О СХОДИМОСТИ ИНДУЦИРОВАННЫХ МЕР ПО ВАРИАЦИИ

Д.Е. Александрова, В.И. Богач¨ев, А.Ю. Пилипенко

В этой заметке исследуется следующая задача. Пусть ξ_j – последовательность случайных векторов в $\mathbf{R}^n$, сходящаяся по вероятности к случайному вектору ξ. Когда распределения векторов ξ_j сходятся к распределению ξ по вариации? Эта задача возникает при изучении предельных теорем теории вероятностей (см., например, [1]); она имеет и самостоятельный интерес. Простое достаточное условие сходимости по вариации получено в [2], где $\{\xi_j\}$ – абсолютно непрерывные функции на отрезке $[0,1]$, равномерно сходящиеся к абсолютно непрерывной функции ξ, причем $\|\xi_j' - \xi'\|_{L^1[0,1]} \to 0$. При этих условиях сужение $\lambda|_E$ меры Лебега на множество $E = \{\xi' \neq 0\}$ переводится функциями ξ_j в меры, сходящиеся по вариации к образу меры $\lambda|_E$ при отображении ξ. Ниже дано простое доказательство значительно более общего результата. В частности, приведенное утверждение верно, если ξ_j и ξ – измеримые отображения в $\mathbf{R}^n$ со свойством Лузина (N), почти всюду имеющие производные (или хотя бы регулярные аппроксимативные производные), которые локально равномерно интегрируемы, причем отображения ξ_j сходятся равномерно на компактах к ξ, а их производные сходятся по мере на ограниченном измеримом множестве E к производной отображения ξ, которая невырожденна на E. Таким образом, и в одномерном случае результат работы [2] усилен. Кроме того, получены следствия основного результата для отображений из бесконечномерных пространств, применимые к широким классам мер, в частности, к гауссовским мерам и гиббсовским распределениям.

1.

Напомним некоторые определения. Для всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ и всякого числа $p \geq 1$ пространство Соболева $W^{p,1}(\Omega)$ состоит из функций $f \in L^p(\Omega)$, обобщенные частные производные которых также являются элементами $L^p(\Omega)$. Пространство Соболева $W^{p,1}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_n)\colon\ \Omega \to \mathbf{R}^n$, таких, что $f_i \in W^{p,1}(\Omega)$. Это пространство наделяется нормой

$$\|f\|_{p,1} = \Big\| \Big(\sum_{i=1}^n f_i^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\Omega)} + \Big\| \Big(\sum_{i,j=1}^n (\partial_{x_i} f_j)^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\Omega)}.$$

Символом $W^{p,1}_{loc}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ обозначается класс всех таких отображений $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, что $\zeta f \in W^{p,1}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ для всех $\zeta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, где $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ – класс всех гладких функций на $\mathbf{R}^n$ с компактными носителями.

Пусть $A \subset \mathbf{R}^d$ и $x \in A$. Если

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda\big(K(x,r)\cap A\big)}{\lambda\big(K(x,r)\big)} = 0,$$

где $K(x,r)$ – замкнутый шар радиуса $r>0$ с центром в x, то точка x называется точкой плотности 0 для множества A. Точка $y \in Y$ называется аппроксимативным пределом отображения $f\colon\ A \to \mathbf{R}^n$ в точке x, если плотность множества $\mathbf{R}^d \setminus f^{-1}(U)$ в x равна 0 для любой окрестности U точки $y \in Y$. Ясно, что может существовать не более одного такого y; обозначим его через $\operatorname{ap}\lim_{z\to x} f(z)$. Если f – числовая функция, то ее аппроксимативный верхний предел $\operatorname{ap}\limsup\limits_{x\to a} f(x)$ в точке a определяется как точная нижняя грань всех таких чисел t, что точка a является точкой плотности 0 для множества $\{z\colon\ f(z) > t\}$.

Отображение $f\colon\ A \to \mathbf{R}^n$ называется аппроксимативно дифференцируемым в точке a, если существует такое линейное отображение $L\colon\ \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^n$, что

$$\operatorname{ap}\lim_{x\to a} \|f(x) - f(a) - L(x-a)\|/\|x-a\| = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{R}^d \setminus A$ в точке a имеет плотность 0 и, кроме того, что такое L единственно (см. [3, 3.1.2]).

Аппроксимативным якобианом $J(f)$ отображения f называется определитель аппроксимативной производной f.

Определим также аппроксимативные частные производные отображения $f\colon\ A \to \mathbf{R}^n$ формулой

$$\mathrm{apD}_i f(a) = \operatorname{ap}\lim_{t\to 0}\, [f(..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ...) - f(a)]/t.$$

Из существования аппроксимативных частных производных измеримого отображения $f\colon\ A \to \mathbf{R}^n$ следует его аппроксимативная дифференцируемость λ-почти всюду на A (см. [3, теорема 3.1.4]), откуда, в свою очередь, следует, что

$$\operatorname{ap}\limsup_{x\to a} \|f(x) - f(a)\|/\|x-a\| < \infty \tag{1.1}$$

для почти всех $a \in A$. Обычная дифференцируемость f в точке влечет аппроксимативную дифференцируемость в этой точке, причем обычная производная Df в этом случае служит аппроксимативной. В отличие от обычных производных, в определении аппроксимативной производной не требуется, чтобы отображение f было определено в окрестности точки x.

Если отображение f из открытого множества $U \subset \mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ имеет аппроксимативную производную L в точке $x \in U$ и существует такая последовательность $r_j \to 0$, что

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{\|h\|=1} \left\| \frac{f(x+r_j h) - f(x)}{r_j} - Lh \right\| = 0,$$

то L называется регулярной аппроксимативной производной f в точке x (при этом L называют также K-производной и слабым полным дифференциалом).

Ясно, что обычная дифференцируемость в точке влечет существование регулярной аппроксимативной производной в точке и ее совпадение с обычной производной. Известно, что всякое отображение $f \in W^{p,1}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ с $p > n-1$ обладает модификацией $\widetilde{f}$ (т.е. $f = \widetilde{f}$ п.в.), которая почти всюду имеет регулярную аппроксимативную производную, совпадающую почти всюду с соболевской производной f (см. [4, §2], [5, с. 170]). Если же $p > n$, то f обладает непрерывной модификацией, которая почти всюду имеет обычную производную (см. [8, гл. 2, §5.4, теорема 5.2]).

Напомним, что отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условию Лузина (N) (или имеет (N)-свойство Лузина), если оно переводит всякое множество меры нуль в множество меры нуль. Согласно теореме Радемахера–Эллиса, измеримое отображение f обладает (N)-свойством Лузина в точности тогда, когда оно переводит всякое измеримое множество в измеримое (см. [6] или [7, задача 6.8.7], где формулировка приведена для борелевского f, что влечет утверждение и для измеримых отображений).

Пусть μ – мера на измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$. Обозначим через $\mathcal{B}_\mu$ лебеговское пополнение $\mathcal{B}$ относительно μ. Если f – μ-измеримое отображение со значениями в измеримом пространстве $(Y, \mathcal{F})$, т.е. $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_\mu$ при $A \in \mathcal{F}$, то образ меры μ при отображении f обозначается через $\mu \circ f^{-1}$ и определяется формулой

$$\mu \circ f^{-1}(A) = \mu\bigl(f^{-1}(A)\bigr), \qquad A \in \mathcal{F}.$$

2.

Теорема 2.1. *Пусть $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $F_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – измеримые отображения, λ – мера Лебега на $\mathbf{R}^n$, а E – измеримое множество конечной меры в $\mathbf{R}^n$. Предположим, что во всех точках E существуют аппроксимативные частные производные $\mathrm{ap}D_iF(x)$ и $\mathrm{ap}D_iF_j(x)$, $i = 1, \ldots, n$, причем отображения F_j сходятся по мере на множестве E к F, а их аппроксимативные частные производные $\mathrm{ap}D_iF_j$, $i = 1, \ldots, n$, сходятся по мере на множестве E к соответствующим аппроксимативным частным производным F, причем аппроксимативный якобиан $J(F)$ отображения F не обращается в нуль на E. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *для всякого измеримого множества $A \subset E$ меры $\lambda|_A \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_A \circ F^{-1}$;*

(ii) *для всякого измеримого множества $A \subset E$ и всякого $\delta > 0$ существует такой компакт $K_\delta \subset A$, что $\lambda(A \backslash K_\delta) \le \delta$ и $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda\bigl(F_j(K_\delta)\bigr) = \lambda\bigl(F(K_\delta)\bigr)$.*

Доказательство. Предположим, что выполнено условие (ii). Достаточно установить, что всякая подпоследовательность $\{G_j\}$ в $\{F_j\}$ содержит подпоследовательность $\{G_{j_k}\}$, для которой наше утверждение верно. Поэтому достаточно найти такую подпоследовательность в $\{F_j\}$. В частности, в силу теоремы Рисса можно считать, что последовательность $\{F_j\}$ сходится вместе с аппроксимативными частными производными почти всюду на A. Кроме того, в процессе доказательства мы будем неоднократно использовать следующее простое наблюдение: достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $A_\varepsilon \subset A$, что $\lambda(A \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ и для A_ε доказываемое утверждение верно.

Заметим теперь, что теорема сводится к случаю, когда отображения F_j и F являются сужениями на A непрерывно дифференцируемых отображений. Действительно, согласно [3, теорема 3.1.16], если $f\colon A \to \mathbf{R}^n$ для почти всех $a \in A$ удовлетворяет условию (1.1), то для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое непрерывно дифференцируемое отображение $g\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, что

$$\lambda\big(x \in A\colon\ f(x) \neq g(x)\big) < \varepsilon.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ эту теорему следует применить к каждому из отображений F_j и числу $\varepsilon 4^{-j}$, а также к F и числу $\varepsilon/2$. Более того, ввиду теоремы Егорова и сделанного выше наблюдения, утверждение сводится к случаю, когда E – компакт, отображения F_j сходятся к F равномерно на E, а их производные сходятся равномерно на E к производной F. По теореме об обратной функции, каждая точка E имеет окрестность, в которой F является диффеоморфизмом. Поэтому E можно разбить на конечное число непересекающихся измеримых подмножеств, обладающих окрестностями, на которых F – диффеоморфизм. Поскольку мера $\lambda|_E$ равна сумме сужений меры Лебега на эти подмножества, то все сводится к случаю, когда F – диффеоморфизм в некоторой окрестности U компакта E. При этом можно считать, что F – тождественное отображение, ибо доказываемое утверждение инвариантно относительно диффеоморфизмов. Пользуясь равномерной сходимостью $\det DF_j$ к 1 на E и переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что для всех $x \in E$ и всех j выполнено неравенство $|\det DF_j(x) - 1| < 2^{-j}$. Согласно [3, следствие 3.2.4], для каждого j существует такое компактное множество $Q_j \subset E$, что F_j инъективно на Q_j и

$$\lambda\big(F_j(E) \backslash F_j(Q_j)\big) < 2^{-j}. \tag{2.2}$$

Пользуясь условием (ii), сколь угодно малым уменьшением меры E можно перейти к ситуации, когда справедливо равенство

$$\lim_{j\to\infty} \lambda\big(F_j(E)\big) = \lambda\big(F(E)\big) = \lambda(E). \tag{2.3}$$

Выделим подпоследовательность F_{j_k} такую, что

$$\lambda\Big(F_{j_k}(E) \bigtriangleup E\Big) < \frac{1}{2^k}. \tag{2.4}$$

Такая подпоследовательность существует ввиду (2.3) и равномерной сходимости F_j к F на E, в силу которой для всякого открытого множества $U \supset E$ с $\lambda(U \backslash E) < 4^{-k}$ найдется номер n_k с $F_j(E) \subset U$ при $j \geq n_k$. Можно считать далее, что $j_k = k$. Согласно [3, теорема 3.2.3], для всякого измеримого множества A, на котором F_j инъективно и $\det DF_j > 0$, справедливо равенство

$$\lambda\big(F_j(A)\big) = \int\limits_A \det DF_j(x)\,dx. \tag{2.5}$$

Тогда из (2.5) с $A = Q_j$, (2.2) и (2.4) получаем

$$\begin{aligned}\lambda(Q_j) &\geq \lambda\big(F_j(Q_j)\big) - 2^{-j}\lambda(E) \geq \lambda\big(F_j(E)\big) - 2^{-j} - 2^{-j}\lambda(E)\\ &\geq \lambda(E) - 2^{1-j} - 2^{-j}\lambda(E) = \lambda(E) - 2^{-j}\big(2 + \lambda(E)\big).\end{aligned}$$

Множества $E_N = \bigcap_{j=N}^{\infty} Q_j$ компактны, отображения F_j при $j \geq N$ инъективны на E_N, причем в силу предыдущей оценки $\lambda(E_N) \to \lambda(E)$, поскольку

$$\lambda(E\backslash E_N) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \lambda(E\backslash Q_j) \leq \big(2 + \lambda(E)\big) \sum_{j=N}^{\infty} 2^{-j}.$$

Поэтому достаточно доказать наше утверждение для каждого E_N. Таким образом, будем считать, что E совпадает с одним из E_N. Переходя очередной раз к подпоследовательности и заменяя E_N его компактной частью близкой меры, приходим как и выше к соотношению (2.4) с $j_k = k$ для нашего нового множества E. Обозначим через S множество всех таких $y \in E$, для которых существует номер $m = m(y)$ с

$$y \in \bigcap_{j\geq m} F_j(E).$$

В силу (2.4) имеем $\lambda(S) = \lambda(E)$, ибо

$$\lambda\Big(E \triangle \bigcap_{j=m}^{\infty} F_j(E)\Big) \leq \sum_{j=m}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-m+1}.$$

Для завершения доказательства остается показать, что плотности ϱ_j индуцированных мер $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся почти всюду на E к плотности $\varrho = I_E$ меры $\lambda|_E \circ F^{-1}$ (см. [10, теорема 3 §10 гл. II]). Заметим, что

$$\varrho_j(y) = \frac{I_{F_j(E)}(y)}{\det DF_j\big(F_j^{-1}(y)\big)}.$$

Действительно, ввиду взаимной однозначности F_j на E по формуле замены переменных (см. [3, теорема 3.2.5]) для всякой ограниченной измеримой функции φ имеем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(y)\,\lambda|_E \circ F_j^{-1}(dy) = \int\limits_E \varphi\big(F_j(x)\big)\,dx = \int\limits_{F_j(E)} \varphi(y)\frac{1}{\det DF_j\big(F_j^{-1}(y)\big)}\,dy.$$

Пусть $y \in S$. Тогда $F_j^{-1}(y) \to F^{-1}(y) = y$. Действительно, в противном случае некоторая подпоследовательность $F_{j_k}^{-1}(y)$ последовательности $F_j^{-1}(y)$ из компакта E сходится к точке $x \neq y$, откуда в силу равномерной сходимости F_j к F

получаем $y = F_{j_k}\big(F_{j_k}^{-1}(y)\big) \to F(x)$ вопреки взаимной однозначности F. Далее, в силу равномерной сходимости производных получаем

$$\det DF_j\big(F_j^{-1}(y)\big) \to \det DF\big(F^{-1}(y)\big) = 1.$$

Если $y \notin E$, то для всех достаточно больших j имеем $I_{F_j(E)}(y) = 0$, откуда получаем $\varrho_j(y) \to 0$.

Пусть теперь выполнено условие (i). Из рассуждений выше явствует, что общий случай сводится к случаю, когда $A \subset E$ компактно, F – непрерывно дифференцируемое отображение в окрестности A, F_j непрерывны на A и $F_j \to F$ равномерно на A. Пусть $\varepsilon > 0$ и U – такая окрестность $F(A)$, что $\lambda\big(U \backslash F(A)\big) < \varepsilon$. Тогда для всех достаточно больших j справедливо соотношение $F_j(A) \subset U$, откуда $\lambda\big(F_j(A) \backslash F(A)\big) < \varepsilon$. С другой стороны, $\lambda\big(F(A) \backslash F_j(A)\big) \to 0$ при $j \to \infty$. Действительно, множество $X_j = F(A) \backslash F_j(A)$ имеет меру нуль относительно $\lambda|_A \circ F_j^{-1}$, а его мера относительно $\lambda|_A \circ F^{-1}$ оценивается снизу через $c\lambda(X_j)$, ибо из доказательства первой части теоремы явствует, что плотность меры $\lambda|_A \circ F^{-1}$ на $F(A)$ равномерно отделена от нуля. $\square$

Отметим, что при выполнении условий доказанной теоремы мера $\lambda|_E \circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна (это видно из доказательства), а потому сингулярные компоненты мер $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к нулю.

Напомним, что если не желать иметь дело с аппроксимативными производными, то в формулировке доказанной теоремы их можно заменить на более привычные обычные частные производные (хотя при этом получится несколько более слабое утверждение).

Следствие 2.2. *Предположим, что в ситуации теоремы* 2.1 *выполнено любое из равносильных условий* (i) *или* (ii)*. Пусть μ – абсолютно непрерывная вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$. Тогда меры $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\mu|_E \circ F^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $\mu = \varrho^\mu\, dx$. Из доказательства теоремы 2.1 с учетом теоремы Лузина видно, что достаточно рассмотреть случай, когда отображения F_j и F непрерывно дифференцируемы, E – компакт, на котором функция ϱ^μ непрерывна, F_j сходятся равномерно к F, а их производные сходятся равномерно к DF, причем F можно считать тождественным отображением в окрестности E. Более того, в силу условия (ii) можно считать, что

$$\lim_{j\to\infty} \lambda\big(F_j(E)\big) = \lambda\big(F(E)\big).$$

Согласно [3, теорема 3.2.3] справедливо равенство

$$\int\limits_E DF_j(x)\, dx = \int\limits_{F_j(E)} N_j(E, y)\, dy,$$

где $N_j(E, y)$ – мощность множества $F_j^{-1}(y) \cap E$. Так как $F(x) = x$ на E, то из последних двух соотношений получаем, что $\lambda\big(y \in F_j(E)\colon\ N_j(y, E) > 1\big) \to 0$.

Остается заметить, что почти во всех точках y, где $N_j(E,y)=1$, плотность меры $\mu|_E\circ F_j^{-1}$ равна $\varrho^\mu\bigl(F_j^{-1}(y)\bigr)\varrho_j(y)$, откуда с помощью тех же рассуждений, что и в теореме, получаем доказываемое. $\square$

Отметим, что равносильные условия (i) и (ii) не вытекают автоматически из остальных условий доказанной теоремы. Рассмотрим следующий простой пример. Пусть $E\subset[0,1]$ – множество канторовского типа (нигде не плотный компакт) положительной меры Лебега и $F(x)=x$. Для каждого натурального числа k разделим $[0,1]$ на промежутки $I_{k,j}$ точками вида j/k. Внутри каждого промежутка $I_{k,j}$, пересекающего E по множеству положительной меры, возьмем два непересекающихся отрезка $\Delta^i_{k,j}=[a^i_{k,j},b^i_{k,j}]$, $i=1,2$, таким образом, что

$$\lambda\Bigl(E\cap\Delta^1_{k,j}\Bigr)=\lambda\Bigl(E\cap\Delta^2_{k,j}\Bigr)\geq\lambda\Bigl(E\cap I_{k,j}\Bigr)/3.$$

При этом можно считать, что к $\Delta^2_{k,j}$ слева и справа примыкают некоторые интервалы $L_{k,j}$ и $R_{k,j}$ из дополнения к E. Теперь функцию F_k определим так: $F_k(x)=x$, если $x\notin L_{k,j}\cup\Delta^2_{k,j}\cup R_{k,j}$, $F_k(x)=x-c_{k,j}$, если $x\in\Delta^2_{k,j}$, где $c_{k,j}=b^2_{k,j}-b^1_{k,j}$, а на $L_{k,j}$ и $R_{k,j}$ доопределим F_k до гладкой функции на $[0,1]$. При этом $F_k'=1$ на E и $F_k\to F$ равномерно на E (как видно из построения, можно добиться и равномерной сходимости на всем отрезке $[0,1]$), но образы меры Лебега на E относительно F_k не сходятся к образу меры Лебега на E относительно F. Это очевидно из того, что $\lambda\bigl(F_k(E)\triangle E\bigr)\geq\lambda(E)/3$.

Приведем теперь условия, достаточные для выполнения (ii). Эти условия, хотя и не являются необходимыми, однако для практической проверки могут оказаться более полезными.

Следствие 2.3. *Пусть непрерывные отображения $F_j\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ сходятся равномерно на компактах к непрерывному отображению $F\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, причем F_j и F обладают* (N)*-свойством Лузина и почти всюду имеют регулярные аппроксимативные производные DF_j и DF, такие, что DF_j сходятся по мере на некотором множестве E конечной меры Лебега к DF. Предположим, что $\det DF\neq0$ на E и что на каждом компакте последовательность $\{\det DF_j\}$ равномерно интегрируема. Тогда меры $\lambda|_E\circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_E\circ F^{-1}$. Кроме того, если μ – абсолютно непрерывная вероятностная мера на $\mathbf{R}^n$, то меры $\mu|_E\circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\mu|_E\circ F^{-1}$.*

Доказательство. Из равномерной интегрируемости функций $\{\det DF_j\}$ на компактах и оценки (см. [8, гл. 5, §1.2, теорема 1.4])

$$\lambda\bigl(F_j(A)\bigr)\leq\int\limits_A|\det DF_j(x)|\,dx$$

вытекает, что $\sup\limits_j\lambda\bigl(F_j(A)\bigr)\to0$ при $\lambda(A)\to0$, где A – ограниченное измеримое множество. Проверим, что $\lim\limits_{j\to\infty}\lambda\bigl(F_j(K)\bigr)=\lambda\bigl(F(K)\bigr)$ для всякого компакта

$K \subset E$. Из доказательства предыдущей теоремы видно, что достаточно проверить наше утверждение для таких компактов K, на которых F является сужением диффеоморфизма в некоторой окрестности K. Поэтому, как и выше, можно считать, что F на K совпадает с тождественным отображением. Кроме того, можно считать, что отображения F_j имеют регулярные аппроксимативные производные в каждой точке K. Пусть $\varepsilon > 0$ и $4\varepsilon < \lambda(K)$. Ясно, что для всех достаточно больших j справедлива оценка $\lambda\big(F_j(K)\big) \leq \lambda\big(F(K)\big) + \varepsilon$. Предположим, что $\lambda\big(F_j(K)\big) \leq \lambda\big(F(K)\big) - \varepsilon$ для всех j. Существует такое связное множество Q, являющееся конечным объединением замкнутых кубов, что $K \subset Q$ и $\lambda\big(F_j(Q)\big) \leq \lambda\big(F_j(K)\big) + \varepsilon/8$ для всех F_j, а также для F вместо F_j. Пусть ∂Q – граница Q. Тогда $F(\partial Q)$ имеет меру нуль. Возьмем достаточно малую замкнутую окрестность G компактного множества $F(\partial Q)$ так, что $\lambda(G) < \varepsilon/8$ и $F_j(\partial Q) \subset G$ для всех достаточно больших j. Можно взять G в виде конечного объединения замкнутых кубов. Тогда $\mathbf{R}^n \backslash G$ имеет конечное число компонент связности $W_1, \ldots, W_m$, в которых сужения F_j и F на Q имеют постоянные степени отображения $\deg_Q F_j$ и $\deg_Q F$ (см. [8, гл. 5, §1.5]), причем в силу равномерной сходимости F_j к F при всех достаточно больших j имеем

$$\deg_Q F_j(y) = \deg_Q F(y) = d_i \qquad \text{для всех } y \in W_i.$$

Если $y \in Y := F(K) \backslash \Big(G \cup F(Q \backslash K)\Big)$, то $\deg_Q F(y) = 1$. Это вытекает из того, что для всякой такой точки y существует шар $K(y,r)$ с $\deg_{K(y,r)} F(y) = 1$ (см. [9, V.2.2, p. 329]). Следовательно $\deg_Q F_j(y) = 1$ при всех $y \in Y$ и всех достаточно больших j. Поскольку $|\deg_Q F_j(y)|$ не превосходит мощности $F_j^{-1}(y) \cap Q$ (см. [8, гл. 5, §1.5, замечание]), то $Y \subset F_j(Q)$, откуда

$$\lambda\big(F_j(Q)\big) \geq \lambda\big(F(K)\big) - \lambda(G) - \lambda\big(F(Q \backslash K)\big) \geq \lambda\big(F(K)\big) - \varepsilon/4$$

– противоречие. □

Замечание 2.4. Из доказательства предыдущего следствия вытекает, что

$$\lim_{j \to \infty} \lambda\big(F_j(A) \bigtriangleup F(A)\big) = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{j \to \infty} \lambda\big(F_j(A)\big) = \lambda\big(F(A)\big)$$

для всякого измеримого множества $A \subset E$.

Как уже отмечалось, достаточным условием существования регулярных аппроксимативных производных почти всюду является принадлежность к классу Соболева $W^{p,1}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ с $p > n - 1$. Однако это условие не гарантирует существования непрерывной модификации, для чего надо иметь оценку $p > n$. В последнем случае, как мы сейчас увидим, формулировка основного результата упрощается.

В доказательстве еще одного следствия нам понадобится следующий технический результат.

Лемма 2.5. *Пусть* $f \in W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$*, где* $U \subset \mathbf{R}^n$ *– единичный шар и* $p > n$*. Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует липшицево отображение* $\psi\colon U \to \mathbf{R}^n$*, такое, что*

1) $\lambda\big(x \in U |\, f(x) \neq \psi(x)\big) \leq \varepsilon$;
2) $\operatorname*{esssup}_{x\in U} \|f(x) - \psi(x)\| \leq \varepsilon$;
3) $\int\limits_U \|Df(x) - D\psi(x)\|^p \, dx \leq \varepsilon.$

Доказательство. Согласно [3, теорема 3.1.16], существует такое отображение $g \in C^1(U, \mathbf{R}^n)$, что

$$\lambda\big(x \in U |\, g(x) \neq f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем такое $\delta \in (0, \varepsilon)$, что

$$\int\limits_{\|f-g\|<\delta} \|Df(x) - Dg(x)\|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем последовательность $\{f_j\} \subset C^1(U, \mathbf{R}^n)$, сходящуюся к f в $W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$. Из теоремы вложения Соболева (см. [8, гл. 2, §4.3, теорема 4.2]) следует сходимость $\{f_j\}$ к f в $L^\infty(U, \mathbf{R}^n)$. Выберем такое j, что

$$\operatorname*{esssup}_{x\in U} \|f_j(x) - f(x)\| < \frac{\delta}{2}, \qquad \int\limits_U \|Df_j(x) - Df(x)\|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Определим отображение $\beta_\alpha\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$\beta_\alpha(x) = \begin{cases} x, & \|x\| < \alpha \\ \frac{\alpha x}{\|x\|}, & \|x\| \geq \alpha. \end{cases}$$

Тогда отображение

$$\psi(x) = \beta_{\delta/2}\big(g(x) - f_j(x)\big) + f_j(x)$$

обладает требуемыми свойствами. Условия 1) и 2) очевидно выполняются, а для проверки условия 3) заметим, что $\{\|g - f_j\| < \delta/2\} \subset \{\|f - g\| < \delta\}$ и

$$D\psi = \begin{cases} Dg, & \|f_j - g\| < \frac{\delta}{2} \\ Df_j, & \|f_n - g\| \geq \frac{\delta}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_U \|Df(x) - D\psi(x)\|^p \, dx \leq \int\limits_{\|f_j-g\|<\delta/2} \|Df(x) - Dg(x)\|^p \, dx$$

$$+ \int\limits_U \|Df(x) - Df_j(x)\|^p \, dx < \int\limits_{\|f-g\|<\delta} \|Df(x) - Dg(x)\|^p \, dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие 2.6. *Пусть $F_j, F \in W^{p,1}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, где $p > n$, причем отображения F_j сходятся к F по соболевской норме $\|\cdot\|_{p,1}$ на каждом шаре. Предположим, что $E \subset \{\det F \neq 0\}$ – измеримое множество. Тогда меры $\lambda|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_E \circ F^{-1}$. Тоже самое верно, если вместо сходимости по норме $\|\cdot\|_{p,1}$ на каждом шаре потребовать ограниченность $\{F_j\}$ в $W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$ для каждого шара U и сходимость F_j к F почти всюду.*

Доказательство. Предположим сначала, что отображения F_j и F обладают свойством Лузина (N). В силу теоремы вложения Соболева, отображения F_j имеют непрерывные модификации, которые сходятся к непрерывной модификации F равномерно на компактах. Таким образом, применимо предыдущее следствие. Перейдем к общему случаю. Пусть последовательность отображений $F_j \in W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$, где $p > n$, сходится к F_0 в $W^{p,1}(U, \mathbf{R}^n)$, причем $\Omega \subset \{x \in U | \det Df_0(x) \neq 0\}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем отображения $\{\psi_j\}$, $j \geq 0$, согласно лемме 2.5, применяемой к $f = F_0$ для каждого $\varepsilon_j = \varepsilon 2^{-j}$, $j \geq 0$. Положим $c_j = \|F_j - F_0\|_{L^\infty}$. Отметим, что $\lim\limits_{j\to\infty} c_j = 0$ по теореме вложения Соболева. Отображения

$$G_j = \beta_{c_j}(\psi_j - \psi_0) + \psi_0,$$

где β_α задано в доказательстве леммы 2.5, являются липшицевыми и равномерно сходятся к $G_0 = \psi_0$ при $j \to \infty$, а последовательность $\{\|DG_j\|^p\}$ равномерно интегрируема. Следовательно, полагая $A = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty}(F_j \neq G_j)$, получаем $\lambda(A) < 2\varepsilon$, причем меры $\lambda|_{\Omega\setminus A} \circ F_j^{-1} = \lambda|_{\Omega\setminus A} \circ G_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_{\Omega\setminus A} \circ G_0^{-1} = \lambda|_{\Omega\setminus A} \circ F_0^{-1}$, поскольку липшицевы отображения удовлетворяют условию Лузина (N). В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что меры $\lambda|_\Omega \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\lambda|_\Omega \circ F_0^{-1}$. В случае локальной ограниченности $\{F_j\}$ по норме $\|\cdot\|_{p,1}$ и сходимости почти всюду к F применимы те же рассуждения, поскольку если последовательность $\{\varphi_j\}$ ограничена в $L^p(U)$, то последовательность $\{|\varphi_j|^r\}$ равномерно интегрируема на U при $r < p$. $\square$

3.

Напомним, что борелевская мера μ (возможно, знакопеременная) на локально выпуклом пространстве X называется радоновской, если для всякого борелевского множества $B \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K_\varepsilon \subset B$, что $|\mu|(B\setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, где $|\mu|$ – полная вариация μ. Напомним также (см., например, [11, §21.2] или [12, §1]), что если X является прямой суммой конечномерного линейного подпространства Z и замкнутого линейного подпространства Y, то существует система мер μ^y, $y \in Y$, называемых условными мерами и для каждого борелевского множества B удовлетворяющих равенству

$$\mu(B) = \int\limits_Y \mu^y(B)\, \nu(dy),$$

где ν – образ $|\mu|$ относительно естественной проекции X на Y.

Будем называть измеримую функцию ϱ на $\mathbf{R}^n$ локально строго положительной, если $\operatorname*{essinf}\limits_U \varrho > 0$ для всякого шара U.

Теорема 3.1. *Пусть X – локально выпуклое пространство, Z – конечномерное линейное подпространство в X, порожденное векторами $e_1, \dots, e_n$, а Y – замкнутое линейное подпространство, дополняющее Z до X. Предположим, что μ – такая вероятностная радоновская мера на X, что условные меры μ^y на подпространствах $Z + y$, $y \in Y$, абсолютно непрерывны относительно естественных лебеговских мер на Z, порождаемых каким-нибудь линейным изоморфизмом между Z и $\mathbf{R}^n$, причем соответствующие плотности либо локально строго положительны, либо непрерывны. Пусть F_j, $F\colon\ X \to \mathbf{R}^n$ – μ-измеримые отображения, которые для μ-почти всех x абсолютно непрерывны на прямых $x + \mathbf{R}^1 e_i$, $i = 1, \dots, n$, причем $F_j \to F$ и $\partial_{e_i} F_j \to \partial_{e_i} F$ в $L^p(\mu, \mathbf{R}^n)$, где $p > n$. Если E – такое μ-измеримое множество, что $\det\Bigl((\partial_{e_i} F, \partial_{e_k} F)\Bigr)_{i,k=1}^n \neq 0$ на E, то меры $\mu|_E \circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\mu|_E \circ F^{-1}$.*

Доказательство. Как отмечено в доказательстве теоремы 2.1, достаточно проверить наше утверждение для некоторой подпоследовательности в $\{F_j\}$. Поэтому можно считать, что

$$\|F_j - F\|_{L^p(\mu, \mathbf{R}^n)} + \|\partial_{e_i} F_j - \partial_{e_i} F\|_{L^p(\mu, \mathbf{R}^n)} \le 2^{-j}$$

при всех $j \ge 1$ и $i = 1, \dots, n$. Пусть ν – образ μ при естественной проекции X на Y. Из теоремы Фубини и интегрируемости рядов

$$S_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigl[\|\partial_{e_i} F_j(x) - \partial_{e_i} F(x)\|^p + \|F_j(x) - F(x)\|^p\Bigr], \quad i = 1, \dots, n,$$

вытекает, что для ν-почти всякого y ряды

$$Z_i(y, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigl[\|\partial_{e_i} F_j(y+u) - \partial_{e_i} F(y+u)\|^p + \|F_j(y+u) - F(y+u)\|^p\Bigr], \quad i = 1, \dots, n,$$

интегрируемы по u относительно меры μ^y. Для каждого такого y получаем сходимость последовательности $\{F_j(y + \cdot\,)\}$ к $F(y + \cdot\,)$ и последовательности $\{\partial_{e_i} F_j(y + \cdot\,)\}$ к $\{\partial_{e_i} F(y + \cdot\,)\}$ в $L^p(\mu^y, \mathbf{R}^n)$. В случае строгой локальной положительности плотности ϱ^y меры μ^y это дает сходимость в $L^p(U, \mathbf{R}^n)$ для каждого шара $U \subset Z$, а в случае непрерывности ϱ^y то же самое имеет место для всякого шара, замыкание которого содержится в множестве $\{\varrho^y \neq 0\}$. Поэтому применимо следствие 2.6. Остается заметить, что

$$\big\|\mu|_E\circ F_j^{-1}-\mu|_E\circ F^{-1}\big\|\le\int\limits_Y\big\|\mu^y|_E\circ F_j^{-1}-\mu^y|_E\circ F^{-1}\big\|\,\nu(dy)\to 0$$

в силу теоремы Лебега. □

Отметим, что в ситуации доказанной теоремы мера $\mu|_E\circ F^{-1}$ абсолютно непрерывна (это очевидно из доказательства; см. также [12], [13]).

Напомним, что радоновская мера μ на локально выпуклом пространстве X называется непрерывной по направлению вектора $h\in X$, если для каждого борелевского множества B функция $t\mapsto\mu(B+th)$ непрерывна. Если $X=\mathbf{R}^n$, то мера μ непрерывна по n независимым направлениям в точности тогда, когда она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Непрерывность μ по направлениям векторов из конечномерного линейного подпространства Z равносильно существованию абсолютно непрерывных условных мер на подпространствах, параллельных Z. Более подробную информацию можно найти в [12]. Логарифмическая производная меры μ по направлению вектора h – это такая μ-интегрируемая функция β_h^μ, что формула интегрирования по частям

$$\int\limits_X\partial_h\varphi(x)\,\mu(dx)=-\int\limits_X\varphi(x)\beta_h^\mu(x)\,\mu(dx)$$

справедлива для всякой функции φ вида $\varphi(x)=\psi\big(l_1(x),\ldots,l_n(x)\big)$, где $\psi\in C_b^\infty(\mathbf{R}^n)$ и l_i – непрерывные линейные функционалы на X. Существование логарифмической производной по направлению h равносильно дифференцируемости функций $t\mapsto\mu(A+th)$ для всех борелевских множеств A; при этом отображение $d_h\mu\colon\ A\mapsto\frac{d}{dt}\mu(A+th)|_{t=0}$ является счетно-аддитивной знакопеременной мерой, которая абсолютно непрерывна относительно μ, а плотность Радона–Никодима $d_h\mu$ относительно μ совпадает с логарифмической производной по направлению h (см. [12] или [14]). Достаточным условием существования непрерывных строго положительных плотностей условных мер μ^y является существование логарифмических производных $\beta_{e_i}^\mu$, $i=1,\ldots,n$, и интегрируемость функций $\exp\big(\varepsilon|\beta_{e_i}^\mu|\big)$ при некотором $\varepsilon>0$ (см. [15, предложение 1]).

По поводу используемых в следующем утверждении понятий и обозначений из теории гауссовских мер см. [7].

Следствие 3.2. *Пусть γ – радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, имеющая подпространство Камерона–Мартина H, F_j, $F\in W^{p,1}(\gamma,\mathbf{R}^n)$, где $p>n$, причем $F_j\to F$ по норме $W^{p,1}(\gamma,\mathbf{R}^n)$. Тогда для всякого γ-измеримого множества $E\subset\Big\{x\colon\ D_HF(x)(H)=\mathbf{R}^n\Big\}$ меры $\gamma|_E\circ F_j^{-1}$ сходятся по вариации к мере $\gamma|_E\circ F^{-1}$.*

Доказательство. Множество E содержится в объединении множеств

$$E_{k_1,\ldots,k_n}=\big\{x\in E\colon\ \det(\partial_{e_{k_i}}F,\partial_{e_{k_j}}F)\ne 0\big\},$$

где $\{e_i\}$ – фиксированный ортонормированный базис в H. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для каждого $E_{k_1,\ldots,k_n}$. Остается воспользоваться существованием модификаций отображений F_j и F, абсолютно непрерывных на прямых $x+\mathbf{R}^1 e_i$, $i=1,\ldots,n$ (см. [7, гл. 5]), и применить предыдущую теорему. $\square$

Отметим, что теорема 3.1 применима к гиббсовским мерам (см. [16]), обладающим абсолютно непрерывными условными распределениями с локально строго положительными плотностями на конечномерных подпространствах.

Авторы признательны П.В. Парамонову за полезные обсуждения. Работа написана при частичной поддержке грантов РФФИ 96–15–96865, РФФИ 97–01–00932 и DFG 436 RUS 113/343/0(R).

[1] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А., Смородина Н.В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов, М.: Физматлит, 1995.

[2] Давыдов Ю.А. О сходимости по вариации образов одномерных мер, Зап. научн. семин. ПОМИ, 1992, т. 194, Проблемы теории вероятностных распределений, XII, с. 48–58.

[3] Федерер Г. Геометрическая теория меры, М.: Наука, 1987.

[4] Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением, Сиб. матем. журн., 1967, т. 8, n 3, с. 629–658.

[5] Ziemer W. Weakly differentiable functions, Springer–Verlag, New York – Berlin, 1989.

[6] Ellis H.W. Darboux properties and applications to non-convergent integrals, Canad. J. Math., 1951, v. 3, p. 471–485.

[7] Богачев В.И. Гауссовские меры, М.: Физматлит, 1997.

[8] Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения, М.: Наука, 1983.

[9] Rado T., Reichelderfer P.V. Continuous transformations in analysis, Berlin, Springer–Verlag, 1955.

[10] Ширяев А.Н. Вероятность, М.: Наука, 1989.

[11] Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения, М.: Наука, 1974.

[12] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus, J. Math. Sci., 1997, v. 87, n 5, p. 3577–3731.

[13] Bouleau N., Hirsch F. Dirichlet forms and analysis on Wiener space, Walter de Gruyter, Berlin – New–York, 1991.

[14] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах, М.: Наука, 1983.

[15] Богачев В.И., Майер-Вольф Э. Потоки, порожденные векторными полями соболевского типа, и соответствующие преобразования вероятностных мер, Докл. РАН, 1998, т. 358, n 4, с. 442–446.

[16] Георги Х.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы, М.: Мир, 1992.