$\neq \langle y \rangle$, то в A найдется элемент $a = xy^{\beta}$, где $x = x_m^{\alpha_m} x_{m+1}^{\alpha_m+1} \dots x_n^{\alpha_n}$, а числа β, α_m и α_n взаимно просты с p. Так как подгруппа K имеет класс 2, то

$$[a, a^{t^{n-m+1}}] = [xy^{\beta}, x_{n+1}^{\alpha_m} \dots x_{2n-m+1}^{\alpha_n} y^{\beta}] =$$

$$= [x_n^{\alpha_n}, x_{n+1}^{\alpha_m}] = y^{\alpha_n \alpha_m} \neq 1 ,$$

вопреки предположению о коммутативности подгруппы A. Таким образом, $A = \langle y \rangle$, так что группа G удовлетворяет условию Min – an. Подгруппа H не удовлетворяет условию Min – an ввиду наличия в ней убывающей цепи

$$\langle y, x_0, x_2, \dots \rangle > \langle y, x_2, x_4, \dots \rangle > \dots > \langle y, x_{2n}, x_{2n+2}, \dots \rangle > \dots$$

нормальных в H абелевых подгрупп.

Фактор-группа $G/\langle y \rangle$ – двуступенно разрешима, так что группа G есть расширение конечной группы с помощью двуступенно разрешимой.

Список литературы

[1] *Wilson J.S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math.Z. – 1970. – **114**, N 1. – P. 19–21.

[2] *Чечин С.А.* Об условии минимальности для нормальных делителей // XV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. – Красноярск, 1979. – Ч.1. – С.175.

[3] *Бачурин Г.Ф.* Об одном классе нильпотентных групп // Науч. труды Магнитогорского горнометаллург. ин-та. – 1958. – **16**. – С. 99-112.

[4] *Черников С.Н.* О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР. – 1957. – **115**. – С. 60–63.

УДК 512.64

КЛАССИФИКАЦИЯ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ †

В.В.СЕРГЕЙЧУК (1), *Д.В.ГАЛИНСКИЙ* (2)

(1) Институт математики АН Украины 252601 Киев-4 ул.Терещенковская 3 Украина

(2) Киевский университет 252017 Киев ул.Владимирская 64 Украина

Реферат

Над алгебраически замкнутым полем получен канонический вид пар матриц размера 4×4 относительно преобразований подобия $(M, N) \longmapsto (S^{-1}MS,\ S^{-1}NS)$ с невырожденной матрицей S.

Над алгебраїчно замкнутим полем одержано канонічний вид пар матриць розміру 4×4 відносно перетворень подібності $(M, N) \longmapsto (S^{-1}MS,\ S^{-1}NS)$ з невиродженою матрицею S.

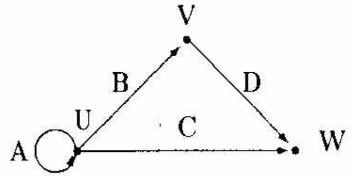
† Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Комитета Украины по вопросам науки и технологий.

Получено 26.12.91

Основное поле k считаем алгебраически замкнутым и линейно упорядоченным (например, поле $\mathbf{C}$ можно упорядочить лексикографически).

1. Задача о классификации пар линейных операторов в конечномерном векторном пространстве так же сложна, как и задача о классификации любого набора линейных операторов.

Например, изоморфным представлениям колчана



взаимно однозначно соответствуют подобные пары матриц вида

$$\left(\begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 2E & 0 \\ 0 & 0 & 3E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Поэтому удовлетворительная классификация пар линейных операторов возможна лишь в некоторых частных случаях.

2. Например, легко классифицировать пары линейных операторов с простым спектром первого оператора. Пусть такая пара в некотором базисе задается матрицами (M, N), $M = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Для однозначности будем считать, что $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ относительно линейного порядка в k. Перевыбор базиса сводится к преобразованиям подобия $(S^{-1}MS, S^{-1}NS)$. Будем делать лишь такие преобразования, которые сохраняют первую матрицу, т.е. $S^{-1}MS = M$. В этом случае S - любая невырожденная диагональная матрица. Поэтому i-й столбец матрицы N можно умножить на любое ненулевое число s_i, одновременно разделив i-ю строку на s_i.

Будем последовательно приводить элементы матрицы N, например, в следующем порядке:

$$b_{11}, b_{12}, ..., b_{1n}, b_{21}, b_{22}, ..., b_{2n}, b_{31}, ...,$$

причем с каждым следующим элементом b_{ij} будем делать лишь такие преобразования, которые не меняют уже приведенные предыдущие элементы. Если d_{ij} не меняется при таких преобразованиях, то будем считать его приведенным, если меняются, сделаем его равным 1. После приведения всех элементов получим пару матриц (M, N) канонического вида.

Такие канонические пары можно описать, используя метод работы [1]. По каждой такой паре определим орграф с множеством вершин $\{1, 2, ..., n\}$, в котором есть стрелка $i \to j$ тогда и только тогда, когда элемент b_{ij} менялся при допустимых преобразованиях (мы сделали его равным 1). Легко видеть, что полученный орграф является деревом и что все ордеревья с вершинами $1, 2, ..., n$ могут быть так получены. Например, ордереву

$$\begin{tikzcd} & 3 & \\ 1 & 2 \arrow[l] \arrow[u] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

соответствует каноническая пара матриц следующего вида:

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ 0 & & & \lambda_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\right),$$

где точками обозначены любые элементы поля k и $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$.

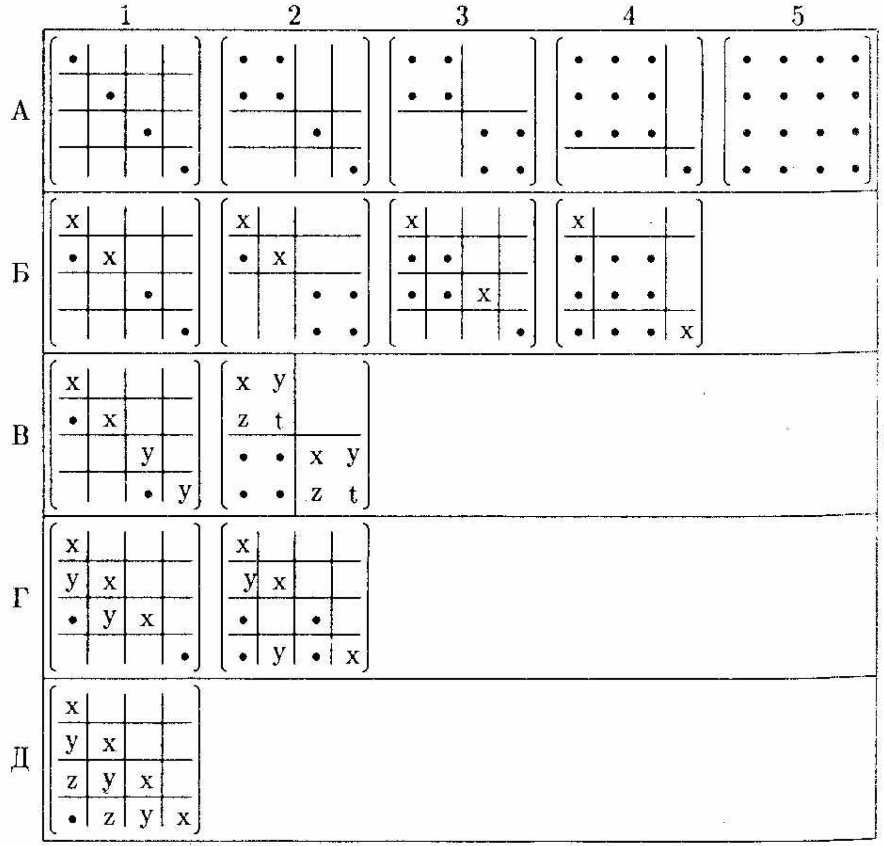
3. Есть алгоритмы (см., например, [2]), позволяющие по каждой паре $n \times n$-матриц (M, N) построить подобную ей пару $(\overline{M}, \overline{N})$ так, что по подобным парам (M, N), (M', N') строятся равные пары $(\overline{M}, \overline{N}) = (\overline{M'}, \overline{N'})$. С помощью такого алгоритма можно получить список канонических пар матриц для любого фиксированного n. Мы сделаем это для $n = 4$.

Первую матрицу M пары приведем к нормальной форме Жордана и затем переставим строки и столбцы так, чтобы коммутирующие с ней матрицы имели нижний блочно-треугольный вид без условий на блоки кроме, возможно, равенства блоков и равенства блока нулю. Матрица M приводится в точности к одной матрице из следующего списка (λ, μ, ν, τ любые попарно неравные элементы поля k):

	1	2	3	4	5
А	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\mu&&\\&&\nu&\\&&&\tau\end{pmatrix}$ $\lambda>\mu>\nu>\tau$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\mu&\\&&&\nu\end{pmatrix}$ $\mu>\nu$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\mu&\\&&&\mu\end{pmatrix}$ $\lambda>\mu$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\mu\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\&\lambda&&\\&&\lambda&\\&&&\lambda\end{pmatrix}$
Б	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&&\mu&\\&&&\nu\end{pmatrix}$ $\mu>\nu$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&&\mu&\\&&&\mu\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\0&\lambda&&\\1&0&\lambda&\\&&&\mu\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\0&\lambda&0&\\0&0&\lambda&\\1&0&0&\lambda\end{pmatrix}$	
В	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&&\mu&\\&&1&\mu\end{pmatrix}$ $\lambda>\mu$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\0&\lambda&&\\1&0&\lambda&\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}$			
Г	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&1&\lambda&\\&&&\mu\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\0&0&\lambda&\\0&1&0&\lambda\end{pmatrix}$			
Д	$\begin{pmatrix}\lambda&&&\\1&\lambda&&\\&1&\lambda&\\&&1&\lambda\end{pmatrix}$				

(1)

Коммутирующие с ней матрицы S имеют соответственно блочно-треугольный вид:



(2)

Соответственно разобьем и матрицу N на блоки. Будем приводить N преобразованиями подобия $S^{-1}NS$, сохраняющими матрицу M : $S^{-1}MS = M$. Матрица S имеет вид (2), поэтому все допустимые прибавления между блоками матрицы N осуществляются сверху вниз и ~~слева направо~~ справа налево. Будем последовательно приводить блоки N так, чтобы каждый раз приводился блок, к которому нет прибавлений из еще неприведенных блоков.

Чтобы избежать громоздкости, канонический вид матрицы N

будем находить с точностью до допустимых преобразований подобия $S^{-1}NS$ с диагональной матрицей S, доприведти ее такими преобразованиями нетрудно (см.п. 2).

Введем обозначения. Для каждой буквы x через x, x', x'' будем обозначать любые элементы поля k, удовлетворяющие условию $x' \neq x \neq x''$. Звездочкой обозначаем ненулевой элемент поля k, точкой – любой элемент. Для любых вектор-строк $v_1, ..., v_m, w_1, ...$ $..., w_m$ (возможно, разных размерностей) запись

$$\left(\begin{array}{c|c} v_1 & w_1 \\ \cdots & \cdots \\ v_m & w_m \end{array}\right)$$

означает, что либо $v_1 = 0, ..., v_m = 0$, либо $v_1 = 0, ..., v_{i-1} = 0, v_i \neq$ $\neq 0, w_i = 0$ для некоторого i. Через J обозначим матрицу в нормальной форме Жордана, блоки которой для однозначности упорядочены по собственным числам и размерностям.

Канонический вид пары (M, N) (с точностью до преобразований подобия с диагональной матрицей) состоит из матрицы M вида (1) и матрицы N, имеющей соответственно один из следующих видов:

Случай A1. $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$

Случай A2. $\underset{a > a'}{\begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & a' & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}}$, $\begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & b & \cdot \\ 1 & a & \alpha & \beta \\ \hline \gamma & d & \cdot & \cdot \\ \hline \delta & e & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha \\ c & \beta \\ d & \gamma \\ e & \delta \end{array}\right)$,

$$\begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 1 & \alpha \\ \hline \beta & c & \cdot & \cdot \\ \hline \gamma & d & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha \\ c & \beta \\ d & \gamma \end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ \hline \alpha & b & \cdot & \cdot \\ \hline \beta & c & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha \\ c & \beta \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \alpha & b & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} (b \,|\, \alpha), \quad \begin{array}{|cc|c|c|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

Случай A3. Все канонические матрицы типа $A2$ после замены их нижнего правого угла $\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$ на $\begin{array}{|cc|} \hline b & 0 \\ 0 & b' \\ \hline \end{array}$, $b < b'$, и все им транспонированные относительно побочной диагонали,

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & b & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & b \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & \cdot & 0 \\ 1 & a & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 1 & b & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & c & 0 \\ 1 & a & \alpha & d \\ \hline e & 0 & b & 0 \\ \beta & f & 1 & b \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} ce - df & \alpha, \beta \\ c\ , d & \alpha \\ e\ , f & \beta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ \hline 0 & * & b & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & b \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ \hline c & 0 & b & 0 \\ \alpha & d & 1 & b \\ \hline \end{array} (c - d \,|\, \alpha),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ \hline \alpha & c & b & 0 \\ \beta & d & 1 & b \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} c & \alpha \\ d & \beta \end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \hline 0 & * & b & 0 \\ \cdot & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|cc|cc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \hline c & 0 & b & 0 \\ \alpha & d & 1 & b \\ \hline \end{array} (c, d \,|\, \alpha), \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline a & 0 & \\ 0 & a & \smash{\raise{1ex}{0}} \\ \hline 1 & 0 & \begin{array}{cc} b & 0 \end{array} \\ 0 & \cdot & \begin{array}{cc} 1 & b \end{array} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|cc|c|} \hline a & 0 & \\ 0 & a & \smash{\raise{1ex}{0}} \\ \hline 0 & 0 & \begin{array}{cc} b & 0 \end{array} \\ \cdot & 0 & \begin{array}{cc} 1 & b \end{array} \\ \hline \end{array},$$

все матрицы, получаемые транспонированием относительно побочной диагонали канонических матриц $A3$ вида

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & & \\ 0 & a & & \\ \hline & & b & 0 \\ & & 1 & b \\ \hline\end{array}\,,\qquad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{\multirow{2}{*}{J}} & b & 0 \\ & & 0 & b \\ \hline\end{array}\,,\qquad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \hline 0 & * & b & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & b \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ \hline c & 0 & b & 0 \\ \alpha & d & 0 & b \\ \hline\end{array}\,(c,d\,|\,\alpha),\quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & a & & \\ \hline 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ \hline\end{array}\,,\quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & a & & \\ \hline 0 & 0 & b & 0 \\ \cdot & 0 & 0 & b \\ \hline\end{array}\,.$$

Случай А4. $$\underset{a>a'>a''}{\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a' & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & a'' & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}}\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a' & \cdot \\ \hline 0 & * & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & a' & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ \hline 0 & 0 & * & \cdot \\ \hline\end{array}\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ \hline \cdot & \alpha & b & \cdot \\ \hline\end{array}\,(b\,|\,\alpha)\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ \hline \alpha & b & c & \cdot \\ \hline\end{array}\,(b,c\,|\,\alpha)\,,$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & \cdot \\ \hline \beta & \alpha & b & \cdot \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{c}(b\,|\,\alpha,\beta)\\[1ex] (\alpha\,|\,\beta)\end{array}\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & a' & \cdot \\ \hline \alpha & b & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\,(b\,|\,\alpha)\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\,,$$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ \hline \alpha & \cdot & b & \cdot \\ \hline\end{array}\,(b\,|\,\alpha)\,,\qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdot \\ \hline \beta & \alpha & b & \cdot \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{c}(b\,|\,\alpha,\beta)\\[1ex] (\alpha\,|\,\beta)\end{array}\,.$$

Случай А5. J.

Случай Б1. $$\begin{array}{|cccc|}\hline d & c & b & a \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \varepsilon & e & \cdot & \cdot \\ \zeta & f & \cdot & \cdot \\ \hline\end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ b & \beta \\ c & \gamma \\ d-\gamma & \delta \\ e & \varepsilon \\ f & \zeta \end{array}\right).$$

Случай Б2. $$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & 1 & 0 \\ \beta & b & 0 & 1 \\ \hline \gamma & c & \varepsilon & e \\ \delta & d & \zeta & f \\ \hline\end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ \alpha-b & \beta \\ c & \gamma \\ \gamma-d & \delta \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon-f & \zeta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \hline d & c & b & a \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \\ \hline\end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ b-\alpha & \beta \\ c & \gamma \\ d & \delta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & 0 & 0 \\ \beta & b & 1 & 0 \\ \hline \gamma & c & e & d \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ \hline\end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ \alpha-b & \beta \\ c & \gamma \\ \varepsilon & \delta \end{array}\right)\quad \left(\begin{array}{c|c} d & \eta \\ e-\eta & \zeta \\ c & \varepsilon \\ \gamma & \delta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} \\ \beta & b & & \\ \hline 1 & 0 & \gamma & c \\ 0 & 1 & \delta & d \\ \hline\end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ \alpha-b & \beta \\ c & \gamma \\ \gamma-d & \delta \end{array}\right),$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} \cdot & \cdot & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \cdot & \cdot & & \\ \hline 0 & 0 & \alpha & a \\ 0 & 1 & \beta & b \end{array}\right| \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ \alpha - b & \Big| & \beta \end{pmatrix},$$

$$\left|\begin{array}{cc|cc} \alpha & a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \beta & b & & \\ \hline 0 & 0 & \gamma & c \\ 1 & 0 & \delta & d \end{array}\right| \begin{matrix} \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ \alpha - b & \Big| & \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} c & \Big| & \gamma \\ \gamma - d & \Big| & \delta \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \left|\begin{array}{cc|c} \alpha & a & 0 \\ \beta & b & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & J \end{array}\right| \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ \alpha - b & \Big| & \beta \end{pmatrix}.$$

Случай Б3. Будем перечеркивать нули, сделанные прибавлениями:

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \cdot & \emptyset & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \cdot \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{ccc|c} \emptyset & 1 & 0 & \cdot \\ \emptyset & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \emptyset & 1 & 0 & f \\ d & b & 0 & \epsilon \\ \beta & \emptyset & c & \gamma \\ \hline \cdot & \alpha & a & \cdot \end{array}\right| \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ (b-c)c+d & \Big| & \beta \\ (b-c)f-\epsilon & \Big| & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} c & 0 & 0 & a \\ \emptyset & b & 1 & \alpha \\ \beta & d & \emptyset & \cdot \\ \hline \gamma & c & f & \cdot \end{array}\right| \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ (b-c)c+d & \Big| & \beta \\ (b-c)f-c & \Big| & \gamma \end{pmatrix},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} \cdot & 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 & \emptyset \\ \alpha & \beta & c & \emptyset \\ \hline \cdot & \gamma & d & \cdot \end{array}\right| \begin{pmatrix} a & \Big| & \alpha \\ b-c & \Big| & \beta \\ d & \Big| & \gamma \end{pmatrix}, \quad \left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & b & 0 & \cdot \\ \beta & c & \cdot & \cdot \\ \hline \emptyset & \emptyset & 1 & \cdot \end{array}\right| \begin{pmatrix} a-b & \Big| & \alpha \\ c & \Big| & \beta \end{pmatrix},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ \alpha & \cdot & b & \emptyset \\ \hline \emptyset & * & 0 & \cdot \end{array}\right| (a-b\,|\,\alpha), \quad \left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ \beta & b & 0 & 1 \\ \alpha & d & c & \emptyset \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \end{array}\right| \begin{matrix} (a-c \;\;|\;\; \alpha) \\ \begin{pmatrix} a-b & \Big| & \beta \\ d & \Big| & \alpha \end{pmatrix} \end{matrix},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} c & 0 & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & a & \cdot \\ \hline \emptyset & 1 & 0 & \cdot \end{array}\right| \begin{matrix} (a-c \;\;|\;\; \alpha) \\ \begin{pmatrix} a-b & \Big| & \beta \\ d & \Big| & \alpha \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & a' & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & b & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \end{array}\right| \begin{matrix} (a-b\,|\,\alpha) \\ (a'-b)\,|\,\beta) \end{matrix},$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & a' & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ \alpha & c & a & \cdot \\ \hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \end{array}\right| (b,\, c\,|\,\alpha).$$

Случай Б4.
$$\underset{a > a'}{\left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & \emptyset & \emptyset & * \\ \hline \cdot & a & 0 & \emptyset \\ \cdot & 0 & a' & \emptyset \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|}, \quad \left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & \emptyset & \emptyset & * \\ \hline b & a & 0 & \emptyset \\ \alpha & 1 & a & \emptyset \\ \hline \cdot & \beta & c & \cdot \end{array}\right| \begin{pmatrix} b & \Big| & \alpha \\ c & \Big| & \beta \end{pmatrix},$$

$$\left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & \emptyset & \emptyset & * \\ \hline 0 & a & 0 & \emptyset \\ 1 & 0 & a & \emptyset \\ \hline \cdot & \alpha & b & \cdot \end{array}\right| (b \;\;|\;\; \alpha), \quad \left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & \emptyset & \emptyset & * \\ \hline 0 & a & 0 & \emptyset \\ 0 & 0 & a & \emptyset \\ \hline \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & 1 & 0 & 0 \\ \hline \emptyset & \cdot & \emptyset & * \\ \cdot & \emptyset & \cdot & \emptyset \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & 1 & 0 & 0 \\ \hline \emptyset & \emptyset & * & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c|cc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline b & \emptyset & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \hline \alpha & \emptyset & c & a' \end{array}\right| \left(\left(\tfrac{b-c}{a-a'}\right)^2 + \tfrac{b-c}{a-a'}a - b|\alpha \right),$$

$$\left|\begin{array}{c|cc|c} a & 1 & 0 & 0 \\ \hline b & \emptyset & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \hline \beta & \alpha & c & a \end{array}\right| (b-c\,|\,\alpha, \beta), \quad \left|\begin{array}{c|cc|c} \emptyset & 1 & 0 & 0 \\ \hline \emptyset & \emptyset & 1 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ \hline \alpha & \emptyset & \emptyset & d \end{array}\right| (-d^3+d^2c+db+a\,|\,\alpha),$$

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline a & 1 & 0 & 0\\ \hline b & \emptyset & 0 & 0\\ \beta & \emptyset & c & 0\\ \hline \gamma & \emptyset & \alpha & d\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c} c-d & \alpha\\ \beta & \gamma\end{array}\right)\\ \left(\begin{array}{c|c} -d^2+ad+b & \gamma\end{array}\right)\\ \left(\begin{array}{c|c} -c^2+ac+b & \beta\\ (-a+c+d)\alpha & \gamma\end{array}\right)\end{array},$$

все матрицы, получаемые транспонированием относительно побочной диагонали канонических матриц Б4 вида $\begin{array}{|c|cc|c|}\hline & 1 & 0 & 0\\ \hline & & & 0\\ & & & 0\\ \hline & & & \\ \hline\end{array}$,

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline b & 0 & 0 & 0\\ \hline \alpha & a & 0 & 0\\ \beta & 0 & a' & 0\\ \hline \varepsilon & \gamma & \delta & c\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c} b-a & \alpha\\ \gamma & \varepsilon\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} b-a' & \beta\\ \delta & \varepsilon\end{array}\right)\\ \left(\begin{array}{c|c} a-c & \gamma\\ \alpha & \varepsilon\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a'-c & \delta\\ \beta & \varepsilon\end{array}\right),\\ \left(\begin{array}{c|c} b-c & \varepsilon\end{array}\right)\end{array}$$

$a > a'$

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline a' & 0 & 0 & 0\\ \hline \emptyset & a & 0 & 0\\ \emptyset & \cdot & a & 0\\ \hline \alpha & \emptyset & \emptyset & a''\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a'-a'' & \alpha\end{array}\right), \qquad \begin{array}{|c|cc|c|}\hline a' & 0 & 0 & 0\\ \hline \emptyset & a & 0 & 0\\ \emptyset & \cdot & a & 0\\ \hline \emptyset & 0 & \cdot & a\\ \hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0\\ \hline \cdot & a & 0 & 0\\ 0 & \cdot & a & 0\\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & a'\\ \hline\end{array}, \qquad \begin{array}{|c|cc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0\\ \hline b & a & 0 & 0\\ \emptyset & 1 & a & 0\\ \hline \alpha & \emptyset & c & a\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} b, c & \alpha\end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|c|cc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & a & 0 & 0\\ 1 & 0 & a & 0\\ \hline \emptyset & \alpha & b & a\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha\end{array}\right), \qquad \begin{array}{|c|cc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & a & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 0\\ \hline \alpha & b & 0 & a\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha\end{array}\right).$$

Случай В1. $\begin{array}{|cc|cc|}\hline \cdot & \cdot & \emptyset & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset\\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \hline\end{array}, \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \hline \emptyset & 1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \emptyset & \cdot & \cdot\\ \hline\end{array},$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline g & f & 1 & 0\\ \varepsilon & \delta & \emptyset & c\\ \hline d & 0 & b & a\\ \gamma & e & \beta & \alpha\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha\\ b-\alpha & \beta\\ d-ec & \gamma\\ fc & \delta\\ (g-\delta)c & \varepsilon\end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & 0 & 0\\ \beta & b & \emptyset & 1\\ \hline \cdot & 0 & \cdot & \cdot\\ \gamma & c & \cdot & \cdot\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha\\ \alpha-b & \beta\\ c & \gamma\end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & 0 & 0\\ \beta & b & \cdot & 0\\ \hline 1 & 0 & \gamma & d\\ \emptyset & c & \delta & e\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha\\ \alpha-b & \beta\\ dc & \gamma\\ (\gamma-e)c & \delta\end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \cdot & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha & a\\ \emptyset & 1 & \beta & b\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha\\ \alpha-b & \beta\end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \alpha & a & 0 & 0\\ \beta & b & \cdot & 0\\ \hline 0 & 0 & \gamma & c\\ \cdot & 0 & \delta & d\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{c}\left(\begin{array}{c|c} a & \alpha\\ \alpha-b & \beta\end{array}\right)\\ \\ \left(\begin{array}{c|c} c & \gamma\\ \gamma-d & \delta\end{array}\right)\end{array}$$

Случай В2. $\begin{array}{|cc|cc|}\hline \emptyset & \emptyset & a & 0\\ c & b & 0 & a'\\ \hline \cdot & \delta & \cdot & d\\ \gamma & \beta & \emptyset & \alpha\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} a' & \alpha\\ b-\alpha & \beta\\ c & \gamma\\ d & \delta\end{array}\right),$

$a \neq 0,\ a > a'$ при $a' \neq 0$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\multirow{2}{*}{$\emptyset$}} & a & 0\\ & & 1 & a\\ \hline e & d & c & b\\ \delta & \gamma & \beta & \alpha\\ \hline\end{array} \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha\\ c-\alpha & \beta\\ d & \gamma\\ e-\gamma & \delta\end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \emptyset & * & 0 & 0\\ \emptyset & \emptyset & 1 & 0\\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \emptyset & \emptyset & \cdot\\ \hline\end{array},$$

$a \neq 0$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & \cdot & 1 & 0 \\ \hline \emptyset & \cdot & \emptyset & * \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \emptyset \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|cc|cc|}\hline d & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 0 \\ \hline \beta & a & b & 0 \\ \gamma & \alpha & \emptyset & c \\ \hline \end{array} \; \left(\begin{array}{c|r} a+bc-c^2 & \alpha \\ a+bd-d^2 & \beta \\ \beta-\alpha & \gamma \end{array}\right)$$

$$(\, d-c \mid \gamma\,)$$

,

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\emptyset} & a & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & a \\ \hline \cdot & \cdot & b & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & b' \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\emptyset} & a & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & a \\ \hline d & c & b & 0 \\ \beta & \alpha & 1 & b \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} c & \alpha \\ d-\alpha & \beta \end{array}\right), \quad \begin{array}{|cc|cc|}\hline \multicolumn{2}{|c|}{\emptyset} & a & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & a \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{J} & b & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & b \\ \hline \end{array},$$

$$a \neq 0,\ b > b' \qquad\qquad a \neq 0 \qquad\qquad\qquad a \neq 0$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a' & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \emptyset & \emptyset & b & 1 \\ \alpha & \beta & d & c \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\,(a-b)(a-c)-d \mid \alpha\,) \\ (\,(a'-b)(a'-c)-d \mid \beta\,) \end{array},$$

$$a > a'$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a' & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \alpha & \beta & b & 0 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & c \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\,(a-b)(a-c) \mid \alpha\,) \\ (\,(a'-b)(a'-c) \mid \beta\,) \end{array},$$

$$a > a'$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a' & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \alpha & \beta & b & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & c \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\, a-b \mid \alpha\,) \\ (\, a'-b \mid \beta\,) \\ (\, a-c \mid \gamma\,) \\ (\, a'-c \mid \delta\,) \end{array},$$

$$a > a'$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 1 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & b \\ \beta & \alpha & d & c \\ \hline \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|c} a^2-ac-bd & \alpha, \beta \\ 2a-c & \beta \end{array}\right),$$

$$b \neq 0$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 1 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \emptyset & \alpha & b & 0 \\ \emptyset & \beta & \emptyset & b' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\, a-b \mid \alpha\,) \\ (\, a-b' \mid \beta\,) \end{array},$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 1 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \emptyset & \alpha & b & 0 \\ \emptyset & \beta & c & b \\ \hline \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|c} a-b & \alpha, \beta \\ \alpha(c-1) & \beta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \alpha & \beta & b & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & b' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} (\, a-b \mid \alpha, \beta\,) \\ (\, a-b' \mid \gamma, \delta\,) \end{array},$$

$$b > b'$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \beta & \alpha & b & 0 \\ \emptyset & \emptyset & 1 & b \\ \hline \end{array} \quad \left(\begin{array}{c|c} a-b & \alpha, \beta \\ \alpha & \beta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{\emptyset} & a' & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & a' \\ \hline \end{array}, \qquad \begin{array}{|cc|cc|}\hline a & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} \\ 0 & a & \multicolumn{2}{c|}{} \\ \hline \multicolumn{2}{|c|}{J} & a & 0 \\ \multicolumn{2}{|c|}{} & 0 & a \\ \hline \end{array}.$$

Случай Г1. $\begin{array}{|ccc|c|}\hline \emptyset & \emptyset & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|ccc|c|}\hline \emptyset & * & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \emptyset & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|ccc|c|}\hline \cdot & 0 & 0 & \cdot \\ \emptyset & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array},$

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & \cdot \\ \alpha & b & 0 & \cdot \\ \emptyset & \beta & a' & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \left(\begin{array}{c|c} a-b & \alpha \\ a'-b & \beta \end{array}\right), \quad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & \emptyset \\ \cdot & \cdot & a & \emptyset \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|ccc|c|}\hline a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \hline \emptyset & \emptyset & 1 & \cdot \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & a' & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & a & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \hline \end{array}\,,\quad \begin{array}{|ccc|c|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ d & a & 0 & b \\ \gamma & e & a & \alpha \\ \hline \beta & c & 0 & \cdot \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha \\ c & \beta \\ d-e & \gamma \end{array}\right).$$

Случай Г2. $$\begin{array}{|cccc|} \hline \emptyset & \emptyset & \emptyset & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\underset{a\neq 0}{\begin{array}{|cccc|} \hline \gamma & a' & b & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \delta & \alpha & d & \cdot \\ \beta & \cdot & c & \cdot \\ \hline \end{array}}\quad \left(\begin{array}{c|c} a' & \alpha \\ c & \beta \\ b & \gamma \\ \gamma-d & \delta \end{array}\right),$$

$$\underset{a\neq 0}{\begin{array}{|cccc|} \hline \emptyset & a & b & 0 \\ \emptyset & d & \emptyset & a \\ g & \alpha & e & c \\ \delta & \gamma & \beta & f \\ \hline \end{array}}\quad \left(\begin{array}{c|c} a^2+bc & \alpha \\ d-e+f & \beta \\ \alpha b-af & \gamma \\ a\gamma+c\beta-df-bg & \delta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline \alpha & c & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \emptyset & 0 \\ e & d & \emptyset & a \\ \gamma & \beta & \emptyset & b \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ bc+d & \beta \\ b^2-b\alpha-e & \gamma \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline \cdot & * & 0 & 0 \\ \cdot & \emptyset & \cdot & 0 \\ c & \emptyset & \alpha & a \\ \gamma & \emptyset & \beta & b \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ \alpha-b & \beta \\ c & \gamma \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline b & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \cdot & a & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 \\ \beta & \cdot & d & c \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a & \alpha \\ b^2-bc-d & \beta \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & b & 1 & 0 \\ \beta & e & c & 0 \\ \gamma & \alpha & \emptyset & d \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} (b-d)(c-d)-e & \alpha \\ [(a-b)(a-c)-e](c-d) & \beta \\ \alpha(c-d)+\beta & \gamma \end{array}\right), \quad (\,a-d \mid \gamma\,)$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & a' & 0 & 0 \\ \alpha & \cdot & b & 0 \\ \beta & \cdot & \emptyset & b' \\ \hline \end{array}\quad (\,a-b \mid \alpha\,)\quad (\,a-b' \mid \beta\,),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & a' & 0 & 0 \\ \alpha & d & b & 0 \\ \gamma & \beta & c & b \\ \hline \end{array}\quad \left(\begin{array}{c|c} a-b & \alpha,\gamma \\ c & \gamma \end{array}\right)\quad \left(\begin{array}{c|c} d & \beta \\ \alpha & \gamma \end{array}\right),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a'' & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a'' & 0 & 0 \\ \alpha & \cdot & a' & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a \\ \hline \end{array}\quad (\,a'-a'' \mid \alpha\,),$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ \emptyset & \cdot & a' & 0 \\ \alpha & c & \emptyset & a \\ \hline \end{array}\quad (\,b-c \mid \alpha\,),\quad \begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \emptyset & \cdot & a' & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \cdot & a' \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \emptyset & 1 & a & 0 \\ \alpha & \emptyset & b & a \\ \hline \end{array}\,(\,b \mid \alpha\,),\quad \begin{array}{|cccc|} \hline a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ \alpha & d & e & a \\ \hline \end{array}\,(\,b-d,c,e \mid \alpha\,).$$

Случай Д1. $$\begin{array}{|cccc|} \hline \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \hline \end{array}\,,\quad \begin{array}{|cccc|} \hline \emptyset & \emptyset & * & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \emptyset & \cdot \\ \hline \end{array}\,,\quad \begin{array}{|cccc|} \hline \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \emptyset & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \\ \hline \end{array}\,,$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \emptyset & a & 0 & 0 \\ \alpha & d & b & 0 \\ \gamma & \beta & e & c \\ \delta & \emptyset & f & g \end{array}} \quad \left(\begin{array}{c|c} b & \alpha \\ a-c & \beta \\ d-e-g & \gamma \\ a(\alpha-f)+eg & \delta \end{array}\right),$$
$$a \neq 0$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \emptyset \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & * & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha & \cdot & \cdot & b \end{array}} \quad (a-b \mid \alpha),$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ \emptyset & a' & 0 & 0 \\ \alpha & \cdot & b & 0 \\ \gamma & \beta & d & c \end{array}} \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} a-b & \alpha \\ a'-c & \beta \\ d & \gamma \end{array}\right) \\ (a-c \mid \gamma) \end{array},$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \emptyset & \emptyset & a' & 0 \\ \alpha & \cdot & \cdot & b \end{array}} \quad (a-b \mid \alpha), \quad \boxed{\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & a & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & a & 0 \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & a' \end{array}},$$

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ \alpha & c & a & 0 \\ \gamma & \beta & d & a \end{array}} \quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} b-c & \alpha \\ c-d & \beta \\ \alpha-\beta & \gamma \end{array}\right) \\ (b-d \mid \gamma) \end{array}.$$

Список литературы

[1] *Сергейчук В.В.* Классификация линейных операторов в конечномерном унитарном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. – 1984. – **18**, N 3. – С. 57–62.

[2] *Белицкий Г.Р.* Нормальные формы матриц // Анализ в бесконечномерных пространствах и теория операторов: Сб. науч. трудов. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 3–15.

УДК 512.643

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ †

П.М.ГУДИВОК (1)

(1) Ужгородский университет
294000 Ужгород
ул. М.Горького 46
Украина

Реферат

Показывается, что задача описания с точностью до эквивалентности произвольных квадратных матриц над некоторыми коммутативными кольцами является дикой, т.е. включает задачу о классификации с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над некоторым полем (n – произвольное натуральное число). Устанавливается также дикость задачи описания с точностью до подобия произвольных квадратных матриц над областями целостности, не являющимися полями.

Показується, що задача описання з точністю до еквівалентності довільних квадратних матриць над деякими комутативними кільцями є дикою, тобто включає задачу про класифікацію з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над деяким полем (n – довільне натуральне число). Встановлюється також дикість задачі описання з точністю до подібності довільних квадратних матриць над областями цілісності, які не є полями.

† Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований при ГКНТ Украины.

Получено 05.11.92.