DOI: 10.37863/umzh.v72i11.2389

УДК 517.925.51; 681.5.03

О. Г. Мазко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗВАЖЕНА ОЦІНКА І ПОНИЖЕННЯ РІВНЯ ВПЛИВУ ОБМЕЖЕНИХ ЗБУРЕНЬ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ

For a class of linear descriptor systems, we establish new criteria for existence of control laws that provide the asymptotic stability and a prescribed estimate for the weighted damping level of bounded disturbances. We suggest a method of generalized H_∞-optimization of descriptor systems with controlled and observed outputs. The main computational procedures of the suggested algorithm are reduced to solving linear and quadratic matrix inequalities with additional rank constraints. We also give an example of a descriptor control system for an electrical circuit.

Для класу лінійних дескрипторних систем встановлено нові критерії існування законів керування, що забезпечують асимптотичну стійкість та задану оцінку зваженого рівня гасіння обмежених збурень. Запропоновано методику узагальненої H_∞-оптимізації дескрипторних систем з керованими і спостережуваними виходами. Основні обчислювальні процедури відповідного алгоритму зводяться до розв'язання лінійних та квадратичних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Наведено приклад дескрипторної системи стабілізації електричного кола.

1. Вступ. Дескрипторні системи керування виникають при проектуванні та дослідженні динаміки складних об'єктів механіки, електротехніки, економіки тощо (див., наприклад, [1 – 6]). При побудові рівнянь руху таких об'єктів у змінних, що описують реальний фізичний процес, необхідно враховувати не лише диференціальні, а й алгебраїчні зв'язки та обмеження у фазовому просторі. Тому дескрипторні системи називають також диференціально-алгебраїчними або сингулярними системами. Відомі методи побудови та дослідження розв'язків класу лінійних дескрипторних систем базуються на застосуванні теорії канонічних форм матричних в'язок та узагальнених обернених матриць [2, 7].

Сучасні напрямки досліджень в теорії керування як звичайних, так і дескрипторних систем складають методи робастної стабілізації та H_2/H_∞-оптимізації, які забезпечують робастну стійкість станів рівноваги й мінімізують негативний вплив зовнішніх збурень на динаміку керованих об'єктів. Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних і дискретних систем з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень (див., наприклад, [8 – 11]). У [12 – 17] застосовувалися загальніші критерії якості, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування, причому компонентами невизначених збурень можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу.

Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на критеріях виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах матричних рівнянь і лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [8, 18, 19]. Для класу лінійних дескрипторних систем аналогічні твердження встановлено в [20 – 23]. З відомими методами H_∞-оптимізації таких систем можна ознайомитись, наприклад, у [5, 20, 22, 24, 25].

У даній роботі продовжено дослідження [16, 17], присвячені задачам синтезу узагальненого H_∞-керування для лінійних дескрипторних систем. Пропонуються нові критерії існування і алгоритми побудови статичних та динамічних регуляторів, які забезпечують бажану оцінку зваженого рівня впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів у дескрипторних системах з керованими і спостережуваними виходами. Практична реалізація даних алгоритмів зводиться до розв’язання лінійних і квадратичних матричних нерівностей при додаткових рангових обмеженнях. Характерна особливість отриманих результатів порівняно з відомими полягає у застосуванні зважених критеріїв якості, які дають нові можливості при досягненні бажаних характеристик дескрипторних систем керування. У пункті 2 наведено також методику побудови найгіршого збурення й найгіршого початкового вектора щодо зваженого критерію якості. Основні твердження сформульовано у пункті 3 без додаткових обмежень на матричні коефіцієнти керованої системи та її виходів, які використовувались у багатьох роботах, зокрема в [20, 22].

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n\times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід’ємно) визначена матриця X; $\sigma(A)$ $(\rho(A))$ — спектр (спектральний радіус) матриці A; A^{-1} (A^+) — обернена (псевдообернена) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці A; $\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\}$ — опуклий багатогранник (політоп) з вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць, $\|x\|$ — евклідова норма вектора x, $\|w\|_P = \left(\int_0^\infty w^\top P w\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$.

2. Допустимі дескрипторні системи зі збуреннями. Розглянемо лінійну дескрипторну систему

$$E\dot x = Ax + Bw, \qquad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

де $x\in\mathbb{R}^n$, $w\in\mathbb{R}^s$ і $z\in\mathbb{R}^k$ — відповідно вектори стану, зовнішніх збурень і виходу, x_0 — початковий вектор. Усі матричні коефіцієнти в (2.1) є сталими, причому в’язка матриць $F(\lambda) = A - \lambda E$ *регулярна*, тобто $\det F(\lambda)\not\equiv 0$ $(\lambda\in\mathbb{C})$. У випадку $\rho = \operatorname{rank} E < n$ систему (2.1) можна записати у вигляді

$$\dot x_1 = A_1x_1 + B_1w, \qquad N\dot x_2 = x_2 + B_2w, \qquad z = C_1x_1 + C_2x_2 + Dw, \tag{2.2}$$

де

$$x = R\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \qquad x_0 = R\begin{bmatrix} x_{01}\\ x_{02}\end{bmatrix}, \qquad LB = \begin{bmatrix} B_1\\ B_2\end{bmatrix}, \qquad CR = \begin{bmatrix} C_1, C_2\end{bmatrix},$$

$x_1\in\mathbb{R}^r$, $x_2\in\mathbb{R}^{n-r}$, L і R — невироджені матриці перетворення пари (A,E) до канонічної форми Веєрштрасса [7]

$$LAR = \begin{bmatrix} A_1 & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{bmatrix}, \qquad LER = \begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & N\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Власні значення матриці A_1 утворюють скінченний спектр $\sigma(F) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$, а N — нільпотентна матриця індексу ν. Перша підсистема в (2.2) є динамічною, а друга — алгебраїчною, і її розв'язок при $\nu > 1$ містить імпульсні складові [5]. В'язка матриць $F(\lambda)$ називається *стійкою* і *неімпульсною*, якщо відповідно $\sigma(F) \subset \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ і $N = 0$. Дескрипторна система (2.1) називається *допустимою*, якщо відповідна в'язка матриць $F(\lambda)$ регулярна, стійка і неімпульсна. Введені властивості матричних в'язок і систем зручно визначати в термінах відповідних пар матриць (E, A). Зокрема, критерієм відсутності імпульсних мод у системі (2.1) є умова [3]

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 \\ A & E \end{bmatrix} = n + \rho.$$

Лема 2.1 [16]. *Пара матриць (E, A) неімпульсна тоді і лише тоді, коли сумісна стосовно Z система матричних рівнянь*

$$AZE = EZA, \qquad Z = ZEZ, \qquad E = EZE.$$

Лема 2.2 [22]. *Система* (2.1) *є допустимою тоді і лише тоді, коли сумісна стосовно X система співвідношень*

$$A^\top X + X^\top A < 0, \qquad E^\top X = X^\top E \geq 0.$$

Нехай вектор збурень $w(t)$ у системі (2.1) обмежений за зваженою L_2-нормою $\|w\|_P$. Введемо для цієї системи критерій якості [13]

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{2.4}$$

де $\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0), для яких система (2.1) має розв'язок і виконується нерівність $\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 \neq 0$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = E^\top H E \geq 0$ — вагові матриці ($H = H^\top > 0$). Значення J характеризує зважений рівень впливу зовнішніх і початкових збурень на вихід системи (2.1). Застосування вагових матричних коефіцієнтів P, Q і X_0 в (2.4) дає можливість встановити пріоритети впливу компонент відповідних векторів w, z і x_0 на значення критерію якості J. Таку можливість доцільно використовувати, наприклад, у випадку, коли компонентами вектора w є не лише зовнішні збурення, а й похибки вимірюваного виходу системи (див., наприклад, [15]).

У випадку $x_0 \in \operatorname{Ker} E$ вираз (2.4) позначимо через J_0. Очевидно, що $J_0 \leq J$. У випадку одиничних матриць $P = I_s$ і $Q = I_k$ вираз J_0 характеризує типовий критерій якості, що використовується в задачах H_∞-оптимізації систем, і його значення збігається з H_∞-нормою матричної передавальної функції [10]:

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(G^\top(-i\omega)G(i\omega))}, \qquad G(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D.$$

У даному випадку всі компоненти векторів збурень і виходу системи рівноцінно впливають на значення критерію якості J_0.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* в системі (2.1) щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях в (2.4) досягається супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$. Методи знаходження таких векторів у окремих випадках запропоновано в [12, 15].

Для класу допустимих систем (2.1) встановлено необхідні і достатні умови виконання верхніх оцінок $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ при заданому $\gamma > 0$.

Лема 2.3 [23]. *Якщо існують матриці X і $S = S^\top \geq 0$, що задовольняють систему ЛМН*

$$\begin{bmatrix} S & S - E^\top X \\ S - X^\top E & 0 \end{bmatrix} \geq 0, \tag{2.5}$$

$$\Psi(X) = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + C^\top QD \\ B^\top X + D^\top QC & D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.6}$$

то система (2.1) *допустима і $J_0 < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови*

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E \\ D^\top QC \end{bmatrix} = \rho. \tag{2.7}$$

Умова (2.5) означає, що $S = E^\top X = X^\top E \geq 0$. Можна встановити, що ЛМН (2.6) сумісна щодо X тоді і лише тоді, коли

$$D^\top QD < \gamma^2 P, \qquad D_1^\top QD_1 < \gamma^2 P,$$

де $D_1 = D - CA^{-1}B$. Із даних співвідношень і леми 2.3 випливає, що $J_0 > \gamma_0$, де $\gamma_0 = \max\{\gamma : \det[(D^\top QD - \gamma^2 P)(D_1^\top QD_1 - \gamma^2 P)] = 0\}$.

Лема 2.4 [23]. *Якщо сумісна система співвідношень* (2.5), (2.6) *і*

$$S \leq \gamma^2 X_0, \qquad \operatorname{rank}(S - \gamma^2 X_0) = \rho, \tag{2.8}$$

то система (2.1) *допустима і $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови* (2.7).

За умов лем 2.3 і 2.4 нульовий стан системи (2.1) зі структурованою невизначеністю вектора збурень

$$w = \frac{1}{\gamma}\Theta z, \qquad \Theta^\top P \Theta \leq Q$$

робастно стійкий зі спільною функцією Ляпунова $v(x) = x^\top Sx$. Це твердження є наслідком перетворення (2.3) і теореми про робастну стабілізацію лінійної системи [13] (теорема 3.3.1).

Із лем 2.3 і 2.4 випливають алгоритми обчислення критеріїв якості J_0 і J системи (2.1) на основі розв'язування відповідних оптимізаційних задач. Зокрема, за умов леми 2.4 маємо $J = \inf\{\gamma : \Psi(X) < 0,\ 0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0\}$.

Лема 2.5. *Нехай система* (2.1) *допустима і для деяких матриць X і $S = S^\top \geq 0$ виконуються ЛМН* (2.5), (2.8) *і рівняння*

$$A_1^\top X + X^\top A_1 + X^\top R_1 X + Q_1 = 0, \tag{2.9}$$

де $A_1 = A + BR^{-1}D^\top QC$, $R_1 = BR^{-1}B^\top$, $Q_1 = C^\top(Q + QDR^{-1}D^\top Q)C$, $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$ і $\gamma = J$. Тоді структурований вектор зовнішніх збурень у формі лінійного зворотного зв'язку за станом

$$w = K_0 x, \qquad K_0 = R^{-1}(B^\top X + D^\top QC), \tag{2.10}$$

і довільний початковий вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}\,(S - J^2 X_0)$ є найгіршими щодо критерію якості J для системи (2.1).

Доведення. Якщо $S = E^\top X = X^\top E \le \gamma^2 X_0$ і $\Psi(X) \le 0$, то

$$\dot v(x) + z^\top Q z - \gamma^2 w^\top P w = \left[x^\top, w^\top\right] \Psi(X) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \le 0, \tag{2.11}$$

де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x) = x^\top S x$ в силу системи (2.1). Після інтегрування даного виразу від 0 до τ, враховуючи, що $v(x(\tau)) \to 0$ при $\tau \to \infty$, маємо

$$\|z\|_Q^2 - \gamma^2 \|w\|_P^2 \le x_0^\top S x_0 \le \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0, \tag{2.12}$$

тобто $J \le \gamma$. Виконання обох рівностей в (2.12) означає, що $\gamma = J$, а відповідні вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 є найгіршими щодо критерію якості J.

Неважко переконатися, що перша рівність в (2.12) виконується, якщо вектор збурень w має структуру (2.10), де X — розв'язок матричного рівняння Ріккаті (2.9), а $x(t)$ — розв'язок системи $E\dot x = (A + BK_0)x$, $x(0) = x_0$. При цьому права частина співвідношення (2.11) дорівнює нулю. Друга рівність в (2.12) виконується, якщо $x_0^\top (S - \gamma^2 X_0) x_0 = 0$. Остання рівність за умови $S \le \gamma^2 X_0$ означає, що $x_0 \in \operatorname{Ker}(S - \gamma^2 X_0)$.

Лему доведено.

3. Лінійні системи з керованими і спостережуваними виходами. Розглянемо систему керування

$$\begin{aligned} E\dot x &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів, а всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів є сталими, причому пара (E, A) регулярна і $\operatorname{rank} E = \rho \le n$. Нас цікавлять закони керування, які гарантують бажані оцінки для критеріїв якості типу (2.4) замкненої системи щодо вектора керованого виходу z. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо *J-оптимальними*. J_0-оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць P і Q є *H_∞-оптимальним*.

При дослідженні класу систем (3.1) використовуються такі їхні властивості, як C-, R- та *I-керованість*, а також двоїсті до них C-, R- та *I-спостережуваність* [5, 24]. Зокрема, для розв'язання узагальнених задач H_∞-оптимізації необхідно, щоб трійка матриць (E, A, B_2) була стабілізовною та I-керованою. Це означає, що повинна існувати така матриця K, щоб пара матриць $(E, A + B_2 K)$ була стійкою і неімпульсною, тобто допустимою. Критеріями I-керованості трійки (E, A, B_2) і I-спостережуваності трійки (E, A, C_2) є відповідні рівності [26]

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_2 \end{bmatrix} = n + \rho, \qquad \operatorname{rank} \begin{bmatrix} E & A \\ 0 & E \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} = n + \rho.$$

3.1. Статичний регулятор. При застосуванні статичного регулятора за спостережуваним виходом

$$u = Ky, \qquad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{3.2}$$

де K — шукана матриця коефіцієнтів підсилення, замкнена система має вигляд

$$E\dot{x} = A_*x + B_*w, \qquad z = C_*x + D_*w, \quad x(0) = x_0, \tag{3.3}$$

де

$$A_* = A + B_2K_*C_2, \qquad B_* = B_1 + B_2K_*D_{21}, \qquad C_* = C_1 + D_{12}K_*C_2,$$
$$D_* = D_{11} + D_{12}K_*D_{21}, \qquad K_* = (I_m - KD_{22})^{-1}K.$$

Для досягнення бажаної оцінки $J < \gamma$ застосуємо лему 2.4. Запишемо умову (2.6) для системи (3.3) у вигляді квадратичної матричної нерівності

$$W + U^\top K_*V + V^\top K_*^\top U + V^\top K_*^\top R\, K_*V < 0, \tag{3.4}$$

де

$$W = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C_1^\top QC_1 & X^\top B_1 + C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top X + D_{11}^\top QC_1 & D_{11}^\top QD_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$
$$U = \begin{bmatrix} B_2^\top X + D_{12}^\top QC_1, \, D_{12}^\top QD_{11} \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} C_2, \, D_{21} \end{bmatrix}, \qquad R = D_{12}^\top QD_{12} \geq 0.$$

Сформулюємо критерій сумісності даної нерівності за умов $m < q$ і $l < q$ $(q = n + s)$, які природні для системи (3.1).

Лема 3.1. *Матрична нерівність* (3.4) *має розв'язок* $K_* \in \mathbb{R}^{m\times l}$ *тоді і лише тоді, коли*:

(a) $W_V^\top W W_V < 0$

і виконується одна з умов:

(b) $R = 0,\ W_U^\top W W_U < 0$;

(c) $R > 0,\ W < U^\top R^{-1} U$;

(d) $R \geq 0,\ 1 \leq \operatorname{rank} R < m,\ W_{U_0}^\top \big(W - U^\top R^+ U\big) W_{U_0} < 0,\ U_0 = W_R^\top U$.

Доведення. Покажемо, що доведення наведених критеріїв існування розв'язку K_* квадратичної матричної нерівності (3.4) при $R \geq 0$ зводяться до застосування відомих необхідних і достатніх умов сумісності ЛМН (проекційної леми [18]). У випадку $R = 0$ матрична нерівність (3.4) лінійна і критерій її сумісності виражають умови (a) і (b). Якщо $R > 0$, то за лемою Шура матричну нерівність (3.4) можна записати у вигляді ЛМН (див., наприклад, [8, с. 8])

$$\begin{bmatrix} W + U^\top K_*V + V^\top K_*^\top U & V^\top K_*^\top \\ K_*V & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \qquad \text{або} \qquad \widehat{W} + \widehat{U}^\top K_*\widehat{V} + \widehat{V}^\top K_*^\top \widehat{U} < 0,$$

де

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{U} = \begin{bmatrix} U & I_m \end{bmatrix}, \qquad \widehat{V} = \begin{bmatrix} V & 0_{l\times m} \end{bmatrix}.$$

Необхідними і достатніми умовами сумісності останньої нерівності є співвідношення $W_{\widehat{U}}^\top \widehat{W} W_{\widehat{U}} < 0$ і $W_{\widehat{V}}^\top \widehat{W} W_{\widehat{V}} < 0$, тобто умови (a) і (c), оскільки

$$W_{\widehat{U}}=\begin{bmatrix} I_q \\ -U \end{bmatrix}, \qquad W_{\widehat{V}}=\begin{bmatrix} W_V & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Нехай тепер $R=LL^\top\geq 0$, $L\in\mathbb{R}^{m\times r}$ і $r=\operatorname{rank}R=\operatorname{rank}L<m$. Не обмежуючи загальності, розв'язок (3.4) шукаємо у вигляді

$$K_*=L^{+\top}K_1+L^\perp K_2, \qquad L^+=(L^\top L)^{-1}L^\top, \qquad L^\perp=W_{L^\top}=W_R\in\mathbb{R}^{m\times m-r},$$

де $K_1\in\mathbb{R}^{r\times l}$ і $K_2\in\mathbb{R}^{m-r\times l}$ — невідомі матриці. Враховуючи рівність $K_*^\top RK_*=K_1^\top K_1$, отримуємо ЛМН щодо K_1:

$$W_1+U_1^\top K_1V+V^\top K_1^\top U_1+V^\top K_1^\top K_1V<0,$$

де $W_1=W+U_0^\top K_2V+V^\top K_2^\top U_0$ і $U_1=L^+U$. Її критерієм сумісності, як показано вище, є співвідношення $W_1<U_1^\top U_1$ і $W_V^\top W_1W_V<0$, тобто

$$W-U^\top R^+U+U_0^\top K_2V+V^\top K_2^\top U_0<0, \qquad W_V^\top WW_V<0.$$

Знову застосовуючи критерій сумісності першої ЛМН щодо K_2, одержуємо умови (a) і (d).

Лему доведено.

Отже, на основі лем 2.4 і 3.1 маємо такий результат.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови*

$$R_0=D_{12}^\top QD_{12}>0, \qquad R_1=\gamma^2P-D_{11}^\top Q_1D_{11}>0, \qquad Q_1=Q-QD_{12}R_0^{-1}D_{12}^\top Q \tag{3.5}$$

і сумісна щодо X і S система співвідношень (2.5), (2.8) *і*

$$W_V^\top\begin{bmatrix} A^\top X+X^\top A+C_1^\top QC_1 & X^\top B_1+C_1^\top QD_{11} \\ B_1^\top X+D_{11}^\top QC_1 & D_{11}^\top QD_{11}-\gamma^2P \end{bmatrix}W_V<0, \tag{3.6}$$

$$A_2^\top X+X^\top A_2+X^\top R_2X+Q_2<0, \tag{3.7}$$

де

$$V=\big[C_2,D_{21}\big], \qquad A_2=A_1+B_{11}R_1^{-1}D_{11}^\top Q_1C_1, \qquad A_1=A-B_2R_0^{-1}D_{12}^\top QC_1,$$
$$R_2=B_{11}R_1^{-1}B_{11}^\top-B_2R_0^{-1}B_2^\top, \qquad B_{11}=B_1-B_2R_0^{-1}D_{12}^\top QD_{11},$$
$$Q_2=C_1^\top(Q_1+Q_1D_{11}R_1^{-1}D_{11}^\top Q_1)C_1.$$

Тоді існує статичний регулятор (3.2), *при якому замкнена система* (3.3) *допустима і має критерій якості $J<\gamma$. Матрицю такого регулятора можна побудувати у вигляді*

$$K=K_*(I_l+D_{22}K_*)^{-1}, \qquad \det\big(I_l+D_{22}K_*\big)\neq 0,$$

де K_* — розв'язок матричної нерівності (3.4).

Узагальнена лема про матричну невизначеність дозволяє побудувати сім'ю регуляторів (3.2) з еліпсоїдальною множиною матриць зворотного зв'язку, тобто визначити гарантовані межі робастності бажаного статичного регулятора.

Лема 3.2 [13]. *Нехай виконується матрична нерівність*

$$\Omega = \begin{bmatrix} W & U^\top & V^\top \\ U & R - P_0 & D^\top \\ V & D & -Q_0^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

де $W = W^\top < 0,\ U, V, D, R = R^\top \geq 0,\ P_0 = P_0^\top > 0$ *і* $Q_0 = Q_0^\top > 0$ — *матриці відповідних розмірів. Тоді для довільної матриці* K, *що належить еліпсоїду* $\mathcal{K}_0 = \{K : K^\top P_0 K \leq Q_0\}$, *виконуються співвідношення* $\rho(KD) < 1$ *і*

$$W + U^\top \mathbf{D}(K) V + V^\top \mathbf{D}^\top(K) U + V^\top \mathbf{D}^\top(K)\, R\, \mathbf{D}(K) V < 0,$$

де $\mathbf{D}(K) = (I - KD)^{-1} K$.

Із лем 2.4, 3.2 і умови (3.4) для замкненої системи випливає таке твердження.

Теорема 3.2. *Нехай існують матриці* $X,\ S = S^\top \geq 0,\ P_0 = P_0^\top > 0$ *і* $Q_0 = Q_0^\top > 0$, *що задовольняють систему співвідношень* (2.5), (2.8) *і*

$$\Omega(X, P_0, Q_0) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \Omega_2^\top & \Omega_4 & \Omega_5 \\ \Omega_3^\top & \Omega_5^\top & \Omega_6 \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$\Omega_1 = A^\top X + X^\top A + C_1^\top Q C_1 + C_2^\top Q_0 C_2, \qquad \Omega_2 = X^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} + C_2^\top Q_0 D_{21},$$
$$\Omega_3 = X^\top B_2 + C_1^\top Q D_{12} + C_2^\top Q_0 D_{22}, \qquad \Omega_4 = D_{11}^\top Q D_{11} + D_{21}^\top Q_0 D_{21} - \gamma^2 P,$$
$$\Omega_5 = D_{11}^\top Q D_{12} + D_{21}^\top Q_0 D_{22}, \qquad \Omega_6 = D_{12}^\top Q D_{12} + D_{22}^\top Q_0 D_{22} - P_0.$$

Тоді для довільного керування (3.2) *при* $K \in \mathcal{K}_0$ *замкнена система* (3.3) *є допустимою і має критерій якості* $J < \gamma$.

Нехай $K = K_1$ — матриця регулятора (3.2), знайдена на основі теореми 3.1. Підставивши вираз $u = K_1 y + v$ в рівняння (3.1), отримаємо аналогічну систему з новим вектором керування v, до якої застосуємо теорему 3.2. В результаті для системи (3.1) отримаємо сім'ю регуляторів (3.2) з еліпсоїдальною множиною матриць зворотного зв'язку

$$\mathcal{K}_1 = \{K : (K - K_1)^\top P_0 (K - K_1) \leq Q_0\},$$

при яких замкнена система є допустимою і має критерій якості $J < \gamma$.

3.2. Динамічний регулятор. Розглянемо систему (3.1) з динамічним регулятором

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \qquad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{3.8}$$

де $\xi \in \mathbb{R}^p$, p — порядок регулятора, матриці Z, V, U і K підлягають визначенню. Об'єднану систему (3.1), (3.8) можна записати у вигляді аналогічної системи у розширеному фазовому просторі $\mathbb{R}^{n+p}$

$$\begin{aligned} \widehat{E}\dot{\widehat{x}} &= \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}_1 w + \widehat{B}_2 \widehat{u}, \qquad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \\ z &= \widehat{C}_1 \widehat{x} + \widehat{D}_{11} w + \widehat{D}_{12} \widehat{u}, \\ \widehat{y} &= \widehat{C}_2 \widehat{x} + \widehat{D}_{21} w, \end{aligned} \tag{3.9}$$

застосувавши статичний регулятор

$$\widehat{u} = \widehat{K}_* \widehat{y}, \qquad \det(I_m - KD_{22}) \neq 0, \tag{3.10}$$

де

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \qquad \widehat{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y - D_{22} u \\ \xi \end{bmatrix}, \qquad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times p} \\ 0_{p\times m} & I_p \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \big[C_1, 0_{k\times p}\big], \qquad \widehat{D}_{11} = D_{11}, \qquad \widehat{D}_{12} = \big[D_{12}, 0_{k\times p}\big],$$

$$\widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times n} & I_p \end{bmatrix}, \qquad \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{K}_* = \begin{bmatrix} K_* & U_* \\ V_* & Z_* \end{bmatrix} = (I_{m+p} - \widehat{K}\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K},$$

$$\widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix} = (I_{m+p} + \widehat{K}_*\widehat{D}_{22})^{-1}\widehat{K}_*, \qquad \widehat{D}_{22} = \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{l\times p} \\ 0_{p\times m} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

При цьому замкнена система (3.9), (3.10) має вигляд

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}_*\widehat{x} + \widehat{B}_* w, \qquad z = \widehat{C}_*\widehat{x} + \widehat{D}_* w, \qquad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{3.12}$$

де

$$\begin{aligned} \widehat{A}_* &= \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{C}_2, \qquad \widehat{B}_* = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_*\widehat{D}_{21}, \\ \widehat{C}_* &= \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{C}_2, \qquad \widehat{D}_* = \widehat{D}_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_*\widehat{D}_{21}. \end{aligned}$$

Оскільки $\xi_0 = 0$, то її критерій якості $\widehat{J}$ типу (2.4) з ваговою матрицею

$$\widehat{X}_0 = \widehat{E}^\top \widehat{H} \widehat{E}, \qquad \widehat{H} = \begin{bmatrix} H & H_1^\top \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix} > 0,$$

не залежить від H_1, H_2, і його значення збігається з J.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови* (3.5) *і сумісна щодо* X, G, S *і* Θ *система співвідношень* (2.5), (2.8), (3.6) *і*

$$A_2^\top G + G^\top A_2 + G^\top R_2 G + Q_2 < 0, \tag{3.13}$$

$$X - G = \Theta E, \qquad \Theta = \Theta^\top \geq 0, \qquad \operatorname{rank}\Theta \leq p, \tag{3.14}$$

де матриці A_2, R_2 *і* Q_2 *визначені в* (3.7). *Тоді існує динамічний регулятор* (3.8), *при якому замкнена система* (3.12) *є допустимою і має критерій якості* $J < \gamma$.

Доведення. Запишемо умови (2.5), (2.6) і (2.8) для системи (3.12) у вигляді

$$0 \leq \widehat{E}^\top \widehat{X} = \widehat{X}^\top \widehat{E} \leq \gamma^2 \widehat{X}_0, \qquad \operatorname{rank}(\widehat{E}^\top \widehat{X} - \gamma^2 \widehat{X}_0) = \rho + p, \tag{3.15}$$

$$\widehat{W} + \widehat{U}^\top \widehat{K}_* \widehat{V} + \widehat{V}^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{U} + \widehat{V}^\top \widehat{K}_*^\top \widehat{R} \widehat{K}_* \widehat{V} < 0, \tag{3.16}$$

де

$$\widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^\top \widehat{X} + \widehat{X}^\top \widehat{A} + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{X}^\top \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^\top Q \widehat{D}_{11} \\ \widehat{B}_1^\top \widehat{X} + \widehat{D}_{11}^\top Q \widehat{C}_1 & \widehat{D}_{11}^\top Q \widehat{D}_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix}, \qquad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{U} = \left[\widehat{B}_2^\top \widehat{X} + \widehat{D}_{12}^\top Q \widehat{C}_1,\, \widehat{D}_{12}^\top Q \widehat{D}_{11}\right], \qquad \widehat{V} = \left[\widehat{C}_2,\, \widehat{D}_{21}\right], \qquad \widehat{R} = \widehat{D}_{12}^\top Q \widehat{D}_{12} \geq 0.$$

Неважко встановити, що за даних умов матриця $\widehat{X}$ і її діагональні блоки повинні бути невиродженими, причому $X_1 = X_3^\top E$ і $X_2 = X_2^\top > 0$.

Застосуємо умови (a) і (d) леми 3.1 щодо сумісності матричної нерівності (3.16):

$$W_{\widehat{V}}^\top \widehat{W} W_{\widehat{V}} < 0, \qquad W_{\widehat{U}_0}^\top \big(\widehat{W} - \widehat{U}^\top \widehat{R}^+ \widehat{U}\big) W_{\widehat{U}_0} < 0, \qquad \widehat{U}_0 = W_{\widehat{R}}^\top \widehat{U}. \tag{3.17}$$

Перша матрична нерівність із (3.17) набирає вигляду (3.6), оскільки

$$\widehat{V} = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times p} & D_{21} \\ 0_{p\times n} & I_p & 0_{p\times s} \end{bmatrix}, \qquad W_{\widehat{V}} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times s} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times s} \\ 0_{s\times n} & I_s \end{bmatrix} W_V, \qquad V = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}.$$

Перетворимо другу матричну нерівність із (3.17), врахувавши вирази

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} 0_{m\times p} \\ I_p \end{bmatrix}, \qquad W_{\widehat{U}_0} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times s} \\ -X_2^{-1} X_1 & 0_{p\times s} \\ 0_{s\times n} & I_s \end{bmatrix}, \qquad \widehat{U}_0 = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & 0_{p\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}^+ = \begin{bmatrix} R_0^{-1} & 0_{k\times p} \\ 0_{p\times k} & 0_{p\times p} \end{bmatrix}, \qquad \widehat{U} W_{\widehat{U}_0} = \begin{bmatrix} B_2^\top G + D_{12}^\top Q C_1 & D_{12}^\top Q D_{11} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times s} \end{bmatrix},$$

$$W_{\widehat{U}_0}^\top \widehat{W} W_{\widehat{U}_0} = \begin{bmatrix} A^\top G + G^\top A + C_1^\top Q_1 C_1 & G^\top B_1 + C_1^\top Q D_{11} \\ B_1^\top G + D_{11}^\top Q C_1 & D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P \end{bmatrix},$$

де $G = X - X_3 X_2^{-1} X_1 = X - \Theta E$, $\Theta = \Theta^\top = X_3 X_2^{-1} X_3^\top \geq 0$. В результаті отримаємо співвідношення (3.14) і матричну нерівність

$$\begin{bmatrix} A_1^\top G + G^\top A_1 + C_1^\top Q_1 C_1 - G^\top B_2 R_0^{-1} B_2^\top G & G^\top B_{11} + C_1^\top Q_1 D_{11} \\ B_{11}^\top G + D_{11}^\top Q C_1 & -R_1 \end{bmatrix} < 0,$$

яка за лемою Шура еквівалентна нерівності (3.13).

Якщо із наведених умов теореми знайдено матриці X, G, S і Θ, то доповнювальні блоки X_1, X_2 і X_3 матриці $\widehat{X}$ можна визначити, застосувавши спектральний розклад матриці $\Theta = \Theta^\top \geq 0$ і залежність $X_1 = X_3^\top E$. При цьому ранг матриці Θ визначає найменший порядок шуканого динамічного регулятора. Щоб задовольнити рангову умову в (3.15), можна покласти $H_1 = \gamma^{-2} X_3^\top$ і $H_2 = \gamma^{-2} X_2 + I_p$.

Теорему доведено.

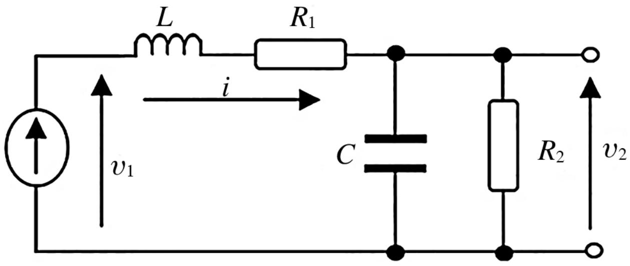

Рис. 1. Електричне коло.

***Зауваження* 3.1.** Можна встановити, що матрицю X у твердженнях леми 2.4, а також теорем 3.1 – 3.3 за відповідних умов завжди можна побудувати у вигляді $X = S_0E + E_0F$, де $0 < S_0 = S_0^\top < \gamma^2 H$, $E_0 = W_{E^\top}$ і $F \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$. При цьому $S = E^\top S_0 E \geq 0$ і $S - \gamma^2 X_0 = E^\top(S_0 - \gamma^2 H)E \leq 0$.

Із доведення теореми 3.3 випливає такий алгоритм побудови динамічного регулятора (3.8):

1) знаходження матриць X, G, S і Θ із системи співвідношень (2.5), (2.8), (3.6), (3.13) і (3.14);

2) побудова спектрального розкладу невід'ємно визначеної матриці $\Theta = T\Lambda T^\top$, де $T \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\Lambda = \operatorname{diag}\{\theta_1, \ldots, \theta_r\} > 0$, $r = \operatorname{rank}\Theta$;

3) формування доповнювальних блоків $X_1 = T^\top E$, $X_2 = \Lambda^{-1}$ і $X_3 = T$ матриці $\widehat{X}$ при $p = r$;

4) розв'язання матричної нерівності (3.16) щодо $\widehat{K}_*$ і обчислення матричних коефіцієнтів регулятора (3.8) за формулою (3.11).

4. Приклад. Розглянемо систему керування електричним колом, що описується у вигляді (3.1) з матрицями [27]

$$E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & 1 \\ 0 & -1/R_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad D_{11} = D_{21} = D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

де

$$x = \begin{bmatrix} i & v_2 & v_1 \end{bmatrix}^\top, \qquad z = \begin{bmatrix} v_2 & u + \alpha v_1 \end{bmatrix}^\top, \qquad y = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 \end{bmatrix}^\top,$$

$L = 3$ — індуктивність, $C = 2$ — ємність, $R_1 = 2$ і $R_2 = 1$ — опори, i — струм, v_1 і v_2 — напруги, u — керуючий сигнал джерела струму з обмеженим збуренням w, $\alpha = 1$ — параметр (рис. 1). У даній системі пара матриць (E, A) є імпульсною, а трійки (E, A, B_2) і (E, A, C_2) — відповідно I-керованою та I-спостережуваною.

Виберемо вагові матриці критерію якості (2.4): $P = 1$, $Q = I_2$ і $X_0 = E^\top E$. За допомогою комп'ютерної системи Mathcad Prime при $\gamma = 0{,}7$ знайдено матрицю

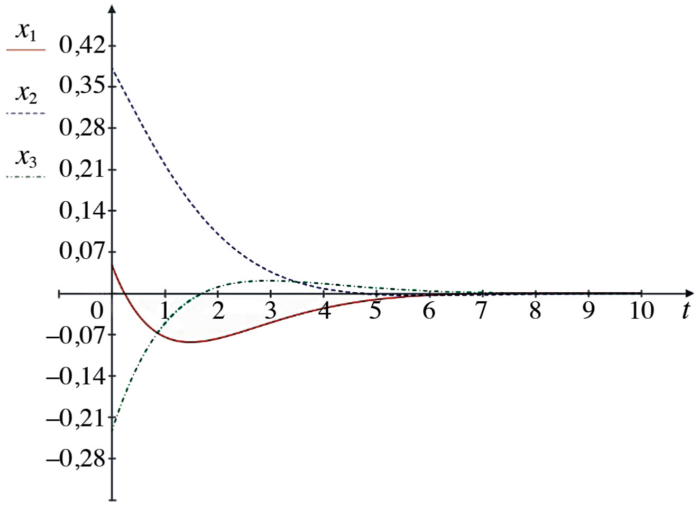

Рис. 2. Поведінка замкненої системи.

$$X = \begin{bmatrix} 0{,}53135 & 0{,}00692 & 0 \\ 0{,}01038 & 0{,}97992 & 0 \\ -0{,}15290 & 0{,}03987 & -0{,}88512 \end{bmatrix},$$

що задовольняє систему співвідношень (2.5), (2.8), (3.6) і (3.7), а також матрицю статичного регулятора (3.2) $K_1 = -\begin{bmatrix} 0{,}89374 & 1{,}00974 \end{bmatrix}$, при якому замкнена система (3.3) є допустимою і має критерій якості $J = 0{,}59259 < \gamma$. При цьому $J_0 = \|G_{zw}\|_\infty = 0{,}27633$. Обчислювальні експерименти показали, що зменшення параметра α на інтервалі $[0, 1]$ приводить до збільшення мінімально можливих характеристик J_0 і J замкненої системи при застосуванні статичних регуляторів типу (3.2).

На основі теореми 3.2 побудовано еліпсоїдальну множину таких матриць регулятора (3.2)

$$\mathcal{K}_1 = \left\{ K : (K - K_1)\,\Gamma\,(K - K_1)^\top \leq 1 \right\}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 27{,}11679 & -0{,}09483 \\ -0{,}09483 & 27{,}36519 \end{bmatrix},$$

при яких замкнена система (3.3) є допустимою і її критерій якості $J < \gamma$.

Далі, для замкненої системи з матрицею регулятора K_1 побудовано найгірше збурення

$$w = K_0 x, \quad K_0 = \begin{bmatrix} 0{,}18527 & 0{,}38263 & 0{,}00013 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

і найгірший початковий вектор $x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}04910 & 0{,}38187 & -0{,}23294 \end{bmatrix}^\top$ щодо критерію якості J (див. лему 2.5). На рис. 2 зображено поведінку розв'язку замкненої системи при наявності найгіршого збурення

$$E\dot{x} = A_0 x, \qquad x(0) = x_0, \tag{4.2}$$

де $A_0 = A + B_2 K_1 C_2 + B_1 K_0$, а на рис. 3 — функцію (4.1) даного збурення. Система (4.2) є допустимою і має скінченний спектр $\sigma(F_0) = \left\{ -0{,}71783 \pm 0{,}45121\, i \right\}$. Її розв'язок побудовано

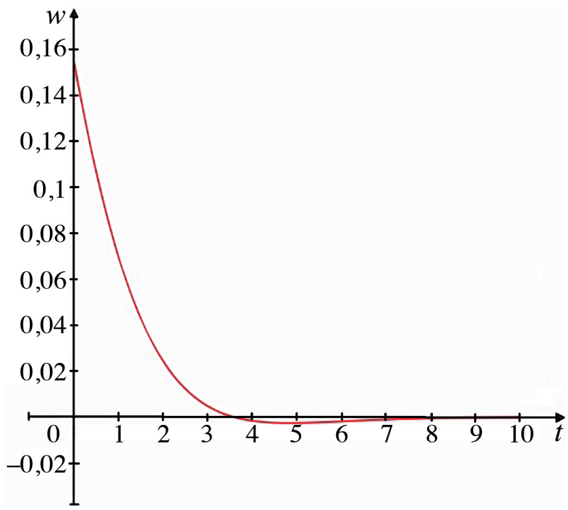

Рис. 3. Найгірше збурення щодо критерію якості J.

у вигляді $x(t) = T\widetilde{x}(t)$, де T — матриця повного рангу, для якої виконуються співвідношення

$$A_0T = ET\Lambda, \qquad \operatorname{rank} T = \operatorname{rank}(ET) = \operatorname{rank} E,$$

а $\widetilde{x}(t)$ — розв'язок звичайної системи $\dot{\widetilde{x}} = \Lambda\widetilde{x}$, причому $\sigma(\Lambda) = \sigma(F_0)$ і $x_0 = T\widetilde{x}_0$.

На основі теореми 3.3 знайдено також матриці динамічного регулятора (3.8)

$$Z = \begin{bmatrix} -0{,}38338 & -0{,}00721 \\ 0{,}08507 & -0{,}41471 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} -0{,}03600 & -0{,}07555 \\ -0{,}00232 & -0{,}00068 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}57234 & 2{,}61512 \end{bmatrix}, \qquad K = \begin{bmatrix} -0{,}08957 & -0{,}96093 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система (3.12) є допустимою і має критерій якості $J = 0{,}47138$.

Література

1. S. Campbell, A. Ilchmann, V. Mehrmann, T. Reis (Eds.), *Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Nature Switzerland AG (2019).
2. A. Ilchmann, T. Reis (Eds.), *Surveys in differential-algebraic equations III*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Int. Publ. Switzerland (2015).
3. Guang-Ren Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer, New York etc. (2010).
4. R. Riaza, *Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications*, World Sci., Singapore (2008).
5. А. А. Белов, А. П. Курдюков, *Дескрипторные системы и задачи управления*, Физматлит, Москва (2015).
6. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
7. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва (1988).
8. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Stud. Appl. Math., **15** (1994).
9. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
10. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, Москва (2002).
11. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*, Физматлит, Москва (2007).

12. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями*, Автоматика и телемеханика, № 6, 20 – 38 (2010).
13. А. Г. Мазко, *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств*, Пр. Ін-ту математики НАН України, **102** (2016).
14. А. Г. Мазко, С. М. Кусий, *Стабилизация по выходу и взвешенное подавление возмущений в дискретных системах управления*, Проблемы управления и информатики, № 6, 78 – 93 (2017).
15. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 88 – 99 (2018).
16. О. Г. Мазко, Т. О. Котов, *Робастна стабілізація і зважене гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **71**, № 10, 1374 – 1388 (2019).
17. О. Г. Мазко, Т. О. Котов, *Оцінка впливу і гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **16**, № 2, 63 – 84 (2019).
18. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
19. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits, Systems and Signal Process, **26**, 829 – 838 (2007).
20. M. Chadli, P. Shi, Z. Feng, J. Lam, *New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems*, Asian J. Control, **20**, № 1, 1 – 7 (2018).
21. F. Gao, W. Q. Liu, V. Sreeram, K. L. Teo, *Bounded real lemma for descriptor systems and its application*, IFAC 14th Triennial World Congress, Beijing, P. R., China (1999), p. 1631 – 1636.
22. I. Masubushi, Y. Kamitane, A. Ohara, N. Suda, *H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequalities approach*, Automatica, **33**, № 4, 669 – 673 (1997).
23. О. Г. Мазко, *Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1541 – 1552 (2018).
24. Yu Feng, Mohamed Yagoubi, *Robust control of linear descriptor systems*, Springer Nature Singapore Pte Ltd (2017).
25. Masaki Inoue, Teruyo Wada, Masao Ikeda, Eiho Uezato, *Robust state-space H_∞ controller design for descriptor systems*, Automatica, **59**, 164 – 170 (2015).
26. D. Cobb, *Robust controllability, observability and duality in singular systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **29**, 1076 – 1082 (1984).
27. K. Takaba, *Robust H^2 control of descriptor system with time-varying uncertainty*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **71**, № 4, 559 – 579 (1998).

Одержано 25.02.20,
після доопрацювання — 11.08.20