Перенос абсолютной непрерывности потоком, порожденным стохастическим уравнением с отражением.

Пилипенко А.Ю.

Резюме. Пусть $\varphi_t(x), x \in \mathbb{R}_+$ – значение в момент времени $t \ge 0$ решения стохастического уравнения с нормальным отражением от гиперплоскости, стартующее в начальный момент времени из x. В статье характеризована абсолютная непрерывная (относительно меры Лебега) и сингулярная компоненты случайного мерозначного процесса $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$ – образа некоторой абсолютно непрерывной меры μ при случайном отображении $\varphi_t(\cdot)$. Доказано, что сужение меры Хаусдорфа H^{d-1} на носитель сингулярной компоненты σ-конечно, а также приведены достаточные условия, гарантирующие, что сингулярная компонента является абсолютно непрерывной относительно H^{d-1}.

Введение. Пусть $\varphi_t(x)$ – решение следующего стохастического уравнения в $\mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1} \times [0;\infty)$ с нормальным отражением от гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$:

$$\begin{cases} d\varphi_t(x) = a_0(\varphi_t(x))dt + \sum_{k=1}^m a_k(\varphi_t(x))dw_k(t) + \\ \qquad +\overline{n}\xi(dt,x),\ t \in [0,T], \\ \varphi_0(x) = x,\ \xi(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^d_+, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $a_k : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d, k = 0, \ldots, m$ удовлетворяют условию Липшица, $\{w_k(t), k = 1, \ldots, m\}$ – независимые винеровские процессы, $\overline{n} = (0, \ldots, 0, 1)$ – нормаль к гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, $\xi(t,x)$ – неубывающий по t процесс для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}^d_+$, причем

$$\xi(t,x) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}} \xi(ds,x),$$

т.е. $\xi(t,x)$ возрастает только в те моменты времени, когда $\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

Замечание 0.1. Для того, чтобы решить (**??**), надо на самом деле найти пару процессов $\varphi_t(x)$ и $\xi(t,x)$, удовлетворяющую указанным выше условиям.

При сделанных предположениях существует и единственно решение (**??**) (см. [**?**]) . При этом (см. [**?**]) существует непрерывная по (t,x) модификация процесса $\varphi_t(x)$, которая будет рассматриваться далее.

Пусть μ – вероятностная мера в $\mathbb{R}^d_+$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега λ^d. Рассмотрим случайный мерозначный процесс $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$, где $\mu \circ \varphi_t^{-1}$ – образ меры μ при случайном отображении $\varphi_t(\cdot, \omega)$.

Основной вопрос рассматриваемый в данной статье заключается в характеризации абсолютно непрерывной и сингулярной компонент процесса μ_t. Доказывается, что абсолютно непрерывная компонента компонента μ_t^{abs} равна $\mu_t|_{\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)^\circ}$ – сужению меры μ_t на внутренность множества $\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$, а сингулярная часть $\mu_t^{sing} = \mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ – сужению μ_t на границу $\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$.

В третьем разделе статьи приводятся достаточные условия, гарантирующие абсолютную непрерывность

$$\mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} \ll H^{d-1}. \tag{0.2}$$

Сужение H^{d-1} в $\mathbb{R}^d$ на множество $\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$ является σ-конечной мерой (см. теорему **??**). Поэтому абсолютная непрерывность (**??**) не нуждается в уточнениях.

Отметим, что возможна ситуация, когда размерность Хаусдорфа множества $\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$ меньше $d-1$ с положительной вероятностью (см. пример в [?]), и вопрос об абсолютной непрерывности (**??**) не является, вообще говоря, тривиальным.

В качестве иллюстрации к полученным результатам, приводится пример, показывающий, что для любой абсолютно непрерывной меры μ в шаре $U = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\| \le 1\}$ мера $\mu \circ w_t^{-1}$, где $w_t(x)$ – броуновское движение с отражением от границы шара, стартующее из x, раскладывается в сумму

$$\mu_t = \mu \circ w_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(U)} + \mu \circ w_t^{-1}|_{\varphi_t(U)^\circ}$$

где первая мера, абсолютно непрерывна, относительно λ^d, а вторая относительно H^{d-1}.

§1. Характеризация абсолютно непрерывной компоненты процесса $\mu \circ \varphi_t^{-1}$

Пусть $\varphi_t(x)$ – решение стохастического уравнения с нормальным отражением (**??**), где коэффициенты a_k удовлетворяют условию Липшица.

Рассмотрим случайный мерозначный процесс $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$, где μ – абсолютно непрерывная конечная мера в $\mathbb{R}^d_+$.

Теорема 1.1. *Для п.в.ω для любого $t \geq 0$ мера μ_t представима в виде следующей суммы взаимно ортогональных мер*

$$\mu_t = \mu_t|_{\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)\setminus\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} + \mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)},$$

причем

а) первая компонента абсолютно непрерывна относительно d-мерной меры Лебега, а вторая либо сингулярна либо нулевая мера;

б) носитель меры $\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ содержится в счетном объединении множеств конечной $(d-1)$-мерной меры Хаусдорфа H^{d-1}.

Доказательство. Ортогональность сужения меры μ_t на непересекающиеся множества очевидна.

Введем случайное множество $U_t(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d_+ : t < \tau(x)\}$, где $\tau(x) = \inf\{s \geq 0 : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}$ – момент первого попадания процесса $\varphi_t(x)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

Из результатов [**?**, **?**] следует, что п.н. для всех $t \geq 0$

1) множества $\varphi_t(U_t), \varphi_t(\mathbb{R}^d_+ \setminus U_t)$ не пересекаются и равны, соответственно, внутренности и границе случайного множества $\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$, т.е. до момента попадания на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ решение $\varphi_t(x)$ принадлежит внутренности случайного множества $\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$, а после него границе;

2) имеет место равенство случайных множеств

$$\varphi_t(\mathbb{R}^d_+ \setminus U_t) = \varphi_t(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = \partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+);\ \varphi_t(U_t) = \varphi_t(\mathbb{R}^d_+)^\circ;$$

3) для любого $r > 0$:

$$H^{d-1}(\varphi_t(\{x \in \mathbb{R}^{d-1}, |x| \leq r\} \times \{0\})) < \infty,$$

где H^{d-1} – мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^d$ размерности $(d-1)$.

Таким образом, носитель меры $\mu\circ\varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ содержится в счетном объединении множеств конечной $(d-1)$-мерной меры Хаусдорфа H^{d-1} и, значит, соответствующая мера не может быть абсолютно непрерывной, если она не вырождена. Поэтому, для доказательства теоремы **??** достаточно проверить абсолютную непрерывность

$$\mu_t|_{(\varphi_t(\mathbb{R}^d_+))^\circ} \ll \lambda^d.$$

Пусть $\widetilde{a}_k$ – произвольное липшицево продолжение a_k на $\mathbb{R}^d$, $\widetilde{\varphi}_t(x)$ – решение стохастического уравнения (без отражения) с коэффициентами $\widetilde{a}_k$. Тогда с вероятностью 1 имеет место равенство $\widetilde{\varphi}_t(x) = \varphi_t(x)$ для всех $t \le \tau(x)$. Следовательно

$$\mu_t|_{(\varphi_t(\mathbb{R}^d_+))^\circ} = \mu|_{U_t} \circ \varphi_t^{-1} = \mu|_{U_t} \circ \widetilde{\varphi}_t^{-1} \ll \mu \circ \widetilde{\varphi}_t^{-1}.$$

Известно (см. [?] Теор. 3.3.3), что с вероятностью 1 для всех t отображение $\widetilde{\varphi}_t(\cdot, \omega)$ является элементом пространства $W^1_{p,\ loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, и существует модификация (относительно меры $\mathbb{P} \times \lambda^d$) производной $\nabla\widetilde{\varphi}_t(x)$ по начальным данным (по x), удовлетворяющая некоторому линейному стохастическому уравнению с ограниченными коэффициентами. Поэтому для всех (ω, x) из множества полной $\mathbb{P} \times \mu$ меры и всех $t \ge 0$ якобиан $\det \nabla\widetilde{\varphi}_t(x)$ не равен нулю. Из леммы 5.1 [?] следует, что для п.в. ω и всех $t \ge 0$ имеет место абсолютная непрерывность мер $\mu \circ \widetilde{\varphi}_t^{-1} \ll \lambda^d$.

Теорема **??** доказана.

§2. Характеризация сингулярной компоненты меры μ_t

В теореме **??** было показано, что размерность Хаусдорфа носителя меры $\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ – сингулярной компоненты меры μ_t – не превышает $(d-1)$. В данном параграфе приводятся достаточные условия, гарантирующие абсолютную непрерывность

$$\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} \ll H^{d-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}. \tag{2.1}$$

Нам понадобится следующее абстрактное утверждение об абсолютной непрерывности образа меры относительно меры Хаусдорфа.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^d \to L \subset \mathbb{R}^m$ аппроксимативно дифференцируема в λ^d-почти всех точках ограниченного измеримого множества $U \subset \mathbb{R}^d$, где измеримое множество L имеет конечную k-мерную меру Хаусдорфа, $H^k(L) < \infty$. Предположим, что ранг матрицы $\left\| ap\, \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,d}}$, составленной из аппроксимативных частных производных, равен k для п.в. $x \in U$, где $k \le d$.*

Тогда

$$\lambda^d_U \circ f^{-1} \ll H^k|_L, \tag{2.2}$$

где $H^k|_L$ – сужение меры Хаусдорфа на L.

Замечание 2.1. Если функция f имеет соболевскую производную (или даже обычные производные по направлениям почти всюду), то она также является п.в. аппроксимативно дифференцируемой. При этом соболевская и аппроксимативная производные п.в. совпадают.

Замечание 2.2. Сужение меры Хаусдорфа $H^k|_L$ является конечной мерой в отличии от H^k, которая не является даже σ-конечной при $k < d$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 5.1 и теоремы 5.6 [?]. Сначала, применяя теорему 3.1.8 [?], сведем доказательство к случаю, когда f непрерывно дифференцируема и $\det \|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\|_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,k}} \neq 0$. Затем для завершения доказательства искомого результата надо использовать метод расслоений [?] и формулу дезинтегрирования 3.2.30 [?].

Следствие 2.1. Пусть $\mu(dx) = p(x)dx$ – конечная мера в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ μ-почти всюду аппроксимативно дифференцируема, существует множество $L \subset \mathbb{R}^m$ такое, что $f(x) \in L$ для μ-п.в. $x \in \mathbb{R}^d$ и $H^k(L) < \infty$, где $k \leq d$. Допустим, что $\operatorname{rank} \left\| \operatorname{ap} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,d}} = k$ для μ-почти всех x. Тогда $\mu \circ f^{-1} \ll H^k_L$.

В [?] доказано, что для п.в. ω и всех t отображение $\varphi_t(\cdot)$ принадлежит пространству $W^1_{p,loc}(\mathbb{R}^d_+, \mathbb{R}^d)$ для любого $p > 1$. Из следствия **??** вытекает следующий факт.

Теорема 2.2. *Предположим, что для любого $x \in \mathbb{R}^d_+$:*

$$\mathbb{P}(rank \nabla\varphi_t(x) \geq d-1, t \geq 0) = 1. \tag{2.3}$$

Тогда для п.в.ω

$$\mathbb{P}\left(\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} \ll H^{d-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}, t \geq 0\right) = 1.$$

Цель дальнейшей работы состоит в нахождении достаточных условий, гарантирующих (**??**), т.к. проверить их непосредственно не представляется возможным.

В следующей теореме приводится вид стохастического уравнение, которому удовлетворяет (соболевская) производная $\nabla\varphi_t(x)$.

Теорема 2.3. [?] *Предположим, что коэффициенты уравнения (??) непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченные частные производные.*

Допустим, что для любого $x \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} (a_{k,d}(x))^2 > 0, \tag{2.4}$$

где $a_{k,d}$ – d*-я координата функции* $a_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,d})^T$.

Тогда случайное отображение $\varphi_t : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d$ *с вероятностью 1 для всех* $t \geq 0$ *принадлежит пространству Соболева* $W^1_{p,loc}(\mathbb{R}^d_+, \mathbb{R}^d), p > 1$, *причем соболевская производная* $y_t(x) := \nabla \varphi_t(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\begin{cases} dy_t(x) = \nabla a_0(\varphi_t(x)) y_t(x) dt + \\ + \sum\limits_{k=1}^{m} \nabla a_k(\varphi_t(x)) y_t(x) dw_k(t) - (\mathbf{1} - P) y_{t-}(x) n(x, dt), \\ y_0(x) = \mathbf{1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $n(x, dt)$ *точечная случайная мера, такая что* $n(x, \{t\}) = 1$ *в том и только том случае, когда* $\varphi_t(x)$ *принадлежит гиперплоскости* $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$; $\mathbf{1}$ – *единичная матрица, а матрица* $P = (p_{ij})^d_{i,j=1}$ *определена следующим образом*

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \leq d-1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Замечание 2.3. Решение (??) (для фиксированного x) понимается в следующем смысле:

1) для любого момента остановки τ такого, что $\varphi^d_\tau(x) \neq 0$ (φ^d_t – d-я координата φ_t) имеет место равенство

$$y_t(x) = y_\tau(x) + \int_\tau^t \nabla a_0(\varphi_s(x)) y_s(x) ds + \sum_{k=1}^{m} \int_\tau^t \nabla a_k(\varphi_s(x)) y_s(x) dw_k(s),$$

для $t \in [\tau, \mathring{\tau})$, где $\mathring{\tau} = \inf\{s \geq \tau : \varphi^d_s(x) = 0\}$;

2) множество $\{t : \varphi^d_t(x) = 0\}$ содержится в $\{t : Py_t(x) = 0\}$;

3) процесс $(1 - P)y_t(x), t \geq 0$ имеет cádlág траектории;

4) процесс $Py_t(x), t \geq 0$ имеет непрерывные траектории.

Замечание 2.4. Из теоремы **??** следует, что для $t < \tau(x)$ производная $y_t(x)$ является решением линейного стохастического уравнения

$$\begin{cases} dy_t(x) = \nabla a_0(\varphi_t(x))y_t(x)dt + \sum_{k=1}^m \nabla a_k(\varphi_t(x))y_t(x)dw_k(t); \\ y_0(x) = \mathbf{I}. \end{cases}$$

Замечание 2.5. Случайное отображение $\varphi_t(\cdot)$ может не быть непрерывно дифференцируемым по x, даже если все коэффициенты уравнения являются бесконечно дифференцируемыми! Например, если $\varphi_t(x)$ – отраженное броуновское движение в $[0;\infty)$, стартующее их точки $x \geq 0$ в нулевой момент времени, то несложно проверить (см. [**?**]), что

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} x + w(t), t < \tau(x), \\ \varphi_t(0), t \geq \tau(x), \end{cases}$$

где $\tau(x)$ – момент первого попадания $\varphi_t(x)$ в нуль, $w(t)$ – исходный винеровский процесс. Тогда производная $\nabla\varphi_t(x) = \begin{cases} 1, t < \tau(x), \\ 0, t \geq \tau(x) \end{cases}$ не имеет непрерывной модификации по x для любого $t > 0$.

Далее в статье предполагается, что условия теоремы **??** выполняются

Рассмотрим вопрос о справедливости равенства (**??**). Пусть $x \in \mathbb{R}_+^d$ фиксирован. Далее будем обозначать φ_t, y_t вместо $\varphi_t(x)$, $y_t(x)$.

Пусть $T > 0$. Введем моменты остановки

$$\tau_0(c) = \inf\{t \geq 0 : \varphi_t^d = 0\} \wedge T,$$

$$\sigma_n(c) = \inf\{t \geq \tau_n(c) : \varphi_t^d = c\} \wedge T,$$

$$\tau_{n+1}(c) = \inf\{t \geq \sigma_n(c) : \varphi_t^d = 0\} \wedge T,$$

где $c > 0$.

Несложно заметить, что для любого $t > 0$ с вероятностью 1 существует такое конечное n, что $t \in [\sigma_n(c), \tau_{n+1}(c))$.

Из доказательства теоремы 1 [**?**] следует, что

$$\forall T > 0 \forall p > 1 : \ \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |y_t - y_t^c| \to 0, c \to 0+, \tag{2.6}$$

где процесс y_t^c определен следующим образом

$$y_0^c = \mathbf{I};$$

$$y_t^c = y_{\sigma_n(c)}^c + \int_{\sigma_n(c)}^t \nabla a_0(\varphi_s) y_s^c ds + \sum_{k=1}^m \int_{\sigma_n(c)}^t \nabla a_k(\varphi_s) y_s^c dw_k(s)$$

при $t \in [\sigma_n(c), \tau_{n+1}(c))$;

$$y_t^c = P y_{\tau_n(c)-}^c, t \in [\tau_n(c), \sigma_n(c)].$$

Обозначим через $U_{s,t}$, $s \le t$ решение следующего линейного стохастического уравнения

$$\begin{cases} dU_{st} = \nabla a_0(\varphi_t) U_{st} dt + \sum_{k=1}^m \nabla a_k(\varphi_t) U_{st} dw_k(t), t \ge s \\ U_{ss} = \mathbf{I}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} y_t^c &= U_{\sigma_n(c),t} \prod_{k=1}^{n-1} (P U_{\sigma_k(c),\tau_k(c)}) P U_{0,\tau_0(c)} \\ &= U_{\sigma_n(c),t} P \prod_{k=1}^{n-1} (P U_{\sigma_k(c),\tau_k(c)} P) P U_{0,\tau_0(c)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нам понадобится следующая лемма о невырожденности предела произведений матриц.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{A_{n,k}, k = \overline{1, N(n)}\}, n \ge 1$ *– последовательность серий случайных матриц размера* $d \times d$. *Допустим, что*

1) для любого k *существуют пределы*

$$A_k := \lim_{n\to\infty} A_{n,k} \text{ п.н.},$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \max_{m \le k \le N(n)} \|A_{n,k}\| = 0 \text{ п.н.};$$

2) существуют перестановки σ_n *чисел* $1, \ldots, N(n)$ *такие, что имеет место предел по вероятности*

$$B := \mathbb{P} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N(n)} (\mathbf{I} + A_{n,\sigma_n(k)});$$

3) Существует и конечен предел по вероятности

$$\alpha := \mathbb{P}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)} A_{n,k};$$

4) $K := \sup_n \mathbb{E}\sum_{k=1}^{N(n)} \|A_{n,k}\|^2 < \infty;$

5) для любого $k \geq 1$:

$$\det(\mathbf{I} + A_k) \neq 0 \text{ *п.н.*}$$

Тогда $\det B \neq 0$ *п.н.*

Доказательство. Детерминант матрицы является непрерывной функцией (от матрицы), поэтому

$$\det B = \mathbb{P}\lim_{n\to\infty}\det\prod_{k=1}^{N(n)}(\mathbf{I} + A_{n,k}),$$

и значит $\det B \neq 0$ п.н., если и только если

$$\mathbb{P}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N(n)}\ln\left(|\det(\mathbf{I} + A_{n,k})|\right) \neq -\infty \text{ п.н.},$$

где считается, что $\ln 0 = -\infty$.

Заметим, что для почти всех ω для $k \geq k_0(\omega), n \geq n_0(\omega)$ имеет место неравенство $\|A_{n,k}\| < \frac{1}{2}$, и следовательно

$$\ln\left(\det(\mathbf{I} + A_{n,k})\right) = \operatorname{tr} A_{n,k} + f_{n,k}(\|A_{n,k}\|^2),$$

где $|f_{n,k}(x)| \leq c|x|, |x| \leq 1, c = \text{const}$.

Тогда

$$\ln\left(|\det B|\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{N(n)}\operatorname{tr} A_{n,k} + \sum_{k=k_0}^{N(n)} f_{n,k}(\|A_{n,k}\|^2) + \zeta_n\right),$$

где

$$\zeta_n = \ln\left(\left|\prod_{k=1}^{k_0-1}\det(\mathbf{I} + A_{n,k})\right|\right) - \sum_{k=1}^{k_0-1}\operatorname{tr} A_{n,k}$$

сходится при $n \to \infty$ к некоторой собственной случайной величине ζ. Поэтому

$$\mathbb{E}|\ln(|\det B|) - \alpha - \zeta| =$$

$$= \mathbb{E}\lim_{n\to\infty} |\ln(|\det B|) - \sum_{k=1}^{N(n)} \operatorname{tr} A_{n,k} - \zeta_n| =$$

$$= \mathbb{E}|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=k_0}^{N(n)} f_{n,k}(\|A_{n,k}\|^2)| \leq$$

$$\leq \mathbb{E}\overline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} \|A_{n,k}\|^2 \leq K < \infty.$$

Отсюда вытекает конечность $\ln(|\det B|)$ почти наверное, т.е. $\det B \neq 0$ п.н. Что и требовалось доказать.

Представим случайное множество $A = \{s \in [0,t] : \varphi_s^d > 0\}$ в виде объединения непересекающихся случайных интервалов

$$A = [\alpha_0, \beta_0) \cup (\alpha_1, \beta_1] \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k),$$

где $\alpha_0 = 0, \beta_1 = T$.

Теорема 2.4. *Допустим, что выполняются условия теоремы* **??** *и для любого* $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left(rank(PU_{\alpha_k,\beta_k}(x)P) = d-1\right) = 1.$$

Тогда $\mathbb{P}(rank\ \ y_s(x) \geq d-1, s \in [0,t]) = 1$.

Доказательство. Заметим, что функция $\operatorname{rank} y_s, s \geq 0$ невозрастающая, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\operatorname{rank} y_t \geq d-1$ п.н. Также, без потери общности можем считать, что A состоит из бесконечного числа интервалов.

Для матрицы B размером $d \times d$, через $\widetilde{B}$ будем обозначать матрицу, состоящую из первых $(d-1)$ строк и $(d-1)$ столбцов матрицы B.

Из (**??**), (**??**) следует, что

$$\widetilde{y}_t^c = \widetilde{U}_{\sigma_n(c),t}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \widetilde{U}_{\sigma_k(c),\tau_k(c)}\right)\widetilde{U}_{0,\tau_0(c)} \to \widetilde{y}_t, c \to 0+\,. \tag{2.9}$$

Воспользуемся леммой **??**.

Положим
$$A_k := \widetilde{U}_{\alpha_k,\beta_k} - \mathbf{1};\; A_{n,k} := \widetilde{U}_{\sigma_{j_k}(\frac{1}{n}),\tau_{j_k}(\frac{1}{n})} - \mathbf{1},$$
где интервал $\big(\sigma_{j_k}(\frac{1}{n}),\tau_{j_k}(\frac{1}{n})\big)$ содержится в (α_k,β_k).

Условие 1) леммы выполняется, т.к. $U_{s,t}, s\le t$ непрерывно по (s,t) [?]; условие 2) выполняется ввиду (**??**), а условие 5) из-за предположений теоремы.

Для проверки условия 3) леммы достаточно убедиться в существовании предела по вероятности у следующей последовательности
$$\sum_k \Bigg(\int\limits_{\sigma_k(c)\wedge t}^{\tau_k(c)\wedge t} \nabla a_0(\varphi_s) U_{\sigma_k(c)\wedge t,s} ds + \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_k(c)\wedge t}^{\tau_k(c)\wedge t} \nabla a_k(\varphi_s) U_{\sigma_k(c)\wedge t,s} dw_k(s)\Bigg)$$
при $c\to 0+$.

Заметим, что первое слагаемое сходится для п.в.ω к выражению
$$\int_0^t \sum_k \mathbf{1}_{(\alpha_k,\beta_k)}(s)\nabla a_0(\varphi_s)U_{\alpha_k,s}ds$$
по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Последовательность вторых слагаемых фундаментальна в $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Действительно,
$$\mathbb{E}\Bigg| \sum_p \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_p(c_1)\wedge t}^{\tau_p(c_1)\wedge t} \nabla a_j(\varphi_s) U_{\sigma_p(c_1)\wedge t,s} dw_k(s) -$$
$$- \sum_l \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_l(c_2)\wedge t}^{\tau_l(c_2)\wedge t} \nabla a_j(\varphi_s) U_{\sigma_l(c_2)\wedge t,s} dw_k(s)\Bigg|^2 \le$$
$$\le \sum_{j=1}^m \sup_x |\nabla a_j(x)|^2 \mathbb{E}\int_0^t |\sum_p U_{\sigma_p(c_1)\wedge t,s}\mathbf{1}_{[\sigma_p(c_1)\wedge t,\tau_p(c_1)\wedge t]}(s) -$$
$$- \sum_l U_{\sigma_l(c_2)\wedge t,s}\mathbf{1}_{[\sigma_l(c_2)\wedge t,\tau_l(c_2)\wedge t]}(s)|^2 ds \to 0,$$

при $c_1, c_2 \to 0+$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, т.к. [?]

$$\mathbb{E} \sup_{0 \le s \le \bar{t} \le t} \|U_{s\bar{t}}\|^2 < \infty.$$

Аналогичным образом проверяется условие 4) леммы **??**. Тем самым теорема **??** доказана.

Следствие 2.2. Предположим, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$, $t \ge 0$ и $d \times d$ матрицы V, $\operatorname{rank} V = d - 1$ следующая условная вероятность равна нулю

$$\mathbb{P}\{\operatorname{rank} PU_{t,\beta(t,x)}(x)V < d - 1/\ \varphi_t(x) = y\} = 0, \tag{2.10}$$

где $U_{st}(x)$ – решение (**??**) с $\varphi_t = \varphi_t(x)$,

$$\beta(t, x) = \inf\{z \ge t : \varphi_z(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}.$$

Тогда справедливо (**??**).

Доказательство. Пусть $\alpha(t, x) = \sup\{s \in [0; t] : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}$ и $\alpha(t, x) = 0$, если соответствующее множество пусто. Т.е. $(\alpha(t, x); \beta(t, x))$ – максимальный интервал на котором $\varphi_t^d(x) \ne 0$.

Заметим, что $PU_{\alpha(t,x),\beta(t,x)}P = PU_{t,\beta(t,x)}U_{\alpha(t,x),t}P$, причем $U_{\alpha(t,x),t}P$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым. Пусть $\rho_t(dy, dV)$ – распределение пары процессов $(\varphi_t(x), U_{\alpha(t,x),t}P)$. Тогда

$$\mathbb{P}(\operatorname{rank} PU_{\alpha(t,x),\beta(t,x)}P < d - 1) =$$

$$= \mathbb{P}(\operatorname{rank} PU_{t,\beta(t,x)}U_{\alpha(t,x),t}P < d - 1) =$$

$$= \int \mathbb{P}(\operatorname{rank} PU_{t,\beta(t,x)}V < d - 1/\ \varphi_t(x) = y, U_{(\alpha(t,x),t)} = V)\rho_t(dy, dV) = 0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\mathbb{P}(\operatorname{rank} U_{\alpha(t,x),t}P = d - 1) = 1$, т.к. с вероятностью один матрица $U_{s,t}$ невырождена для всех $s, t,\ s \le t$, и применить теорему **??**.

Пример 2.1. Условия следствия **??** можно интерпретировать, как условия непопадания процесса Ито $(\varphi_t^d, \det \widetilde{U}_{st}), t \ge s$ в точку $(0; 0)$. Некоторые достаточные условия для этого довольно просто записываются.

Рассмотрим двумерную ситуацию.

В этом случае процесс $\det \widetilde{U}_{st}$ равен U_{st}^{11} – элементу первого столбца и первой строки матрицы U_{st}. Пара $(\varphi_t^2, U_{st}^{11})$ удовлетворяет следующему соотношению

$$\begin{cases} d\varphi_t^2 = a_0^2(\varphi_t) + \sum_{k=1}^m a_k^2(\varphi_t) dw_k(t), t \in [s;\ \inf\{z \geq s|\ \varphi_z^2(x) = 0\}) \\ dU_{st}^{11} = \big((a_0^1)_1'(\varphi_t)U_{st}^{11} + (a_0^1)_2'(\varphi_t)U_{st}^{12}\big)dt + \\ + \sum_{k=1}^m \big((a_k^1)_1'(\varphi_t)U_{st}^{11} + (a_k^1)_2'(\varphi_t)U_{st}^{12}\big)\big)dw_k(t), \end{cases}$$

Все процессы под дифференциалами являются непрерывными. Поэтому достаточным условием непопадания (φ_t, U_{st}^{11}) в $(0;0)$ является, например, невырожденность во всех точках диффузионной характеристики. Поскольку матрица U_{st} невырождена с вероятностью 1 для всех s, t, то вектор $(U_{st}^{11}, U_{st}^{12})$ ненулевой, и таким достаточным условием является, например, такое:

для любых $x \in \mathbb{R}_+^2, y \in \mathbb{R}^2, y \neq 0$ векторы $(a_k^2(x))_{1\leq k\leq m}$ и $(\nabla_y a_k^1(x))_{1\leq k\leq m}$ линейно независимы.

Пример 2.2. Пусть $\varphi_t(x)$ – броуновское движение с отражением в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^d$, μ – абсолютно непрерывная мера в $\{\|x\| \leq 1\}$, $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$.

Сделав достаточно гладкие локальные замены переменных, несложно распространить результаты статьи на данный пример.

В данном случае $U_{s,t} = \mathbb{1}$ и условие, которое соответствует (**??**), приобретает вид:

для любого $x, \|x\| < 1$ и матрицы $V, \operatorname{rank} V = d-1$

$$\mathbb{P}\{\operatorname{rank} P(\varphi_t(\beta(t,x)))V < d-1\} = 0, \tag{2.11}$$

где $P(y)$ – проектор на касательную плоскость сферы $\{\|x\| = 1\}$ в точке y. Очевидно (**??**) истинно.

Таким образом μ_t представима в виде суммы абсолютно непрерывной компоненты $\mu_t^{abs} := \mu_t\Big|_{\varphi_t(\|x\|\leq 1)\setminus\partial\varphi_t(\|x\|\leq 1)}$ и сингулярной компоненты $\mu_t^{sing} := \mu_t\Big|_{\partial\varphi_t(\{\|x\|\leq 1\})}$. При этом $H^{d-1}(\partial\varphi_t(\{\|x\| \leq 1\})) < \infty$ и μ_t^{sing} абсолютно непрерывна относительно сужения меры Хаусдорфа H^{d-1} на множество $\partial\varphi_t(\{\|x\| \leq 1\})$.

Отметим также, что если $t > \inf\{s : \|w(s)\| \geq 2\}$, то для всех x момент $\tau(x)$ попадания решения, стартующего из x, на границу шара не превышает t. Поэтому $\partial\varphi_t(\{\|x\| \leq 1\}) = \varphi_t(\{\|x\| \leq 1\})$ (соответствующий факт упоминался в доказательстве теоремы **??**, однако может быть перенесен и на случай ограниченной области с гладкой границей).

Следовательно для таких t абсолютно непрерывная компонента является нулевой мерой.

Список литературы

[1] Tanaka H. *Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions* Hiroshima Math. J., (1979), – **9**, №1. – P.163-177.

[2] Pilipenko A.Yu. *Flows generated by stochastic equations with reflection* Random Oper. and Stoch.Eq., (2004), **12**, №4, pp. 389–396.

[3] Пилипенко А.Ю. *Стохастические потоки с отражением. Доповiдi НАН України*, 2005, №10, с.23-29.

[4] Пилипенко А.Ю. *Свойства потоков, порожденных стохастическими уравнениями с отражением* УМЖ, (2005), **57**, №8, с.1069-1078.

[5] Bouleau, Nicolas; Hirsch, Francis *Dirichlet forms and analysis on Wiener space.* de Gruyter Studies in Mathematics, 14. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991. x+325 pp.

[6] Богачев В.И., Смолянов О.Г. *Аналитические свойства бесконечномерных распределений.* Успехи мат. наук 1990, т. 45, вып. 3(273), с. 3-83.

[7] Федерер Г. *Геометрическая теория меры*: Пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

[8] Давыдов Ю.А., Лифшиц М.А. *Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах* // Теор. вер, Мат. стат., Теор. кибер., Итоги наук. и техники, т.22. – М.:ВИНИТИ, 1984. – С.61-157.

[9] Пилипенко А.Ю. *Про узагальнену диференційованість за початковими даними потоку, породженого стохастичним рівнянням з відбиттям*// ТВіМС, 2006, т.77 (в печати).

[10] Kunita H. *Stochastic flows and stochastic differential equations.* Cambridge studies in advanced mathematics: 24, 1990, 346 p.