0cm
УДК 519.21

А.Ю.Пилипенко (Киевский университет)

О существовании и единственности решения линейного стохастического дифференциального уравнения по логарифмическому процессу[1]

Conditions for existence and uniqueness of linear stochastic differential equation with respect to the logarythmic process are studied. Partial differential equations for conditinal expectation of solution are obtained.

Розглянуте питання про існування і єдиність розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння по логарифмічному процесу. Для умовного математичного сподівання розв'язка по лінійній скінченновимірній σ-алгебрі одержано диференціальне рівняння в часткових похідних.

Основные обозначения и определения.

Введем следующие обозначения: $X = C_0([0,1]) = \{x \in C_{([0,1])} : x(0) = 0\}$ – банахово пространство с равномерной нормой; $H = L_2([0,1])$ – гильбертово пространство с обычным скалярным произведением; $i : H \to X, i : f \mapsto \int_0^{\cdot} f(s)ds$; $X^* \overset{i^*}{\subset} H^* = H \overset{i}{\subset} X$ – каноническое вложение; если не будет возникать недоразумений,то элементы $h \in X^*, i^*h \in H$ и $ii^*h \in X$ отождествляются; $< \cdot, \cdot >$ – спаривание элементов X^* и X или H и H; μ – мера на X, дифференцируемая вдоль H[2], λ – логарифмическая производная.

Далее предполагается, что λ удовлетворяет условию

A: для любых $h \in H, p \geq 1 :< \lambda, h >\in L_p(X, \mu)$.

S – пространство функций вида $f(\cdot) = F(< h_1, \cdot >, \ldots, < h_n, \cdot >)$, где $n \in \mathbb{N}, h_k \in X^*, F \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, ограниченных со своей производной

$$\nabla : S \subset L_p(X, \mu) \to L_p(X, \mu, H),$$

$$\nabla f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_k} h_k.$$

[1]Частично поддержана Международной Соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP) (грант N PSU061084).

При выполнении условия A оператор ∇ допускает замыкание D с областью определения $W_p^1 = W_p^1(X,\mu)$. Назовем оператор D стохастической производной, а сопряженный к нему оператор $I = D^* : \mathcal{D}_q = \mathcal{D}_q(X,\mu) \subset L_q(X,\mu,H) \to L_q(X,\mu), \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ – расширенным стохастическим интегралом.

Отметим, что для любого $h \in X^*$ h принадлежит $\mathcal{D}_q$, причем

$$Ih = -<\lambda, h> .$$

Положим $m(t) = I(\chi_{[0,t]})$.

Интеграл Ix, по аналогии с гауссовским случаем, будем обозначать $\int_0^1 x(t)dm(t)$. Под $\int_0^t x(s)dm(s)$ понимается $\int_0^1 \chi_{[0,t]}(s)x(s)dm(s)$.

Примеры. 1. Пусть μ_0 – распределение винеровского процесса $w(t)$ в $C_0([0,1])$.

Тогда логарифмическая производная λ_0 меры μ_0 в направлении $h \in H$ равна

$$<\lambda_0, h>= -\int_0^1 h(t)dw(t),$$
$$m(t) = w(t).$$

Оператор I совпадает с расширенным стохастическим интегралом Скорохода.

2. $\mu(dx) = e^{\frac{w^2(1)}{2}}\sqrt{2}\mu_0(dx)$, μ_0 – распределение винеровского процесса $w(t)$.

Тогда $m(t) = w(t) - \sqrt{2}w(1)t$,

$$\int_0^1 x(t)dm(t) = \int_0^1 x(t)dw(t) - \sqrt{2}w(1)\int_0^1 x(t)dt, \quad x \in \mathcal{D}_q(X,\mu)$$

($\int_0^1 x(t)dw(t)$ – интеграл Скорохода).

Пусть $\mathcal{E}(s,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} d\mathcal{E}(s,t) = \mathcal{E}(s,t)dm(t), t \geq s, \\ \mathcal{E}(s,s) = 1. \end{cases}$$

Как показано в [2]:

$$\mathcal{E}(s,t) = \exp(m(t) - m(s) - \frac{1}{2}(t-s) - \frac{1}{\sqrt{2}}(t-s)^2).$$

Отметим, что в данной ситуации стохастическая экспонента не имеет свойства мультипликативности, т.е. для $s < \tau < t$ равенство

$$\mathcal{E}(s,t) = \mathcal{E}(s,\tau)\cdot\mathcal{E}(\tau,t)$$

не выполняется.

Как показывает пример 2, процесс $m(t)$ не всегда является мартингалом, поэтому говорить о неупреждаемости x_0 не имеет смысла, в отличие от ситуации интеграла Ито по квадратически интегрируемому мартингалу.

Вопросы существования и единственности уравнения (1) рассматривались в работах [2,3] в случае, когда логарифмическая производная является аналитической функцией. Винеровский случай рассмотрен в [4].

1.Фильтрация решения линейного стохастического дифференциального уравнения. Пусть $\{h_n|n \geq 1\} \subset X^*$ – некоторый ортонормированный базис в H. Обозначим $\eta_k =< h_k, \cdot >, \sigma_n = \sigma(\eta_1, \ldots, \eta_n), E^{\sigma_n} = E(\cdot|\sigma_n)$ – условное математическое ожидание.

Предположим, что выполняется следующее условие

B. Для любого $m \geq 1$ распределение $\eta_1, \ldots, \eta_m$ в $\mathbb{R}^m$ имеет непрерывную и положительную плотность.

Если $x(t) \in L_p(X, \mu, H)$, то существует борелевская функция $F_n : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

$$E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n) = F_n(t, \eta).$$

Теорема 1. Пусть $x(t), t \in [0,1]$ – решение (1)

$$\begin{cases} dx(t) = a(t)x(t)dt + b(t)x(t)dm(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a, b \in C([0,1])$ – неслучайные функции, x_0 – случайная величина,

такое, что

$$\exists p_1 > 1 \forall t \in [0,1] \quad x(\cdot)b(\cdot)\chi_{[0,t]}(\cdot) \in \mathcal{D}_{p_1},$$

$$\exists p_2 > 1 \forall t \in [0,1] \quad x(t) \in W^1_{p_2}, \quad \int_0^1 \|x(t)\|^{p_2}_{W^1_{p_2}} dt < +\infty$$

и выполняются условия **A** и**B**.

Тогда условное математическое ожидание $E^{\sigma_n} x(t) = F_n(t, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$F_n(t, \eta) = F_{0,n}(\eta) - \sum_{k=1}^{n} \int_0^t b(s)h_k(s)\frac{\partial F}{\partial x_k}(s, \eta)ds +$$

$$+ \int_0^t (a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)h_k(s)\lambda_k^{(n)}(\eta))F(s, \eta)ds, \tag{2}$$

где $\lambda_k^{(n)}(\eta) = E^{\sigma_n} < \lambda, h_k >, F_{0,n}(\eta) = E^{\sigma_n} x(t), \frac{\partial}{\partial x_k}$ – производные Соболева, построенные в пространстве $\mathbb{R}^n$ с мерой $\mu \circ \eta^{-1}$. Равенство (1) выполнено для всех $t \in [0,1]$ μ-п.н.

Для доказательства понадобятся следующие вспомогательные утверждения [5].

Лемма 1. a) Если $G \in \mathcal{D}_\alpha,\ \alpha > 1$, то

$$E^{\sigma_n} IG = I(E^{\sigma_n}\Pi_n G) + < -E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda + \Pi_n\lambda, \Pi_n E^{\sigma_n} G >, \tag{3}$$

причем $E^{\sigma_n}\Pi_n G \in \mathcal{D}_{\alpha-} = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{D}_\beta$.

Здесь Π_n – ортопроектор в H на $\mathcal{L}(h_1,\ldots,h_n)$.

b) Если $F \in W_\alpha^1,\ \alpha > 1$, то $E^{\sigma_n} F \in W_{\alpha-}^1$,

$$DE^{\sigma_n}F = E^{\sigma_n}\Pi_n DF + E^{\sigma_n} F E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda - E^{\sigma_n}(F\Pi_n\lambda).$$

Лемма 2. a) Если $F \in W_{p_1}^1, G \in \mathcal{D}_{p_2}, \frac{p_1p_2}{p_1+p_2} \geq 1$, то $FG \in \mathcal{D}_{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}$ и

$$I(FG) = FI(G) - < DF, G >;$$

b) Если $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ принадлежит пространству Соболева, $W_{p_1}^1(\mathbb{R}^n, \mu \circ F^{-1})$, где $F = (F_1,\ldots,F_n)$, $F_k \in W_{p_1}^1(X,\mu)$, $\frac{p_1p_2}{p_1+p_2} \geq 1$, то $\varphi(F_1,\ldots,F_n) \in W^1_{\frac{p_1p_2}{p_1+p_2}}(X,\mu)$ и

$$D(\varphi \circ F) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(F) DF_k.$$

Замечание. Используя лемму 1b), нетрудно показать, что $\varphi \circ \eta \in W_{p_1}^1(X,\mu), p > 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in W_p^1(\mathbb{R}^n, \mu \circ \eta^{-1})$.

Доказательство теоремы 1. Применяя (3) к уравнению (1), получаем

$$E^{\sigma_n}x(t) = F_n(t,\eta) = F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)F(s,\eta)ds +$$

$$+ \int_0^1 \Pi_n(\chi_{[0,t]}(s)b(s)F_n(s,\eta))dm(s) +$$

$$+ < \Pi_n\lambda - E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda,\ \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)b(\cdot)F(\cdot,\eta)) >=$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)F_n(s,\eta)ds + \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t b(z)F_n(z,\eta)h_k(z)dz\right) h_k(s)dm(s) +$$

$$+ < \Pi_n\lambda - E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda, \sum_{k=1}^n \left(\int_0^t b(z)h_k(z)F_n(z,\eta)dz\right) h_k > . \tag{4}$$

Воспользуемся леммой 2, замечанием к ней и тем, что $< \lambda, h_k >= -Ih_k$.

Тогда

$$F_n(t,\eta) = F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)F_n(s,\eta)ds - \sum_{k=1}^{n} (\int_0^t b(z)F_n(z,\eta)h_k(z)dz) < \lambda, h_k > -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} < D\left(\int_0^t h_k(z)b(z)F_n(z,\eta)dz\right), h_k > +$$

$$+ < \Pi_n\lambda - E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)b(\cdot)F_n(\cdot,\eta)) >=$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t a(s)F_n(s,\eta)ds - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^t h_k(z)b(z)\frac{\partial F_n}{\partial x_j}(z,\eta)dz < h_j, h_k > -$$

$$- < E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}(\cdot)b(\cdot)F_n(\cdot,\eta)) >=$$

$$= F_{0,n}(\eta) + \int_0^t (a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)h_k(s)\lambda_k^{(n)}(\eta))F_n(s,\eta)ds -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\int_0^t b(s)h_k(s)\frac{\partial F_n}{\partial x_k}(s,\eta)ds, \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1 доказана.

2. Единственность решения линейного стохастического дифференциального уравнения. Пусть $x(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям теоремы 1. Тогда $x(t)$ можно приблизить условными математическими ожиданиями $E^{\sigma_n}x(t) = F_n(t,\eta_1,\ldots,\eta_n)$, для которых выполняется (2):

Запишем дифференциальное уравнение с частными производными, соответствующее (2).

$$\begin{cases} \frac{\partial F_n}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n} b(t)h_k(t)\frac{\partial F_n}{\partial x_k} + (a(t) - \sum_{k=1}^{n} b(t)h_k(t)\lambda_k^{(n)}(x))F_n, \\ F_n(0,x) = F_{0,n}(x), \end{cases} \qquad (6)$$

где $t \in [0,1], x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Если функции $F_n, F_{0,n}, \lambda_k^{(n)}$ гладкие, то $\frac{\partial}{\partial x_k}$ – обычная частная производная и (6) имеет единственное решение, которое можно получить используя метод характеристик [6]. Таким образом, для доказательства единственности решения (1) достаточно гарантировать гладкость функций $F_{0,n}, F_n, \lambda_k^{(n)}$.

Обозначим через M совокупность процессов $x(t), t\in[0,1]$, удовлетворяющих условиям

$$\forall p>1\ \forall t\in[0,1]\ x(t)\in W_p^3\ \int_0^1 \|x(t)\|_{W_p^3}^p dt<+\infty, \tag{7}$$

$$\exists p>1\ \forall t\in[0,1]\ \chi_{[0,t]}(\cdot)b(\cdot)x(\cdot)\in\mathcal{D}_p. \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия A и B и $<\lambda,h>\in W_p^2$ для любых $p>1, h\in H$, $x\in M$ – решение (1).

Тогда x – единственное решение из класса M.

Лемма 3 [7, с.74]. Если $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ограниченная область, звездная относительно некоторого шара, $\varphi\in W_p^l(\Omega), n<lp;\ p>1$, то существует $\tilde\varphi=\varphi$ п.н., $\varphi\in C(\Omega)$.

Доказательство теоремы 2. F_n удовлетворяет уравнению

$$F_n(t,x)=F_{0,n}(x)-\sum_{k=1}^n\int_0^t b(s)h_k(s)\frac{\partial F_n}{\partial x_k}(s,x)ds+$$

$$+\int_0^t (a(s)-\sum_{k=1}^n b(s)h_k(s)\lambda_k^{(n)}(x))F_n(s,x)ds, \tag{9}$$

где $\frac{\partial}{\partial x_k}$ – производные Соболева.

Из лемм 1b, 3 и (7) следует, что F, $\frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 F}{\partial x_k\partial x_j}$ принадлежат пространству $W_p^1([0,1]\times\mathbb{R}^n, dt\times\mu\circ\eta^{-1})$ для любого $p\geq 1$ и, значит, F – непрерывна на $[0,1]\times\mathbb{R}^n$.

Дифференцируя (9) по $\frac{\partial}{\partial x_k}$, получаем $\frac{\partial F_n}{\partial x_k}\in C([0,1]\times\mathbb{R}^n)$

($\lambda_k^{(n)}\in C^1_{[0,1]}\times\mathbb{R}^n$ по аналогичным соображениям).

Следовательно,

$$\frac{\partial F_n}{\partial t}=-\sum_{k=1}^n b(t)h_k(t)\frac{\partial F_n}{\partial x_k}+(a(t)-\sum_{k=1}^n b(t)h_k(t)\lambda_k^{(n)}(x))F_n$$

– непрерывная функция на $[0,1]\times\mathbb{R}^n$.

Локальное решение (6) в классе непрерывно дифференцируемых функций единственно [6].

Запишем уравнения характеристик

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_k}{b(t)h_k(t)}.$$

Характеристики равны

$$c_k = x_k - \int_0^t b(s)h_k(s)ds. \tag{10}$$

Тогда уравнение для F_n примет вид

$$\frac{dF_n}{F_n} = \left[a(t) - \sum_{k=1}^{n} b(t)h_k(t)\lambda_k^{(n)}\left(c_1 + \int_0^t b(s)h_1(s)ds, \ldots, c_n + \int_0^t b(s)h_n(s)ds\right)\right]dt.$$

Следовательно, решением (4) будет функция

$$F_n(t,x) = F_{0,n}\left(x_1 - \int_0^t b(s)h_1(s)ds, \ldots, x_n - \int_0^t b(s)h_n(s)ds\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\int_0^t (a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)h_k(s)\lambda_k^{(n)}(x_1 - \int_s^t b(z)h_1(z)dz, \ldots,\right.$$

$$\left.\ldots, x_n - \int_s^t b(s)h_n(z)dz))ds\right\}. \tag{11}$$

Из общего вида характеристик (10) следует, что локальное решение единственным образом продолжается до глобального решения, которое задается формулой (11).

Таким образом,

$$E^{\sigma_n}x(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n) =$$

$$= F_{0,n}(\eta_1 - \int_0^t b(s)h_1(s)ds, \ldots, \eta_n - \int_0^t b(s)h_n(s)ds)\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\int_0^t [a(s) - \sum_{k=1}^{n} b(s)h_k(s)\lambda_k^{(n)}(\eta_1 - \int_s^t b(z)h_1(z)dz, \ldots,\right.$$

$$\left.\ldots, \eta_n - \int_s^t b(z)h_n(z)dz)]ds\right\}. \tag{12}$$

$E^{\sigma_n}x(t)$ сходится к $x(t)$ при $n \to \infty$ в $L_1(X,\mu)$, откуда и следует единственность решения.

Теорема 2 доказана.

3. Существование решения. Пусть $\mu(dx) = \rho(x)\mu_0(dx)$, где μ_0 – винеровская мера на $C_0([0,1])$, функция ρ дифференцируема вдоль H, и существуют константы C_1, C_2, C_3, такие, что

$$0 < C_1 < \rho < C_2 < +\infty, mbox\|D\rho\| \le C_3 \ \mu \text{ п.н.}$$

Тогда

$$< \lambda, h > = < \lambda_0, h > + < \frac{D\rho}{\rho}, h >, \tag{13}$$

где $< \lambda_0, h > = -\int_0^1 h(s)dw(s)$ – логарифмическая производная μ_0,

$$m(t) = -\int_0^t \frac{D_s\rho}{\rho} ds + w(t), \tag{14}$$

$$\int_0^1 x(t)dm(t) = -\int_0^1 x(s)\frac{D_s\rho}{\rho} ds + \int_0^1 x(t)dw(t).$$

Здесь $\int_0^1 x(t)dw(t)$ – расширенный стохастический интеграл Скорохода.

Доказательство (13) и (14) см.,например, в [2].

Отметим, что сходимость в $L_p(X, \mu)$ и $L_p(X, \mu_0)$ эквивалентна, поэтому $W_p^1(X, \mu) = W_p^1(X, \mu_0)$, а из ограниченности $D\rho$ следует, что $\mathcal{D}_q(X, \mu) = \mathcal{D}_q(X, \mu_0)$.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как упреждающее уравнение по винеровскому процессу.

Теорема 3 является иллюстрацией применения теоремы 1 для построения решения (1), которое получается предельным переходом в (12).

Теорема 3. Пусть мера $\mu(dx) = \rho(x)\mu_0(dx)$ удовлетворяет условиям A и B, где μ_0 – винеровская мера на $C_0([0, 1])$, а для ρ выполняются следующие условия:

$$\exists C_1, C_2 : \ 0 < C_1 \leq \rho \leq C_2 < +\infty \ \mu \text{ п.н.}$$

$$\forall \alpha \geq 1 \ \rho \in W_\alpha^2,$$

$$\forall \alpha \geq 1 \ \int_X \int_0^1 \exp\{\alpha D_s p\} ds d\mu < +\infty. \tag{15}$$

Если $x_0 \in W_p^1$ для любого $p > 1$, то уравнение (1) имеет решение, представимое в виде

$$x(t) = T_{0,t}x_0 \cdot \exp\{\int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t b^2(s)ds - \int_0^t T_{s,t}(\frac{D_s\rho}{\rho})ds\}. \tag{16}$$

Здесь $w(t) = \sum_{k=1}^\infty < \lambda_0, h_k > \int_0^t h_k(s)ds$ – винеровский процесс в пространстве $(C_0([0, 1]), \mu_0)$, а оператор $T_{s,t}$ действует следующим образом:

$$T_{s,t}(\alpha(x, s)) = \alpha(x - i(\chi_{[s,t]}(\cdot)b(\cdot)), s),$$

где α – случайный процесс в $C_0([0, 1])$.

Проверим, что $T_{s,t}$ ограниченный оператор, действующий из $L_{p_2}([0,1] \times X, dt \otimes \mu)$ в $L_{p_1}([0,1] \times X, dt \otimes \mu)$, где $p_2 > p_1 > 1$.

Действительно, пусть $\alpha \in L_{p_2}([0,1] \times X, dt \otimes \mu)$. Тогда

$$\int_0^1 \int_X |T_{s,t}\alpha(\omega, s)|^{p_1} \mu(d\omega) ds = \int_0^1 \int_X |\alpha(\omega + i(\chi_{[s,t]}(\cdot)b(\cdot)), s)|^{p_1} \mu(d\omega) ds =$$

$$= \int_0^1 \int_X |\alpha(\omega, s)|^{p_1} \mu(d\omega - i(\chi_{[s,t]}(\cdot)b(\cdot)) ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 \int_X |\alpha(\omega, s)|^{p_2} \mu(d\omega) ds \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \left(\int_0^1 \int_X \left(\frac{d\mu(\cdot - i(\chi_{[s,t]}b))}{d\mu} \right)^{\frac{p_2}{p_2 - p_1}} \mu(d\omega) ds \right)^{\frac{p_2 - p_1}{p_2}}. \tag{17}$$

Второй множитель в (17) конечен из-за вида меры μ.

Аналогично получаем, что оператор $T_{0,t} : \alpha(\omega) \mapsto \alpha(\omega + i(\chi_{[0,t]}b))$ ограничен, как оператор из $L_{p_2}(X, \mu)$ в $L_{p_1}(X, \mu)$, $p_2 > p_1 > 1$.

Покажем, что $x(t)$ – решение (1) можно получить как предел последовательности $x_n(t) = F_n(t, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ из (12). Для этого проверим, что предел $x_n(t)$ существует в любом $L_p(X, \mu)$, где $p > 1$.

Последовательность $x_n(t)$ можно записать в виде

$$x_n(t) = T_{0,t}(E^{\sigma_n} x_0) \cdot \exp\left\{ \int_0^t [a(s) - b(s) T_{s,t}(E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda)] ds \right\}. \tag{18}$$

Из ограниченности $T_{0,t} : L_{p_2} \to L_{p_1}, p_2 > p_1$ следует, что

$$T_{0,t}(E^{\sigma_n} x_0) \to T_{0,t} x_0 \text{ в любом } L_p(X, \mu), p > 1.$$

Используя (13), получаем

$$\exp\left\{ -\int_0^t b(s) T_{s,t}(E^{\sigma_n} \Pi_n \lambda) ds \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\int_0^t b(s) T_{s,t} E^{\sigma_n} (\sum_{k=1}^n - < \lambda_0, h_k > h_k(s) - \Pi_n \frac{D_s \rho}{\rho}) ds \right\} =$$

$$= \exp\left\{ -\int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n \left(< -\lambda_0, h_k > + \int_s^t b(z) h_k(z) dz \right) h_k(s) - T_{s,t}(E^{\sigma_n} \Pi_n \frac{D_s \rho}{\rho}) ds \right\}.$$

Для установления последнего равенства воспользовались тем, что $< \lambda_0, h_k >$ измеримо относительно σ_n. При этом имеем

$$\exp\{ \int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n < \lambda_0, h_k > h_k(s) ds \} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \exp\{ \int_0^t b(s) dw(s) \}$$

в пространстве $L_p(X, \mu_0)$, а значит и в $L_p(X, \mu)$.

$$\int_0^t b(s) \sum_{k=1}^n \int_s^t b(z)h_k(z)dzh_k(s)ds = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t b(s)b(z)h_k(s)h_k(z)dsdz =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n < b\chi_{[0,t]}, h_k >^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s)ds.$$

Для доказательства существования предела x_n в $L_p(X, \mu), p \geq 1$ остается проверить сходимость

$$\exp\left\{\int_0^t -T_{s,t}\left(E^{\sigma_n}\Pi_n \frac{D\rho}{\rho}\right)ds\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left\{\int_0^t \left(-T_{s,t}\frac{D\rho}{\rho}\right)ds\right\} \text{ в } L_p(X,\mu),\ p \geq 1.$$

Эта сходимость имеет место из-за сходимости по вероятности, а условие (15) гарантирует равномерную интегрируемость в $L_p(X, \mu)$.

Заметим, что $x_n(t) \in W_p^1, p \geq 1$, и удовлетворяют уравнению (5), где $F_n(t, \eta) = x_n(t)$.

Проведя рассуждения, при которых из (4) получили (5), в обратном порядке, получим, что $x_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x_n(t) - E^{\sigma_n}x_0 - \int_0^t a(s)x_n(s)ds + < \Pi_n\lambda - E^{\sigma_n}\Pi_n\lambda, \Pi_n(\chi_{[0,t]}bx_n) >=$$

$$= \int_0^1 \Pi_n(\chi_{[0,t]}(s)b(s)x_n(s))dm(s). \tag{19}$$

Предел в левой части (19) существует в любом $L_p(X, \mu), p \geq 1$ и равен $x(t) - x_0 - \int_0^t a(s)x(s)ds$. Значит существует предел и в правой части.

Из замкнутости оператора I вытекает, что $b(\cdot)\chi_{[0,t]}(\cdot)x(\cdot) \in \mathcal{D}_p, p \geq 1$ и $x(t)$ удовлетворяет (1).

Теорема 3 доказана.

(1) Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры// Тр.Моск. мат.о-ва. 1971. – N: 24.– с.133 – 174.
(2) Дороговцев А.А. Стохастические уравнения с упреждением. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1996. – 152 с.
(3) Кулик О.М. Випадкові оператори та стохастичні інтегральні рівняння: Автореф.дис.канд.физ.-мат.наук, Київ, 1996. – 22 с.
(4) Buckdahn R., Anticipative Girsanov transformations and Skorohod stochastic differential equations// Mem. Amer.Math.Soc. – 1994. – 111, N: 533.– P. 1 – 88.
(5) Pilipenko A.Yu. Conditional analysis in non-Gaussian stochastic calculus. Theory of random processes (to appear).
(6) Курант Р., Уравнения с частными производными, М.: Мир, 1964.– 830 с.
(7) Соболев С.Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука,1988. – 336 с.