1}},$$

$$u = \left(\frac{n+1}{\lambda(n-1)}\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}\right)^{\frac{2}{n-1}}\left[\tan\left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{\lambda_2}}(x+|\lambda_2|t)+C\right)\right]^{\frac{2}{n-1}}.$$

[1] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. – 1937. – **7**. – P. 353–369.

[2] Murray J.D. Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 750 p.

[3] Nikitin A.G., Barannyk T.A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Centr. Eur. J. Math. – 2005. – **2**. – P. 840–858.

[4] Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР. – 1990. – № 7. – С. 24–28.

[5] Fan E. Multiple travelling wave solutions of nonlinear evolution equations using a unified algebraic method // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – **35**. – P. 6853–6872.

Спогади про Вільгельма Ілліча Фущича

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 339–340

Такі люди живуть вічно у своїх справах

Леонід Ф. БАРАННИК

Доля звела мене з Вільгельмом Іллічем у 1978 р., хоча ми були знайомі ще з 1969 р. Більше того, я закінчив ту саму школу на Закарпатті, що й Вільгельм Ілліч, і той же університет. Ще невиразно пам'ятаю навіть святкові демонстрації у м. Іршава Закарпатської області, де в п'ятидесятих роках в колоні середньої школи крокувала футбольна команда, в якій був і Вільгельм Ілліч. Але так сталося, що я почав з ним співпрацювати тільки після закінчення аспірантури і захисту кандидатської дисертації з алгебри і теорії чисел. Для подальших наукових досліджень мені потрібні були творчі контакти, доступ до публікацій, нарешті, моральна підтримка, яка допомогла б на периферії працювати на віддалену перспективу. І це я одержав від Вільгельма Ілліча.

Тематика групового аналізу диференціальних рівнянь була для мене абсолютно новою і складною. На перших порах опускалися руки перед численними труднощами, які поставали на шляху її пізнання. І якби не підтримка мого вчителя впродовж багатьох років, то я не зміг би ввійти в цю тематику. Щотижня я мав декілька розмов по телефону, які фактично були короткими консультаціями і відігравали роль імпульсів що, "заряджали" мене до подальшої роботи. Треба сказати, що робочий день Вільгельма Ілліча був розписаний по хвилинах, тому не так просто було домовитися про зустріч. Проте по телефону можна було розмовляти після 22:00 щодня.

Фантастичною була обізнаність Вільгельма Ілліча з журнальною літературою. Цією інформацією він щедро ділився зі своїми учнями. Дуже часто для кожного з нас робив нотатки, з яких можна було дізнатися про найновіші результати, що стосувалися наших наукових інтересів. У мене є кілька сторінок, заповнених рукою Вільгельма Ілліча, котрі я зберігаю як найцінніші реліквії.

Співпраця вчителя з учнями продовжувалася і після захисту дисертацій. Він успішно "розводив" своїх учнів, коли вони виходили на одні й ті самі задачі. Це треба було робити, оскільки ні від кого не було ніяких таємниць і кількість учнів постійно зростала. Постановка нових задач у переважній більшості випадків належала Вільгельмові Іллічу.

Вражаючою була також його працездатність і вимогливість до інших трудитися з повною віддачею сил. Ілюстрацією цього може бути такий епізод. З 1 жовтня 1991 р. (уже після захисту докторської дисертації) мене запросили на роботу в Слупську вищу педагогічну школу (Польща). В той період надзвичайно складно було придбати залізничний квиток з Києва до будь-якого польського міста. Тому довелося кілька разів виїжджати з Києва в новорічну ніч. Пам'ятаю, як 31 грудня 1993 р., близько 21 години, я прийшов до Вільгельма Ілліча в Інститут математики. Після короткої розмови він поклав переді мною купку журналів і запропонував попрацювати до відходу поїзда (десь до 24:00 год.). Я подумав, що коли б ще хтось був з нами, то й він одержав би подібне завдання. Правда, я зіслався на втому і о 23:00 провів Вільгельма Ілліча до тролейбусної зупинки. По дорозі ми зайшли в гастроном, де Вільгельм Ілліч зробив деякі покупки до святкового столу. Казав, що Ольга Іванівна в черговий раз буде засмучена таким запізнілим приходом, але він не зміг відкласти робочі справи на інший день. Я не знаю жодного випадку, коли б хтось з учнів мого вчителя виражав незадоволення з приводу його високої вимогливості, оскільки кожен прекрасно розумів, що тільки завдяки їй наші наукові дослідження завершувалися публікаціями в центральних вітчизняних і престижних закордонних журналах, доповідями на міжнародних конференціях і, врешті, успішними захистами дисертацій.

Постійно пам'ятаю Вільгельма Ілліча життєрадісним, сповненим нових творчих задумів, цікавим співрозмовником. Для кожного він знаходив добре слово, розпитував про життєві труднощі, допомагав порадами. В січні 1997 р., будучи вже тяжко хворим, Вільгельм Ілліч у телефонній розмові зі мною (я дзвонив до нього в лікарню з Польщі) не дозволив собі нарікати на свою долю; натомість, він намагався підбадьорити мене у зв'язку з моїм захворюванням. Знайшов слова підтримки і в розмові з моєю дружиною, якій зателефонував з лікарні у Полтаву.

Такі люди живуть вічно у своїх справах.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 341–345

Людина, що завжди поспішала

Вячеслав М. БОЙКО

Свою першу лекцію з Вільгельмом Іллічем я пропустив (поїхали з товаришами за холодильником в кімнату в гуртожиток). Було це 1 вересня 1990 року (субота). Вільгельм Ілліч почав читати для нас, студентів IV курсу кафедри матфізики, спецкурс. Це був напевне єдиний випадок, коли я не з'явився на зустріч з Вільгельмом Іллічем. Таким чином, перша наша зустріч відбулася лише через тиждень.

Хочу згадати специфіку викладання Вільгельма Ілліча. На його заняттях рівною мірою працювали і викладач, і студент. (Більшість спецкурсів проводилась в нас лише як лекції.) Інколи Вільгельм Ілліч сам читав лекції по обраним темам, але в більшості випадків ми самі повинні були готуватися до занять. Готували доповіді на теми, запропоновані Вільгельмом Іллічем, а потім на парі один із студентів доповідав. Після цього Вільгельм Ілліч робив необхідні акценти та пояснення.

Зауважу, що на парах ми спілкувалися виключно українською мовою (це було досить незвично, оскільки майже всі предмети в той час нам викладали російською). Вільгельм Ілліч постійно підправляв нас, підчищав нашу мову. Особисто я вдячний Вільгельму Іллічу за те, що він навчив мене самостійно працювати з науковою літературою.

Хотілось відмітити ще форму здачі екзаменів Вільгельму Іллічу. Кращим з нас він ставив "автомат". Решта отримувала свою оцінку лише тоді, коли щось вивчили, інколи навіть під час екзамену.

З весни 1991 року я почав відвідувати семінари відділу прикладних досліджень. Перше враження про них: "Куди це я попав і про що тут йде мова"? Лише з часом почало трохи "прояснюватися" і я став потрохи "втягуватися".

Не знаю, як склалася б моя доля, якби Вільгельм Ілліч не запропонував мені спочатку писати дипломну роботу, а потім – поступати до нього в аспірантуру. Навряд чи я сам насмілився би вступати до аспірантури або навіть попросити когось про те, щоб мене взяли до аспірантури. Вступати до аспірантури Вільгельм Ілліч запропонував мені десь наприкінці 5-го курсу (відбулося це якось буденно, неочікувано для мене). Вступні екзамени в аспірантуру Інституту математики я здавав за відсутності Вільгельма Ілліча (він був у науковому відрядженні). Я дуже хвилювався на екзаменах, і лише потім зрозумів, що вступ до аспірантури був наперед майже визначений самим Вільгельмом Іллічем.

Я став аспірантом Вільгельма Ілліча в той час, коли під його керівництвом в Києві вже сформувалася школа симетрійного аналізу. Тобто я прийшов до Вільгельма Ілліча тоді, коли він вже був відомим ученим з іменем і визнанням. Про створення цієї школи я знаю лише з розповідей перших учнів Вільгельма Ілліча; дещо інколи розповідав сам Вільгельм Ілліч. Кількість учнів, як на мене, на цей час у Вільгельма Ілліча була просто величезною. І для кожного Вільгельм Ілліч знаходив час, був обізнаний з науковою роботою кожного з своїх співробітників та учнів. Він спрямовував наукову роботу кожного з нас – від постановки задачі до отримання кінцевого результату.

Днем "X", днем збору, як завжди, був понеділок. У цей день Вільгельм Ілліч регулярно о шостій вечора проводив в аспірантській семінар. Пам'ятаю, у 1993 році в Інституті виникли проблеми з освітленням у вечірній час: після 17.00 відмикали електроенергію. І Вільгельм Ілліч десь місяців зо два проводив наші семінари при свічках. Після семінару, який тривав приблизно півтори години, Вільгельм Ілліч розмовляв з кожним із нас індивідуально. Спочатку – з "сімейними", з "холостяками" – в кінці. Такі розмови затягувалися десь за десяту вечора. Крім понеділка, такі "розмовні" дні були у Вільгельма Ілліча ще й протягом тижня, на ці дні призначалися індивідуальні зустрічі в понеділок. Понеділок був в Вільгельма Ілліча як і днем "підведенням підсумків", так і днем "планування".

Працездатність Вільгельма Ілліча була просто вражаючою. За роки роботи з Вільгельмом Іллічем у мене зібралася ціла папка з постановками задач, що пропонував мені Вільгельм Ілліч. А скільки таких аркушів підготував він для кожного з своїх учнів. Причому на кожному з них Вільгельм Ілліч ставив помітку – для кого це планувалося і дату. Кількість таких аркушів різко зростала, коли задача починала "йти". За цими аркушами напевне можна простежити наукову роботу кожного з нас, її застої та піки.

Важливим етапом у житті Вільгельма Ілліча стало створення ним міжнародного математичного журналу "Journal of Nonlinear Mathematical Physics". Пам'ятаю, як радів Вільгельм Ілліч, коли вийшов перший номер. Один лише Бог, напевне, знає яких зусиль коштувало йому, щоб цей журнал почав "жити". Вільгельм Ілліч вкладав у нього всю свою душу. Він довів, що і в Україні можна видавати науковий журнал світового рівня. Пам'ятаю, як шукав Вільгельм Ілліч папір для журналу, як кожен день бігав в типографію – слідкував за випуском номерів.

У 1995 році Вільгельм Ілліч організував першу з серії конференцій "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". Особисто для мене ця конференція найчастіше чомусь асоціюється з білими вікнами кімнат нашого відділу. Напередодні конференції Вільгельм Ілліч організував ремонт приміщень у відділі. За вихідні ми все прибрали, пофарбували, привели кімнати до божого вигляду. А в понеділок Вільгельму Іллічу дісталося від дирекції за те, що ми пофарбували ззовні вікна в білий колір. Вікна нашого відділу тепер можна легко упізнати, оскільки вони єдині в Інституті білого кольору.

Вільгельм Ілліч піклувався про випускників-аспірантів, намагався всім допомогти влаштуватися після захисту. Наприклад, він досить довго боровся за те, щоб мене особисто залишили в Інституті. Тому, дякуючи саме Вільгельму Іллічу, у 1995 році я залишився працювати у відділі прикладних досліджень.

Одна з самих тривалих моїх зустрічей з Вільгельмом Іллічем відбулася 1 січня 1996 року; ми зустрілися в Інституті близько 10 ранку і проговорили десь півдня. Для Вільгельма Ілліча не існувало ні свят, ні вихідних.

Вільгельм Ілліч був дуже комунікабельною людиною. Він легко знаходив контакт з кожною людиною, що зустрічалася на його життєвому шляху. Його відкрита посмішка завжди зачаровувала і виступала якимось мостиком у спілкуванні. В Інституті його знали і поважали всі: і науковці, і обслуговуючий персонал.

Десь із 1995 року, як кажуть у нас у відділі, я став "лівою рукою" Вільгельма Ілліча. Насамперед це було пов'язано з моєю участю у виданні журналу. В цей період я дуже часто спілкувався з Вільгельмом Іллічем, часто допомагав йому в організаційних питаннях.

Восени 1996 року Вільгельм Ілліч мав їхати у відрядження до Англії. Ввечері напередодні від'їзду у нього стався серцевий напад, "швидку" викликали прямо до Інституту. Згадую, як лежить він на кушетці, лікарі щось йому колють, а ми стоїмо поряд. А на наступний день він полетів до Манчестера, написавши вночі ще дві сторінки першочергових справ, які необхідно зробити за його відсутності.

І, напевне, не лише мені одному. Коли Вільгельм Ілліч був в Англії, я кожного дня спілкувався з ним електронною поштою. Саме в той час в Інституті математики почали друкувати його книгу англійською мовою і розпочалася робота над V.4 (номер 3–4) журналу. Крім того, постійно потрібно було вирішувати поточні справи, в курсі яких Вільгельм Ілліч намагався бути.

Після повернення з Англії Вільгельм Ілліч відсвяткував свій ювілей (відеозапис цього святкування дуже добрий і приємний). Невдовзі по цьому він потрапив до лікарні. Вільгельм Ілліч продовжував керувати нами за допомогою телефону, ми їздили на зустрічі з ним до лікарні. Я був у нього десь у перших числах нового 1997 року. Ми обговорили нашу спільну наукову статтю, також Вільгельм Ілліч визначив порядок статей до номеру 3–4 журналу. Ще декілька раз я зустрічався з Вільгельмом Іллічем у центрі, коли він їздив у лікарню на Володимирській. Це були буквально хвилинні зустрічі – я віддавав йому листи, що прийшли на його ім'я, а він передавав мною до інституту заготовлені попередньо "аркушики" для всіх нас.

Наступна зустріч відбулася в середині лютого вдома у Вільгельма Ілліча, перед його відльотом до Америки. Востаннє він давав мені вказівки, ми досить довго розмовляли. Також Вільгельм Ілліч віддав мені тоді рукопис своєї останньої статті, яку я заніс у редакцію "Доповідей НАН України". Потрібно зауважити, що кожного разу, коли я приїздив до Вільгельма Ілліча додому, він спочатку відправляв мене до Ольги Іванівни на кухню, щоб вона мене нагодувала, і лише після цього ми могли з ним розмовляти.

Востаннє я бачився з Вільгельмом Іллічем днів за чотири до його смерті, у нього вдома. Я заніс пошту, поговорив з Ольгою Іванівною. Розповів, що закінчили друкувати книжку. Ольга Іванівна провела мене в кімнату до Вільгельма Ілліча, він лежав під крапельницею. Він привітався зі мною. Йому було вже важко говорити. Я розповів про книжку, і він сказав, що хоче її побачити. Я пообіцяв, що занесу зброшурований блок на наступному тижні.

На жаль, свою обіцянку я не виконав. Уже в день поховання Вільгельма Ілліча співробітники з Інститутської типографії принесли мені один (перший) екземпляр книжки (обкладинку вони зробили вручну, оскільки на той час її ще не надрукували). Цей екземпляр книжки та останній номер журналу поклали в труну поряд з Вільгельмом Іллічем.

Книга вийшла з друку вже у травні. Чудова вийшла книжка, не гірше, ніж закордонні. 3–4 номер за 1997 рік журналу "Journal of Nonlinear Mathematical Physics" також вийшов у світ лише в травні (цей том журналу планувалося присвятити шістдесятиріччю Вільгельма Ілліча, а насправді цей том став томом його пам'яті).

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 346–353

Спогад про Вільгельма Ілліча Фущича

Любов Д. ВАСИЛЬЄВА

Цей спогад я, Васильєва Любов Данилівна, пишу від імені нашої сім'ї: від себе, мого чоловіка – Валентина Григоровича, синів – Юрія та Андрія.

Я не можу говорити дуже докладно про Вільгельма Ілліча як про вченого, про його наукові роботи, а розповім більше про те, яким він був під час наших стосунків у побуті, бо ми були близькими сусідами понад 25 років.

Спілкуючись між собою, ми часто після розмов на побутові теми переходили до тем про хід справ на роботах, тобто, про події, успіхи, проблеми, якщо вони мали місце. Отже, ми були в курсі справ одне одного на роботах, хоч і не в повному, а частковому обсязі.

До квітня 1971 року наша сім'я жила в академічному містечку м. Києва, в кімнаті гуртожитку для молодих спеціалістів АН УРСР. Отримавши ордер на двокімнатну квартиру в академічному будинку по вул. Анрі Барбюса, 22–26, ми не могли зразу ж переїхати, бо деякий час будівельники закінчували опоряджувальні роботи. Наш житловий будинок був збудований по індивідуальному проекту і квартири в ньому були площею значно більші і зручніші, ніж в типових проектах того часу.

Мій чоловік, науковий співробітник Інституту електрозварювання ім. Є.О. Патона, міг в обідню перерву приходити в нашу квартиру. Нам було цікаво знати: хто буде нашими сусідами? Одного разу він приїхав з роботи збуджений і розповів про те, що познайомився з сусідом, який поруч отримав трикімнатну квартиру! В той час нелегко і далеко не всім щастило отримати такі "Хороми"! Чоловік розповів, що на порозі нашої квартири виникла постать високого "очень подвижного и обаятельного молодого человека!" Щиро посміхаючись, сусід радісно привітався, бо також, нарешті, побачив мого чоловіка і вигукнув українською мовою: "Сусідами будемо!"

З квітня 1971 року ми жили по-сусідськи з сім'єю Фущичів: Вільгельмом Іллічем, Ольгою Іванівною – його дружиною, чарівною їх донькою Мар'яною і сином Богданом. З самого початку ми відчули, що це сім'я не проста і не звичайна, а сім'я освічених, культурних, привітних вчених-інтелігентів, щирих українців-закарпатців.

У 70-ті роки майже не було чутно українську мову в столиці. У вищих навчальних закладах м. Києва, особливо в технічних, всі дисципліни викладали російською. У місті українську мову було почути на ринках, в Міністерстві освіти УРСР, в театрі ім. І.Франка, в Державному університеті ім. Т.Г. Шевченка і т.п. Я говорю про це тому, що коли вперше спілкувались з Фущичами, то мене приємно вразило, що вони так добре володіють і спілкуються в побуті українською мовою. Вимова у них була не схожа на вимову києвсько-полтавську. Говорили вони грамотно, але з акцентом, в якому ніби відбивалась справжня любов до рідного краю – до Закарпаття. Територію Київської, Полтавської, Вінницької областей вони називають "Великою Україною", а то є "Закарпатська Україна".

Ми дізнались, що Вільгельм Ілліч – фізик-математик, уже захистив докторську дисертацію, працював в Інституті математики АН УРСР, а Ольга Іванівна – теж фізик, кандидат наук, працювала в академічному інституті.

Вільгельм Ілліч народився в с. Сільце, а його дружина – в м. Перечин, Закарпатської області. Познайомились вони в Ужгородському державному університеті, бо вчились на фізичному факультеті, на різних курсах.

Сусід, а в нашій сім'ї ми звали його просто Віллі, розповідав, що вони з Олею палко полюбили одне одного і навіть обмежували кількість побачень, бо зустрічі заважали навчанню. Вони дуже добре вчились, були завзятими спортсменами: він грав в футбол, а Оля була легкоатлеткою. Молодим подружжям вони стали ще в студентські роки. Я говорю про це тому, що в 50–60-ті роки серед студентів, які після школи навчались на перших курсах вузу, подружжя було рідким явищем, бо не кожен за такий короткий період часу міг впевнено знайти свою "половинку".

Дитинство Вільгельма Ілліча пройшло в селі, де він народився. В нього були – батько, мама, старший брат Михайло і сестра. До речі, Віллі з братом були дуже схожі: і зріст, і статура, і риси обличчя, неначе близнюки. Віллі з дитинства був дуже працьовитим і обов'язковим у справах. Одного разу він розповів, що коли він був юнаком, батьки часто посилали його з дорученням у далеке село на відстані біля 10 км, і треба було йти пішки через гори і ліс туди-назад. Коли Віллі повертався пізніше додому, ніж розраховували рідні, то був якимось чином покараний, бо всі хвилювались, щоб з ним в дорозі нічого не трапилось. Тоді він, виходячи з дому, майже всю дорогу біг туди і назад. На шляху між селами був ставок, то, маючи заощаджений час, Віллі встигав викупатися з хлопцями, пограти і додому повертався вчасно.

Наш шановний сусід чуйно ставився до своїх рідних. При найменшій можливості він завжди старався написати додому, поїхати, або коли хтось їхав проїздом через Київ, то обов'язково зустрічався на вокзалі; весь час надсилав мамі грошові перекази. Вільгельм Ілліч також дуже поважав рідних дружини, особливо любив маму Ольги Іванівни, Барбару.

Коли сім'я Фущичів жила з мамою Ольги Іванівни в одній кімнаті академічного гуртожитку для молодих спеціалістів, то вже тоді Віллі часто вдень працював дома. Теща поводила себе дуже тихо, щоб не заважати зятю працювати. Вона в обіди тихенько ставила йому на стіл поїсти, сідала на стілець і любила махати ногами, але їх піднімала над підлогою, щоб не шарудіти, чекала коли Віллі поїсть. З його розповідей ми знаємо, що то була дуже працелюбна, мудра, скромна, тиха і добра жінка. Навіть старший зять Барбари говорив про неї, що така жінка народиться не раніше, ніж через тисячу років! Віллі говорив: "Це єдина така Мама і Теща в усьому світі! Більше таких немає." Вона ніколи не втручалась в сімейні справи молодої сім'ї, ніколи!

На протязі всього життя, хоч як був Вільгельм Ілліч зайнятий роботою, але завжди знаходив час для занять і розваг з дітьми. Він дуже любив доньку Мар'яну – струнку, карооку, красиву, розумну і привітну дівчинку. Вона закінчила Київську математичну школу № 145, Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка, захистила кандидатську дисертацію і стала як батько – математиком.

Віллі, як і доньку, любив сина Богдана. Він з дружиною, виховуючи дітей, прищеплювали їм любов до навчання. До них додому приходила вчителька англійської мови і навчала Богдана, коли йому було ще років 4. Їх син ріс розумним, дуже рухливим хлопчиком, по-дитячому інколи був шкідливим, неслухняним, тому Віллі більш суворіше і вимогливіше ставився до нього, ніж до доньки, але дуже Бодю любив.

Дітей подружжя Фущичів виростили освіченими інтелігентними людьми, якими можна тільки пишатись, бо то є результат титанічної виховної праці батьків на особистому прикладі.

Наш менший син Андрій і Богдан з дитинства росли разом і, на щастя, зв'язок між ними триває до цих пір. Коли хлопчики були ще дошколятами, Вільгельм Ілліч з дружиною у вихідні дні їздили з ними в Пущу-Водицю в ліс, катали їх на човні по озеру і т.п. Андрій завжди з захопленням розповідав про такі прогулянки на природі.

Одного разу наш шановний сусід повів хлопчиків на Новорічну ялинку в Інститут математики, яка була влаштована для дітей співробітників. Профсоюзний комітет купив новорічні подарунки відповідно до кількості дітей, а нашому сину подарунка не було. Віллі, щоб не образити Андрія, сам купив дорогий подарунок, який вручив сину Дід Мороз.

Він дуже уважно ставився до дітей. Бодя і Андрій були ще дошколятами, а потім і школярами, але Віллі, хоч як був зайнятий, завжди цікавився чим вони займаються. Він завжди був в курсі їх дитячих захоплень, допомагав і контролював їхніх вчинки.

Фущич Вільгельм Ілліч хоч і був фізиком, але дуже любив математику. Він говорив: "Математика краща, ніж фізика, бо більш точна наука. Два помножити на два є чотири і ніколи не буде п'ять!"

Коли він працював, то любив, щоб навкруги була абсолютна тиша. У першій половині дня Віллі працював дома. Мешканці нашого будинку зранку йшли на роботу, діти – в школи, садочки . . . , стукотіння, гуркіт стихали – наступала тиша. Після 16-ої години люди приходили і, мимоволі, починався гамір навкруги, тоді він їхав працювати в інститут, бо там чекали його інші діти – студенти, аспіранти, докторанти, співробітники (він їх називав своїми дітьми). Віллі говорив: "Якби була завжди абсолютна тиша навкруги, коли я працюю, і хтось мені їсти давав, то я ніколи не виходив би з кабінету".

Шановний Вільгельм Ілліч був патріотом України! Він говорив: "Процес людської свідомості рухається повільніше, ніж прогрес науки, тому держава і нація можуть бути відомі в світі тільки завдяки видатним досягненням в галузях науки. Кожен фахівець повинен знати про всі досягнення в даній галузі, бо наука весь час розвивається".

Він любив свою українську націю, але не був націоналістом, говорив: "Любити своє національне ніколи не заборонено, але не через ненависть до других національностей". Можливо тому Вільгельм Ілліч хотів і робив усе, щоб більше було вчених-українців, ". . . щоб Україна посідала більш значне місце серед країн світу, щоб наша нація встала з колін, бо хто не має власної гідності, того не поважає ніхто, щоб нас знали завдяки нашим досягненням в науці, бо ми, українці, – працьовиті люди!”, – говорив він.

Віллі говорив, що якщо вважати всю науку деяким джерелом, то від успішної праці вчених окремих галузей науки залежить цілісність цього джерела. На мій погляд, він був одним з тих вчених, завдяки праці яких наука успішно розвивається.

Наш сусід багато працював, дуже любив свою математику, яка була для нього сенсом і чарівністю життя. Чоловіку особливо дороге те, чому він віддає всього себе. У цьому сенсі він був щасливою людиною, але на превеликий жаль, життя обірвалося рано (у 60 років) і Віллі не до кінця реалізував свій науковий потенціал. Не було в світі жодного значного досягнення в галузі математики, щоб Вільгельм Ілліч про нього не знав.

Ще за часів існування СРСР він зобов’язав співробітників свого відділу вивчити англійську мову і оволодіти вмінням працювати на комп’ютері, який у 80-ті роки придбав для інституту за власні кошти.

Віллі часто їздив за кордон, бачив яке там життя і говорив: “Щоб іти в ногу з часом, треба оволодіти всім новим, що є в других країнах”.

Настали нові часи. Я маю на увазі політичні події СРСР після 1990 року. Більшість людей були розгублені, але Вільгельм Ілліч зразу ж відчув наступ нового часу, рух змін в суспільстві і говорив: “Повернення назад не буде!” Він нам порадив обов’язково приватизувати квартиру – так робиться у всіх країнах, бо то є приватна власність, а також говорив: “Не треба сидіти, склавши руки і чогось чекати, треба діяти, вистояти, вижити і потім піти в ногу з часом!”

Ми – покоління людей, які народились до Великої вітчизняної війни, пам’ятаємо сталінські часи і нам важко було адаптуватись у новому політичному і економічному просторі, а для нього ті події не були несподіванкою.

Віллі орієнтувався у житті і не ждав ніколи ні від кого допомоги, або якогось везіння у справах, а сам досягав своєї мети і успіхів наполегливою працею, “. . . бо тільки тоді можна достойно жити, любити і поважати власну державу”, – говорив він.

Фущич В.І. мав широке коло зв’язків з математиками багатьох країн світу. Він організовував симпозіуми вчених-математиків, які проходили в столиці України. Віллі часто запрошував додому своїх іноземних колег і не тільки під час симпозіумів. Але в 70–90-ті роки нелегко було достойно прийняти і обслужити на високому рівні вчених-іноземців дома. То були не тільки матеріальні витрати, а було важко фізично і психологічно. Всю відповідальність за прийом гостей брала на себе вірна дружина Віллі, невтомна трудівниця і дома, і на роботі – Ольга Іванівна.

Вона була Вірним Другом свого чоловіка. Ці слова я написала свідомо з великої літери в повному їх розумінні і значенні, бо інколи не кожен досягає визначених успіхів у своїй професії, якщо особисте життя складається не досить вдало.

Віллі і Оля були між собою духовно дуже близькими людьми. Дружина на протязі всього їх сумісного життя була завжди в курсі всіх справ наукової діяльності Віллі, наукових контактів з колегами як вітчизняними, так і іноземними, підтримувала його і дуже розумілася у справах. Вони у всіх відношеннях жили одним життям.

Тепер Ольга Іванівна вважає своїм основним обов’язком упорядкувати всі наукові праці Вільгельма Ілліча, привести в належний хронологічний порядок кореспонденції спілкування з вченими за весь період його наукової діяльності і все це надрукувати. То є титанічна праця!

Вільгельм Ілліч заснував власний математичний журнал, в редколегію якого залучив відомих вчених-математиків різних країн світу. Тепер цей журнал є власністю його дочки Мар’яни, яка працює в університеті м. Лулео, Швеція. Обкладинка журналу оформлена в жовто-блакитному кольорі, з гербом України. На першій сторінці в кожному журналі зазначено, що фундатором і засновником його є Фущич Вільгельм Ілліч. Таким чином, журнал живе і продовжує друкуватись.

Я знаю, що були люди, які Віллі дуже заздрили тому, що самі менше працювали і мали менші успіхи в роботі.

Вільгельм Ілліч виховав багато кандидатів (понад 50) і докторів наук. Я бачила його тонкі учнівські робочі зошити, де на кожен день були складені плани роботи для кожного аспіранта. Слова часто виділені червоним кольором, зі знаками оклику, підкреслено, виділено зі словом “Cito!”, фрази обведені рамкою і т.п. В зошитах був продуманий не тільки чіткий план роботи з аспірантами, а також вся наукова діяльність на кожен день.

Я знову повторюсь, що Віллі багато працював, але от що він зовсім не любив – ходити просто так в гості з частуванням і пригощанням, бо вважав, що то є даремна трата часу! Але він завжди був співучасником ділових зустрічей, навіть за сервірованим столом, чи при святкуванні визначних подій в житті близьких, знайомих, чи колег по роботі, якщо був запрошений.

Наш сусід творив добрі справи, людям хотів і робив тільки добро. Я знаю, що декільком людям (не буду їх називати) він влаштував особисте життя, бо, я так вважаю, що з його легкої руки вони познайомились і кожен знайшов свою "половинку".

Ми, проживаючи поруч, звертались до Фущичів, коли в нашій сім'ї були якісь труднощі. Вони завжди нам допомагали і морально, і матеріально, співчували, радили і підтримували нас.

Вільгельм Ілліч був інтелігентом, людиною з великим почуттям гумору, привітним чоловіком. Я впевнена, що немає ні однієї людини в будинку, де ми проживали, з ким би при зустрічі він не привітався. Він завжди з усіма вітався.

Наші сини дуже поважали Віллі. В 1981 році наш старший син Юрій поступив до Київського політехнічного інституту. 1-го вересня, в перший день занять сина, ми дома влаштували сімейну пресконференцію, щоб дізнатись про його перші враження від занять.

Особливо Юра був зачарований першою лекцією з хімії у великій хімічній аудиторії, яку на високому рівні провів доктор наук В. Лавренко. Викладач навіть розповів про хімкорпус, який був збудований до революції, про прекрасну акустику в великій аудиторії, для чого влаштував досліди зі звуковими ефектами, щоб студенти наочно в цьому переконались. Ще син розповідав, що була лекція з математики, яку викладав кандидат математичних наук Грищенко.

Я цими враженнями сина поділилась з Фущичами. Виявилось, що В. Лавренко – близький знайомий Вільгельма Ілліча, а Грищенко – його колишній аспірант. Звичайно, Віллі сказав цим викладачам, що студент Васильєв Юра (з вусами) його сусід. Це Юру зобов'язало добре вчитись, бо прикро було б, коли дядя Віллі дізнається, що його сусід-студент навчається не досить успішно. Ця подія зобов'язала сина сумлінно ставитись до навчання взагалі.

Менший син Андрій на початку 1997 року писав дипломну роботу і йому потрібні були математичні формули для розрахунків. В той час, у зв'язку з обставинами, наша сім'я жила на іншому поверсі, не поруч з квартирою Фущичів, діти наші уже виросли і ми не так часто спілкувались між собою, як то було раніше. Ніхто з нас не знав, що Віллі тяжко хворіє. Андрій спитав дозволу по телефону про те, чи може зайти зі своїм проханням про допомогу до Вільгельма Ілліча. Отримавши дозвіл, син зайшов і був дуже вдячний Віллі, що він

допоміг підібрати необхідні математичні формули. Це було в березні місяці.

7-го квітня нам раптом зателефонувала Оля і сповістила про нещастя. Ми всі були страшно приголомшені несподіваною і жахливою звісткою. Віллі не стало в світлий весняний день свята "Благовіщення".

Андрій говорив, що при зустрічі помітив слабість і хворобливість дяді Віллі, але як-то має виглядати хвора людина? Вільгельм Ілліч був уже так тяжко хворий, а не відмовив допомогти нашому синові. Ми всі, хто його любив, поважав, добре знав і відчував його душевну доброту – так рано втратили його. Адже йому виповнилося лише 60 років.

Вільгельм Ілліч володів гострою спостережливістю, прекрасною пам'яттю, витримкою. Витримка "на людях" останнім часом йому дорого коштувала, бо він після різних негараздів не спав по декілька ночей. Це його дуже виснажувало. Ми про це знали, бо весь час спілкувались між собою.

Для збереження здоров'я будь-які психоемоціональні напруження повинні носити епізодичний характер, але то було не в характері Вільгельма Ілліча. Насправді характер людини – це компас, по якому вона живе, а Віллі все сприймав дуже емоційно.

Він дуже любив природу, бо виріс у чудовому краї гір, лісів і полонин. Раніше на період відпустки вони сім'єю завжди їздили на Закарпаття відпочивати, але останні роки Вільгельм Ілліч зовсім не був у відпустці, не гаяв часу – все працював, працював, працював...

Однією з основних рис його характеру була неймовірна працелюбність, максимальна зібраність і високе почуття відповідальності.

Вільгельм Ілліч Фущич у 34 роки став доктором наук, потім – членом-кореспондентом АН УРСР. Цк свідчить про значний вклад, який він вніс у розвиток науки.

У 2001-му році Вільгельму Іллічу Урядом було присуджено звання "Лауреата Державної премії України в галузі математики і фізики".

Ми дуже сумуємо з приводу того, що він так рано пішов від нас, але говорять, що такі люди як Віллі, мають тільки день народження. Ми завжди згадуємо про нього. Він залишився у нашій пам'яті як красива, доброзичлива, висококультурна, інтелігентна, тактична і чуйна людина.

28 липня 2004 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 354–360

То, что осталось в памяти (фрагменты воспоминаний о Вильгельме Ильиче Фущиче)

Всеволод А. ВЛАДИМИРОВ

Эти воспоминания в виде черновых набросков были написаны "на коленях" почти сразу же после безвременной кончины нашего учителя. Я честно собирался поработать над материалом: многое еще хотелось добавить, дописать, улучшить. Однако время тогда было довольно напряженное, большие и малые проблемы всякий раз отвлекали от работы, однажды отложенной "на потом". В результате я до сих пор несу груз вины перед Ольгой Ивановной Фущич, которой обещал быстро подготовить материал. Теперь, казалось бы, и забот поменьше, однако стала подводить память, да и дарований вряд ли прибавилось. Поэтому я отдаю в руки читателя наброски почти без правок, стремясь возвратить хоть малую часть долга, при этом надеясь на снисходительность со стороны моих друзей, коллег и других потенциальных читателей этих строк.

Познакомились мы с В.И. в 1975 году совершенно случайно. В тот год я заканчивал Варшавский университет и приехал в свою *Alma Mater*, УЖГУ, за рекомендацией в аспирантуру. Необходимо было сделать доклад в отделе теоретической физики по теме магистерской работы. Доклад, как мне показалась, не слишком заинтересовал участников семинара, поскольку был далек от их научных интересов. Моя персона тоже никого особо не интересовала, так как я приехал с намерением поступать в аспирантуру ИТФ АН УССР. Однако один из присутствующих внимательно следил за изложением, интересуясь некоторыми нюансами работы. Это был В.И., который приехал в УЖГУ, кажется, в качестве председателя государственной экзаменационной комиссии.

По прошествии трех десятилетий мне все так же ясно помнится этот семинар. Я тогда ничего не знал о В.И., однако он как-то по-особому слушал и этим обращал на себя внимание. По окончании доклада меня представили В.И., и он предложил мне встретиться и поговорить на следующий день. Во время следующей встречи он предложил поступать к нему в аспирантуру, что, в общем-то явилось

для меня большой неожиданностью. Толком я тогда не понял, чем мне предстояло бы заниматься в случае поступления, однако, не долго думая, согласился. Вот так, приехал я, в общем-то с установкой на теоретическою физику, однако, встретившись с В.И. и мгновенно к нему расположившись, резко изменил планы. Обаяние его личности не исчезло, как это нередко бывает в жизни, при более близком знакомстве, состоявшемся через два с лишним года. Напротив, по мере того, как я узнавал своего шефа, оно распространялось на меня все больше и больше.

С приемом в аспирантуру все оказалось не так-то просто, поскольку успешная сдача экзамена по математике была необходимым, но не достаточным условием поступления. Первый отдел тогда бдительно следил за "чистотой рядов", перекрывая многим молодым людям возможность быть зачисленными в аспирантуру. В моем случае связано это было с польским гражданством супруги. По-видимому будучи глубоко несогласным с таким положением дел, В.И. воспринял мою, а также другие подобные ситуации, как личный вызов. В "кухню" своих баталий он нас почти не посвящал, однако некоторое время спустя прорисовывались кое-какие детали этой борьбы. Низкий поклон В.И., ведь, пожалуй, никто другой не стал бы так сражаться за молодого человека, из которого еще неизвестно что вырастет. Впрочем, на счет роста у В.И. особых сомнений, можно сказать, не имелось, поскольку в той атмосфере, которая царила на его семинаре, не-работать, не-получать результаты была просто немыслимо! Конечно, были мы разными, кто лучше, кто хуже, по-разному складывались и жизненные обстоятельства, однако каждый обязан был выкладываться в работе.

В.И. опекал своих учеников с первых шагов и до защиты. Приходилось мне видеть многих научных руководителей, судьба меня, в принципе, баловала знакомствами с хорошими людьми, но все же никогда больше я не встречал такой готовности всюду во всем помочь, будь то научные проблемы (домой звонить разрешалось в любое время дня и ночи), быт или устройство на работу.

Семинар по понедельникам – святая святых. В течение шести с лишним лет я регулярно посещал семинар с сентября по начало июля и едва ли припомню больше двух или трех сбоев в его функционировании. В описываемый период времени начинался семинар в 18:00 и длился . . . ну, в общем, сколько нужно, как правило, до глубокой ночи. Дежурная за это время раза три заглянет, зам. директора по

АХЧ напомнит о строгом распоряжении начальства насчет экономии электроэнергии. Тирады эти, казалось, не вызывали у В.И. ни тени раздражения: всегда с улыбкою, отпустит шуточку и – "…все, все, сейчас, заканчиваем, ну, еще максимум минут 5". Однако эти 5 минут, бывало, длились по часу и больше.

После 22:00 глаза сами закрываются, кое-кто из молодежи носом клюет, а шеф бодр, он только-только раскрутился, фонтанирует идеями: а что если такое сделать, а что если по другому на эту задачу взглянуть…. В такие минуты, порой, рождались будущие весомые результаты и, неизменно, всякий раз, задавался импульс к поиску.

Идем с семинара разгоряченные, вниз по улице Ленина (ныне Б. Хмельницкого). Шеф – высокий, седой, изящный, нисколько не мэтр, держится со всеми наравне, по дороге, чаще всего, разговор продолжается о науке, однако бывает что и не только: все интересно – нашумевшая книга, околонаучные новости, спорт. В конце улицы – центральный гастроном, открытый до 23:00 – успеть бы! Хлеб, докторская колбаса, чай – нехитрые покупки – и по домам, отдыхать. Кому по пути – те с шефом, продолжать разговор. Домой по понедельникам прихожу почти в полночь. Традиционно выпиваю 2–3 стакана крепчайшего чая, после которого мгновенно отрубаюсь и сплю, как убитый, часов до девяти, а то и десяти утра.

Изловив аспиранта в пятницу, шеф имел привычку вручать ему ксерокопию свежей статьи для ознакомления и …доклада в ближайший понедельник – порою в шутку, а порой и всерьез: аспирант должен быть "заведен" всегда – днем, вечером, а также в выходные дни надо думать о работе и жить работой, отдавая науке ежедневно по 10–12 часов чистого времени. Если по другому подходить, то результатов существенных, не будет. Тогда это казалось мне несправедливым: разве мы не молодые люди, и разве кроме работы нет ничего интересного в жизни? Лично я сильно бунтовал и придерживался иного мнения: со мной жила семья, которой надо было уделять немало времени, и были еще увлечения: горные восхождения, требовавшие круглогодичных тренировок, книжки, фильмы, застолья с интересными людьми – ну как от всего этого отказаться! Словом, науку я воспринимал как нечто важное, но не единственное в жизни, и игнорировал призывы к аскетическому служению. Точку зрения Вильгельма Ильича я принял, к сожалению, много позднее.

Ремарка в сторону докладчика:

– В.І., ви щось дуже добре виглядаєте: щось мені здається, що ви мало працюєте.

Докладчик:

– В.І., я голодую 17-й день.

Шеф:

– Що таке? Розкажіть, будь ласка!

Интерес к феномену лечебного голодания быстро вспыхивает, и столь же быстро улетучивается: любопытство удовлетворено, докладчик реабилитирован, двигаемся дальше.

На семинаре в роли аутсайдеров побывали в свое время, наверное, все аспиранты, или, по крайней мере, большинство.

Шеф:

– Не іде поставлена задача? Давайте до дошки, покажіть, що ви зробили протягом тижня.

Аспирант:

– В.І. я робив те і те …

Шеф:

– Мені не цікаво, що ви робили, я питаю, що ви зробили! Погано, сідайте, хто там наступний?.

Или:

– В.І., я не зможу цього зробити.

В.И.:

– Ви мусите це зробити – і все!

Из этого "*ви мусите*" часто рождались очень сильные результаты, побеждались проблемы, которые, казалось, пробить было невозможно. И дело, конечно, не только в требовательности шефа, хотя она и имела место, но больше наверное в том, что он заставлял верить: задача может быть решена, несмотря на все сложности, вселял надежду на то, что справиться с задачей тебе по плечу.

А как В.И. радовался успехам своих учеников, в особенности молодых – студентов, новичков-аспирантов. Дает задание студенту: разобраться в работе О.: как-то до сих пор ее никто не смог осилить.

Реплика с места:

– …так, і сидітиме над нею два роки!

В.И., с пассией:

– Ю., Я забороняю вам казати таке молодим людям!

Довольно скоро, месяца через полтора, студент сообщает, что готов доложить статью. То, что он так быстро справился вызывает всеобщее оживление. Делая сообщение, студент использует формализм почерпнутый из работы О., который нам непривычен, да и докладывает слегка сбивчиво, видимо от волнения. Все хором, перебивая друг друга помогаем, пытаемся на на ходу привести обозначения к привычному виду, но шеф хочет услышать все от него самого и даже от возбуждения повышает голос:

– Не заважайте, не заважайте, та дайте ж мені нарадуватись!

Всем ясно, что дебют блестяще удался, статья "пробита", однако более важно то, что в этот вечер нашего полку прибыло. И, конечно же, В.И. ликует вовсю.

На конференции, достаточно молодому сотруднику С.:

– . . . чого ви не пішли на доповідь N.?

С.:

– В.І., та мені це було нецікаво!

Ничего не сказал, но, как оказалось, запомнил. Через несколько дней почти за ухо тащит С. к раскрытым дверям аудитории, чтобы показать, как пожилой И.М. Гельфанд старательно конспектирует доклад молоденького американского ученого.

В.И., гневно:

– . . . Бачите, вам не цікаво, а от йому все цікаво!

Особого разговора заслуживает общение шефа с А.Г. Никитиным. Кто видел гайдаевскую комедию "Бриллиантовая рука", тот наверняка помнит диалог опера со ставящим задачу начальником, вызывающий дружный хохот, как всякое удачно подхваченное преувеличение. Так вот, мы бывали и не раз свидетелями подобных диалогов, разворачивающихся между А.Г. и В.И.

В.И.:

– Толя, а может попробовать . . .

А.Г., прерывая шефа на полуслове:

В.И.:

– Я уже пробовал, так не идет.

В.И.:

– Ну тогда может . . .

А.Г., вновь прерывая:

– Нет, так тоже не пойдет.

В.И.:

– Ну а если . . .

А.Г.:

– Да, В.И., так, пожалуй, стоит попробовать, я завтра проверю.

Именно так общались в нашем присутствии двое ученых, сотрудничавшие друг с другом в течение многих лет.

Или еще реплика шефа после особо удачного доклада А.Г.:

– Ну это же просто замечательный результат!

А.Г., в ответ:

– Вильгельм Ильич, знали бы вы, чего мне стоил этот результат – представляете, я так заработался, что забыл пойти на центральный переговорный пункт, где был заказан за несколько дней до этого разговор с женой (проживающей тогда в Праге), причем на этот разговор я сам-то ее и вызвал.

В.И. с воодушевлением:

– Вот видите, вот, всем так надо работать! Надо забыть про все, вот так только и можно получить сильный результат!

Напоследок хотел бы рассказать одну историю, непосредственно связанную с В.И. Аспирантские годы оказались для меня довольно непростым периодом, в основном из-за семейных обстоятельств: безденежье, маленький ребенок, "пятая графа" супруги, которая при тех отношениях к иностранцам, которые царили в СССР, много лет не могла найти работу. В таких условиях весьма трудно было заниматься научными изысканиями и после двух лет учебы в аспирантуре у меня все еще не было серьезных результатов. В конце концов мы начали серьезно задумываться о выезде за границу на ПМЖ. Однако на этом пути возникли свои сложности и, в итоге, блуждая от городского ОВИРА к республиканскому, я ничего не добился, кроме того, что успел "засветиться". В итоге один из сотрудников Генконсульства ПНР, который предпринимал попытки помочь нам с выездом, сказал открытым текстом, что здесь нам уже никто и ничто в создавшейся ситуации не поможет, поэтому мне надо ехать по гостевой визе и попросту не возвращаться, коль скоро мы решили уезжать из этой страны. Помню, В.И. остановил меня в коридоре Институте и сказал, что в первом отделе знают о моих попытках выехать на ПМЖ и теперь его спрашивают, можно ли давать добро на мой временный выезд. Поскольку "исход" из СССР казался мне единственным выходом из создавшейся ситуации, я старался, как мог, убедить шефа в том, что нам просто необходимо проведать тещу (которую, мы, кстати говоря, пригласить в Киев не могли), и что это разные вещи и я конечно же вернусь ровно через месяц. Не знаю, насколько мои слова были убедительными, но шеф сказал, что, коль все обстоит так, как я говорю, то препятствий мне в Институте чинить не будут.

В конце нашего разговора он, однако, просил принять к сведению, что в нашей стране за каждого "невозвращенца" кто-то должен ответить. Я еще раз постарался уверить шефа, что все будет в порядке, хотя в голове было одно – не потерять этот последний шанс устроить наконец свою жизнь.

За рубежом изначально твердое намерение не возвращаться дало трещину по ряду причин, и я промучился весь отпуск, подвергаемый давлению с разных сторон, и не зная, как поступить. В одну из бессонных ночей, будучи почти на пределе, я вдруг вспомнил разговор с В.И., его слова, а также подумал о том, что оставалось за кадром: хорошо зная мою ситуацию, вряд ли он до конца мне поверил, и, тем не менее, не стал препятствовать выезду. После этой ночи я проснулся с чувством человека, оправившегося от тяжелого недуга. Все стало ясно и просто, я возвращаюсь и точка. Менее всего мне бы хотелось вменять себе в заслугу этот поступок: в той непростой ситуации хороших решений не было и я в любом случае кого-то "подставлял". Однако облегчение, которое я почувствовал, приняв решение возвращаться, заставляет думать, что поступить надо было именно так.

Двигаясь по жизни мы вольно или невольно кому-то причиняем неудобство и боль. Однако у меня есть надежда, что годы проведенные с В.И. научили быть более бережными с людьми. От него исходила большая сила, которая, однако, не подавляла, а заставляла работать, творить. Хочется верить, что контакты с В.И. не только помогли нам чего-то добиться в науке, но и сделали чуточку добрее, лучше, отзывчивее.

11 октября 2006 г.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 361–365

Згадуючи Вчителя

Ренат З. ЖДАНОВ

Я познайомився з Вільгельмом Іллічем у вирішальний для всякого студента період навчання в університеті. Це був четвертий курс, тобто саме той час коли всі студенти механіко-математичного факультету мають визначати подальший напрям спеціалізації. Я взагалі досить довго не міг вибрати між теорією ймовірності та математичною фізикою. Крім того, мені ще дуже подобалась алгебра. На щастя я, отримавши кваліфіковану і добре аргументовану пораду від знайомого професора-математика, вибрав математичну фізику. Курсову роботу я писав вже на цій кафедрі, але тема була, як на мене, не дуже цікава. Її треба було міняти, але я не міг визначити на "що" міняти. І в цей момент невизначеності саме провидіння послало мені спецкурс з алгебраїчних методів в математичній фізиці, який викладав Вільгельм Ілліч Фущич. Вже перше враження від побаченого і почутого було таким, що я "втік" від керівника курсової роботи до Вільгельма Ілліча. Як виявилось, цей вибір визначив не тільки тему моєї дипломної роботи, але й все моє подальше життя (і, до речі, не тільки в науці). Взагалі, Вільгельм Ілліч був настільки оригінальною і непересічною особистістю, що навіть мої однокурсники, які бачили його буквально декілька разів, добре пам'ятали його навіть через багато років після закінчення університету. Я особисто знаю приклад одного мого однокурсника, який довго не міг пригадати точну назву факультету на якому він навчався, але, коли я сказав, що працюю у відділі Фущича, то він зразу ж його згадав! Це тривіальна істина, що викладачем з великої літери не можна стати, цьому не можна навчитись, з цим можна тільки народитись. Як кажуть, що є то є, а чого немає, то вже і не буде. Він був не такий як усі в усьому, в тому як він викладав, в тому як він відносився до студентів (не як до об'єкту навчання, чим грішить більшість педагогів) а як до колег, які просто мають менший досвід наукової роботи. І це безумовно не могло не імпонувати.

Я не можу сказати, що Вільгельм Ілліч полюбив мене з першого погляду, бо він досить довго приглядався, давав різні задачі учбового характеру і врешті-решт я отримав тему дипломної роботи. Однією із складових цієї роботи було рівняння Дірака, дослідженню якого була присвячена моя кандидатська і докторська дисертації, а також дві монографії, написані у співавторстві з Вільгельмом Іллічем. Тобто, даючи мені тему дипломної роботи, він фактично запрограмував мою діяльність на багато-багато років наперед, така була незбагненна сила наукового передбачення! Спеціалісти-математики мене добре зрозуміють, адже актуальність тематики річ дуже непостійна. Те що зараз йде на "ура!" через десять років може викликати тільки роздратування.

Моє друге незабутнє враження – це семінари Фущича, їх атмосфера, яка створювалась як Вільгельмом Іллічем, так і іншими учасниками – його учнями. Я зрозумів вже набагато пізніше, чому Вільгельм Ілліч так прискіпливо відбирав кандидатів у кандидати. Річ у тому, що його учні це була не просто група людей, зв'язаних спільною тематикою, це була КОМАНДА (Вільгельм Ілліч більше полюбляв слово колектив). І як кожен тренер у футболі, він дуже прискіпливо підбирав "гравців" до команди, і я не пам'ятаю випадку, щоб він помилився у виборі. При тому доброзичливому, приязному відношенні до молоді, яке панувало у відділі, не дивно, що він фактично ставав другою домівкою для аспірантів. І саме ця творча атмосфера сприяла появі такої кількості кандидатів і докторів наук, випестуваних Вільгельмом Іллічем, якої вистачило б для звіту за десятиріччя ударної праці цілого інституту. Іншим фактором був особистий приклад Вільгельма Ілліча і те, як і скільки він працював. Він був, як зараз прийнято казати, роботоголіком, і "перепрацювати" його було неможливо. Взагалі, слово працювати було святе для нього і він вимагав такого ж відношення від нас. Це завжди було на першому місці, якщо виникали нові ідеї, результати, думки і т.п., він завжди відкладав усі справи і знаходив час, щоб послухати, порадити, подискутувати. Я впевнений, що якби я зателефонував йому серед ночі, для того щоб терміново сповістити про "відкриття", то і тут науковець в ньому взяв би гору над простим смертним і ми би поговорили, як водиться (я персонально таких експериментів не провадив, але іноді так тяжко було дочекатись ранку!). І таке відношення було до кожного учня, хто хотів і вмів працювати. І це при тому, що він завжди мав аспірантів, докторантів і коло його учнів, яким потрібно було приділити увагу, постійно розширювалось! Тільки зараз, маючи своїх власних аспірантів, я можу по справжньому оцінити фантастичну роботу, яку здійснив Вільгельм Ілліч, виховавши біля шестидесяти кандидатів та докторів наук! Плюс викладання в університеті, плюс міжнародний журнал, створений ним, плюс, плюс, плюс...

Ще однієї яскравою (як на мене) характеристикою колективу, створеного Вільгельмом Іллічем, є те, що там я знайшов двох нових друзів (я маю на увазі саме друзів а не приятелів, не колег по роботі з якими завжди приємно зустрітись, погомоніти – це інше). Добре відомо, що після школи та перших курсів університету друзів, як правило, вже тільки втрачаєш – життя розводить.

Моя наукова кар'єра, дякуючи Вільгельму Іллічу, складалася вдало, я достроково захистив кандидатську дисертацію, потім він добився, щоб мене залишили в Інституті математики (що було вельми нетривіальною проблемою), де я на протязі п'яти років підготував і захистив докторську дисертацію. З процедурою захисту сталася трагікомічна ситуація, про яку мені навіть зараз моторошно згадувати. В день захисту повинні були захищатись ще три кандидатські дисертації, і я підрахував, що процедура їх захисту затягнеться до обіду, а моя черга буде після обіду. Тому я поїхав додому (на Оболонь), щоб пообідати. Десь між другою і третьою ложкою задзвонив телефон, це був Вільгельм Ілліч, який трохи нервово поцікавився, куди я, м'яко кажучи, подівся. Як виявилось, захист всіх трьох кандидатських дисертацій промайнув за годину, і спецрада вирішила не гаючи часу заслухати докторську: а дисертанта немає! Як я біг з Оболоні до інституту математики, так я ніколи не бігав ні до, ні після, але все одно члени спецради розійшлися на обід. І якби не Вільгельм Ілліч, який, як завжди бувало, взяв все на себе і персонально попрохав кожного члена спецради прийти після обіду, то я б мабуть і до сих пір захищав ту дисертацію. Коли я не живий не мертвий з'явився перед очі Вільгельма Ілліча, то він, побачивши мій стан, навіть не лаяв мене, а просто сказав, щоб я розбірливо писав формули на дошці . . . Таким чином він зняв стрес і я взагалі не хвилювався під час доповіді. Я не знаю, що Вільгельм Ілліч думав про цей малоприємний для всіх нас епізод, але потім він ніколи не згадував про нього.

Окрема тема для розповіді це те, як Вільгельм Ілліч вмів оцінювати людей буквально з першого погляду і, як правило, безпомилково. Я дуже добре запам'ятав один епізод на конференції, коли виступав один доповідач, якого ми обидва бачили вперше, і Вільгельм Ілліч, послухавши зробив висновок: "Цей чоловік дуже себе поважає". Я взагалі спочатку не дуже зрозумів, що він мав на увазі. І лише через деякий час поспілкувавшись з доповідачем безпосередньо зрозумів, наскільки точною і безпомилковою була ремарка Вільгельма Ілліча, бо крім самоповаги нічого цікавого у ньому (у доповідачеві) не було.

І такі оцінки я чув не раз і не два і деякими з них послуговуюся до сих пір. Ще одне підтвердження сказаному – це друзі Вільгельма Ілліча, які виступали офіційними опонентами на захисті наших дисертацій. Це були не просто знані спеціалісти, а ще й нетривіальні з усіх точок зору особистості. Ми, аспіранти та молоді співробітники відділу бачили, з якою повагою вони ставляться до Вільгельма Ілліча особисто і до того, що робиться ним і його учнями. Це, безумовно, підвищувало нас у власних очах і було неабияким стимулом у творчості.

І ще одне незабутнє враження від перших кроків співробітництва з Вільгельмом Іллічем та його групою – це чітке усвідомлення того факту, що працюючи в даному колективі, я знаходжусь "на передньому краї науки". Я в той час мав дуже туманну ідею відносно того, як має виглядати той бажаний для кожного молодого чоловіка, який вибрав науку як спосіб годувати свою сім'ю, передній край науки. Але чомусь я був абсолютно впевнений, що це він і є. Взагалі актуальність тематики – це дуже тонка і навіть делікатна матерія. Вибір такої тематики – це витвір мистецтва наукового лідера напряму, прояв глибини його таланту та сили передбачення. Часто-густо вже через невеликий проміжок часу з'ясовувалось, що незважаючи на великий первинний галас здійнятий відносно того чи іншого "відкриття", цей напрямок тихо "вмирав", а те, що там робилося, не було варте паперу, на якому все це писалося. Очевидним проявом таланту передбачення Вільгельма Ілліча було те, що жоден з його глобальних, як тепер кажуть, проектів, тобто, нелієвська симетрія (у широкому розумінні цього слова), умовна симетрія та розробка конструктивних методів побудови точних розв'язків для основних нелінійних рівнянь математичної та теоретичної фізики не тільки не втрачають своєї актуальності з плином часу, а й навпаки. Я б сказав, що ці напрями мають внутрішнє джерело саморозвитку, яке не тільки сприяє розвитку теорій як таких, але й є джерелом ідей, які допомагають розв'язувати споріднені задачі (достатньо згадати хоча класичну проблему розділення змінних). А головне, що правильно вибрана в свій час тематика до сих пір "годує" велику групу учнів Вільгельма Ілліча.

Ще хотілося б відмітити одну рису притаманну Вільгельму Іллічу – це те, що я б назвав психологією переможця (а може рисою, яка відзначає вченого світового класу). Це його власна психологічна установка і установка для всіх його учнів, що ми маємо бути неодмінно кращими за конкурентів і що ми будемо кращими (а це означає в першу чергу більше та ефективніше за інших працювати!). І ця установка давала просто вражаючі результати. В аспірантуру поступали мокрі курчата (я маю на увазі насамперед себе), а вилітали орли (тут я маю на увазі інших), які одержували результати міжнародного класу, публікувались в елітних міжнародних наукових часописах, писали монографії, які згодом перекладалися за кордоном, захищали кандидатські і докторські дисертації, і нарешті, працювали з власними учнями. Саме тому нам зараз не соромно з'явитись із своїми результатами на міжнародному форумі будь-якого рівня. Це я можу стверджувати з повною відповідальністю, бо вже маю чималий досвід виступів на солідних міжнародних конференціях. Крім того, я спілкувався з колегами і навіть ті з них, які мали досить прохолодні стосунки з Вільгельмом Іллічем (а причиною часто-густо була тривіальна заздрість), дуже високо відгукувались про його школу.

Можна ще дуже багато писати про різні сторони обдарування Вільгельма Ілліча, але головним є, на мій погляд, те що він був першокласним математиком світового рівня – потужним, ефективним та результативним. Саме ці риси були тим світлом на яке зліталися як метелики з усієї України (і не тільки з України) його майбутні учні. І одне з наших головних завдань полягає в тому, щоб втримати рівень наукової школи Фущича на належному рівні. Це буде найкращою пам'яттю нашому дорогому вчителю Вільгельму Іллічу Фущичу.

1998 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 366–370

Спогади про Вчителя

Віктор І. ЛАГНО

Я належу до тих учнів В.І. Фущича, які закінчили провінційні вузи (як правило, педагогічні інститути), спеціальної підготовки до занять науковою діяльністю у свої студентські роки не отримали, але змогли за допомогою та під керівництвом Вільгельма Ілліча реалізувати себе як математиків-дослідників, підготувати та захистити кандидатські дисертації.

Моє знайомство й початок наукової співпраці з Вільгельмом Іллічем припали на 1985 рік. Перша моя особиста з ним зустріч була миттєвою. Весною 1985 року я перебував у Києві на факультеті підвищення кваліфікації при Київському державному університеті й одночасно готувався до вступу в аспірантуру. На той час я входив до групи полтавських математиків з місцевого педінституту, які під керівництвом Леоніда Феодосійовича Баранника проводили дослідження ряду задач, що лежали в руслі проблем, які вивчалися у відділі прикладних досліджень Інституту математики. Тому заочно Вільгельм Ілліч мене знав й дав попередню згоду на те, що він буде моїм науковим керівником. Й ось, нарешті, відбулася наша особиста зустріч. Вільгельм Ілліч дуже поспішав в Президію Академії Наук, тому, після того, як Леонід Федосійович відрекомендував мене, він запропонував провести його й по дорозі провів бесіду, яка в основному вилилася в три запитання: Яку мову (іноземну) ви вивчали? Чи одружені? Ви палите?! (я від хвилювання витяг сигарети). Лише відповідь на друге запитання (на той час я був неодружений) мала схвальну реакцію Вільгельм Ілліч. Щодо мови (я вивчав німецьку) було дано вказівку негайно починати вивчати англійську, а за мою шкідливу звичку мені діставалося від Вільгельма Ілліча протягом усього періоду нашої співпраці. Дізнавшись, що я на той час перебуваю в Києві й що мені доведеться складати лише один вступний іспит, він порекомендував мені відразу включатися в роботі і, не дивлячись на те, що задачами, які я розв'язував, у Києві ніхто не займається, регулярно бути присутнім на науковому семінарі. Так розпочався мій перший київський період співпраці з Вільгельмом Іллічем.

Основною ланкою у підготовці аспірантів відділу прикладних досліджень Інституту математики був науковий семінар відділу. При

цьому, на відміну від решти семінарів Інституту, робота цього семінару розпочиналася о 18^{00} двічі на тиждень – у понеділок та четвер. Інколи робота семінару (сюди входили як виступи учасників, так і зустрічі тет-а-тет з Вільгельмом Іллічем) тривала до 22^{00}, а то й до 23^{00}. Вільгельм Ілліч дуже не любив, коли аспіранти знаходилися у відділі вдень, вважаючи, що вони заважають працювати співробітникам відділу й самі нічого не роблять. Він вимагав, щоб ми працювали в бібліотеці або вдома. При цьому з його боку був постійний контроль за станом справ. Говорячи про себе, можу сказати, що завдяки Вільгельму Іллічу я навчився працювати з періодичними науковими виданнями, організовувати свій час. Також певний вплив він здійснював і на моє вміння доповідати результати, викладати математику взагалі. На той час у Києві я один займався проблемами класифікації неперервних підгруп основних груп симетрій математичної фізики (у цьому напрямку працювала полтавська група під керівництвом Л.Ф. Баранника та В.М. Федорчук у м. Львові). Тому на семінарі я доповідав огляди наукових статей, слухав виступи своїх колег, але не мав можливості доповідати свої результати досліджень, оскільки коло наукових інтересів решти учасників семінару не містило даного напрямку. В той же час Вільгельм Ілліч вів спецкурс в університеті. Він запропонував мені підготувати два-три виступи з тим, щоб пояснити методику досліджень й зробити огляд основних результатів, отриманих в даному напрямку.

На той час я вже мав п'ятирічний досвід викладання в середній й вищій школі, тому після першого проведеного заняття із спокійною душею підійшов до Вільгельма Ілліча й запитав про його враження, підкресливши, що весь запланований матеріал я встиг розглянути. На це Вільгельм Ілліч провів критичний розбір заняття, підкресливши, що основною хибою було те, що лектор працював не з конкретними людьми, а з запланованим на заняття матеріалом. Також з його уст прозвучало, що навчати чогось студентів ви зможете лише тоді, коли ви їх будете учити, а не просто викладати їм математику. Але тут же він, зм'якшуючи практичні зауваження, похвалив за вдалий підбір прикладів, вміння спілкуватися з аудиторією. Решту занять я провів, намагаючись враховувати зауваження. Відзначу, що практику залучення аспірантів до читання окремих тем на спецкурсі Вільгельм Ілліч проводив і пізніше. Так, з рівняннями Дірака, їх симетрійними властивостями та методами розв'язування я познайомився на заняттях, які проводив Р.З. Жданов (Вільгельм Ілліч запрошував на такі заняття всіх аспірантів і був обов'язково присутній сам).

Хочу також відзначити те визначне місце, яке відводив Вільгельм Ілліч в різних аспектах своєї діяльності прикладам. Він завжди підкреслював, що неможливо навчитися математиці, не розв'язуючи конкретних задач. Навчаючись в аспірантурі, я регулярно заходив в книжкові магазини і час від часу купляв навчальну та наукову літературу. Згадую, як одного разу я вже зібрався придбати одну монографію, як тут до книгарні зайшов Вільгельм Ілліч. Він відразу почав мене відраджувати від покупки, мотивуючи це тим, що в монографії не розглянуто жодного конкретного прикладу, й що для першого ознайомлення з розглянутою в ній проблемою вона не годиться. Взагалі він вважав, що процентів вісімдесят видань автори пишуть для себе, а не для читача. Й що треба обов'язково це враховувати при ознайомленні з такого роду літературою, щоб не отримати враження про свою нездатність займатися математикою.

Під час навчання в аспірантурі я не переставав дивуватися невичерпній енергії Вільгельма Ілліча. Він встигав дуже багато. Окрім керівництва науковою роботою аспірантів та співробітників, він виконував функції члена Вченої Ради Інституту, займався педагогічною діяльністю в університеті, працював над науковими проблемами незалежно від учнів, встигав детально переглядати періодичні наукові видання та багато чого іншого, про що ми не мали й гадки. Дуже напруженим був у Вільгельма Ілліча 1986 рік, в якому його було обрано членом-кореспондентом АН України і в якому йому виповнилося 50 років. За три роки, які я провів у Києві, не пам'ятаю випадку, щоб без дуже поважної причини (звичайно це була відсутність Вільгельма Ілліча у Києві) не відбувся семінар.

Початок другого мого київського періоду співпраці з Вільгельмом Іллічем випадає на початок 1994 року, коли я перебував на чотиримісячному стажуванні в Інституті математики. Це був вже інший час й інша країна. Моїй новій появі у Києві передували п'ять років роботи доцентом кафедри математичного аналізу Полтавського педагогічного інституту. Після захисту кандидатської дисертації я намагався, хоча це було й нелегко, підтримувати зв'язок з Вільгельмом Іллічем й не кидати занять наукою. В значній мірі цьому сприяли мої дружні відносини з учнями Вільгельма Ілліча, особливо з Ренатом Ждановим та Володею Смалієм. Тому коли постало питання про те, де мені проходити чергове підвищення кваліфікації, я

за згодою та допомогою Вільгельма Ілліча оформив стажування в Інститут математики.

Приїхавши до Києва, я мав ґрунтовну бесіду з Вільгельмом Іллічем. Він розпитав про мої плани, сказав, що часи настали важкі, особливо шкодував, що втрачається престиж наукової діяльності, тому він з розумінням поставиться, якщо я під час стажування буду займатися чисто життєвими проблемами. Але якщо є бажання, то можу підключитися до Рената Жданова і спробувати з ним розглянути кілька задач.

Слід відзначити, що на цей час Вільгельм Ілліч мав ще більше навантаження ніж п'ять років назад. Окрім керівництва відділом та семінаром він постійно мав якісь справі в Президії Академії. В цей же час він розпочав свою діяльність головного редактора (а практично й видавця) наукового журналу "Journal Nonlinear Mathematical Physics", працював у математичній спілці України й ще кількох громадських організаціях. Досить часто від'їжджав він у наукові відрядження за кордон.

Але не дивлячись на все це, науковий семінар працював як завжди, й у кінці мого терміну стажування ми доповіли свої результати. Відзначу, що нам з Р. Ждановим вдалося провести повний опис зображень вектор ними полями Лі узагальненої алгебри Пуанкаре $AP(n,m)$ та здійснити в загальній формі симетрійну редукцію $SU(2)$-інваріантних рівнянь Янга–Мілса до систем звичайних диференціальних рівнянь. Вільгельм Ілліч був задоволений отриманими результатами й запропонував мені вступити до нього в докторантуру. Так, восени цього року я вступив до нового етапу безпосередньої наукової співпраці з Вільгельмом Іллічем. На жаль умови життя все ускладнювалися й тому я не мав можливості перебувати у Києві постійно. В основному ми спілкувалися по телефону та під час моїх приїздів раз у два місяці до Києва. Важливою подією в житті Вільгельма Ілліча і його учнів стала Міжнародна конференція "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", яка відбулася в липні 1995 року. Вільгельм Ілліч хотів зробити її традиційною, але так сталося, що вже друга конференція 1997 року відбулася без нього.

Зрозуміло, що такий темп життя позначився на здоров'ї Вільгельма Ілліча. Але не зважаючи на це він не згортав свою діяльність, а навпаки, розширював коло інтересів. У кінці грудня 1996 року більше сорока учнів Вільгельма Ілліча зібралися на його шістдесятиріччям. Не дивлячись на те, що він напередодні повернувся з Англії й був хворий, Вільгельм Ілліч зранку зробив змістовну доповідь на Вченій раді Інституту, а весь вечір був з нами.

Останню зустріч я мав з Вільгельмом Іллічем у січні 1997 року. Вона відбулася у нього вдома й тривала близько трьох годин. Я доповів йому, що на той час було зроблено, він намітив задачі, які потрібно негайно доробити, але більшість часу ми обговорювали проблеми, які належало досліджувати у більш віддаленій перспективі. Таким він і залишився у моїй пам'яті – рухатися завжди і лише вперед, ні на хвилину не зупинятися.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 371–374

Вічний трудівник

Анатолій Г. НІКІТІН

Я познайомився з Вільгельмом Іллічем у ті далекі часи, коли він був ще кандидатом наук, а я – студентом п'ятого курсу. Обставини цього знайомства були досить курйозні. Справа у тому, що мені здалося, що я знайшов помилку в одній з робіт тоді ще невідомого мені В.І. Фущича. Я поспішив повідомити про це Остапа Степановича Парасюка, що був керівником моєї дипломної роботи, і той направив мене прямо до Вільгельма Ілліча розбиратись.

Вільгельм Ілліч привітно зустрів нахабного студента, що прийшов критикувати його роботу. Правда, дискутувати зі мною не став, сказавши, що справа студентів – вчитись. Замість цього почав розпитувати мене, чим я займаюсь, і запропонував розповісти йому одну з робіт, яку я встиг на той час прочитати.

Мені здалося, що сталося чудо! На той час я встиг прочитати всього чотири чи п'ять наукових статей, і одна з них зацікавила справжнього вченого. Не буду згадувати таких важливих для мене подробиць моєї першої у житті доповіді, скажу тільки, що після неї почалось наше довгорічне співробітництво, яке не припинялось під час моєї військової служби після закінчення університету. Саме під час цієї служби, у 1970 році, була опублікована наша перша сумісна стаття, а останню нашу роботу Вільгельм Ілліч вже не побачив: вона з'явилась у "Journal of Mathematical Physics" через півроку після його смерті.

Спогади про сумісну працю з Вільгельмом Іллічем, особливо про перші роки цієї праці, залишаються одним із скарбів моєї душі. Перше і домінуюче враження від спілкування з ним було: нарешті знайшлася людина, яка мене розуміє, яку цікавлять мої думки. Я вже не кажу про те, як мене цікавили думки та ідеї Вільгельма Ілліча, як я радів, коли міг їх зрозуміти. Забігаючи трохи вперед, хочу відмітити, що це надихаюче враження уваги видатного вченого до думок та ідей молодих людей, що тільки починають свій шлях у науці, пережили всі його чисельні учні. Він завжди поводився з нами, як з повноправними колегами, ніколи не давав відчути ту відстань, що реально існувала між ним і нами.

Однією з найприваблюючих рис вдачі Вільгельма Ілліча був надзвичайний оптимізм. У цьому відношенні він, як це не дивно, набагато перевершував своїх молодих співробітників. І вони тяглися до нього, черпаючи сили з цього джерела мужності і бадьорості. Один з його учнів, Сергій Онуфрійчук (нині завідувач кафедрою Житомирського політехнічного інституту) якось казав мені: "Просто необхідно якнайшвидше побачитись і поговорити з Вільгельмом Іллічем. Я зовсім занепав духом, задачі, що намагаюсь розв'язати, здаються занадто тяжкими, отримані результати – зовсім незначними. От поговорю з Вільгельмом Іллічем, і все стане на свої місця, знову буду мати сили для подальшої праці".

При цьому не треба забувати, що життя Вільгельма Ілліча зовсім не було легким. Ніколи не забуду болюче враження, що я дістав, коли вперше зайшов у якійсь справі до його хати. Це була одна маленька кімната, у вікна стояв письмовий стіл, завалений паперами, а навколо містилося все, що потрібно родині (яка включала ще жінку і малу дитину) для життя. Здавалося, там не було місця, щоб поставити ногу.

І в таких умовах, в кімнаті гостинного типу, жив і працював видатний український вчений на протязі більш як десяти років. Непростими були умови і на роботі, в Інституті математики. Відділ теоретичної фізики, який за логікою подій мав очолити Вільгельм Ілліч, було розформовано, і ми шукали тимчасовий притулок у відділі нелінійних коливань та математичної фізики, яким завідував Юрій Олексійович Митропольський, а потім у відділі математичного аналізу (завідувач Юрій Макарович Березанський).

Але талант Вільгельма Ілліча, поєднаний з наполегливою працею, кінець-кінцем взяли своє. В Інституті математики було створено відділ прикладних досліджень, який очолив Вільгельм Ілліч, його було обрано членом-кореспондентом Академії Наук України. Він створив потужну наукову школу, виховавши більше п'ятдесяти докторів та кандидатів наук. Є автором такої кількості статей і монографій, якої б могло вистачити на добрий науково-дослідницький інститут. Вже тільки число його праць і число їх цитувань ставить Вільгельма Ілліча в ряд найвидатніших вчених.

В цих спогадах про Вчителя мені хотілося б розповісти більше про чисто людські якості Вільгельма Ілліча. Ми багато працювали разом, я був свідком його співпраці з багатьма іншими учнями і мені є що згадати з цього приводу. Не буде перебільшенням сказати, що він віддавав своїм учням весь свій час, і здавалося, що на звичайне життя його вже не залишається. Попри це далі я зупинюсь тільки на таких подіях, які не пов'язані безпосередньо з науковою діяльністю.

Ці, здавалося би, незначні події, назавжди залишились у моїй пам'яті. Сподіваюсь, вони дають вірну уяву про людські якості Вільгельма Ілліча.

Він був дуже веселою і дотепною людиною. Якось каже одному з учнів: "Поздоровляю Вас, мене просили повідомити, що Вам перераховано гроші за перекладену статтю". А той: "Ну і що, хіба в грошах щастя?" А Вільгельм Ілліч на це: "Звісно, що ні. Але це не прості гроші, але чеки Зовнішторгбанка, а це вже майже щастя!" (Ці чеки видавались замість заробленої валюти і давали змогу накупувати у спеціальних "закритих" магазинах.)

На повному серйозі радив мені шнурувати чоботи у ліфті, щоб зекономити час при виході на роботу. Не можу виключити, що сам він робив саме так, тому що жив у постійному цейтноті.

Вільгельм Ілліч дуже любив грати у футбол і, за його розповідями, повинен був у юності зробити серйозний вибір між футболом і наукою. Мені пощастило грати два матчі разом з ним.

Перший раз це було в Ужгороді, де проходила конференція з математичної фізики. В рамках культурної програми конференції було організовано футбольний матч між командами, сформованими з учасників. Вільгельм Ілліч грав у центрі нападу, і мені здалося, що такий нападаючий прикрасив би будь-яку професійну команду. Це був форвард таранного типу, якого оборона наших суперників просто не могла стримати і який забив три чудових голи.

Другий матч відбувся у сумному 1986 році влітку. Діти і жінки багатьох з нас переховувались за межами Києва від радіації. Вільгельм Ілліч вирішив підняти бойовий дух колективу і організував змагання між своїми на той час досить чисельними співробітниками і учнями. Він очолив одну з команд, я другу, і в результаті наша команда була переможена з великим рахунком.

Між іншим, перший тайм ми грали на запасному полі Центрального стадіону, ігноруючи протести якогось адміністратора. На запитання, хто ми такі, що претендуємо на таке славетне поле, і куди на нас можна скаржитись, наш шеф відповів: "Скажіть вашому начальству, що сьогодні грають професор Фущич і його учні!"

Ще однією спортивною подією, організованою Вільгельмом Іллічем, було катання на лижах у Голосіївському парку. І знову наш науковий лідер виявився також лідером у спорті: ніхто з його учнів не зміг показати, що вміє їздити з крутих гір краще за шефа.

Ще одна ненаукова подія, яку мені хотілося би згадати – це поїздка за грибами у Димірський район. Вільгельм Ілліч виявився насправді страсним грибником, і я був свідком, як він зробив справжній воротарський кидок за одним особливо красивим білим грибом. А потім згадував цю подію як найбільш яскраву і приємну серед тих, що трапились з ним за цілий рік.

Всі мої інші спогади про Вільгельма Ілліча пов'язані тільки з роботою. Саме неустанна і невпинна праця була основним змістом і ціллю його життя. В такому дусі він виховував і своїх учнів, і це вміння невпинно працювати було найважливішим прикладом, якому по мірі сил слідували всі ми.

Ця незаурядна особистість пригортала серця багатьох людей як у нашій країни, так і за кордоном. Досить згадати, що серед друзів Вільгельма Ілліча були такі видатні люди, як професори Поліванов і Кадишевський, він мав постійні наукові і дружні контакти з Р. Андрушківим, П. Олвером (США), П. Вінтернитцем (Канада), П. Бассарабом-Горватом (Швеція), І. Таджірі (Японія) і багатьма, багатьма іншими. Його чисельні поїздки за кордон, окрім чисто наукових причин, стимулювались також тим почуттям симпатії, що він викликав у багатьох людей.

Передчасна смерть Вільгельма Ілліча – це тяжка втрата не тільки для його родини та його учнів, але і для чисельних друзів і співробітників з цілого світу. Ми ніколи не забудемо цю мужню і віддану праці людину.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 375–376

Перша зустріч з Учителем

Роман О. ПОПОВИЧ

Іноді забуваєш, коли і при яких обставинах вперше зустрівся з тією чи іншою людиною, навіть, якщо вона відіграє важливу роль в твоєму житті. Свою першу зустріч з Вільгельмом Іллічем я пам'ятаю до дрібних подробиць.

Це було в 1988 році. Я вже навчався на четвертому курсі. Починався другий семестр, а я ще не визначився, хто буде науковим керівником моєї дипломної роботи. Секретар кафедри математичної фізики дала мені пораду, яка і вирішила мою подальшу долю: "Йди до Фущича. Він чудова людина, відомий вчений і, крім того, твій земляк".

У нас якраз розпочиналася серія нових спецкурсів, і Вільгельм Ілліч мав проводити заняття в паралельній підгрупі "чистих матфізиків". Я ж був у підгрупі "обчислювачів", але мене попередили, що особливих проблем, якщо я хочу послухати його спецкурс, виникнути не має. І дійсно, безпосередньо перед початком першого заняття зі спецкурсу я домовився про це зі своїм викладачем Антоновим А.М.: займатися буду у Вільгельма Ілліча, він визначить мою оцінку, а для дотримання формальностей в залікову книжку її проставить Алім Михайлович. Тому за всіма документами Вільгельм Ілліч ніколи і нічого у мене не викладав. Зате пізніше його підписи з'являться на моїх дипломній і дисертаційній роботах, у плані індивідуальної роботи аспіранта та різних відгуках . . .

Із-за розмови з Алімом Михайловичем я трохи запізнився на пару. Вона проходила в найбільшій лекційній аудиторії механіко-математичного факультету. Так як підгрупи за чисельністю були невеликі (десь до 15 осіб), то всі студенти розмістилися на двох перших рядах. Біля дошки стояв високий сивоволосий чоловік спортивної статури. Коли він повернувся до мене, я побачив молоде усміхнене обличчя, але в очах відчувалась легка розгубленість. Воно і зрозуміло, адже серед студентів тієї підгрупи не було жодного хлопця. Коли після коротенької розмови зі мною Вільгельм Ілліч з'ясував моє бажання слухати саме цей спецкурс, вираз його очей змінився.

Манеру Вільгельма Ілліча ведення занять зі спеціального курсу не можна назвати загальноприйнятою. Як правило, спецкурс зводився до циклу лекцій з досить вузького розділу математики, де викладач розповідав, а студенти слухали. У Вільгельма Ілліча студенти *працювали*. На першому ж занятті Вільгельм Ілліч дав нам перелік тем доповідей і джерел до них. За короткий термін кожен мав визначитися, з якої теми і коли він буде виступати. Тематика доповідей також не була традиційною і охоплювала широке коло математичних проблем, загальну направленість яких в цілому можна охарактеризувати як застосування найрізноманітніших алгебраїчних методів до механіки і фізики. Вільгельм Ілліч дав нам час на підготовку, і кілька тижнів заняття нагадували лекції, але тільки нагадували, бо матеріал подавався не монотонно і поступово, а у вигляді математичних есе або нарисів.

Вже тоді я познайомився з робочим розкладом Вільгельма Ілліча. Він домовився з нами, що заняття відбуватимуться о шостій годині вечора в Інституті математики Академії наук України. Тому після вступу до аспірантури я не здивувався, дізнавшись про традиційний "шестигодинний понеділковий" великий і не менш постійний "шестигодинний четверговий" мікро-семінар відділу прикладних досліджень, яким керував Вільгельм Ілліч, хоча в колі сторонніх людей час проведення семінарів викликав і іншу реакцію. До цих пір пам'ятаю, з яким душевним трепетом ми вперше входили до Інституту математики, бродили по тихим коридорам цієї царини науки, розглядаючи на дверях кабінетів таблички з іменами відомих вчених, і сиділи на заняттях не в звичайній університетській аудиторій, а в "аспірантській Інституту математики Академії наук України"! Завдяки Вільгельму Іллічу і "академічній атмосфері" наші заняття перетворилися на справжні наукові семінари з тривалими доповідями, зацікавленими запитаннями і несстороннім обговоренням.

Я готував доповідь про матричну квантову механіку. Вільгельму Іллічу вона сподобалася, і наприкінці її він сказав: "Добра доповідь". Ці два слова були вимовлені з такою інтонацією, що сприймалися як висока похвала. Взагалі, Вільгельм Ілліч вмів похвалити своїх учнів так, що хотілося неперервно працювати і зробити ще більше.

Так розпочалась моя співпраця з Вільгельмом Іллічем.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 377–378

Один епізод

Олександр І. ПРИЛИПКО

Я постарався згадати найвиразніші моменти моїх вражень з зустрічей та спілкування з Вільгельмом Ілліčем.

Я познайомився з Вільгельмом Ілліčем завдяки Сергію Прокоповичу Онуфрійчуку у травні 1987 року (я працював у нього на кафедрі вищої математики Житомирського філіалу КПІ інженером кафедри). Сергій Прокопович домовився по телефону про нашу зустріч і я виїхав у Київ. Моя перша зустріч з Вільгельмом Ілліčем відбулась в Інституті математики. Вільгельм Ілліч зумів зразу і назавжди створити між нами (як я потім зрозумів – це було його правило) таку атмосферу спілкування, що не відчувалося тої великої відстані між вчорашнім випускником вузу та відомим вченим.

В листопаді 1987 я вступив до аспірантури Інституту математики. Хоча я був аспірантом А.Г. Нікітіна, Вільгельм Ілліч постійно приділяв мені увагу, цікавився зробленою мною роботою на протязі всього терміну аспірантури.

І хоча в день захисту моєї дисертації 18 червня 1991 року Вільгельм Ілліч перебував у закордонному відрядженні, відчувалась його заочна присутність. Перед самим від'їздом за кордон він приділив мені багато уваги, хоч сам був дуже зайнятий. При спілкуванні з Вільгельмом Ілліčем створювалась завжди доброзичлива атмосфера між вчителем та учнем. Це був дійсно **Вчитель** і справжня **Людина** в самому високому розумінні цих слів.

Вільгельм Ілліч завжди кудись поспішав, підганяв інших, він ніби боявся недовиконати всього наміченого. Вільгельм Ілліч не любив марних балачок, він завжди був у роботі, в науковому пошуку.

Щопонеділка у нас в відділі проходили вечірні наукові семінари. І ми, молоді аспіранти, приходили в відділ трохи раніше щоб просто поспілкуватись, поділитись новинами. І коли заходив Вільгельм Ілліч, він завжди говорив нам, що не можна даремно гаяти час, потрібно працювати і працювати, щоб досягти якихось успіхів.

Вільгельм Ілліч завжди старався допомогти людям, якщо міг, в вирішенні їх проблем. Мені відомий один такий епізод, який характеризує цю рису характеру Вільгельма Ілліча.

В листопаді 1987 року Вільгельм Ілліч перебував у закордонному відрядженні в Канаді. В університеті міста Калгарі він познайомився з канадкою українського походження, начальником учбової частини математичного факультету Лесею Гавриляк. Перед від'їздом Вільгельма Ілліча на Батьківщину вона його попросила допомогти знайти її батька, і розповіла при цьому свою життєву історію. В тридцяті роки вона проживала на Україні. Її батько був військовим лікарем. Під час війни німці вивезли її з мамою на роботу в Німеччину (Лесі Гавриляк було тоді 3 роки). По закінченні війни вони емігрували в Канаду. На момент розповіді вона знала тільки, що її батько Попаденко Олексій, і що перед війною в Житомирі проживав його дядько Барановський Олександр. Більше вона нічого на знала на той час.

Вільгельм Ілліч пообіцяв зробити все можливе щоб знайти батька землячки. По приїзді в Київ, в грудні місяці він попросив мене спробувати знайти в Житомирі Барановського Олександра. Хоч Барановських було багато, вдалося методом виключення знайти потрібного. Виявилося, що Барановський Олександр Антонович так і проживав до смерті в м. Житомирі, а помер напередодні нашого пошуку – 12 грудня 1987 р. У Житомирі залишилась Барановська Олена Францівна, через неї вдалося знайти адресу батька Лесі Гавриляк. Він на той час був генералом медичної служби і проживав з новою сім'єю в Ленінградській області.

Вільгельм Ілліч написав листа в Канаду з повідомленням знайденої адреси. І через деякий час (так розповідав Вільгельм Ілліч, а Ви, Ольга Іванівна, мабуть пам'ятаєте) у Вас в квартирі роздався серед ночі телефонний дзвінок з Канади. І радісна дочка повідомила, що вона вже по телефону спілкувалась з рідним батьком, через стільки років після розлуки. Як потім розповідав Вільгельм Ілліч, зустріч дочки з батьком також відбулася в домівці батька. Це все, що мені відомо відносно цієї історії.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 379–382

Спогади про мого наукового керівника (деякі фрагменти)

Віктор А. САЛОГУБ

Перша зустріч. У листопаді 1969 року мене з Полтавського педінституту направили на практику в Інститут математики АН УРСР. Вчений секретар В.Ф. Ковальов, подивившись на направлення, уточнивши, що я фізик, направив мене у відділ теоретичної фізики. Він сказав, що там є три молодих співробітники Фущич, Костирко і Коломинцев, він з ними говорив і хтось із них буде моїм керівником.

Я подумав, що поговорю з кожним, і хто з них мені більше сподобається, то того і проситиму бути моїм науковим керівником. Вийшло по-іншому. Коли я зайшов у відділ, то там був лише один стрункий високий молодий чоловік. Це був Вільгельм Ілліч Фущич (йому було тоді 33 роки). Він зі мною поговорив, розпитав, чим я цікавлюсь, звідки я родом, хто мої батьки. Він мені сподобався настільки, що я вже вирішив більше ні з ким не говорити і ввічливо попросив його бути моїм керівником. Вільгельм Ілліч погодився і з тих пір, спасибі Богу, доля надовго пов'язала мене з ним.

Вільгельм Ілліч – мій керівник. По-різному складалася моя наукова робота. Було іноді дуже трудно, але завжди я відчував підтримку Вільгельма Ілліча. Причому, така підтримка надавалась мені і іншим настільки інтелігентно, що для інших це було майже непомітно. Вільгельм Ілліч був з простої селянської сім'ї, але від природи був дуже тактовним і інтелігентним. Всіх нас, його численних учнів, він називав на Ви і по-імені, на наші помилки вказував тактовно, але якось так, що більше вже ми їх старались не робити.

Якось я написав звіт і віддав його прочитати шефу (так ми поміж собою називали Вільгельма Ілліча). Після наступного семінару Вільгельм Ілліч всіх відпустив, а мене попросив залишитись.

– Я ваш, Віктор, звіт прочитав і хочу дати вам пораду, – сказав Вільгельм Ілліч.

– Якщо ви бажаєте, щоб хтось вашу працю поважав, то повинні поважати її самі, а тому пишіть охайно, старайтесь виділяти важливі місця. Я, звичайно, читатиму все, що напишете, – сказав він, – але інші можуть поступити інакше, а вам прийдеться в подальшому мати справу з багатьма людьми. З тих пір всі звіти я оформляв охайно, продумано, а прийом, який примінив Вільгельм Ілліч для того, щоб мене цьому навчити, я приміняв не один раз, працюючи зі своїми студентами.

Вільгельм Ілліч був дуже надійним керівником в хорошому розумінні цього слова. Він підготував десятки кандидатів і докторів наук. І кожного він доводив до захисту дисертації, а багатьом, у тому числі і мені, допомагав з працевлаштуванням.

Іноді хтось після закінчення аспірантури "потопав" у буденній роботі, домашніх турботах і починав відкладати захист на "потім". Вільгельм Ілліч зразу ж починав діяти по-своєму в такій ситуації. Він починав через інших аспірантів, чи спільних знайомих нагадувати про необхідність завершення роботи. Так на кафедрі фізики, де я зараз працюю, згадують, як Вільгельм Ілліч кілька разів на тиждень дзвонив, нагадував через житомирян-аспірантів Леоніду Петровичу Сокуру (одному з його кращих аспірантів і прекрасній людині), щоб той швидше оформляв дисертацію і подавав її до захисту.

Всі завидували нам: Сокуру Л.П., Онуфрійчуку С.П. і мені, що ми маємо прекрасного керівника. Ніхто з відомих нам учених не турбувався за своїх учнів так, як це робив Вільгельм Ілліч.

Працювали ми всі дуже багато вдома, в читальних залах, а двічі на тиждень вечорами в ауд. 14 наш керівник проводив семінари. У той час, коли я був на стажуванні і аспірантурі, ці семінари не були офіційними, і проводив їх Вільгельм Ілліч з власної ініціативи. Хтось із нас (частіше за інших А.Г. Нікітін) доповідав про одержані результати чи вивчену статтю. Ця доповідь детально обговорювалась, а потім Вільгельм Ілліч підводив підсумки і кожному ставив якесь завдання, обов'язково рекомендував статті по нашій тематиці. Ці завдання він завчасно записував у себе в зошиті, а нам – на невеликих картках.

Вільгельм Ілліч сам любив працювати вдома, і щоб йому не заважали, вимикав телефон, але нам дозволяв у певні години, коли терміново потрібно (одержав хороший результат, прийшов до чогось незрозумілого і т.і.), дзвонити йому. Після таких дзвінків він часто призначав додаткову зустріч, де вирішувалась проблема.

Вільгельм Ілліч чудово володів тими питаннями, якими займався він і його численні учні. Іноді ставив якусь таку задачу, яка нам здавалася простою і невартою уваги, але потім виявлялось, що це виливалось у цілий цікавий, важливий науковий напрямок.

Так на моїх очах появилась "додаткова симетрія". До якої ставились майже всі спочатку скептично. А саме цей напрямок і став основним у подальшій роботі відділу, яким керував Вільгельм Ілліч.

Самих кращих своїх учнів Вільгельм Ілліч залишив працювати у себе в відділі. В мій час ними були Анатолій Глібович Нікітін та Юрій Миколайович Сегеда. Це були дуже порядні, скромні і розумні люди. Та інших наш Учитель і не міг лишати біля себе.

Дуже мудро керував Вільгельм Ілліч аспірантами. Старші чудово розуміли тематику молодших, а Анатолій Глібович Нікітін став незаперечним авторитетом для інших. Увійшло в традицію перед тим, як щось давати прочитати Вільгельму Іллічу, ми детально радились з Толею (так ми його тоді звали), а потім уже радились з Вільгельмом Іллічем і слухали його зауваження. Такі процедури проходили наші дисертації, статті до журналів.

Статті наш керівник вимагав писати коротко, чітко без "води" і сам радив куди її подати. Вони проходили в журналах майже без зауважень.

Любив працювати Вільгельм Ілліч і в численні офіційні свята. Він цінував час. Так, колись він сказав мені прийти до нього додому 7 листопада, де ми писали останній варіант статті.

Я був одним з учнів, який його знав ще кандидатом наук, був присутній на захисті докторської дисертації. Радувався цим його успіхам. Потім я поїхав працювати викладачем фізики у Житомир. Від великої науки відійшов, але Вільгельм Ілліч ще довго писав на картках потрібну для мене літературу і був невдоволений моєю пасивністю. Вибачте мені за це, мій Учителю, проста проза життя робить таких як я простими смертними, і лише таких, яким були Ви, підносить до вершин слави в науці і найвищої пошани серед інших людей.

Вільгельм Ілліч – чоловік, батько, син. Цей розділ краще за мене напишуть рідні Вільгельма Ілліча, але я хочу теж сказати кілька слів. Вільгельм Ілліч мав дуже хорошу сім'ю. З Ольгою Іванівною вони були напрочуд хорошою парою. Дуже поважали одне одного і турбувались одне за одним. В справах домашніх керувала Ольга Іванівна, Вільгельм Ілліч цим не мав часу займатися.

Іноді на семінар він приходив заклопотаний і запитував, чи не бачив хтось із нас десь в магазинах чогось потрібного для дому, бо йому дружина сказала купити цю річ. Ми згадували, щось радили, старались допомогти. Я пам'ятаю, як М. Серов поїхав шукати якусь особливу олію, яку Вільгельм Ілліч повинен був купити додому.

Був він дуже заклопотаний, коли вони купували автомобіль. Розпитував А.Г. Нікітіна і С.П. Онуфрійчука, у яких були автомобілі, жахався перспективам ремонту, зберігання, обслуговування. Перед нами проговорив цілий монолог: "Скажу їй, Оля, куплю я цю машину, але, будь ласка, їздь на ній сама і ремонтуй сама ... Ну навіщо мені потрібен цей автомобіль ...". Але в подальшому і їздив і ремонтував, бо любив і поважав свою дружину більше за все на світі.

Дуже любив і поважав Вільгельм Ілліч свою маму. Колись ми заговорили про рибалку. Вільгельм Ілліч сказав, що рибалити не любить, але в себе в селі він ловив рибу, мама його дуже любить рибу. Був я свідком, як Вільгельм Ілліч просив С.П. Онуфрійчука подивитись у Житомирі хутряну безрукавку в магазинах. Він хотів таку купити і зробити дарунок своїй мамі.

Дуже любив Вільгельм Ілліч своїх дітей Маріанку і Богдана. Пам'ятаю, коли народився Богдан, і ми привітали Вільгельма Ілліча, то він був дуже радий. Він радився з нами яке вибрати синові ім'я. Довго його вибирав і це навіть, привело до такого курйозу. Захотів Вільгельм Ілліч назвати сина нетрадиційним ім'ям (якщо не помиляюсь іноземним), але за тодішніми законами при цьому повинна була дати згоду мама. Ольга Іванівна не змогла піти до загсу з якихось причин. Вдома синочка назвали Богданом, і ріс він "неофіційно" аж поки не треба стало свідоцтво про народження для оформлення в садочок. Пішов Вільгельм Ілліч по свідоцтво знову в ЗАГС. А там йому: "Несіть довідку, що в вас є син, що його іменують Богданом". Вільгельм Ілліч їм запропонував привести самого Богдана. Як ця історія закінчилась в деталях не знаю, але що закінчилась благополучно знаю достеменно. Виріс Богдан, здобув освіту. Хай буде здоровим і щасливим, хай буде достойним свого батька, а мого вчителя Вільгельма Ілліча Фущича.

Цікавий випадок. Прихожу я якось в бібліотеку Інституту математики, а дівчата: Таня Фещенко (вона довгий час працювала в одному відділі) і інші наперебій одна іншій мені розповідають: "Твій шеф здійснив подвиг – затримав один злочинця". Виявляється: Вільгельм Ілліч довго працював в Інституті і вийшов іти додому пізно. В дворі Інституту математики тоді стояло з десяток легковиків. Якийсь злочинець забрався між них і крав собі деталі, демонтуючи автомобілі. Вільгельм Ілліч вступив з ним у двобій, знешкодив його, скрутив і, визвавши міліцію, передав їй цього злочинця.

4 січня 1998 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 383–384

Син України, яким Україна може пишатися

Діанна СТАСЮК-PARKE [1]

Дуже тяжко писати спогади про людину, яку вважаєш живою. Так склалося моє життя, що після 35 моїх найкращих років на рідній землі, я переїхала до США, де мешкав мій чоловік. Невдовзі, пару років по тому, Вільгельм Ілліч Фущич, якого я знала моє усе свідоме життя, помер. Але дорогий моєму серцю українець залишився для мене живим, тільки десь далеко, де до болю усе рідне – земля, сонце, вітер, вишні, вишивані рушники і коханий Київ із таким смачним українським хлібом. Залишився живим там далеко, за тисячма океанами, де назавжди залишилося моє серце.

Дуже тяжко писати про людину, яка є втіленням "майже" усього. Скажу "майже", бо хтось із скептиків зауважить, що немає у світі нічого ідеального. Скажу, бо кожного у світі, мабуть, хтось любить. Ми всі різні за кольором, смаком, думками і переживаннями.

Але є люди, яких дуже важливо зустріти. Такою людиною для мене був Вільгельм Ілліч Фущич, якого я знала все свідоме життя.

Трудар науки. Вчений – велетень у математиці. Все життя, без перебільшення, пам'ятатиму його. "Працювати, працювати, працювати!" І він працював для своєї науки, для математики, яку любив. Його праці, книжки, статті говорять за те краще мене.

Учні, яких він залишив по всьому світу і найбільше на рідній землі України, впевнена, скажуть слова подяки цій чудовій людині. Учні, для яких він завжди мав час і душу. Допомогти, підперти, роз'яснити, з'ясувати, вибігати, відшукати, подзвонити і бути теплим та життєрадісним, але вимогливим і принциповим водночас.

Чудовий чоловік. Пані Ольга і пан Вільгельм були однією із подружніх пар, на які дивилися і вірили у любов, у чисте кохання, у сімейне щастя. Ніколи без болі не зможу дивитися на пані Ольгу після смерті її коханого Вільгельма. Жива рана. Біда. Сьогодні. Поруч жінка, яка втратила себе. Без нього. Одного – єдиного, коханого. Чоловіка, якого любила, поважала, яким жила, дітей якого

[1] Діанна Стасюк-Parke, 1965 року народження. Вона виросла у нашому будинку. Подруга нашої з Вільгельмом доньки. Вона – друг дому. *Ольга Фущич.*

виростила і любила. Яким же він був до неї, що такої спустошливої втрати завдав він їй, пішовши від неї назавжди.

Батько, яких пошукати. Сильний, мудрий, розумний, вимогливий, але терпеливий, добрий і справедливий.

І неможливо було б говорити за Вільгельма Ілліча і промовчати за те, що є для мене дуже важливим. Що було важливим для нього. За те, що вважається у великій літературі за обов'язок і честь лицарів. Це про те, що це була людина – ПАТРІОТ. Патріот, де кожна літера велика. Патріот України. Я згадала "велику літературу", ніби беручи її у помічниці, бо чомусь Україні відмовлено у тих всіх великих ідеалах і мірках, у яких майже усім іншим народам, а особливо "росіянам", не відмовлено. Це почуття любові і гордості за свою мову, історію, за своє коріння, за свою землю, просто тому, що ти син цієї землі.

Велика людина жила життям простим, але повним змісту, жила одним подихом із своєю країною, яка тільки піднімається на ноги, коли їй так тяжко і багато хто бажає, щоби вона впала. Він любив до нестями свою рідну Україну, любив в усі часи і незгоди, коли це було і є до цього часу не до вподоби багатьом. Почуттям чистим і чесним.

Доречи, чесність і несхибність Вільгельма Ілліча теж заслуговують на те, щоби сказати за них особливо. Чесність у науці, чесність у стосунках на роботі, в сім'ї, чесність у великому і малому. У поглядах і поступках. Впевнена, що якби пан Вільгельм не був таким, то за часів СРСР він досягнув би набагато вищого положення. Але він таким не був. Був несхибним і принциповим. Яскравим і сильним. У науці, у любові до України.

Шана тобі, Вільгельме, від твоєї землі. Вона, вистраждана земля України, знає, що ти її любив, як ніхто.

Тяжко, бо людина жива у моєму серці. Молода і сильна. Сповнена розуму, любові, сили і тепла. Тепла, яке він мав до своїх друзів, знайомих, сусідів.

Немає слів, які лягли би на папери і передали мої почуття і думки. Вільгельм Ілліч Фущич – це людина, зустріч із якою робить нас кращими.

Це син України, яким Україна може пишатися.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 385–390

Деякі спогади про Вільгельма Ілліча Фущича

Василь М. ФЕДОРЧУК

...Йшов 1974 рік. Група студентів з кафедри теоретичної фізики Ужгородського державного університету проходила переддипломну практику в Інституті теоретичної фізики. Був звичайний робочий день. Ми працювали в читальному залі бібліотеки цього Інституту. Кожен займався підготовкою своєї дипломної роботи. До залу ввійшла струнка людина високого зросту. Вона пройшла попри кожний із столів, за якими сиділи студенти-практиканти і уважно подивилася, що хто читає. Переді мною лежав розкритий журнал із статтею, яка відносилася до моєї дипломної роботи. Я черговий раз читав цю роботу. Коли підійшла до мого стола, то спитали

– Ви розібралися в цій роботі?

– Я недовго думаючи відповів: Так.

– Якщо так, то прочитайте її ще раз, подумайте над нею і приходьте в четвер о 16.00 в Інститут математики...

Таким було знайомство з моїм майбутнім Учителем.

...Пройшли роки. Одного разу Вільгельм Ілліч спитав у мене: "Василь, як то ми з Вами познайомилися?" Я розказав йому те, що написано вище. Тоді Він відповів: "Василь – це судьба". І Він не помилився. З того часу моє життя було тісно пов'язане з Вільгельмом Іллічем. Він відіграв вирішальну роль у становленні мене як науковця.

Одного разу, розмовляючи з Вільгельмом Іллічем про різні науки, я висловив думку про те, що мені найбільше подобається те, чим ми займаємося. На це Він зразу відповів: "Так не можна думати. Все потрібне".

Одного разу я був присутнім разом з Вільгельмом Іллічем на лекції, яку читав професор М.Л. Горбачук для співробітників Інституту математики. Слухаючи лектора, Вільгельм Ілліч звернувся до мене з такими словами: "Бачите, Василь, як легко йому це читати. Він наче розказує нам казку". Я, не довго думаючи, відповів: "Я вважаю, що кожна людина повинна знати щось досконало". Тоді Він засміявся і сказав: "О, Василь, це далеко не так". Пройшли роки ... і я не раз переконувався у правоті Вільгельма Ілліча.

…Був понеділок. Ми, як завжди, зібралися на семінар. У той день Вільгельм Ілліч сказав мені: “Василь, я хочу з Вами поговорити”. Ми домовилися про наступну зустріч. При зустрічі Він поцікавився про стан справ з моєю науковою роботою. На той час вже пройшло майже півтора року від початку моєї аспірантури, але я не справився з тим завданням, яке було мені поставлене. Мені не вдалося прямо застосувати метод, запропонований канадськими математиками, для розв’язання моєї задачі. Я розповів про ці труднощі Вільгельму Іллічу. Розмова тривала близько півтори години. Я був майже переконаний, що, не зможу розв’язати цю задачу. Вільгельм Ілліч слухав мене уважно. Вислухавши все, Він сказав: “Мене не цікавить, якими методами Ви будете розв’язувати цю задачу. Якщо не підходить відомий метод, то запропонуйте свій. Але, задача повинна бути розв’язана”. Після цих слів я ще раз акуратно продумав хід розв’язання задачі і, нарешті, її вдалося розв’язати. Це був один із основних моїх результатів. Якби не тверда позиція мого Учителя, то цей результат був би отриманий без моєї участі.

…Пройшло декілька місяців після моєї розмови з Вільгельмом Іллічем. На одному з семінарів я доповів про отримані результати. Вільгельм Ілліч був задоволений. Після семінару ми виходили з Інституту математики. Жартуючи Він сказав: “Ми Василя кинули у воду. Але Василь все-таки виплив”.

…Був понеділок. Ми збиралися на семінар. Я прийшов завчасно і чекав на Вільгельма Ілліча. Переді мною лежав великий загальний зошит, де були виписані отримані мною результати. Прийшов Вільгельм Ілліч. Він подивився на мене і на мій зошит. Після цього сказав: “Василь, прошу пошукати у Вашому зошиті такий-то результат. Якщо його там нема, то можете викинути свій зошит”. Пройшло декілька хвилин і я знайшов те, що дуже цікавило тоді Учителя. Він був задоволений. Зошит зберігається по сьогоднішній день.

Одного разу, після семінару, почалася вільна розмова. Під час неї Вільгельм Ілліч сказав наступне: “Ви повинні себе так вести всюди, де б ви не були, щоб я від людей чув про вас тільки позитивні відгуки”. Пройшли роки …Якось я пригадав про це Вільгельму Іллічу. Він вже не зовсім пам’ятав про цю розмову. Але ми повинні про це пам’ятати.

Одного разу, розмовляючи з Вільгельмом Іллічем, я почув від нього такі слова: “Василь, ми повинні радіти вже через те, що коли ми прокидаємось – встає сонце”.

Завершувався 1979 рік. Була зима. Я вперше у житті поїхав на конференцію. Це була Міжнародна конференція, яка проходила в м. Звенигород Московської області. Ми жили в пансіонаті Академії Наук СРСР. Конференція підходила до кінця. На нашій секції моя доповідь була останньою. Всі були вже досить втомлені. Я дуже коротко сформулював наш результат. Всім було все зрозуміло. Тоді головуючий сказав: “Какое приятное завершение конференции”. Вільгельм Ілліч був задоволений. Йдучи поруч зі мною, Він поклав свою руку мені на плече (це робив Він дуже рідко) і сказав: “Бачите, Василь, як Вас гарно приймали”. Таким було закінчення моєї аспірантури.

Після закінчення аспірантури я спілкувався з Вільгельмом Іллічем досить регулярно. Ми обговорювали отримані результати і погоджували плани на майбутнє. Я приходив на розмову з різним настроєм і різним ступенем віри в успіх. Але після розмови я завжди виходив з більшою вірою в успіх, ніж заходив. У мене з’являлося натхнення, покращувався настрій, зростала наснага творчості.

Був вечір 7 квітня 1993 року. Я черговий раз приїхав до Києва на консультацію до Вільгельма Ілліча. Я сидів поряд з Ним в Його кабінеті. Ми обговорювали різні питання – наукові і не зовсім наукові. Я мав список питань, які я повинен обговорити з Вільгельмом Іллічем. Ідея написання такого списку належить Вільгельму Іллічу. Вона виникла в нього після того, як я неодноразово після закінчення розмови просив вибачення і дозвіл задати ще деяке запитання. Ми обговорили всі питання, які були у списку. І я збирався подякувати Вільгельму Іллічу за те, що Він допоміг мені у їх вирішенні. Але перед цим Він сказав: “Василь! Потрібно оформляти роботу і захищатися. При цьому, на моїх паперах поставив вищезгадану дату і написав: “*Захист*!” Я, чесно кажучи, не сприйняв сказаного серйозно і нічого не збирався робити для реалізації сказаного Вільгельмом Іллічем. Я не уявляв собі, що являє собою докторська дисертація. А тому, коли ми вийшли з Інституту і пішли по бульвару Т. Шевченка вниз до Хрещатика, я (як завжди) почав перепитувати черговий раз у Вільгельма Ілліча чи дійсно у мене є достатньо результатів для оформлення докторської дисертації. Йому це не сподобалося і Він сказав: “Василь! Спитайте ще у тієї жінки, що йде назустріч, що Вам робити!” Мені стало незручно. Я вибачився і більше запитань на цю тему не задавав. Після цього я працював як завжди, але нічого не робив для оформлення дисертації. Я планував отримати ще один результат, а потім починати займатися оформленням роботи. Пройшло приблизно два роки. Запланований мною результат був отриманий, але нічого не зроблено в напрямку оформлення роботи. Я думав, що Вільгельм Ілліч забув про те, що говорив мені тоді на початку квітня 1993 року. Я черговий раз приїхав до Києва. Був вечір. Я був у відділі Вільгельма Ілліча. Разом зі мною були інші мої колеги. Кожен з нас мав кілька запитань до Учителя. Він по-одному кликав нас до себе. Я зайшов останнім, оскільки в мене було найбільше запитань, адже до Києва я приїжджав лише декілька разів на рік. Розмовляючи зі мною, Вільгельм Ілліч спитав мене: “Василь! Ви зробили те, що я Вам говорив з приводу оформлення дисертації?” Я відповів: “Ні, але я прийму до уваги те, що Ви сказали”. Моя відповідь явно не сподобалася Учителю і Він сказав: “Василь! Не прийму до уваги! А якщо до Нового року в мене на столі не буде написана Вами дисертація, то щоб Ви на мене потім не гнівалися!” Після цих слів я вже нічого не перепитував, не сперечався з Вільгельмом Іллічем, а сказав: “Я постараюся”. Наступного разу я приїхав до Вільгельма Ілліча десь за тиждень до Нового року. І прийшовши на розмову з Ним, я мовчки витяг рукопис дисертації і поклав його на стіл. З виразу обличчя Вільгельма Ілліча я побачив, що Він задоволений ...

Я приїхав до Києва на першу Міжнародну конференцію, яку організував Вільгельм Ілліч. Наступного дня зранку планувалося відкриття конференції. Вільгельм Ілліч під’їхав легковим автомобілем і (як завжди) зупинився перед брамою Інституту математики. На задньому сидінні лежав великий портрет. Я підійшов до Учителя і Він спитав у мене: “Василь! Хто це?” Я почав думати, але твердо знав, що десь я цю Людину бачив. Згодом я назвав ім’я і прізвище. Але воно виявилося неправильним. Тоді Вільгельм Ілліч сказав: “Це – Софус Лі”. Після цих слів, я згадав де бачив фотографію цієї Людини. На другий день, зайшовши в конференцзал Київського педагогічного університету ім. М. Драгоманова, я побачив портрет С. Лі поряд з портретами інших видатних математиків і фізиків. Треба сказати, що Вільгельм Ілліч надзвичайно високо цінив Софуса Лі, тому Він спеціально до конференції замовив його портрет. Я бував у різних наукових і навчальних установах, але портрет С. Лі я побачив вперше на конференції, яку організував Вільгельм Ілліч.

У день офіційного відзначення 60-літнього ювілею Вільгельма Ілліча відбулося урочисте засідання Вченої ради Інституту математики НАН України, на яке поряд з членами ради Інституту прийшло

багато його колег з інших установ, друзів, однодумців, а також, майже всі його учні. На засідання Вченої ради Вільгельм Ілліч з’явився вчасно, святково одягнений, з святковим настроєм. Урочиста доповідь тривала приблизно годину. У ній Він дуже коротко розповів про деякі здобутки його школи стосовно дослідження рівняння Шрьодінгера груповими методами, вдало поєднавши це з історією відкриття рівняння Шрьодінгера самим Шрьодінгером. Вільгельму Іллічу було запропоновано опублікувати текст доповіді в Українському математичному журналі, щоб з ним могли познайомитися інші люди. Доповідь дуже легко слухалася, була дуже цікавою для всіх.

Був початок 1997 року. Я привіз до Києва документи на представлення моєї роботи. У Києві я дізнався, що Вільгельм Ілліч потрапив до лікарні, де й був на час мого приїзду. Я зателефонував до Нього і, розмовляючи з Ним, почув такі слова: “Василь, я хочу щоб Ви захистилися, поки я ще живий”. Я не чекав таких слів. Я не був морально готовий їх слухати. Зрештою, я не думав, що у Вільгельма Ілліча є серйозні підстави, щоб так говорити. Я вважав, що Він перебільшує складність свого становища. Тому, я зразу і не знав, що йому на це сказати. Трохи помовчавши, я сказав: “Як би не склалися мої справи, я до Вас претензій не матиму. У всьому винен я”. На це мені Вільгельм Ілліч сказав:

– Зате у мене є до Вас претензії!

– Які? Спитав я.

– Чому Ви тягнете з представленням і захистом роботи?

– Я постараюся прискорити цю справу ...

Пройшов деякий час. Я знову поїхав до Києва, бо потрібно було готувати документи до захисту і на багатьох з них потрібен був підпис Вільгельма Ілліча. У Києві я дізнався, що Він все ще у лікарні. Поговорювали, що Він збирається на лікування за кордон. Одного разу із розмови з Ним я дізнався, що ввечері Він планує приїхати з лікарні додому, а через кілька днів – їхати за кордон. Я хотів зустрітися з Ним, але точного часу його повернення з лікарні я не знав, тому я вирішив поїхати до будинку, де Вільгельм Ілліч жив і там очікувати його приїзду з лікарні, щоб при зустрічі біля будинку з’ясувати, коли можна було б з ним зустрітися. Я підійшов до будинку десь о 18.00 і чекав на його повернення. Час йшов, а Вільгельма Ілліча не було. Було вже десь на пів дев’яту вечора. На дворі почало злегка темніти ...Раптом я побачив, що з його під’їзду вийшла дівчина, що була дуже схожа на Людмилу Баранник. Цьому я значення не придав, бо не думав її зустріти там у такий час ... Дівчина підійшла до мене. Перед собою я побачив Людмилу Баранник. Вона спитала: "Василю, що Ви тут робите?"

– Я чекаю на повернення з лікарні Вільгельма Ілліча.

– Вільгельм Ілліч вже давно вдома. Я якраз від нього.

Подякувавши їй за те, що вона не пройшла повз мене "не помітивши", я вирішив все-таки зайти до Вільгельма Ілліча без попередньої домовленості про це. Це був перший раз, коли я вирішив зайти до нього без його згоди на це. Мені було дуже незручно, але я не мав іншого виходу. Я натиснув кнопку дзвінка. Двері відчинила Ольга Іванівна. Я попросив вибачення і спитав чи можна зайти на кілька хвилин. Ольга Іванівна сказала: "Хвилинку, Василь" і пішла до кімнати, де був Вільгельм Ілліч. Переступивши поріг квартири, я закрив двері і почув її слова – "Віллі, прийшов Василь. Нехай зайде?" Я не почув відповіді Вільгельма Ілліча. Але напевно вона була позитивною, бо мені дозволили зайти. Зайшовши в кімнату, я побачив Вільгельма Ілліча, який лежав на дивані. Він був досить таки виснажений, але зустрів мене привітно. Я дуже вибачився за те, що прийшов без попередження і в такий незручний час. Я розповів йому про свої проблеми. Він встав з дивана і сів за стіл. Я сів біля нього. Він прочитав всі документи, які я йому приніс, зробив свої зауваження і поставив свій підпис там, де було потрібно. Після цього Вільгельм Ілліч сказав: "Василь, вибачте, я піду трохи приляжу". Він ліг на диван і ми ще трохи розмовляли. Але я не міг забирати більше часу у нього, враховуючи його стан. Тому, щиро подякувавши йому, я побажав йому якнайшвидшого одужання і попрямував до дверей. Дійшовши до дверей кімнати, я повернувся і побачив, що Вільгельм Ілліч ціною великих зусиль підняв руку, щоб помахати мені. Мені стало дуже шкода Вільгельма Ілліча. Я ледве стримався, щоб не заплакати. Я повернувся і підійшов до дивана. Взяв руку Вільгельма Ілліча і поцілував її. Він сказав: "Василь, не робіть більше таких дурниць!".

– Розцінюйте це як хочете. Я зробив це щиро. Спасибі Вам за все.

Після цього я пішов до дверей квартири і вийшов. На жаль, це була наша остання розмова.

1997 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 391–392

Людина невичерпної енергії

Іван М. ЦИФРА

Ми познайомилися з Вільгельмом Іллічем в 1979 році, коли я ще був студентом 4 курсу Ужгородського державного університету. З першої зустрічі він справив на мене дуже сильне враження як вчений. Я зрозумів, що Він справді є людиною науки. В усякому разі саме після цієї зустрічі я твердо вирішив для себе, що буду намагатися поступити в аспірантуру в Інститут математики до Вільгельма Ілліча.

Перше враження про Вільгельма Ілліча, як про людину невичерпної енергії з постійним жаданням творчості, стремлінням до нового в науці не змінилося в мене і впродовж багатьох років спілкування та співпраці з ним. І напевно саме в цих рисах Вільгельма Ілліча і криється секрет його надзвичайної наукової плодовитості.

Нас, його учнів, та й інших оточуючих людей завжди вражали різнобічність його наукових інтересів, численість нових ідей і колосальна працездатність. Інколи мені здавалося, що сон та відпочинок для Вільгельма Ілліча є лише вимушеною перервою в роботі. Воістину правильним є французьке прислів'я "Треба жити не для того, щоб їсти, а їсти для того щоб жити".

Наукові ідеї Вільгельма Ілліча навіть чисто математичні часто базувались на фізичній інтуїції. Порою Він говорив про внутрішню гармонію природи, яка і є тою самою істиною, яку пізнає наш розум. Найкращим виразом цієї гармонії є симетрія. Саме розвитку ідеї симетрії в математиці та теоретичній фізиці і присвятив своє життя цей безумовно великий вчений.

У стилі наукової роботи Вільгельма Ілліча я ще хотів би відмітити таку рису як незацикленість на одній задачі. Своїм учням Він, як правило, ставив декілька задач. Якщо якась з них з деяких причин не може бути розв'язаною в даний момент, то Він відкладає її і повертається до неї через декілька років, працюючи над нею весь цей час, можливо, навіть на підсвідомому рівні, і врешті-решт знаходить розв'язок. Такі приклади мені знайомі по співпраці з Вільгельмом Іллічем при розробці концепції "умовної симетрії" та "нелінійної електродинаміки".

Не можна не звернути увагу на організаторський талант Вільгельма Ілліча. В цьому аспекті я завжди порівнюю його з футбольним тренером В.Лобановським, тим самим відмічаючи його вміння створювати справжню наукову команду. Я згадую слова Вільгельма Ілліча: “В букеті повинні бути різні квіти”. Але ці квітки повинні бути підібрані так, щоб разом утворювати чудовий ансамбль. І тепер можна сміливо говорити про школу Фущича – цілий загін вчених-математиків, які продовжують розвивати наукові ідеї і традиції закладені Вільгельмом Іллічем.

Вільгельм Ілліч шанував фізичну працю, любив доброзичливий жарт, людей, життя. Молодь любила його, тянулась до нього. Що більше ми любимо таких людей, то глибше відчуваємо їх втрату.

Надзвичайна душевна щедрість і доброта цієї людини, бажання допомогти кожному не знали меж. Вже маючи високі титули й звання і будучи обтяженим великою кількістю справ, Він завжди знаходив час для кожної людини, яка бажала обговорити з ним свої проблеми, скажімо наукові, організаційні або особисті.

До останніх днів свого життя Вільгельм Ілліч активно працював, будував плани. Достатньо сказати, що в лютому місяці 1997 року Він написав і здав до друку статтю, присвячену нелінійній електродинаміці та фізичному визначенню швидкості світла.

Останній раз я розмовляв з Вільгельмом Іллічем по телефону 26 березня 1997 року. Він говорив зі мною про майбутню монографію та інші наукові й організаційні питання. Він ще багато зумів би зробити для науки і всіх нас, якби не хвороба, яка обірвала життя цієї чудової людини. Яскраве світло і душевне внутрішнє тепло, яке Він випромінював, робило і всіх оточуючих його людей кращими, добрішими.

Ми, учні Вільгельма Ілліча, завжди будемо пам’ятати свого вчителя.

3 квітня 1998 р.

Збірник праць Інституту математики НАН України 2006, т.3, N 2, 393–396

Вільгельм Фущич: вчений, людина, громадянин (короткі спогади)

Роман М. ЧЕРНІГА

Вперше я зустрівся з Вільгельмом Іллічем у червні 1981 року під час захисту мого дипломного проекту. Знайомство носило цілком офіційний характер: він, на той час молодий перспективний доктор фізико-математичних наук, був головою державної комісії на мехмат факультеті Київського держуніверситету ім. Тараса Шевченка, а я – випускником цього факультету. Хоч вчився я дуже добре і претендував на червоний диплом, проте власне дипломний проект виконав не найкращим чином, оскільки мій керівник був важко хворий і я робив його самотужки та без особливого натхнення. Вільгельм Ілліч задав мені декілька додаткових запитань і наполіг, щоб мені таки поставили відмінно за захист проекту. Можливо він помітив або йому підказав хтось з викладачів університету, що я можу досягнути більшого в математиці. Після захисту ми мали коротку розмову, яка, мабуть, його трохи розчарувала, оскільки я відхилив його пропозицію поступати до нього у аспірантуру на стаціонарну форму навчання. На той час я вже цілком припускав своє майбутнє одруження, тому був зобов’язаний думати про житло в Києві, яке мені могла дати лише робота у якомусь НДІ. Вільгельм Ілліч мене зрозумів, оскільки сам пройшов шлях некиянина до постійної столичної прописки. Власне ця розмова і визначила моє майбутнє як науковця. Ми домовилися, що я розпочну ходити до нього на наукові семінари та як здобувач наукового ступеня здавати кандидатські екзамени.

Точно пам’ятаю, що у понеділок 24 вересня 1981 року я вперше прийшов на семінар до Вільгельма Ілліча і побачив його учнів. Фактично вперше в житті я зустрів колектив професійних науковців та аспірантів у роботі. Володя Штелень розповідав про рівняння Шрьодінґера і я, ясна річ, мало що зрозумів, але основні моменти старанно законспектував. Після цього я став регулярно приходити на семінари і швидко заглиблюватися у суть науки, яка мені відразу сподобалася. Як правило, два-три рази на місяць Вільгельм Ілліч персонально розмовляв зі мною по науковій роботі, а також цікавився особистими проблемами. Мені дуже подобався і надавав наснаги той факт, що зі мною він завжди розмовляв гарною українською мовою. У часи брежнєвського застою більшість науковців задля кар'єри зовсім відмовлялася від української мови, а він цього не робив. Задля точності зазначу, що семінар вівся російською мовою, оскільки ми мали аспіранта Сандуллу, який і по-російськи говорив не без проблем. Незабаром Вільгельм Ілліч дав мені досить непросту на ті часи задачу: зробити повну класифікацію нелінійного багатовимірного рівняння теплопровідності. Досить швидко я це зробив, проте він був дуже здивований факту відсутності ґалілей-інваріантних нелінійних рівнянь теплопровідності. Мабуть, він вважав, що я десь зробив помилку, тому не зважився відразу це опублікувати. На жаль, в 1982 році була опублікована стаття російських математиків на цю ж тему, яка перекреслила першість наших вислідів.

Восени 1983 року я став аспірантом-заочником і наша співпраця стала ще тіснішою. З часом я зрозумів, що цікава і водночас важка наукова праця може принести прикрі розчарування. Мова йде про те, що швидкий науковий прогрес Вільгельма Ілліча і його учнів не зустрів захоплення у вчених-конкурентів з цієї тематики. Пам'ятаю, як в 1984 році ми подали до друку першу спільну статтю у московський журнал. Дуже швидко прийшла розгромна негативна рецензія, яка не містила жодних серйозних аргументів. Я був дуже здивований, але Вільгельм Ілліч мені пояснив, що у науці також не без політики. Підтвердженням цього став факт наступного опублікування цієї статті у престижному "Journal of Physics A: Mathematical and General" (Великобританія), до того ж ми отримали дуже позитивні відгуки рецензентів. Беручи до уваги вищезазначене та деякі інші моменти присутності політики в науці, я був приємно здивований, коли в 1987 році Вільгельма Ілліча обрали член-кореспондентом Академії Наук (тоді ще УРСР). Цей рік був знаменний і для мене – я захистив дисертацію.

У найбуремніші роки останніх десятиліть – 1988–1992 р. – я дуже рідко зустрічався з Вільгельмом Іллічем. Коли ж випадала нагода поспілкуватися, знаючи про мою не надто велику лояльність до влади, він завжди застерігав не "лізти" в політику. Мене тоді дивувала його надмірна обережність, але з часом я зрозумів, що він добре знав про арешти 1972–1973 років, до того ж його вчитель – академік Парасюк – намагався бути подалі від політики. Слава Богу, що побоювання Вільгельма Ілліча не справдилися і імперія більш-менш мирно розпалася і ми живемо у незалежній державі.

Наприкінці 1992 року, дуже несподівано, я отримав пропозицію від Вільгельма Ілліча перейти працювати в Інститут математики на місце В. Штеленя. Пам'ятаю, що при цій розмові він був приголомшений рішенням свого улюбленого учня – Володі Штеленя – покинути Україну. За роки спільної праці в Інституті математики наукова робота та достатньо близькі політичні погляди (не забуваймо, що у політичному плані мирна революція завершилася лише в червні 1996 року з прийняттям Конституції України) нас ще більше зблизили. Мені імпонувало те, що він не ставив мені надто вузьких задач, а давав можливість для широкого вибору наукових проблем. Завдяки цьому я швидко прогресував як науковець.

Стосовно політичних проблем, то ми часто дискутували і, треба визнати, Вільгельм Ілліч навчив мене не робити надто "революційних" кроків, хоч часто мене це просто дратувало. Наприклад, як голова осередку "Просвіта", я намагався надавити на дирекцію аби Інститут пошвидше перейшов на ведення всього діловодства державною мовою. Оскільки реально це залежало від заступника директора з загальних питань, який не знає і не хоче знати української мови, то мої намагання були малоефективними, про що мене й попереджав Вільгельм Ілліч. "Романе, не витрачайте марно зусиль та не викликайте на себе вогню цих україноненависників, з часом їх заставлять це зробити "зверху", – казав він. Дійсно, потрохи заставляють ...

В останній рік життя мого вчителя наші стосунки стали трохи натягнутими, оскільки йому були не до вподоби мої часті, на його думку, поїздки за кордон. Його можна було зрозуміти – кожен вчитель бажає аби найкращі учні завжди були поруч. Незважаючи на це, він був порядною людиною і не забороняв своїм учням тимчасово працювати за кордоном. На жаль, я знаю багато випадків, коли наші маститі вчені всіма правдами і неправдами тримають учнів як на прив'язі. Мені гріх на це жалітися, проте жертвою стали наші чудові стосунки.

Вільгельм Ілліч належав саме до тої, на жаль невеликої, частини наукової еліти, котра відразу сприйняла факт проголошення незалежності України не як випадковий і тимчасовий, а як здійснення споконвічних мрій українців, зокрема, його особистих прагнень. Переконаний, що в останні 3–4 роки життя йому варто було більше уваги приділити організаційним питанням у науці, зокрема, побороротися за мандат депутата нашого парламенту, у якому відповідна комісія науки та освіти репрезентована досить посередніми особистостями. Працюючи головою чи заступником голови профільного комітету Верховної Ради він мав би реальні шанси зрушити з місця процес реформування нашої закостенілої НАН України. На жаль, закоханість у симетрію поглинала майже всю його енергію.

Вільгельм Ілліч мав справжній Божий дар уміння спілкуватися з найрізноманітнішими людьми, умів бути цікавим співрозмовником і на далеко не наукові теми. Зокрема, на все своє життя він зберіг юнацьке захоплення футболом і при нагоді розповідав, що мав колись дилему: стати центрфорвардом чи науковцем. Декілька разів, наприклад, з нагоди його 50-річчя, ми, його учні, проводили запеклі футбольні матчі за участю свого учителя. Без жодної запопадливості скажу, що й у футболі багатьом його учням було далеко до 50-річного учителя. Мені це особливо приємно писати, бо сам дуже люблю футбол. До речі, якось трапився такий ігровий епізод. Ми грали у футбол і мій, тоді ще малий, син несподівано вигулькнув на майданчик та ще так, що Вільгельм Ілліч, не маючи змоги різко зупинитися, збив його. Ясна річ, дитина розплакалася, а я опинився у вкрай незручному становищі – Вільгельм Ілліч почав розпачливо переді мною вибачатися. Потім він ще довго перепитував про те, як там мій Богданчик чи не сильно вдарився та бідкався, що не зміг вчасно загальмувати.

...У моїй пам'яті Вільгельм Ілліч залишився людиною, яка відкрила мені шлях у *велику* науку, яка є взірцем відданості математиці, яка уміла заангажувати кожного учня до наукового пошуку і залишатися оптимістом при будь-яких негараздах. Шкода, що тяжка хвороба забрала його так рано, адже далеко не все, що він хотів, йому вдалося здійснити. Проте, незважаючи на це, переконаний, що наукова спадщина Вільгельма Ілліча Фущича буде належним чином оцінена і знайде гідне місце на скрижалях української науки.

1997 р.

Зміст

Спогади про Вільгельма Ілліча Фущича

Наукове видання

Збірник праць
Інституту математики НАН України

Том 3 № 2

Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики

Комп'ютерний оригінал-макет *В.М. Бойко, Р.О. Попович*

Підписано до друку 14.11.2006. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 25,0. Умов. друк. арк. 23,3. Зам. № 190. Тираж 100 пр.

Інститут математики НАН України
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3