

СИМЕТРІЯ ТА ІНТЕГРОВНІСТЬ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ – 2015

Деякі узагальнення систем рівнянь конвекції–дифузії, інваріантних відносно алгебр Галілея

Карпалюк Т.О.

Національний технічний університет України "КПІ"
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
tamarakarpalyuk@ukr.net

Система рівнянь Нав'є–Стокса, названа за іменами французького фізика Клода–Луї Нав'є та британського математика Джорджа Габріеля Стокса, є надзвичайно важливою для моделювання різних процесів у гідродинаміці. Ми розглянемо одну з модифікацій системи рівнянь Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \Delta\vec{u} &= -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \\ \rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) &= 0, \\ p &= f(\rho),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$ — векторне поле швидкостей, $u^a = u^a(x)$, $\rho = \rho(x)$ — густина, $p = p(x)$ — тиск рідини, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a = \overline{1, n}$, $f(\rho)$ — довільна гладка функція.

Особливістю цієї системи є те, що використовуватись вона може лише для опису процесів, де розмірність векторного поля $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ співпадає з кількістю незалежних просторових змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Ми пропонуємо системи, що є аналогами системи (1) при $m \neq n$.

Розглянемо систему рівнянь конвекції–дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U)U_i,\tag{2}$$

де $U \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $F^i(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності $m \times m$, $i = \overline{1, n}$. Нами було знайдено системи класу (2), які з точністю до неперервних перетворень еквівалентності системи інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля U та однієї і двох просторових змінних. Деякі з цих систем узагальнено до систем рівнянь, які є аналогами системи рівнянь Нав'є–Стокса при $m \neq n$. Мають місце теореми.

Теорема 1. Система вигляду

$$\begin{aligned}u_0^1 + u^1 u_1^1 - u_{11}^1 - \psi \left(u^2 - \frac{1}{2}(u^1)^2 \right)_1 &= 0, \\ u_0^2 + u^1 u_1^2 - u_{11}^2 - \psi u^1 \left(u^2 - \frac{1}{2}(u^1)^2 \right)_1 + 2 \left(u^2 - \frac{1}{2}(u^1)^2 \right) u_1^1 &= \frac{c_1 \rho^2}{\dot{f}(\rho)} p_1, \\ u_0^3 + u^1 u_1^3 - u_{11}^3 &= \frac{c_2}{\dot{f}(\rho)} p_1, \\ \rho_0 + (u^1 \rho)_1 + \lambda (u^3 \rho^2)_1 &= 0, \\ p &= f(\rho),\end{aligned}\tag{3}$$

де $\psi = \psi(u^3)$ — довільна гладка функція, λ, c_i ($i = 1, 2$) — довільні сталі, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\begin{aligned} \partial_0, \partial_1, G &= x_0 \partial_1 + \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2}, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u^1 \partial_{u^1} - 2u^2 \partial_{u^2} - \rho \partial_\rho, \\ \Pi &= x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + x_1 (\partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2}) - x_0 (u^1 \partial_{u^1} + 2u^2 \partial_{u^2} + \rho \partial_\rho) + \partial_{u^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема 2. Система вигляду

$$\begin{aligned} u_0^a + u^b u_b^a - \Delta u^a &= \frac{\delta_{ab} c_1 + \epsilon_{ab} c_2}{\dot{f}(\rho)} p_b, \\ u_0^3 + u^b u_b^3 - \Delta u^3 - \varphi \epsilon_{ab} u_b^a &= 0, \\ \rho_0 + (\rho u^a)_a &= 0, \\ p &= f(\rho), \end{aligned} \quad (5)$$

де δ_{ab} — символ Кронекера, $\epsilon = (\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c_i — довільні сталі, $a, b, i = 1, 2$, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея, базисні генератори якої задаються формулами

$$\begin{aligned} \partial_0, \partial_a, G_a &= x_0 \partial_a + \partial_{u^a}, J_{12} = x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1 + u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^1}, \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - u^a \partial_{u^a} - 2\rho \partial_\rho, \Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_a \partial_a + x_a \partial_{u^a} - x_0 (u^a \partial_{u^a} + 2\rho \partial_\rho). \end{aligned} \quad (6)$$

Важливо, що при такому узагальненні системи (3), (5) не лише за формою повторюють систему Нав'є–Стокса, а й зберігають інваріантність відносно вказаних алгебр Галілея, розширених операторами масштабних і проективних перетворень.

Література

- [1] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung / S. Lie // Arch for Math. — 1881. — V6, № 3. — P. 328–368.
- [2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников — М. : Наука, 1978. — 400 с. — English translation: Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations / Ovsiannikov L.V. — New York : Academic Press, 1982. — 400 p.
- [3] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер — М. : Мир, 1989. — 639 с.
- [4] Жадан Т.О. (тепер Карпалюк Т.О.) Інваріантність системи рівнянь дифузії–конвекції відносно узагальненої алгебри Галілея. / Т.О. Жадан // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. — 2004. — В.12. — С. 70–75.
- [5] Серов М.І. Інваріантність системи рівнянь конвекції–дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля./ М.І. Серов, Т.О. Карпалюк // Математичний вісник НТШ. — Київ. — 2010. — Т.7. — С. 267–288.
- [6] Серова М.М. Некласичне узагальнення одновимірної системи рівнянь Нав'є–Стокса. / М.М. Серова // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: збірник статей. Зб. праць Інституту математики НАН України. — Т.3, №2. — К. — 2006. — 400 с.