

**ЕКВІВАЛЕНТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ І ЗВАЖЕНА  $H_\infty$ -ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМ**

We study the problem of generalized  $H_\infty$ -control for a class of linear descriptor systems with nonzero initial vector. We use a generalized performance measure characterizing the weighted level of damping of external and initial disturbances. A nondegenerate transformation of the system is proposed, which allows us to apply well-known methods for the evaluation and attainment of the desired performance criteria for conventional lower-order systems. A numerical example of a controlled hydraulic system with three tanks is presented.

Досліджується проблема узагальненого  $H_\infty$ -керування для класу лінійних дескрипторних систем із ненульовим початковим вектором. При цьому використано узагальнений критерій якості, що характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень. Запропоновано невироджене перетворення системи, яке дозволяє застосовувати відомі методи оцінки та досягати бажаних критеріїв якості для звичайних систем меншого порядку. Наведено числовий приклад керованої гідравлічної системи з трьома резервуарами.

**1. Вступ.** У сучасній теорії керування велику увагу приділяють дескрипторним (диференціально-алгебраїчним) системам, які застосовуються при моделюванні руху об'єктів механіки, робототехніки, енергетики, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [1–4]). Рівняння руху, входів та виходів керованих об'єктів можуть містити невизначені елементи (параметри, зовнішні збурення, неточності вимірів тощо), які обумовлюють необхідність розв'язання проблем робастної стабілізації та мінімізації впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів.

Типовим критерієм якості у задачах  $H_\infty$ -оптимізації систем з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне відношення  $L_2$ -норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. Для класу лінійних дескрипторних систем

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad (1)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$  і  $w \in \mathbb{R}^s$  — вектори відповідно стану, контрольованого виходу і збурень, ця характеристика збігається з  $H_\infty$ -нормою матричної передавальної функції  $\|\mathcal{H}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}(\mathcal{H}(i\omega))$ . Тут  $\mathcal{H}(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D$ , а  $\sigma_{\max}(\cdot)$  — максимальне сингулярне число матриці. На практиці доцільно застосовувати узагальнений критерій якості [5]

$$J = \sup_{\{w, x_0\} \in \mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \quad (2)$$

де  $x_0 = x(0)$  — початковий вектор,  $\|z\|_Q$  і  $\|w\|_P$  — зважені  $L_2$ -норми відповідних векторів  $z$  і  $w$  вигляду

$$\|z\|_Q = \sqrt{\int_0^\infty z^\top Q z \, dt}, \quad \|w\|_P = \sqrt{\int_0^\infty w^\top P w \, dt},$$

<sup>1</sup> E-mails: mazkoag@gmail.com, mazko@imath.kiev.ua.

$\mathcal{W}$  — множина допустимих пар  $\{w, x_0\}$  системи, для яких виконується нерівність  $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$ , а  $P = P^\top > 0$ ,  $Q = Q^\top > 0$  і  $X_0 = E^\top H E$  — задані вагові матриці, причому  $H = H^\top > 0$  (див. також [6, 7]). Вираз (2) при  $x_0 \in \text{Ker } E$  позначимо як  $J_0$ . Очевидно, що  $J_0 \leq J$ . Якщо  $P = I_s$  і  $Q = I_k$ , то  $J_0 = \|\mathcal{H}\|_\infty$ . Значення  $J$  характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених невідомим початковим вектором.

Відомі методи синтезу  $H_\infty$ -керування використовують верхні оцінки відповідних критеріїв якості, сформульовані у термінах розв'язків квадратичних матричних рівнянь типу Ріккати та лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [8–12]. Для класу лінійних дескрипторних систем такі оцінки встановлено в [13–16]. З відомими методами  $H_\infty$ -оптимізації дескрипторних систем можна ознайомитись, наприклад, в [3, 5, 13, 15, 17].

У цій статті запропоновано новий підхід до розв'язання узагальненої проблеми  $H_\infty$ -керування для лінійних дескрипторних систем з критеріями якості типу (2) на основі невикористаного перетворення таких систем до звичайних і застосування відомих методів синтезу статичних та динамічних регуляторів. Як наслідок, у ряді випадків відповідні алгоритми синтезу керувань базуються на розв'язанні ЛМН без додаткових рангових обмежень. Зокрема, порядок шуканого динамічного регулятора у таких алгоритмах синтезу не перевищує рангу матриці при похідних вихідної системи. Також відмітна особливість отриманих результатів порівняно з відомими полягає у застосуванні зважених критеріїв якості, які дають нові можливості при досягненні бажаних характеристик дескрипторних систем. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування.

Слід зазначити, що для розв'язання ЛМН створено достатньо ефективні комп'ютерні засоби, наприклад LMI Toolbox системи MATLAB [18]. Для розв'язання ЛМН з ранговими обмеженнями можна застосувати засоби LMIRank і YALMIP системи MATLAB [19, 20] або блок розв'язку (Solve Block) системи Mathcad Prime.

Будемо використовувати такі позначення:  $I_n$  — одинична матриця порядку  $n$ ;  $0_{n \times m}$  — нульова матриця розмірів  $n \times m$ ;  $X = X^\top > 0$  ( $\geq 0$ ) — додатно (невід'ємно) визначена матриця  $X$ ;  $\sigma(A)$  — спектр матриці  $A$ ;  $A^{-1}(A^+)$  — обернена (псевдообернена) матриця;  $\text{Ker } A$  — ядро матриці  $A$ ;  $W_A$  — матриця повного рангу, стовпці якої утворюють базис ядра матриці  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , тобто  $AW_A = 0$ ,  $W_A \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ , де  $r = \text{rank } A < m$ ;  $\|w\|_P$  — зважена  $L_2$ -норма вектор-функції  $w(t)$ ;  $\mathbb{C}^-$  — відкрита півплощина  $\text{Re } \lambda < 0$ .

**2. Означення і допоміжні твердження.** Розглянемо дескрипторну систему (1), де  $\text{rank } E = r < n$ , і її критерій якості (2). Система (1) називається *допустимою*, якщо пара матриць  $\{E, A\}$  *регулярна, стійка і неімпульсна*, тобто відповідно  $\det F(\lambda) \neq 0$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ),  $\sigma(F) \subset \mathbb{C}^-$  і  $\deg \{\det F(\lambda)\} = r = \alpha$ , де  $\sigma(F) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha\}$  — скінченний спектр в'язки матриць  $F(\lambda) = A - \lambda E$  (див., наприклад, означення 2.4 із [3], а також [2, с. 57–113]). Система (1) називається *внутрішньо стійкою*, якщо вона стійка у відсутності збурень ( $w \equiv 0$ ).

Пара матриць  $\{E, A\}$  є регулярною тоді й лише тоді, коли існують невикористані матриці  $L$  і  $R$ , що перетворюють її до канонічної форми Вессертрасса [21]

$$LER = \begin{bmatrix} I_\alpha & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-\alpha} \end{bmatrix},$$

де  $A_1$  — матриця, спектр якої збігається з  $\sigma(F)$ ,  $N$  — нільпотентна матриця, елементи верхньої наддіагоналі якої дорівнюють 0 або 1, а інші елементи нульові. При цьому система (1) має  $\alpha$  скінченних динамічних мод,  $n - r$  нединамічних мод і  $r - \alpha$  імпульсних мод. Отже, система (1) внутрішньо стійка і неімпульсна, якщо, відповідно,  $\sigma(A_1) \subset \mathbb{C}^-$  і  $N = 0$ . Якщо ж  $N \neq 0$ , то ця система (або пара  $\{E, A\}$ ) є імпульсною. Критерієм відсутності імпульсних мод у системі є рангова умова [2]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + r. \quad (3)$$

Нехай  $E = E_1 E_2^\top$  — скелетна декомпозиція матриці  $E$ , де  $E_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$  — матриці повного рангу  $r$ , а  $E_i^\perp \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$  — відповідні ортогональні доповнення, що задовольняють співвідношення  $E_i^\top E_i^\perp = 0$  і  $\det \begin{bmatrix} E_i & E_i^\perp \end{bmatrix} \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Виконаємо невироджене перетворення системи (1) на основі співвідношень

$$LER = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad LAR = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad x = R \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де

$$L = \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^{\perp+} \end{bmatrix}, \quad R = [E_2^{+\top} \quad E_2^{\perp+\top}],$$

$$A_1 = E_1^+ A E_2^{+\top}, \quad A_2 = E_1^+ A E_2^{\perp+\top}, \quad A_3 = E_1^{\perp+} A E_2^{+\top}, \quad A_4 = E_1^{\perp+} A E_2^{\perp+\top}.$$

Оскільки  $E_i^+ = (E_i^\top E_i)^{-1} E_i^\top$  і  $E_i^{\perp+} = (E_i^{\perp\top} E_i^\perp)^{-1} E_i^{\perp\top}$ ,  $i = 1, 2$ , то

$$L^{-1} = [E_1 \quad E_1^\perp], \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} E_2^\top \\ E_2^{\perp\top} \end{bmatrix}, \quad \xi_1 = E_2^\top x, \quad \xi_2 = E_2^{\perp\top} x.$$

Неважко переконатися, що умова (3) еквівалентна нерівності  $\det A_4 \neq 0$ , тобто

$$\det (E_1^{\perp\top} A E_2^\perp) \neq 0. \quad (5)$$

Виключаючи змінну  $\xi_2 = -A_4^{-1}(A_3 \xi_1 + B_2 w)$  за умови (5), на основі перетворення (4) отримуємо звичайну систему

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A} \xi_1 + \bar{B} w, \quad z = \bar{C} \xi_1 + \bar{D} w, \quad \xi_1(0) = \xi_{10}, \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3, & \bar{B} &= B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2, & \bar{C} &= C_1 - C_2 A_4^{-1} A_3, & \bar{D} &= D - C_2 A_4^{-1} B_2, \\ B_1 &= E_1^+ B, & B_2 &= E_1^{\perp+} B, & C_1 &= C E_2^{+\top}, & C_2 &= C E_2^{\perp+\top}. \end{aligned}$$

Зазначимо, що спектр матриці  $\bar{A}$  збігається з  $\sigma(F)$ , а критерії якості  $J_0$  і  $J$  неімпульсної системи (1) не залежать від  $\xi_2$  і визначаються системою (6), оскільки

$$\begin{bmatrix} I_r & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} L F(\lambda) R \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -A_4^{-1} A_3 & I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} - \lambda I_r & 0 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix},$$

$$x_0^\top X_0 x_0 = \begin{bmatrix} \xi_{10}^\top & \xi_{20}^\top \end{bmatrix} R^\top E^\top L^\top L^{-1\top} H L^{-1} L E R \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ \xi_{20} \end{bmatrix} = \xi_{10}^\top \bar{H} \xi_{10},$$

де  $\bar{H} = E_1^\top H E_1$ .

Отже, застосовуючи лему 4.1 із [22] до системи (6), отримуємо таке твердження.

**Лема 1.** Система (1) є допустимою і має критерій якості  $J < \gamma$  тоді й лише тоді, коли виконується умова (5) і система ЛМН

$$\bar{\Omega}(X) = \begin{bmatrix} \bar{A}^\top X + X \bar{A} & X \bar{B} & \bar{C}^\top \\ \bar{B}^\top X & -\gamma^2 P & \bar{D}^\top \\ \bar{C} & \bar{D} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$0 < X < \gamma^2 \bar{H}, \quad (8)$$

сумісна щодо  $X$ . Для того щоб система (1) була допустимою з критерієм якості  $J_0 < \gamma$ , необхідно і достатньо виконання умов (5), (7) і  $X > 0$ .

Із леми 1 випливають алгоритми обчислення характеристик  $J$  і  $J_0$  системи (1) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач з обмеженнями винятково в термінах ЛМН:

$$J = \inf \{ \gamma : \bar{\Omega}(X) < 0, 0 < X < \gamma^2 \bar{H} \}, \quad J_0 = \inf \{ \gamma : \bar{\Omega}(X) < 0, X > 0 \}.$$

Вектор збурення  $w(t)$  і початковий вектор  $x_0$  називатимемо *найгіршими* в системі (1) щодо критерію якості  $J$ , якщо на їхніх значеннях в (2) досягається супремум, тобто  $\|z\|_Q^2 = J^2(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0)$ . Методи знаходження таких векторів у окремих випадках запропоновано в [6, 23, 24].

Наведемо інший спосіб знаходження найгірших векторів  $w(t)$  і  $x_0$  неімпульсної системи (1) щодо критерію якості  $J$  із застосуванням перетворення (4). За умови (5) найгірший початковий вектор будуюмо у вигляді

$$x_0 = R \begin{bmatrix} \xi_{10} \\ -A_4^{-1}(A_3 \xi_{10} + B_2 w(0)) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

де  $\{w(t), \xi_{10}\}$  — найгірша пара системи (6) щодо критерію якості  $J$ .

**Лема 2.** Нехай  $X > 0$  — стабілізуючий розв'язок рівняння Ріккати

$$\bar{A}_0^\top X + X \bar{A}_0 + X \bar{R}_0 X + \bar{Q}_0 = 0, \quad (10)$$

де  $\bar{A}_0 = \bar{A} + \bar{B} \bar{R}_1^{-1} \bar{D}^\top Q \bar{C}$ ,  $\bar{Q}_0 = \bar{C}^\top (Q + Q \bar{D} \bar{R}_1^{-1} \bar{D}^\top Q) \bar{C}$ ,  $\bar{R}_0 = \bar{B} \bar{R}_1^{-1} \bar{B}^\top$ ,  $\bar{R}_1 = \gamma^2 P - \bar{D}^\top Q \bar{D} > 0$  і  $\gamma = J$ . Тоді структурований вектор зовнішніх збурень

$$w = \bar{K}_* \xi_1, \quad \bar{K}_* = \bar{R}_1^{-1} (\bar{B}^\top X + \bar{D}^\top Q \bar{C}), \quad (11)$$

де  $\xi_1(t)$  — розв'язок системи

$$\dot{\xi}_1 = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}_*)\xi_1, \quad \xi_1(0) = \xi_{10}, \quad (12)$$

і довільний вектор (9) при  $\xi_{10} \in \text{Ker}(X - J^2\bar{H})$  є найгіршими щодо критерію якості  $J$  для системи (1).

Якщо  $X > 0$  — стабілізуючий розв'язок рівняння (10) при  $\gamma = J_0$ , а  $\xi_1(t)$  — розв'язок системи (12) при  $\xi_{10} = 0$ , то (11) є найгіршим збуренням щодо критерію якості  $J_0$  для системи (1).

### 3. Основні результати. Розглянемо дескрипторну систему керування

$$E\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u, \quad z = C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \quad y = C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \quad (13)$$

де  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $w \in \mathbb{R}^s$ ,  $z \in \mathbb{R}^k$  і  $y \in \mathbb{R}^l$  — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, контрольованого і спостережуваного виходів. Всі матричні коефіцієнти в (13) сталі, причому пара  $\{E, A\}$  регулярна, неімпульсна і  $\text{rank } E = r < n$ . Компонентами вектора  $w(t)$  можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки спостережуваного виходу. Цей вектор має бути обмеженим за зваженою  $L_2$ -нормою. Початкові збурення в системі обумовлені невідомим вектором початкового стану  $x_0$ .

Нас цікавлять стабілізуючі закони керування, які гарантують внутрішню стійкість замкненої системи та задану оцінку її критерію якості (2) стосовно контрольованого виходу  $z$ . Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості  $J$ , називатимемо  $J$ -оптимальними. Пошук  $J$ -оптимальних регуляторів можна здійснювати на основі досягнення верхньої оцінки  $J < \gamma$  при мінімально можливому значенні  $\gamma$ .

При дослідженні класу систем (13) використовуються спеціальні типи їхньої керованості та відповідні двоїсті властивості спостережуваності (див., наприклад, [3]). Зокрема, для розв'язання узагальненої задачі  $H_\infty$ -оптимізації необхідно, щоб трійка матриць  $\{E, A, B_2\}$  була стабілізовною та імпульсно керованою. Це означає, що повинна існувати така матриця  $K$ , щоб пара матриць  $\{E, A + B_2K\}$  була допустимою. Критеріями імпульсної керованості трійки  $\{E, A, B_2\}$  та імпульсної спостережуваності трійки  $\{E, A, C_2\}$  є відповідні рівності [25]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_2 \end{bmatrix} = n + r, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = n + r. \quad (14)$$

Виконання цих співвідношень забезпечує існування керувань за виходом, при яких замкнена система є неімпульсною.

Застосуємо до системи (13) еквівалентне перетворення (4). Виключаючи змінну  $\xi_2 = -A_4^{-1}(A_3\xi_1 + B_{12}w + B_{22}u)$  за умови (5), отримуємо звичайну систему

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A}\xi_1 + \bar{B}_1w + \bar{B}_2u, \quad z = \bar{C}_1\xi_1 + \bar{D}_{11}w + \bar{D}_{12}u, \quad y = \bar{C}_2\xi_1 + \bar{D}_{21}w + \bar{D}_{22}u, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, & \bar{B}_1 &= B_{11} - A_2A_4^{-1}B_{12}, & \bar{B}_2 &= B_{21} - A_2A_4^{-1}B_{22}, \\ \bar{C}_1 &= C_{11} - C_{12}A_4^{-1}A_3, & \bar{D}_{11} &= D_{11} - C_{12}A_4^{-1}B_{12}, & \bar{D}_{12} &= D_{12} - C_{12}A_4^{-1}B_{22}, \\ \bar{C}_2 &= C_{21} - C_{22}A_4^{-1}A_3, & \bar{D}_{21} &= D_{21} - C_{22}A_4^{-1}B_{12}, & \bar{D}_{22} &= D_{22} - C_{22}A_4^{-1}B_{22}, \end{aligned}$$

$$LB_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad LB_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}, \quad C_1 R = [C_{11} \quad C_{12}], \quad C_2 R = [C_{21} \quad C_{22}].$$

В означенні критерію якості (2) цієї системи використовуємо вираз  $x_0^\top X_0 x_0 = \xi_{10}^\top \bar{H} \xi_{10}$ , де  $\xi_{10} = \xi_1(0)$ ,  $\bar{H} = E_1^\top H E_1$  (див. попередній пункт).

Таким чином, задачі  $J_0$ - та  $J$ -оптимізації дескрипторної системи (13) з неімпульсною парою  $\{E, A\}$  зводяться до розв'язання аналогічних задач для звичайної системи (15).

**3.1. Статичний регулятор.** Для системи (15) побудуємо статичний регулятор за спостережуваним виходом

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times l}. \quad (16)$$

Замкнена система за умови  $\det(I_m - K\bar{D}_{22}) \neq 0$  має вигляд

$$\dot{\xi}_1 = A_* \xi_1 + B_* w, \quad z = C_* \xi_1 + D_* w, \quad (17)$$

де  $A_* = \bar{A} + \bar{B}_2 K_0 \bar{C}_2$ ,  $B_* = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 K_0 \bar{D}_{21}$ ,  $C_* = \bar{C}_1 + \bar{D}_{12} K_0 \bar{C}_2$ ,  $D_* = \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} K_0 \bar{D}_{21}$  і  $K_0 = (I_m - K\bar{D}_{22})^{-1} K$ . Керування (16) будемо застосовувати також для вихідної системи (13).

Запишемо матричну нерівність (7) для системи (17) як ЛМН щодо  $K_0$ :

$$L_0^\top K_0 R_0 + R_0^\top K_0^\top L_0 + \Omega < 0, \quad (18)$$

де

$$R_0 = [\bar{C}_2 \quad \bar{D}_{21} \quad 0_{l \times k}], \quad L_0 = [\bar{B}_2^\top X \quad 0_{m \times s} \quad \bar{D}_{12}^\top],$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \bar{A}^\top X + X \bar{A} & X \bar{B}_1 & \bar{C}_1^\top \\ \bar{B}_1^\top X & -\gamma^2 P & \bar{D}_{11}^\top \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи відомий критерій сумісності матричних нерівностей типу (18) [11], отримуємо співвідношення

$$W_{\bar{R}}^\top \begin{bmatrix} \bar{A}^\top X + X \bar{A} + \bar{C}_1^\top Q \bar{C}_1 & X \bar{B}_1 + \bar{C}_1^\top Q \bar{D}_{11} \\ \bar{B}_1^\top X + \bar{D}_{11}^\top Q \bar{C}_1 & \bar{D}_{11}^\top Q \bar{D}_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix} W_{\bar{R}} < 0, \quad (19)$$

$$W_{\bar{L}}^\top \begin{bmatrix} \bar{A} Y + Y \bar{A}^\top + \bar{B}_1 P^{-1} \bar{B}_1^\top & Y \bar{C}_1^\top + \bar{B}_1 P^{-1} \bar{D}_{11}^\top \\ \bar{C}_1 Y + \bar{D}_{11} P^{-1} \bar{B}_1^\top & \bar{D}_{11} P^{-1} \bar{D}_{11}^\top - \gamma^2 Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\bar{L}} < 0, \quad (20)$$

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_r \\ \gamma I_r & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank } W = r, \quad (21)$$

де  $\bar{R} = [\bar{C}_2 \quad \bar{D}_{21}]$ ,  $\bar{L} = [\bar{B}_2^\top \quad \bar{D}_{12}^\top]$  (див. теорему 5.1 в [5]). Отже, маємо таке твердження.

**Теорема 1.** Для системи (13) існує статичний регулятор (16), при якому замкнена система є допустимою і має критерій якості  $J < \gamma$ , тоді й лише тоді, коли система співвідношень (8), (19)–(21) сумісна щодо  $X$  і  $Y$ . Матрицю такого регулятора можна знайти у вигляді  $K = K_0(I_l + \bar{D}_{22} K_0)^{-1}$ , де  $K_0$  – розв'язок ЛМН (18).

Зазначимо, що співвідношення (21) виконуються тоді й лише тоді, коли

$$X = X^T > 0, \quad Y = Y^T > 0, \quad XY = \gamma^2 I_r. \quad (22)$$

Наведемо наслідки леми 1 і теореми 1 за додаткових умов

$$\text{rank } \bar{C}_2 = r \leq l, \quad \bar{D}_{21} = 0, \quad \bar{D}_{22} = 0, \quad (23)$$

$$\bar{D}_{11}^T Q \bar{D}_{11} < \gamma^2 P. \quad (24)$$

Умови (23) виконуються, якщо, наприклад,  $\text{rank}(C_2 E_2) = r$ ,  $C_2 E_2^\perp = 0$ ,  $D_{21} = 0$  і  $D_{22} = 0$ .

**Теорема 2.** За умов (23) і (24) наступні твердження еквівалентні: 1) для системи (13) існує статичний регулятор (16), при якому замкнена система є допустимою і має критерій якості  $J < \gamma$ ; 2) існує матриця  $Y > \bar{H}^{-1}$ , що задовольняє ЛМН (20); 3) існують матриці  $Y > \bar{H}^{-1}$  і  $Z$ , що задовольняють ЛМН

$$\begin{bmatrix} \gamma^2(\bar{A}Y + Y\bar{A}^T + \bar{B}_2Z + Z^T\bar{B}_2^T) & \gamma^2\bar{B}_1 & Y\bar{C}_1^T + Z^T\bar{D}_{12}^T \\ \gamma^2\bar{B}_1^T & -\gamma^2P & \bar{D}_{11}^T \\ \bar{C}_1Y + \bar{D}_{12}Z & \bar{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

Якщо виконуються твердження 2, то матрицю  $K$  регулятора (16) у твердженні 1 можна знайти як розв'язок ЛМН (18) при  $X = \gamma^2 Y^{-1}$ . При виконанні твердження 3 матрицею такого регулятора може бути довільний розв'язок лінійного рівняння  $K\bar{C}_2Y = Z$ .

**Доведення.** Враховуючи умови (23), маємо  $y = \bar{C}_2\xi_1 = \bar{C}_2E_2^T x$  і  $l \geq r$ . Еквівалентність тверджень 1 і 2 випливає з теореми 1, оскільки за умов (23)  $W_{\bar{R}} = [0 \quad I_s]^T$ . При цьому нерівність (19) не залежить від  $X$  і має вигляд (24). Шукана матриця в (20) згідно з (22) має вигляд  $Y = \gamma^2 X^{-1}$ . Тому замість (8) маємо еквівалентну умову  $Y > \bar{H}^{-1}$ . Оскільки  $\bar{D}_{22} = 0$ , то матрицею  $K$  регулятора (16), що задовольняє твердження 1, може бути довільний розв'язок  $K_0$  ЛМН (18).

Еквівалентність тверджень 1 і 3 є наслідком леми 1 для замкненої системи (17), де  $K_0 = K$ . Матрична нерівність (25) у твердженні 3 виникає в результаті множення першого блокового рядка зліва і першого блокового стовпця справа виразу (18) на  $Y = \gamma^2 X^{-1}$  з урахуванням умов (23) і позначення добутку  $Z = K\bar{C}_2Y$ . Останнє співвідношення за умов (23) можна розв'язати стосовно  $K$ :

$$K = \begin{cases} Z(\bar{C}_2Y)^{-1}, & l = r, \\ ZY^{-1}\bar{C}_2^+ + T\bar{C}_2^{\perp T}, & l > r, \end{cases}$$

де  $T \in \mathbb{R}^{m \times (l-r)}$  — довільна матриця.

Теорему доведено.

Розглянемо випадок, коли пара матриць  $\{E, A\}$  у системі (13) є імпульсною, але існує така матриця  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times l}$ , що

$$\det(I_m - K_1 D_{22}) \neq 0, \quad \det[E_1^{\perp T}(A + B_2 K_{10} C_2) E_2^\perp] \neq 0, \quad (26)$$

де  $K_{10} = K_{11} K_1$  і  $K_{11} = (I_m - K_1 D_{22})^{-1}$ . Можна встановити, що за умов (26) виконуються рангові співвідношення (14), тобто система (13) є  $I$ -керованою та  $I$ -спостережуваною.

За наведених припущень замість (16) застосовуємо регулятор  $u = K_1 y + v$ , де  $v$  — нове керування системи

$$E\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}_1 w + \tilde{B}_2 v, \quad z = \tilde{C}_1 x + \tilde{D}_{11} w + \tilde{D}_{12} v, \quad y = \tilde{C}_2 x + \tilde{D}_{21} w + \tilde{D}_{22} v. \quad (27)$$

Тут за умови (26) пара матриць  $\{E, \tilde{A}\}$  є неімпульсною,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + B_2 K_{10} C_2, & \tilde{B}_1 &= B_1 + B_2 K_{10} D_{21}, & \tilde{B}_2 &= B_2 K_{11}, \\ \tilde{C}_1 &= C_1 + D_{12} K_{10} C_2, & \tilde{D}_{11} &= D_{11} + D_{12} K_{10} D_{21}, & \tilde{D}_{12} &= D_{12} K_{11}, \\ \tilde{C}_2 &= C_2 + D_{22} K_{10} C_2, & \tilde{D}_{21} &= D_{21} + D_{22} K_{10} D_{21}, & \tilde{D}_{22} &= D_{22} K_{11}. \end{aligned}$$

Виконавши еквівалентне перетворення системи (27) на основі співвідношень

$$\begin{aligned} LER &= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & L\tilde{A}R &= \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4 \end{bmatrix}, & L\tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} \\ \tilde{B}_{12} \end{bmatrix}, & L\tilde{B}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{B}_{21} \\ \tilde{B}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{C}_1 R &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} \end{bmatrix}, & \tilde{C}_2 R &= \begin{bmatrix} \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} \end{bmatrix}, \\ x &= R \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, & \xi_1 &= E_2^\top x, & \xi_2 &= -\tilde{A}_4^{-1} (\tilde{A}_3 \xi_1 + \tilde{B}_{12} w + \tilde{B}_{22} v), \end{aligned}$$

де  $L$  і  $R$  — невідроджені матриці, визначені в (4), можна сформулювати аналоги теорем 1 і 2 із застосуванням статичного регулятора  $v = Ky$  для звичайної системи

$$\dot{\xi}_1 = \bar{A} \xi_1 + \bar{B}_1 w + \bar{B}_2 v, \quad z = \bar{C}_1 \xi_1 + \bar{D}_{11} w + \bar{D}_{12} v, \quad y = \bar{C}_2 \xi_1 + \bar{D}_{21} w + \bar{D}_{22} v, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 \tilde{A}_4^{-1} \tilde{A}_3, & \bar{B}_1 &= \tilde{B}_{11} - \tilde{A}_2 \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{12}, & \bar{B}_2 &= \tilde{B}_{21} - \tilde{A}_2 \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{22}, \\ \bar{C}_1 &= \tilde{C}_{11} - \tilde{C}_{12} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{A}_3, & \bar{D}_{11} &= \tilde{D}_{11} - \tilde{C}_{12} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{12}, & \bar{D}_{12} &= \tilde{D}_{12} - \tilde{C}_{12} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{22}, \\ \bar{C}_2 &= \tilde{C}_{21} - \tilde{C}_{22} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{A}_3, & \bar{D}_{21} &= \tilde{D}_{21} - \tilde{C}_{22} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{12}, & \bar{D}_{22} &= \tilde{D}_{22} - \tilde{C}_{22} \tilde{A}_4^{-1} \tilde{B}_{22}. \end{aligned}$$

В результаті вихідна система (13) з керуванням  $u = K_x x + K_w w$  має вигляд

$$E\dot{x} = A_0 x + B_0 w, \quad z = C_0 x + D_0 w,$$

де

$$\begin{aligned} A_0 &= A + B_2 K_x, & B_0 &= B_1 + B_2 K_w, & C_0 &= C_1 + D_{12} K_x, & D_0 &= D_{11} + D_{12} K_w, \\ K_x &= K_{10} C_2 + K_{11} K_0 \bar{C}_2 E_2^\top, & K_w &= K_{10} D_{21} + K_{11} K_0 \bar{D}_{21}, & K_0 &= (I_m - K \bar{D}_{22})^{-1} K. \end{aligned}$$

**3.2. Динамічний регулятор.** Застосовуючи до звичайної системи (15) динамічний регулятор

$$\dot{\eta} = Z\eta + Vy, \quad u = U\eta + Ky, \quad \eta(0) = 0, \quad (29)$$

отримуємо замкнену систему в розширеному фазовому просторі  $\mathbb{R}^{r+p}$  у вигляді

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}_* \hat{x} + \hat{B}_* w, \quad z = \hat{C}_* \hat{x} + \hat{D}_* w, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad (30)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{A}_* &= \hat{A} + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{C}_2, & \hat{B}_* &= \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \hat{K}_0 \hat{D}_{21}, \\ \hat{C}_* &= \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{C}_2, & \hat{D}_* &= \hat{D}_{11} + \hat{D}_{12} \hat{K}_0 \hat{D}_{21}, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta \end{bmatrix}, & \hat{A} &= \begin{bmatrix} \bar{A} & 0_{r \times p} \\ 0_{p \times r} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}, & \hat{B}_1 &= \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0_{p \times s} \end{bmatrix}, & \hat{B}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{B}_2 & 0_{r \times p} \\ 0_{p \times m} & I_p \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_1 &= [\bar{C}_1 \quad 0_{k \times p}], & \hat{D}_{11} &= \bar{D}_{11}, & \hat{D}_{12} &= [\bar{D}_{12} \quad 0_{k \times p}], \\ \hat{C}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{C}_2 & 0_{l \times p} \\ 0_{p \times r} & I_p \end{bmatrix}, & \hat{D}_{21} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_{21} \\ 0_{p \times s} \end{bmatrix}, & \hat{K}_0 &= \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \\ K_0 &= (I_m - K \bar{D}_{22})^{-1} K, & U_0 &= (I_m - K \bar{D}_{22})^{-1} U, \\ V_0 &= V (I_l - \bar{D}_{22} K)^{-1}, & Z_0 &= Z + V \bar{D}_{22} (I_m - K \bar{D}_{22})^{-1} U. \end{aligned}$$

Визначимо критерій якості  $\hat{J}$  системи (30) вигляду (2) з ваговими матрицями  $P$ ,  $Q$  і  $\hat{X}_0$ , де  $\hat{X}_0$  — деяка блокова матриця розміру  $(r+p) \times (r+p)$ , першим діагональним блоком якої є  $\bar{H}$ . Оскільки початковий вектор регулятора (29) нульовий, то значення  $\hat{J}$  збігається з  $J$ .

**Лема 3** [22]. Для заданих додатно визначених матриць  $X, Y \in R^{r \times r}$  і числа  $\gamma > 0$  існують матриці  $X_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $X_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $Y_1 \in \mathbb{R}^{p \times r}$  і  $Y_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , що задовольняють співвідношення

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} Y & Y_1^\top \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \hat{X} \hat{Y} = \gamma^2 I_{r+p}, \quad (31)$$

тоді й лише тоді, коли

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_r \\ \gamma I_r & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank } W \leq r + p. \quad (32)$$

**Теорема 3.** Для системи (13) існує динамічний регулятор (29) порядку  $p \leq r$ , при якому замкнена система є допустимою і має критерій якості  $J < \gamma$ , тоді й лише тоді, коли система співвідношень (8), (19), (20) і (32) сумісна щодо  $X$  і  $Y$ .

Враховуючи структуру матриць в (30), систему (15) з динамічним регулятором (29) можна подати у вигляді системи у просторі  $\mathbb{R}^{r+p}$  зі статичним регулятором:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A} \hat{x} + \hat{B}_1 w + \hat{B}_2 \hat{u}, & z &= \hat{C}_1 \hat{x} + \hat{D}_{11} w + \hat{D}_{12} \hat{u}, & \hat{y} &= \hat{C}_2 \hat{x} + \hat{D}_{21} w, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta \end{bmatrix}, & \hat{y} &= \begin{bmatrix} y - \bar{D}_{22} u \\ \eta \end{bmatrix}, & \hat{u} &= \begin{bmatrix} u \\ \dot{\eta} \end{bmatrix}, & \hat{u} &= \hat{K}_0 \hat{y}. \end{aligned}$$

Тому теорему 3 можна встановити як наслідок теореми 1 і леми 3.

Зазначимо, що теореми 1 і 3 без використання обмеження  $X < \gamma^2 \bar{H}$  дають критерії існування та методи побудови стабілізуючих регуляторів, що забезпечують оцінку  $J_0 < \gamma$  для відповідних замкнених систем. Умови теореми 3 у випадку  $p = 0$  є критерієм існування статичного регулятора (16) із вказаними властивостями в теоремі 1. Побудова динамічного регулятора порядку  $p = r$ , що задовольняє теорему 3, зводиться до розв'язання системи ЛМН без додаткових рангових обмежень. У цьому випадку рангове обмеження в (32) виконується автоматично.

Наведемо алгоритм побудови динамічного регулятора (29) порядку  $p \leq r$ , що задовольняє теорему 3.

- Алгоритм 1.** 1. Обчислення матриць перетворення (4) і системи (15).  
 2. Обчислення матриць  $W_{\bar{R}}$  і  $W_{\bar{L}}$ , де  $\bar{R} = [\bar{C}_2 \quad \bar{D}_{21}]$ ,  $\bar{L} = [\bar{B}_2^\top \quad \bar{D}_{12}^\top]$ .  
 3. Знаходження матриць  $X = X^\top > 0$  і  $Y = Y^\top > 0$ , які задовольняють співвідношення (8), (19), (20) і (32).  
 4. Побудова розкладу  $\Delta = Y - \gamma^2 X^{-1} = S^\top S \geq 0$ , де  $S \in \mathbb{R}^{p \times r}$ ,  $\ker S = \ker \Delta$ , та формування блокової матриці

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^\top \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad X_1 = \frac{1}{\gamma} S X, \quad X_2 = \frac{1}{\gamma^2} S X S^\top + I_p.$$

5. Знаходження розв'язку  $\hat{K}_0$  ЛМН  $\hat{L}^\top \hat{K}_0 \hat{R} + \hat{R}^\top \hat{K}_0^\top \hat{L} + \hat{\Omega} < 0$ , де

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0_{(l+p) \times k} \end{bmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{B}_2^\top \hat{X} & 0_{(m+p) \times s} & \hat{D}_{12}^\top \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Omega} = \begin{bmatrix} \hat{A}^\top \hat{X} + \hat{X} \hat{A} & \hat{X} \hat{B}_1 & \hat{C}_1^\top \\ \hat{B}_1^\top \hat{X} & -\gamma^2 P & \hat{D}_{11}^\top \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \quad \det(I_m + K_0 \bar{D}_{22}) \neq 0.$$

6. Обчислення матриць регулятора за формулою

$$\begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+p} + \hat{K}_0 \hat{D}_{22})^{-1} \hat{K}_0, \quad \hat{D}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{22} & 0_{l \times p} \\ 0_{p \times m} & 0_{p \times p} \end{bmatrix}.$$

Цей алгоритм може бути реалізований, наприклад, засобами системи MATLAB. Якщо в частині 4 алгоритму  $\Delta = 0$ , тобто  $\text{rank } W = r$ , то, розв'язуючи ЛМН (18), отримуємо статичний регулятор (16), що задовольняє теорему 1. Якщо  $\Delta \neq 0$ , то блокова матриця  $\hat{X}$  формується на основі леми 3 згідно з (31).

**Зауваження 1.** Якщо пара матриць  $\{E, A\}$  є імпульсною, то керування для системи (13) можна шукати у вигляді  $u = K_1 y + v$ , де  $K_1$  — матриця допоміжного статичного регулятора за умов (26), а  $v$  — нове керування, яке створює динамічний регулятор

$$\dot{\eta} = Z\eta + Vy, \quad v = U\eta + Ky, \quad \eta(0) = 0,$$

і розв'язує поставлену задачу для звичайної системи (28), побудованої на основі еквівалентного перетворення системи (27) (див. попередній підпункт). В результаті замкнена дескрипторна система у розширеному фазовому просторі має вигляд

$$\hat{E} \dot{\hat{x}} = \hat{A}_0 \hat{x} + \hat{B}_0 w, \quad z = \hat{C}_0 \hat{x} + \hat{D}_0 w, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0,$$

де

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_0 &= \begin{bmatrix} A + B_2(K_{10}C_2 + K_{11}G_1) & B_2K_{11}G_2 \\ V(\bar{C}_2E_2^\top + \bar{D}_{22}G_1) & Z + V\bar{D}_{22}G_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_0 = \begin{bmatrix} B_1 + B_2(K_{10}D_{21} + K_{11}G_3) \\ V(\bar{D}_{21} + \bar{D}_{22}G_3) \end{bmatrix}, \\ \hat{C}_0 &= [C_1 + D_{12}(K_{10}C_2 + K_{11}G_1) \quad D_{12}K_{11}G_2], \quad \hat{D}_0 = D_{11} + D_{12}(K_{10}D_{21} + K_{11}G_3), \\ G_1 &= K_0\bar{C}_2E_2^\top, \quad G_2 = (I_m - K\bar{D}_{22})^{-1}U, \quad G_3 = K_0\bar{D}_{21}, \quad K_0 = (I_m - K\bar{D}_{22})^{-1}K.\end{aligned}$$

**4. Приклад.** Розглянемо лінеаризовану модель гідравлічної системи з трьома послідовно сполученими резервуарами, яка описується у вигляді дескрипторної системи керування (13) з такими матрицями [26]:

$$\begin{aligned}E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [0 \quad 0 \quad 1], \quad D_{11} = 0_{1 \times 2}, \quad D_{12} = 1, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = 0_{2 \times 1}.\end{aligned}$$

Компоненти вектора стану  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$  визначають рівні рідини у відповідних резервуарах, вектор  $w = [w_1 \ w_2]^\top$  формують неконтрольоване збурення  $w_1$  і похибка  $w_2$  у спостережуваному виході  $y = [x_1 \ x_2 + w_2]^\top$ , контрольований вихід  $z = x_3 + u$ , а роль керування  $u$ , що регулює рівні рідини у перших двох резервуарах, виконує дебіт (потік) рідини в насосі із третього резервуара в перший (рис. 1).

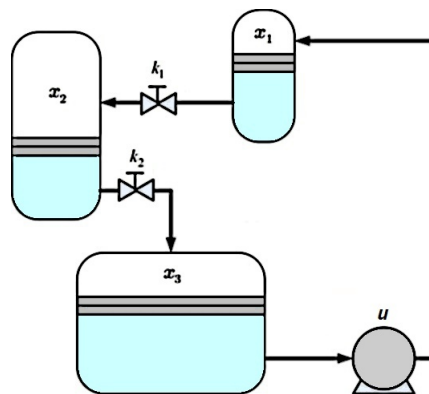


Рис. 1. Гідравлічна система з трьома резервуарами.

Виберемо вагові матриці критерію якості (2) і допустимі значення параметрів

$$P = \text{diag}\{2, 1\}, \quad Q = 1, \quad X_0 = \text{diag}\{3, 2, 0\}, \quad H = \text{diag}\{3, 2, 1\}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 1, 5.$$

У цьому прикладі  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $s = 2$ ,  $l = 2$ ,  $r = 2$ , пара матриць  $\{E, A\}$  допустима, а трійки матриць  $\{E, A, B_2\}$  і  $\{E, A, C_2\}$  відповідно імпульсно керована та імпульсно спостережувана. Система без керування має критерій якості  $J = 1,17851$ .

Для системи (13) на основі теореми 1 при  $\gamma = 1$  знайдено матрицю статичного регулятора (16)

$$K = [-0,67954 \quad -0,39810],$$

при якому замкнена система є допустимою і її критерій якості  $J = 0,97989 < \gamma$ . При цьому її скінченний спектр збігається з  $\sigma(A_*) = \{-1,58977 \pm 0,62453i\}$ , де  $A_*$  – матриця системи (17).

Застосовуючи лему 2 до замкненої системи, знайдено найгірше збурення (11) і найгірший початковий вектор (9) стосовно критерію якості  $J$ :

$$w = \bar{K}_* \xi_1, \quad \bar{K}_* = \begin{bmatrix} 1,12785 & 0,51161 \\ -0,24149 & 0,20639 \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$x_0 = [-0,80868 \quad -0,58825 \quad 1,39693]^\top. \quad (34)$$

На рис. 2 зображено поведінку розв'язку замкненої системи за найгірших умов (33) і (34), а на рис. 3 – вектор-функцію (33) найгіршого збурення.

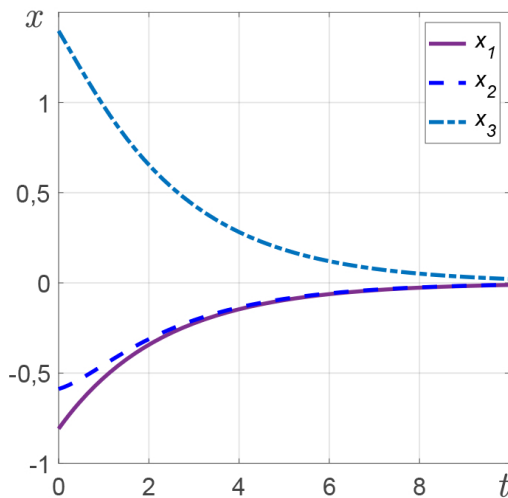


Рис. 2. Поведінка замкненої системи.

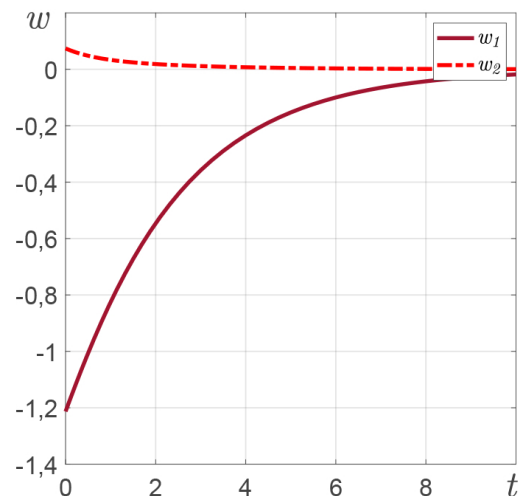


Рис. 3. Найгірше збурення щодо критерію якості  $J$ .

Далі, застосовуючи алгоритм 1, для системи (13) знайдено матриці наближеного  $J$ -оптимального динамічного регулятора (29) порядку  $p = 2$ :

$$Z = \begin{bmatrix} -0,62278 & 0,00590 \\ -0,00004 & -0,92267 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0,00047 & 0,00025 \\ -0,00126 & 0,00113 \end{bmatrix},$$

$$U = [-0,00152 \quad -0,00021], \quad K = [-1,09088 \quad -0,04544],$$

при якому замкнена система є допустимою, має скінченний спектр

$$\{-1,99999, -1,59089, -0,92267, -0,62278\}$$

і мінімальне значення критерію якості  $J = 0,97895$ .

**5. Висновки.** Розроблено конструктивні методи оцінки та досягнення бажаного рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах керування за допомогою статичних та динамічних регуляторів. Практична реалізація даних методів базується на еквівалентному перетворенні дескрипторних систем і застосуванні відомих методів теорії  $H_\infty$ -керування для звичайних систем меншого порядку. Так, умови існування і алгоритми побудови динамічного регулятора порядку  $p = \text{rank } E$ , при якому замкнена система є допустимою і має зважений критерій якості  $J < \gamma$ , зводяться до розв'язування систем ЛМН без додаткових рангових обмежень. У випадку, коли вихідна дескрипторна система є імпульсною, запропоновано пошук додаткового керування, яке забезпечує вказану властивість цієї системи. Еквівалентне перетворення дескрипторної системи до звичайної застосовано також при знаходженні векторів найгірших зовнішніх і початкових збурень щодо зважених критеріїв якості. Вивчення поведінки замкненої системи за таких найгірших умов може бути важливим при конструюванні і випробуванні реальних керованих об'єктів.

**Конфлікт інтересів.** Автор заявляє, що він не має потенційного конфлікту інтересів щодо дослідження у цій статті.

**Фінансування.** Це дослідження підтримано грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, О. М.).

## Література

1. L. Dai, *Singular control systems*, Springer, New York (1989).
2. Guang-Ren Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer, New York etc. (2010).
3. Yu Feng, Mohamed Yagoubi, *Robust control of linear descriptor systems*, Springer Nature Singapore Pte Ltd. (2017).
4. S. Campbell, A. Ilchmann, V. Mehrmann, T. Reis (Eds.), *Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Nature, Switzerland AG (2019).
5. О. Г. Мазко, *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*, Наукова думка, Київ (2023); <https://doi.org/10.37863/6103136622-55>.
6. D. V. Balandin, M. M. Kogan, *Generalized  $H_\infty$ -optimal control as a trade-off between the  $H_\infty$ -optimal and  $\gamma$ -optimal controls*, Autom. and Remote Control, **71**, № 6, 993–1010 (2010).
7. Z. Feng, J. Lam, S. Xu, S. Zhou,  *$H_\infty$  control with transients for singular systems*, Asian J. Control, **18**, № 3, 817–827 (2016).
8. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Stud. Appl. Math., **15** (1994).
9. K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Englewood, Prentice-Hall, Inc. (1996).
10. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
11. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **4**, 421–448 (1994).
12. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits, Systems and Signal Process, **26**, 829–838 (2007).
13. M. Chadli, P. Shi, Z. Feng, J. Lam, *New bounded real lemma formulation and  $H_\infty$  control for continuous-time descriptor systems*, Asian J. Control, **20**, № 1, 1–7 (2018).
14. F. Gao, W. Q. Liu, V. Sreeram, K. L. Teo, *Bounded real lemma for descriptor systems and its application*, IFAC 14th Triennial World Congress, Beijing, P. R., China (1999), p. 1631–1636.

15. I. Masubushi, Y. Kamitane, A. Ohara, N. Suda,  *$H_\infty$  control for descriptor systems: a matrix inequalities approach*, Automatica, **33**, № 4, 669–673 (1997).
16. О. Г. Мазко, *Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1541–1552 (2018).
17. Masaki Inoue, Teruyo Wada, Masao Ikeda, Eiho Uezato, *Robust state-space  $H_\infty$  controller design for descriptor systems*, Automatica, **59**, 164–170 (2015).
18. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali, *The LMI Control Toolbox. For Use with MATLAB. User's Guide*, Natick, MA, The MathWorks, Inc. (1995).
19. R. Orsi, U. Helmke, J. B. Moore, *A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities*, Automatica, **42**, № 11, 1875–1882 (2006).
20. J. Löfberg, *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*, IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan (2004), p. 284–289.
21. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, Наука (1988).
22. A. G. Mazko, *Robust output feedback stabilization and optimization of control systems*, Nonlinear Dyn. and Syst. Theory, **17**, № 1, 42–59 (2017).
23. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки*, Зб. праць Інституту математики НАН України, **15**, № 1, 88–99 (2018).
24. О. Г. Мазко, Т. О. Котов, *Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **71**, № 10, 1374–1388 (2019).
25. D. Cobb, *Controllability, observability and duality in singular systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **29**, 1076–1082 (1984).
26. J. M. Araujo, P. R. Barros, C. E. T. Dorea, *Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system*, IEEE Trans. Control Syst. Technol., **20**, № 4, 1041–1047 (2012).

Одержано 14.01.25, доопрацьовано 19.02.25,  
прийнято 18.03.25