ISSN 1027-3190

Український математичний журнал

Том 66
№10

2014

Науковий журнал

УДК 512.643, 517.925.51

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА МАТРИЦЫ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ СЛЕДА

New necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability and localization of the spectrum of linear autonomous systems are proposed using the trace functions of matrices. The application of these conditions is reduced to the solution of two scalar inequalities with respect to a symmetric positive-definite matrix. As a corollary, for linear control systems, we present a method aimed at the construction of the set of stabilizing measurable output feedbacks.

Запропоновано нові необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості та локалізації власних значень лінійних автономних систем із використанням функцій сліду матриць. Застосування цих методів зводиться до розв'язання двох скалярних нерівностей відносно симетричної додатно означеної матриці. Як наслідок, для лінійних систем керування наведено методику побудови множини стабілізуючих зворотних зв'язків по вимірюваному виходу.

1. Введение. При проектировании объектов новой техники большое внимание уделяется методам анализа устойчивости и стабилизации линеаризованных непрерывных или дискретных моделей систем управления. Из современными и классическими методами теории устойчивости и стабилизации линейных динамических систем можно ознакомиться, например, в [1, 2].

В данной работе предлагаются новые необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости и методы локализации собственных значений линейных автономных систем с использованием функций следа матриц. Их практическое применение сводится к решению двух скалярных неравенств относительно симметричной положительно определенной матрицы. В качестве следствия для линейных систем управления приводится методика построения множества стабилизирующих управлений в виде обратной связи по измеряемому выходу.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) — пространство вещественных (комплексных) матриц размера $n\times m$; I_n — единичная матрица порядка n; X^* (X^T) — комплексно-сопряженная (транспонированная) матрица к матрице X; $X>Y$ и $X\geq Y$ — матричные неравенства, обозначающие положительную и неотрицательную определенность матрицы $X-Y$; $i(X)=\{i_+(X),i_-(X),i_0(X)\}$ — инерция эрмитовой матрицы $X=X^*$, составленная из количеств ее положительных, отрицательных и нулевых собственных значений с учетом кратностей; $\lambda_{\max}(X)$ ($\lambda_{\min}(X)$) — максимальное (минимальное) собственное значение эрмитовой матрицы X; $\mathrm{tr}A$, $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ — след, спектр и спектральный радиус матрицы A соответственно; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x.

2. Функции $\mu(A)$ и $\mu_*(A)$. В пространстве матриц $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ введем скалярные функции

$$\mu(A)=(\mathrm{tr}A)^2-\nu\,\mathrm{tr}A^2,\qquad \mu_*(A)=\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}A^*-\nu\,\mathrm{tr}(AA^*),\tag{2.1}$$

где ν — заданное вещественное число. Поскольку след матрицы совпадает с суммой ее собственных значений, то

$$\mu(A)=\varphi(z)\triangleq\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^2-\nu\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2,$$

где $z=\xi+i\eta$, $\xi=[\xi_1,\ldots,\xi_n]^T$, $\eta=[\eta_1,\ldots,\eta_n]^T$, $\lambda_k=\xi_k+i\eta_k\in\sigma(A)$, $k=\overline{1,n}$. Если спектр $\sigma(A)$ вещественный, то $\mu(A)=\varphi(\xi)\in\mathbb{R}^1$. Функция $\mu_*(A)$ всегда принимает вещественные значения и представляется в виде

$$\mu_*(A) = \mu(A_R) + \mu(A_I), \tag{2.2}$$

где $A_R = (A + A^*)/2$ и $A_I = (A - A^*)/(2i)$ — эрмитовы составляющие в разложении $A = A_R + iA_I$.

Имеют место неравенства [3]

$$\operatorname{tr}(AA^*) \geq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2, \qquad \operatorname{tr}A_R^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2, \qquad \operatorname{tr}A_I^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2, \tag{2.3}$$

причем равенства в (2.3) выполняются в том и только в том случае, когда матрица A нормальная, т. е. $AA^* = A^*A$. Соотношения (2.3) являются следствием более общих неравенств Вейля для собственных и сингулярных чисел матрицы [4].

Используя соотношения (2.1)–(2.3), при $\nu \geq 0$ можно установить неравенства

$$\mu(A_R) \leq \varphi(\xi), \qquad \mu(A_I) \leq \varphi(\eta), \qquad \mu_*(A) \leq \varphi(\xi) + \varphi(\eta). \tag{2.4}$$

Очевидно, что если $\nu \leq 0$, то $\varphi(\xi) \geq 0$ для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если же $\nu \geq n$, то из представления

$$\varphi(\xi) = (n - \nu) \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{k<s\leq n} (\xi_k - \xi_s)^2 \tag{2.5}$$

следует неравенство $\varphi(\xi) \leq 0$. Далее будем предполагать, что $0 \leq \nu \leq n$.

Отметим, что представление (2.5) является следствием тождества Лагранжа

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k\right)^2 \equiv \sum_{k<s\leq n} (\xi_k \eta_s - \xi_s \eta_k)^2$$

в случае $\eta_s = 1$, $s = \overline{1, n}$ [3].

Обозначим через $p(A)$ и $q(A)$ количества собственных значений матрицы A с учетом кратностей соответственно с положительными и отрицательными вещественными частями.

Лемма 2.1. *Если выполняются условия*

$$\operatorname{tr}A_R > 0, \qquad \mu(A_R) > 0, \qquad 0 \leq \nu < n, \tag{2.6}$$

то $p(A) > \nu$. *Если же*

$$\operatorname{tr}A_R < 0, \qquad \mu(A_R) > 0, \qquad 0 \leq \nu < n, \tag{2.7}$$

то $q(A) > \nu$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{tr}A_R = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, из неравенства $\operatorname{tr}A_R > 0$ следует, что $p(A) \geq 1$. Пусть $\xi_k > 0$, $k = \overline{1, p}$, и $\xi_k \leq 0$, $k = \overline{p+1, n}$, где $p = p(A) < n$. В случае $p = n$ неравенство $p > \nu$ выполняется согласно предположению $\nu < n$.

Если $\mu(A_R) > 0$, то с учетом соотношений (2.5), (2.6) и

$$\operatorname{tr}A_R = \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \sum_{k=p+1}^{n} \xi_k > 0, \qquad \sum_{k=1}^{p} \xi_k \sum_{k=p+1}^{n} \xi_k \leq -\left(\sum_{k=p+1}^{n} \xi_k\right)^2$$

получаем

$$0 < \varphi(\xi) = \left(\sum_{k=1}^{p} \xi_k\right)^2 + \left(\sum_{k=p+1}^{n} \xi_k\right)^2 + 2\sum_{k=1}^{p} \xi_k \sum_{k=p+1}^{n} \xi_k - \nu \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{p} \xi_k\right)^2 - \nu \sum_{k=1}^{p} \xi_k^2 - \left(\sum_{k=p+1}^{n} \xi_k\right)^2 - \nu \sum_{k=p+1}^{n} \xi_k^2 =$$

$$= (p-\nu)\sum_{k=1}^{p} \xi_k^2 - \sum_{k<s\leq p} (\xi_k - \xi_s)^2 - \left(\sum_{k=p+1}^{n} \xi_k\right)^2 - \nu \sum_{k=p+1}^{n} \xi_k^2.$$

Отсюда следует необходимость выполнения неравенства $p > \nu$.

Аналогично можно установить, что неравенство $q > \nu$ является следствием соотношений (2.7). Кроме того, можно воспользоваться доказанным утверждением, так как $q(A) = p(-A)$.

Лемма доказана.

***Замечание* 2.1.** Из доказательства леммы 2.1 следует, что нестрогие неравенства $p(A) \geq \nu$ и $q(A) \geq \nu$ выполняются при $0 < \nu \leq n$, если $\mu(A_R) \geq 0$ и соответственно $\mathrm{tr} A_R > 0$ и $\mathrm{tr} A_R < 0$. Если же $\mu(A_R) \geq 0$ при $0 \leq \nu \leq n$, то можно гарантировать, что $q(A) \leq n - \nu$ и $p(A) \leq n - \nu$, если соответственно $\mathrm{tr} A_R \geq 0$ и $\mathrm{tr} A_R \leq 0$.

***Замечание* 2.2.** Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет вещественный спектр или $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то в (2.4) $\varphi(\eta) \leq 0$. В этом случае лемма 2.1 и замечание 2.1 сохраняют силу, если вместо $\mu(A_R)$ использовать функцию $\mu_*(A)$.

Если матрица A эрмитова, то ее спектр вещественный и функции $\mu(A)$, $\mu(A_R)$ и $\mu_*(A)$ совпадают. В этом случае имеем следующее утверждение.

***Следствие* 2.1.** *Пусть $A = A^*$ — эрмитова матрица и выполняются условия $\mu(A) > 0$ и $n - 1 \leq \nu < n$. Тогда она положительно (отрицательно) определена в том и только в том случае, когда $\mathrm{tr} A > 0$ ($\mathrm{tr} A < 0$). Если же $\mu(A) \geq 0$ и $n - 1 \leq \nu \leq n$, то неотрицательная (неположительная) определенность матрицы $A = A^*$ эквивалентна неравенству $\mathrm{tr} A \geq 0$ ($\mathrm{tr} A \leq 0$).*

3. Локализация и дихотомия спектра матрицы относительно аналитических кривых. Пусть аналитическая кривая Λ_0 разделяет комплексную плоскость $\mathbb{C}^1$ на две непустые открытые области Λ_+ и Λ_-:

$$\Lambda_0 = \{\lambda\colon f(\lambda, \overline{\lambda}) = 0\}, \qquad \Lambda_+ = \{\lambda\colon f(\lambda, \overline{\lambda}) > 0\}, \qquad \Lambda_- = \{\lambda\colon f(\lambda, \overline{\lambda}) < 0\},$$

где $f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(\lambda) \overline{f_j(\lambda)}$ — эрмитова функция, определяемая аналитическими функциями $f_i(\lambda)$ и коэффициентами эрмитовой матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_1^r$. Например, если

$$f_1(\lambda) \equiv 1, \qquad f_2(\lambda) = \lambda, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} -2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то $f(\lambda, \overline{\lambda}) = 2(\mathrm{Re}\lambda - \alpha)$ и Λ_0 является вертикальной прямой $\mathrm{Re}\lambda = \alpha$, разделяющей плоскость $\mathbb{C}^1$ на две полуплоскости $\Lambda_\pm$. Если

$$f_1(\lambda) \equiv 1, \qquad f_2(\lambda) = \lambda - \lambda_0, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

то $f(\lambda, \overline{\lambda}) = \rho^2 - |\lambda - \lambda_0|^2$ и Λ_0 описывает окружность радиуса ρ с центром в точке λ_0.

Поставим в соответствие матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и функции f линейный оператор в пространстве матриц $\mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\mathbf{M}\colon \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad \mathbf{M}X = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(A) X f_j^*(A), \tag{3.1}$$

где $f_i(A)$ — аналитические функции от матрицы A. Очевидно, данный оператор сохраняет подпространство эрмитовых матриц. Критерием обратимости оператора (3.1) является система неравенств [5]

$$f(\lambda_i, \overline{\lambda_j}) \neq 0, \qquad i, j = \overline{1, n},$$

где $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — спектр матрицы A. Если оператор (3.1) обратим, то выполняется условие дихотомии спектра $\sigma(A)$ относительно кривой Λ_0, т. е. $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \varnothing$.

Используя обобщенные теоремы Ляпунова и Островского – Шнайдера (см., например, [6]), а также следствие 2.1, получаем следующие утверждения.

Теорема 3.1. *Пусть $\nu \in [n-1, n)$ и для некоторой матрицы $X = X^*$ совместна система неравенств*

$$\operatorname{tr} \mathbf{M}X > 0, \qquad \mu(\mathbf{M}X) > 0. \tag{3.2}$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

1) $\sigma(A) \cap \Lambda_0 = \varnothing$;

2) *если $X > 0$, то $\sigma(A) \subset \Lambda_+$;*

3) *если $i_+(\Gamma) = 1$, то $i_0(X) = 0$;*

4) *если $i_+(\Gamma) = i_-(\Gamma) = 1$, то в областях Λ_+ и Λ_- расположены соответственно $i_+(X)$ и $i_-(X)$ собственных значений матрицы A с учетом кратностей.*

***Замечание* 3.1.** Если оператор $\mathbf{M}$ обратим, то система неравенств (3.2) имеет решение $X = X^*$. Например, решение матричного уравнения

$$\mathbf{M}X = Y, \tag{3.3}$$

где $Y = \alpha I_n$, $\alpha > 0$, удовлетворяет системе (3.2). Если для любой матрицы $Y = Y^* > 0$ уравнение (3.3) имеет решение $X = X^* > 0$, то оператор $\mathbf{M}$ обладает свойством *положительной обратимости* относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц. Если $i_+(\Gamma) = 1$, то включение $\sigma(A) \subset \Lambda_+$ выполняется в том и только в том случае, когда оператор $\mathbf{M}$ положительно обратим [6, с. 165]. В [6] выделен также максимально допустимый класс эрмитовых функций $\mathcal{F}_0^m$, содержащий функции f указанной структуры при ограничении $i_+(\Gamma) = 1$ и для которого справедлив сформулированный критерий включения $\sigma(A) \subset \Lambda_+$.

Таким образом, имеем следующий критерий локализации спектра матрицы.

Теорема 3.2. *Пусть $\nu \in [n-1, n)$ и $i_+(\Gamma) = 1$. Тогда все собственные значения матрицы A расположены в области Λ_+ в том и только в том случае, когда система неравенств (3.2) имеет решение $X = X^* > 0$.*

***Замечание* 3.2.** Условия локализации и распределения спектра матрицы A в теоремах 3.1 и 3.2 можно ослабить, используя свойства типа управляемости пары матриц (A, Y), где $Y = \mathbf{M}X \geq 0$. Например, в утверждении 2 теоремы 3.1 вместо условий (3.2) можно использовать соотношения

$$\operatorname{tr} Y > 0, \qquad \mu(Y) \geq 0, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{W}Y > 0, \qquad \mu(\mathbf{W}Y) > 0,$$

где

$$Y = \mathbf{M}X, \qquad \mathbf{W}Y = \sum_{k=0}^{q-1} A^k Y A^{*k},$$

$q = \min\{m, n - \operatorname{rank} Y + 1\}$, m — степень минимального полинома матрицы A, $m \leq n$ (см. [6, с. 58]).

4. Условия асимптотической устойчивости линейных систем. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$E\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.1}$$

где E и A — матрицы размера $n \times n$. Будем предполагать, что матрица E невырожденная и $\nu = n - 1$.

Теорема 4.1. *Система* (4.1) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для некоторой симметричной положительно определенной матрицы* $X = X^T > 0$ *выполняются неравенства*

$$\operatorname{tr}(AXE^T) < 0, \qquad \mu(AXE^T + EXA^T) > 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Согласно теореме Ляпунова система (4.1) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для любой матрицы $Y = Y^T < 0$ существует единственное решение $X = X^T > 0$ матричного уравнения

$$AXE^T + EXA^T = Y. \tag{4.3}$$

Если матрица $X = X^T > 0$ удовлетворяет условиям (4.2), то для матрицы Y вида (4.3) выполняются условия отрицательной определенности в следствии 2.1 и, следовательно, система (4.1) асимптотически устойчива. Обратно, если система (4.1) асимптотически устойчива, то существует матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая условиям (4.2). Действительно, множество симметричных отрицательно определенных матриц Y, удовлетворяющих неравенству $\mu(Y) > 0$, непустое. Например, можно положить $Y = \alpha I_n$, $\alpha < 0$. При этом

$$\operatorname{tr}(AXE^T) = n\alpha/2 < 0,$$
$$\mu(AXE^T + EXA^T) = (n\alpha)^2 - \nu n\alpha^2 = n\alpha^2 > 0,$$

где $X = X^T > 0$ — решение уравнения Ляпунова (4.3), т. е. выполняются неравенства (4.2).

Теорема доказана.

Рассмотрим линейную систему управления

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx, \qquad u = Ky, \tag{4.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода системы, E, A, B, C и K — постоянные матрицы соответствующих размеров. Замкнутая система имеет вид

$$E\dot{x} = (A + BKC)x. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть для некоторых матриц K_0 и $X = X^T > 0$ выполняются условия*

$$\operatorname{tr}(A_0XE^T) < 0, \qquad \mu(A_0XE^T + EXA_0^T) > 0, \tag{4.6}$$

где $A_0 = A + BK_0C$. Тогда для любой матрицы коэффициентов усиления обратной связи $K = K_0 + \widetilde{K}$ такой, что

$$\operatorname{tr}(B\widetilde{K}CXE^T) \leq 0, \qquad \mu(B\widetilde{K}CXE^T + EXC^T\widetilde{K}^TB^T) \geq 0, \tag{4.7}$$

замкнутая система (4.5) асимптотически устойчива. При этом $v(x) = x^TX^{-1}x$ является общей функцией Ляпунова системы для данного множества стабилизирующих управлений.

Доказательство. Замкнутая система (4.5) при $K = K_0 + \widetilde{K}$ асимптотически устойчива, если для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется матричное неравенство $Y_0 + Y_1 = Y < < 0$, где

$$Y_0 = A_0XE^T + EXA_0^T, \qquad Y_1 = B\widetilde{K}CXE^T + EXC^T\widetilde{K}^TB^T,$$

обеспечивающее отрицательную определенность производной функции Ляпунова $v(x) = = x^TX^{-1}x$ в силу данной системы.

Покажем, что неравенство $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$ является следствием соотношений

$$\operatorname{tr} Y_0 \operatorname{tr} Y_1 \geq 0, \qquad \mu(Y_0) > 0, \qquad \mu(Y_1) \geq 0.$$

Действительно,

$$[\operatorname{tr}(Y_0 + Y_1)]^2 = (\operatorname{tr}Y_0 + \operatorname{tr}Y_1)^2 = (\operatorname{tr}Y_0)^2 + (\operatorname{tr}Y_1)^2 + 2\operatorname{tr}Y_0 \operatorname{tr}Y_1 >$$

$$> \nu \operatorname{tr}Y_0^2 + \nu \operatorname{tr}Y_1^2 + 2\nu\sqrt{\operatorname{tr}Y_0^2 \operatorname{tr}Y_1^2} \geq$$

$$\geq \nu\,[\operatorname{tr}Y_0^2 + \operatorname{tr}Y_1^2 + 2|\operatorname{tr}(Y_0Y_1)|] \geq$$

$$\geq \nu \operatorname{tr}(Y_0 + Y_1)^2,$$

т. е. $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$. Здесь использовано также неравенство Коши – Буняковского для симметричных матриц [3]

$$|\operatorname{tr}\,(Y_0Y_1)|^2 \leq \operatorname{tr}\,Y_0^2 \operatorname{tr}Y_1^2.$$

Следовательно, согласно теореме 4.1 условия (4.6) и (4.7) обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4.5).

Теорема доказана.

Пример 4.1. Рассмотрим нелинейную систему управления, описывающую динамику маятника с маховиком [7],

$$E\dot{x} = A(x)x + Bu, \qquad y = Cx, \qquad u = Ky, \tag{4.8}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \omega \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1\chi \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J\chi & J_r + J_m\chi \\ 0 & J_r\chi + J_m\chi^2 & J_r + J_m\chi^2 \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (m_0 b + m_1 h)\, g\chi\, \varphi(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(\psi) = \frac{\sin\psi}{\psi}, \qquad C = I_3.$$

Здесь $J = J_v + J_r + J_m + m_1 h^2$ — полный момент инерции системы, а $\varphi(\psi)$ — непрерывная функция. В данном случае измеряемым выходом системы является ее вектор состояния.

Возьмем следующие значения механических параметров маятника и характеристик двигателя маховика:

$$m_0 = 1\,\text{кг}, \qquad m_1 = 3\,\text{кг}, \qquad b = 0,1\,\text{м}, \qquad h = 0,13\,\text{м},$$

$$J_v = 0,0392\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \qquad J_m = 0,03\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \qquad J_r = 0,0001\,\text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$\chi = 0,1, \qquad c_1 = 0,08\,\text{Н}\cdot\text{м/В}, \qquad c_2 = 0,0076\,\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

В окрестности нулевого состояния равновесия маятника функция $\varphi(\psi) \approx 1$, а линейное приближение замкнутой системы (4.8) имеет вид (4.5), где $A = A(0)$ и $\det E \neq 0$.

Используя систему MATHCAD, находим матрицы

$$K_0 = [14,1388 \;\; 1,856 \;\; 1,0375],$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,614 & -0,048 & -30,7606 \\ -0,048 & 49,5901 & -441,8941 \\ -30,7606 & -441,8941 & 6082,4 \end{bmatrix} > 0,$$

удовлетворяющие условиям (4.6):

$$\operatorname{tr}(A_0 X E^T) = -0,0963 < 0, \qquad \mu(A_0 X E^T + E X A_0^T) = 0,0002 > 0,$$

где $A_0 = A(0) + BK_0$. При этом

$$\sigma(F) = \{-5,0585; -2,3712 \pm 3,4193i\},$$

где $F(\lambda) = A_0 - \lambda E$ — пучок матриц, является спектром системы (4.5).

Таким образом, в силу теоремы 4.1 и теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению состояние $x \equiv 0$ нелинейной системы (4.8) с управлением $u = K_0 x$ асимптотически устойчиво. При этом $v(x) = x^T X^{-1} x$ является функцией Ляпунова данной системы.

Отметим, что для системы (4.1) при условии регулярности $\det(A - \lambda E) \not\equiv 0$ можно сформулировать достаточные условия асимптотической устойчивости в терминах функций следа некоторых матриц, использовав следствие 2.1 и систему линейных матричных неравенств

$$AXE^T + EXA^T + EYE^T \leq 0, \qquad EXE^T \geq 0. \tag{4.9}$$

При этом матрица E может быть вырожденной. Если существуют матрицы $X = X^T$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие соотношениям (4.9), то система (4.1) асимптотически устойчива. Критерием асимптотической устойчивости данной системы является разрешимость системы неравенств (4.9) в виде [6]

$$X = Z\widehat{X}Z^T, \qquad Y = Z\widehat{Y}Z^T, \qquad \widehat{Y} > 0,$$

где Z — решение максимального ранга алгебраической системы

$$AZE = EZA, \qquad Z = ZEZ.$$

Данные утверждения устанавливаются с помощью канонической формы Кронекера регулярного пучка матриц $A - \lambda E$ [4].

1. *Liao X., Wang L., Yu P.* Stability of dynamical systems // Monograph Series on Nonlinear Sience and Complexity / Eds A. C. J. Luo and G. Zaslavsky. – Amsterdam et al.: Elsevier, 2007. – Vol. 5. – 706 p.
2. *Leonov G. A., Shumafov M. M.* Stabilization of linear systems // Stability, Oscillations and Optimization of Systems. – Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2011. – Vol. 5. – 430 p.
3. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.– 552 с.
5. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **28**. – 216 с.
7. *Андриевский Б. Р.* Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 24. – С. 258–280.

Получено 28.11.13