DOI: 10.3842/nosc.v26i4.1425

УДК 517.925.51; 681.5.03

СИНТЕЗ СТАТИЧНИХ РЕГУЛЯТОРІВ ДЛЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ ІЗ ЕКЗОГЕННИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Олексій Мазко
Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: mazkoag@gmail.com

We propose new approaches to solving the problem of weighted H_∞-optimization of controlled objects by means of static controllers. A linear model of the stabilization system for a VTOL (vertical takeoff and landing) type aircraft is considered. We give numerical results of the search for stabilizing static state- and output-feedback controllers that minimize the weighted damping level of external and initial disturbances in this system.

Запропоновано нові підходи до розв'язування задачі зваженої H_∞-оптимізації керованих об'єктів за допомогою статичних регуляторів. Розглянуто лінійну модель системи стабілізації літального апарата типу VTOL (vertical takeoff and landing). Наведено чисельні результати пошуку стабілізовних регуляторів за станом і виходом, які мінімізують зважений рівень гасіння зовнішніх і початкових збурень у цій системі.

1. Вступ. При моделюванні сучасних систем керування складними об'єктами необхідно враховувати невизначені елементи (параметри, зовнішні збурення, похибки вимірювальних приладів тощо). Для таких об'єктів першочерговими є задачі побудови законів керування, що забезпечують робастну стійкість станів рівноваги і знижують вплив зовнішніх (екзогенних) збурень на динаміку керованих об'єктів. Ці задачі можуть бути розв'язані методами теорії H_∞-оптимізації або методами інваріантних еліпсоїдів із залученням апарата лінійних матричних нерівностей (ЛМН) [1 – 5]. Умови існування та побудова стабілізовних керувань для деяких класів систем із запізненням при наявності параметричних або функціональних невизначеностей зводяться до розв'язування алгебраїчних матричних нерівностей, що виникають внаслідок застосування методу функціоналів Ляпунова – Красовського (див., наприклад, [6 – 8]).

Типовим критерієм якості у задачах H_∞-оптимізації неперервних систем із нульовим початковим станом є рівень гасіння обмежених збурень, якому відповідає максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу об'єкта і збурень. Так, для класу лінійних систем

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

ця характеристика збігається з H_∞-нормою матричної передавальної функції [3]

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^\top(-i\omega)H(i\omega))}, \qquad H(\lambda) = C(\lambda I - A)^{-1}B + D,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $w \in \mathbb{R}^s$ — вектори відповідно стану, контрольованого виходу і входу системи, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальне власне значення матриці. На практиці доцільно застосовувати зважені критерії якості керованих систем вигляду [9]

$$J_0 = \sup_{0<\|w\|_P<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \qquad J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{2}$$

де

$$\|z\|_Q = \sqrt{\int_0^\infty z^\top Q z\, dt}, \qquad \|w\|_P = \sqrt{\int_0^\infty w^\top P w\, dt},$$

$\mathcal{W}$ — множина пар (w, x_0) системи, при яких $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = X_0^\top > 0$ — задані вагові матриці (див. також [10 – 13]). Очевидно, що $J_0 \leq J$, причому J_0 збігається з $\|H\|_\infty$ у випадку одиничних матриць P і Q.

Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування. Причому, компонентами невизначених збурень можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 називатимемо *найгіршими* в системі (1) щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях у (2) досягається супремум, тобто $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$. Вектор $w(t)$ є найгіршим щодо J_0, якщо $\|z\|_Q = J_0\|w\|_P$.

Відомі методи синтезу H_∞-керування базуються на критеріях виконання верхніх оцінок для відповідних критеріїв якості, встановлених у термінах квадратичних матричних рівнянь і ЛМН [3, 4, 14]. Для розв'язання ЛМН створено достатньо ефективні засоби LMI Toolbox комп'ютерної системи Matlab [15].

У цій роботі викладено деякі результати попередніх і нових досліджень автора, присвячених розробці методів зваженої H_∞-оптимізації систем керування і їхнього застосування в задачі мінімізації зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень у системі керування літального апарата типу VTOL (vertical takeoff and landing) [16]. Відмінна особливість отриманих результатів порівняно з відомими полягає у застосуванні зважених критеріїв якості J_0 і J, оптимізація яких дає нові можливості досягнути бажаних характеристик систем керування. Крім того, розвинуто методику знаходження найгірших векторів зовнішніх (зовнішніх і початкових) збурень щодо J_0 (J), яка дозволяє оцінювати і порівнювати поведінку керованих об'єктів за можливих реальних умов.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n \times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; A^{-1} $\left(A^\top\right)$ — обернена (транспонована) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$; $\|x\|$ — евклідова норма вектора x; $\|w\|_P$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$; $\mathbb{C}^-$ $\left(\mathbb{C}^+\right)$ — відкрита півплощина $\operatorname{Re}\lambda < 0$ $\left(\operatorname{Re}\lambda > 0\right)$, $\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\}$ — опуклий многогранник (політоп) з вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць $\mathbb{R}^{(n\times m)}$, що описується у вигляді

$$\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\} = \left\{A \in \mathbb{R}^{(n\times m)} :\, A = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1\right\}.$$

2. Оцінка зважених критеріїв якості лінійних систем. Спочатку розглянемо лінійну систему без керування вигляду (1).

Лема 1 [12]. *У системі (1) матриця A гурвіцева і виконується оцінка $J_0 < \gamma$ тоді і лише тоді, коли ЛМН*

$$\begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB & C^\top \\ B^\top X & -\gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{3}$$

має розв'язок $X = X^\top > 0$. Матриця A гурвіцева і $J < \gamma$ тоді і лише тоді, коли сумісна система ЛМН (3) і

$$0 < X < \gamma^2 X_0. \tag{4}$$

Згідно з лемою Шура [3] умова (3) еквівалентна матричній нерівності Ріккаті

$$A_0^\top X + XA_0 + XR_0X + Q_0 < 0, \tag{5}$$

де $A_0 = A + BR^{-1}D^\top QC,\ R_0 = BR^{-1}B^\top,\ Q_0 = C^\top\big(Q + QDR^{-1}D^\top Q\big)C$ і $R = \gamma^2 P - D^\top QD > 0$. Якщо нерівність (5) сумісна, то за умов керованості і спостережуваності відповідних пар матриць (A, B) і (A, C)

$$\operatorname{rank}\big[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\big] = n, \qquad \operatorname{rank}\Big[C^\top, A^\top C^\top, \ldots, A^{(n-1)\top} C^\top\Big] = n$$

відповідне матричне рівняння Ріккаті

$$A_0^\top X + XA_0 + XR_0X + Q_0 = 0 \tag{6}$$

має розв'язки X_- і X_+ такі, що $\sigma(A_0 + R_0X_\pm) \subset \mathbb{C}^\pm,\ 0 < X_- < X_+$ і кожний розв'язок нерівності (5) належить інтервалу $X_- < X < X_+$ [1, 2]. Більш того, якщо $J < \gamma$ $(J \leq \gamma)$ і $X = X_-$ — стабілізовний розв'язок рівняння (6), то $X < \gamma^2 X_0$ $\big(X \leq \gamma^2 X_0\big)$. Справді, поклавши $v(x) = x^\top X x$ і

$$w = K_* x, \quad K_* = R^{-1}\big(B^\top X + D^\top QC\big), \tag{7}$$

отримаємо рівність $\dot v(x) + z^\top Qz - \gamma^2 w^\top Pw = 0$, де $\dot v(x)$ — похідна функції $v(x)$ завдяки системи (1); при цьому $\sigma(A + BK_*) \subset \mathbb{C}^-$. Після інтегрування цієї рівності на інтервалі $[0, \infty)$, за умови $J < \gamma$ отримаємо

$$\|z\|_Q^2 - \gamma^2\|w\|_P^2 = x_0^\top X x_0 < \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0 \quad \forall x_0 \neq 0.$$

Інакше $\|z\|_Q^2 \geq \gamma^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$ при деяких w і x_0, тобто $J \geq \gamma$. Якщо $J = \gamma$, то за умов (6) і (7) $X \leq \gamma^2 X_0$, причому рівності $x_0^\top X x_0 = \gamma^2 x_0^\top X_0 x_0$ і $\big(X - \gamma^2 X_0\big)x_0 = 0$ еквівалентні й виконуються для деякого $x_0 \neq 0$. У цьому випадку виконується рівність $\|z\|_Q^2 = J^2\big(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0\big)$, тобто в означенні J досягається супремум. Найгірший початковий вектор x_0 є власним вектором матриці $X - \gamma^2 X_0 \leq 0$, що відповідає її нульовому власному значенню, і його можна визначити з нормою $\|x_0\| = 1$.

Зазначимо, що у випадку фіксованого вектора $x_0 = 0$ за умов (6) і (7) при $\gamma = J_0$ маємо рівність $\|z\|_Q = J_0\|w\|_P$.

Отже, виконується таке твердження.

Лема 2. *Нехай $X > 0$ — стабілізовний розв'язок рівняння Ріккаті (6) при $\gamma = J$. Тоді $X \leq J^2 X_0$ і структурований вектор зовнішніх збурень у формі лінійного зворотного зв'язку за станом (7), де $x = x(t, x_0)$ — розв'язок системи*

$$\dot{x} = (A + BK_*)x, \quad x(0) = x_0, \tag{8}$$

і довільний початковий вектор $x_0 \in \operatorname{Ker}\bigl(X - J^2 X_0\bigr)$ є найгіршими щодо критерію якості J для системи (1).

Якщо $X > 0$ — стабілізовний розв'язок рівняння Ріккаті (6) при $\gamma = J_0$, де $x = x(t, x_0)$ — розв'язок системи (8) при $x_0 = 0$, то структурований вектор зовнішніх збурень (7) є найгіршим щодо критерію якості J_0 для системи (1).

3. Лінійні системи керування з обмеженими збуреннями. Типова лінійна модель системи керування при наявності зовнішніх збурень має вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad x(0) = x_0, \tag{9}$$

де вектори $x \in \mathbb{R}^n$ — стан, $u \in \mathbb{R}^m$ — керування, $w \in \mathbb{R}^s$ — збурення, $y \in \mathbb{R}^l$ — спостережуваний вихід, $z \in \mathbb{R}^k$ — керований вихід, всі матричні коефіцієнти відповідних розмірів сталі. Нехай J_0 і J — критерії якості цієї системи вигляду (2) стосовно керованого виходу z при заданому керуванні u. Задача полягає у побудові стабілізовних J_0- і J-*оптимальних* регуляторів, які мінімізують відповідні значення J_0 і J для замкненої системи. Пошук таких регуляторів можна здійснювати на основі досягнення відповідних оцінок $J_0 < \gamma$ і $J < \gamma$ (див. лему 1) при мінімально можливому значенні параметра $\gamma > 0$.

При застосуванні статичного регулятора за спостережуваним виходом

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times l}, \tag{10}$$

за умови $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$ замкнена система має вигляд

$$\dot{x} = A_* x + B_* w, \qquad z = C_* x + D_* w, \qquad x(0) = x_0, \tag{11}$$

де

$$A_* = A + B_2 K_0 C_2, \qquad B_* = B_1 + B_2 K_0 D_{21}, \qquad C_* = C_1 + D_{12} K_0 C_2,$$

$$D_* = D_{11} + D_{12} K_0 D_{21}, \qquad K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1} K.$$

Подамо матричну нерівність (3) для системи (11) як ЛМН щодо K_0:

$$L_0^\top K_0 R_0 + R_0^\top K_0^\top L_0 + \Omega < 0, \tag{12}$$

де

$$R_0 = [C_2, D_{21}, 0_{l \times k}], \qquad L_0 = \Bigl[B_2^\top, D_{12}^\top, 0_{m \times s}\Bigr] \widetilde{X},$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Нерівність (12) має розв'язок K_0 тоді й лише тоді, коли виконуються умови [4]

$$W_{R_0}^\top \Omega W_{R_0} < 0, \qquad W_{L_0}^\top \Omega W_{L_0} < 0. \tag{13}$$

Оскільки

$$W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \qquad W_{L_0} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то умови (13) набувають вигляду

$$\begin{bmatrix} W_R^\top & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} A^\top X + XA & XB_1 & C_1^\top \\ B_1^\top X & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} W_L^\top & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} AY + YA^\top & YC_1^\top & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma^2 Q^{-1} & D_{11} \\ \hline B_1^\top & D_{11}^\top & -P \end{array}\right] \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

де $R = [C_2, D_{21}]$, $L = \left[B_2^\top, D_{12}^\top\right]$. При цьому $X > 0$ і $XY = \gamma^2 I_n$, що еквівалентно співвідношенням

$$W = \begin{bmatrix} X & \gamma I_n \\ \gamma I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W = n. \tag{16}$$

Отже, на основі леми 1 і критерію сумісності ЛМН (12) у вигляді (13) маємо таке твердження.

Теорема 1. *Для системи (9) існує стабілізовний регулятор (10), що забезпечує оцінку $J_0 < \gamma$ $(J < \gamma)$, тоді і лише тоді, коли система співвідношень (14) – (16) ((4), (14) – (16)) сумісна щодо X і Y. Якщо X і Y знайдено, то матрицю такого регулятора можна побудувати у вигляді $K = K_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}$, де K_0 — розв'язок ЛМН (12).*

Алгоритм синтезу системи (9) на основі теореми 1 можна чисельно реалізувати, наприклад, за допомогою засобів LMIRank і YALMIP системи Matlab, які дозволяють розв'язувати ЛМН з ранговими обмеженнями [17, 18], або застосовуючи блок розв'язку (Solve Block) системи Mathcad Prime [19]. Наведемо важливі наслідки леми 1 і теореми 1, застосування яких базується на розв'язуванні лише ЛМН без додаткових обмежень.

Теорема 2. *За умов*

$$C_2 = I_n, \qquad D_{21} = 0, \qquad D_{22} = 0, \qquad D_{11}^\top Q D_{11} < \gamma^2 P \tag{17}$$

такі твердження еквівалентні:

1) *для системи (9) існує стабілізовний статичний регулятор за станом $u = Kx$, що забезпечує оцінку $J < \gamma$;*

2) *існує матриця $Y > X_0^{-1}$, що задовольняє ЛМН (15);*

3) *існують матриці $Y > X_0^{-1}$ і Z, що задовольняють ЛМН*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2\left(AY + YA^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top\right) & \gamma^2 B_1 & YC_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ \gamma^2 B_1^\top & -\gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \tag{18}$$

При виконанні твердження 3 матрицю регулятора можна знайти у вигляді $K = ZY^{-1}$.

Еквівалентність тверджень 1 і 2 теореми 2 є наслідком теореми 1, оскільки за умов (17) $W_R = [0, I_s]^\top$ і нерівність (14) не залежить від X. Матрична нерівність (18) у твердженні 3 є наслідком конгруентного перетворення матричної нерівності (12), якому відповідає множення першої блочної стрічки зліва і першого блочного стовпця справа на $Y = \gamma^2 X^{-1}$ за умов (17) і $K = ZY^{-1}$.

При побудові наближених J-оптимальних регуляторів для класу систем (9) можуть бути використані твердження теорем 1 і 2 при мінімально можливих значеннях параметра γ. У цих твердженнях вагові матриці P, Q і X_0 функціонала якості J є заданими. Однак, їх можна вважати невідомими і визначати разом із X і Y.

Твердження теорем 1 і 2 можна поширити на клас систем (9) за умов поліедральної невизначеності матричних коефіцієнтів (див. лему 1.21 в [9])

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \qquad B_1 \in \mathrm{Co}\{B_1^1, \ldots, B_1^{\nu_2}\},$$
$$C_1 \in \mathrm{Co}\{C_1^1, \ldots, C_1^{\nu_3}\}, \qquad D_{11} \in \mathrm{Co}\{D_{11}^1, \ldots, D_{11}^{\nu_4}\}.$$

Для цього замість ЛМН (12), (14) і (15) у теоремі 1 і твердженні 2 теореми 2 слід використати відповідні системи ЛМН, сформовані для всіх наборів вершин заданих політопів $\{A_{i_1}, B_1^{i_2}, C_1^{i_3}, D_{11}^{i_4}\}$, $i_j = \overline{1, \nu_j}$, $j = \overline{1, 4}$. Якщо до того ж

$$B_2 \in \mathrm{Co}\{B_2^1, \ldots, B_2^{\nu_5}\}, \qquad D_{12} \in \mathrm{Co}\{D_{12}^1, \ldots, D_{12}^{\nu_6}\},$$

то у твердженні 3 теореми 2 замість ЛМН (18) можна використати систему аналогічних нерівностей, сформовану для всіх наборів вершин $\{A_{i_1}, B_1^{i_2}, C_1^{i_3}, D_{11}^{i_4}, B_2^{i_5}, D_{12}^{i_6}\}$, $i_j = \overline{1, \nu_j}$, $j = \overline{1, 6}$.

Зазначимо, що матричні інтервали й афінні множини можна описати у вигляді політопів.

4. Лінійна модель системи керування літального апарата. Розглянемо систему керування поздовжнім рухом літального апарата типу VTOL (гелікоптера), яку можна описати у вигляді (9) з такими матричними коефіцієнтами [16, 20]:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}0366 & 0{,}0271 & 0{,}0188 & -0{,}4555 \\ 0{,}0482 & -1{,}0100 & 0{,}0024 & -4{,}0208 \\ 0{,}1002 & 0{,}3681 & -0{,}7070 & 1{,}4200 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 & 1{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0{,}04678 & 0{,}00000 \\ 0{,}04572 & 0{,}00988 \\ 0{,}04369 & 0{,}00111 \\ -0{,}02179 & 0{,}00000 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0{,}4422 & 0{,}1761 \\ 3{,}5446 & -7{,}5922 \\ -5{,}5200 & 4{,}4900 \\ 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = 0_{2\times 2}, \qquad D_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_2, \qquad D_{21} = 0_{1\times 2}, \qquad D_{22} = 0_{1\times 2}.$$

При цьому $n = 4,\ m = 2,\ s = 2,\ k = 2,\ l = 1$ і

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top, \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \end{bmatrix}, \quad y = x_2,$$

де x_1 — горизонтальна швидкість, x_2 — вертикальна швидкість, x_3 — кутова швидкість за тангажем, x_4 — кут тангажа, u_1 — колективне керування кута тангажа (керування вертикальним рухом), u_2 — поздовжнє циклічне керування кута тангажа (керування горизонтальним рухом). Зазвичай, складову невизначеного збурення $w(t)$ у рівняннях руху літального апарата спричиняє турбулентність вітру.

Система за відсутністю керування нестійка, її спектр

$$\sigma(A) = \{0{,}27579 \pm 0{,}25758i, -0{,}23251, -2{,}07267\}.$$

Виберемо вагові матриці критеріїв якості (2): $P = I_2,\ Q = I_2$ і $X_0 = \mu I_4$, де $\mu > 0$. У цьому випадку $J_0 = \|H\|_\infty$. Через α і T позначимо відповідно спектральний запас стійкості і час перехідного процесу системи при заданому керуванні, які наближено обчислюємо за формулами

$$\alpha = \min_{\lambda\in\Sigma}\{-\mathrm{Re}\lambda\}, \qquad T = \min\{\tau : \|x(t)\| \le \varepsilon,\ t \ge \tau\},$$

де Σ — спектр системи, $x(t)$ — її розв'язок, $\varepsilon = 0{,}05$.

Спочатку, застосовуючи засоби LMI Toolbox системи Matlab і твердження 3 теореми 2 при $\mu = 1$ і $\gamma = 0{,}582$, знаходимо J-оптимальний статичний регулятор за станом

$$u = Kx, \quad K = \begin{bmatrix} -1{,}46594 & -0{,}59412 & 0{,}11329 & 0{,}48356 \\ -1{,}34475 & 0{,}51562 & -0{,}06022 & -0{,}74799 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

при якому $J_0 = 0{,}11422 < J = 0{,}58156$, а також найгірше збурення

$$w = K_* x, \quad K_* = \begin{bmatrix} 0{,}04205 & 0{,}00898 & 0{,}00719 & -0{,}01202 \\ -0{,}00165 & 0{,}00300 & 0{,}00028 & -0{,}00112 \end{bmatrix} \tag{20}$$

і найгірший нормований початковий вектор стосовно критерію якості J (див. лему 2)

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0{,}96559 & 0{,}23546 & -0{,}09834 & 0{,}05034 \end{bmatrix}^\top. \tag{21}$$

Замкнена система (11) з керуванням (19) за умов (20 і (21) має вигляд

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A_* + B_* K_*, \quad x(0) = x_0, \tag{22}$$

де $A_* = A + B_2 K,\ B_* = B_1$, її спектр

$$\sigma(M) = \{-7{,}20918,\ -2{,}19567,\ -0{,}07361 \pm 1{,}43483i\}.$$

На рис. 1 зображено поведінку розв'язку замкненої системи (22), а на рис. 2 — вектор-функцію $w(t)$ найгіршого збурення (20).

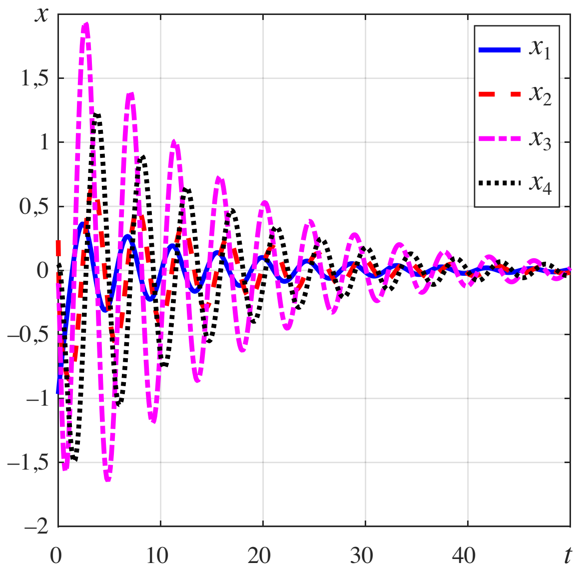

Рис. 1. Поведінка замкненої системи з регулятором (19) за умов (20) і (21).

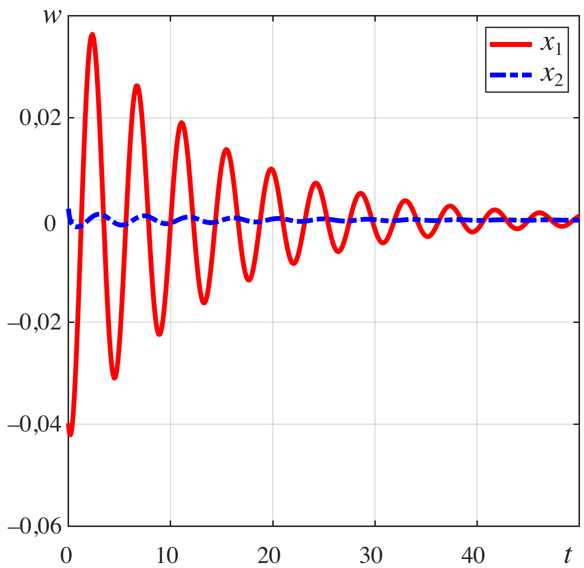

Рис. 2. Найгірше збурення (20) щодо критерію якості J.

Далі, застосовуючи засоби LMIRank системи Matlab, на основі теореми 1 проводили пошук матриць K наближених J-оптимальних регуляторів за виходом (10), а також найгірших збурень w і нормованих початкових векторів стосовно критерію якості J при різних значеннях вагового коефіцієнта μ і параметра γ. Результати розрахунків критеріїв якості J_0 і J замкненої системи (22), а також характеристик α і T системи (22), що відповідають знайденим J-оптимальним регуляторам за виходом і найгіршим парам $\{w, x_0\}$, наведено у табл. 1.

Таблиця 1. Результати розрахунків

μ	γ	J_0	J	α	T
1	3,925	0,33804	3,92418	0,09741	32,85242
10	1,254	0,30500	1,25382	0,09904	32,60174
20	0,902	0,28980	0,89631	0,09841	32,94341
30	0,857	0,28398	0,73839	0,09684	33,59064
40	0,670	0,25298	0,64356	0,10098	32,53814
50	0,580	0,23243	0,57927	0,10390	31,89392
100	0,421	0,18885	0,42089	0,10929	31,00150

Поклавши $\mu = 0$, отримано J_0-оптимальний регулятор за виходом

$$u = Ky, \quad K = \begin{bmatrix} 5{,}99215 \\ 94{,}98134 \end{bmatrix},$$

що забезпечує мінімальне значення $J_0 = 0{,}15593$ і спектр матриці A_* замкненої системи (11)

$$\sigma(A_*) = \{-700{,}89348,\ -0{,}13006,\ -0{,}30382 \pm 0{,}83059i\}.$$

Знайдено також найгірше зовнішнє збурення цієї системи стосовно критерію якості J_0:

$$w = K_* x, \quad K_* = \begin{bmatrix} 0{,}47124 & 0{,}42371 & -0{,}05073 & -0{,}20526 \\ -0{,}10063 & 0{,}14011 & 0{,}08640 & 0{,}06166 \end{bmatrix}.$$

При $\mu = 50$ отримано J-оптимальний регулятор за виходом

$$u = Ky, \quad K = \begin{bmatrix} -0{,}17228 \\ 11{,}24901 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

а також найгірше зовнішнє збурення

$$w = K_* x, \quad K_* = \begin{bmatrix} 0{,}65551 & -0{,}02264 & -0{,}16425 & -0{,}26503 \\ -0{,}10622 & 0{,}05437 & 0{,}07394 & 0{,}05293 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

і найгірший нормований початковий вектор

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}77888 & -0{,}25107 & -0{,}44090 & -0{,}36866 \end{bmatrix}^\top, \tag{25}$$

стосовно критерію якості J, при яких спектр замкненої системи (22)

$$\sigma(M) = \{-87{,}05283,\ -0{,}10390,\ -0{,}29171 \pm 0{,}91591i\}.$$

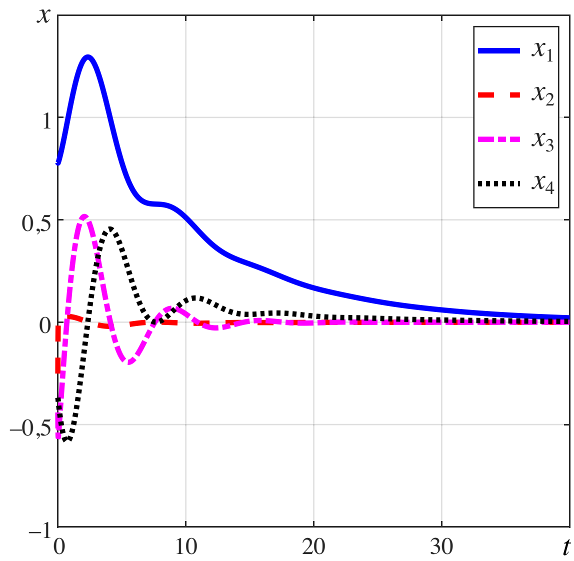

Рис. 3. Поведінка замкненої системи з регулятором (23) за умов (24) і (25).

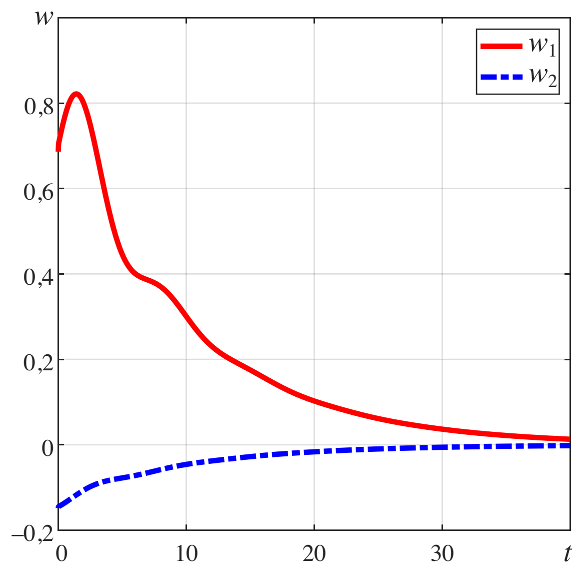

Рис. 4. Найгірше збурення (24) щодо критерію якості J.

На рис. 3 зображено поведінку розв'язку замкненої системи (22), що відповідає регулятору (23) за найгірших умов (24), (25), а на рис. 4 — вектор-функцію $w(t)$ найгіршого збурення (24).

Таким чином, результати проведених чисельних експериментів у цьому прикладі не суперечать теоретичним висновкам і демонструють нові можливості при проєктуванні систем стабілізації літальних апаратів із бажаними якісними характеристиками. Зокрема, важливими для практики є можливості побудови J-оптимальних регуляторів, а також оцінки і порівняння поведінки замкнених систем за умов найгірших зовнішніх і початкових збурень щодо зваженого критерію якості J.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом № 0123U100853 “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів, актуальних для безпеки держави”.

Література

1. K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, *Robust and optimal control*, Englewood, Prentice-Hall, Inc. (1996).
2. G. E. Dullerud, F. G. Paganini, *A course in robust control theory. A convex approach*, Springer-Verlag, Berlin (2000).
3. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, **15**, Philadelphia, PA (1994).
4. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Internat. J. Robust Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
5. Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков, *Управление линейными системами при внешних возмущениях*, Техника линейных матричных неравенств, Ленанд, Москва (2014).
6. Zheng-Guang Wu, Hongye Su, Peng Shi, Jian Chu, *Analysis and synthesis of singular systems with time-delays*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2013).
7. Peng Shi, E. K. Boukas, *On H_∞ control design for singular continuous-time delay systems with parametric uncertainties*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **4**, № 1, 59 – 71 (2004).
8. A. V. Shatyrko, D. Ya. Khusainov, *On a stabilization method in neutral type direct control systems*, J. Autom. Inf. Sci., **45**, № 12, 1 – 10 (2013).
9. А. Г. Мазко, *Матричні методи аналізу та синтезу динамічних систем*, Наукова думка, Київ (2023); https://doi.org/10.37863/6103136622-55.
10. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями*, Автоматика и телемеханика, № 6, 20 – 38 (2010).
11. Z. Feng, J. Lam, S. Xu, S. Zhou, *H_∞ control with transients for singular systems*, Asian J. Control., **18**, № 3, 817 – 827 (2016).
12. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Робастна стабілізація та гасіння зовнішніх збурень у системах з керованими і спостережуваними виходами*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **13**, № 3, 129 – 145 (2016).
13. О. Г. Мазко, С. М. Кусій, *Зважене гасіння обмежених збурень у системі керування літака в режимі посадки*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 88 – 99 (2018).
14. S. Xu, J. Lam, Y. Zou, *New versions of bounded real lemmas for continuous and discrete uncertain systems*, Circuits Systems Signal Process., **26**, 829 – 838 (2007).
15. P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, M. Chilali, *The LMI control toolbox. For use with Matlab. User’s guide*, Natick, MA, The MathWorks, Inc. (1995).
16. S. N. Singh, Antônio A. R. Coelho, *Nonlinear control of mismatched uncertain linear systems and application to control of aircraft*, J. Dynam. Systems, Measurement Control., **106**, 203 – 210 (1984).
17. R. Orsi, U. Helmke, J. B. Moore, *A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities*, Automatica, **42**, № 11, 1875 – 1882 (2006).
18. J. Löfberg, *YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB*, IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, Taipei, Taiwan (2004), pp. 284 – 289.
19. Ю. Е. Воскобойников, А. Ф. Задорожный, *Основы вычислений и программирования в пакете MathCAD PRIME*, уч. пособие, Лань, Санкт-Петербург (2016).
20. F. Leibfritz, W. Lipinski, *Description of the benchmark examples in COMPl$_e$ib 1.0*, University of Trier, Germany (2003).

Одержано 14.03.23,
після доопрацювання — 01.05.23