А. Г. Мазко, Матричный алгоритм синтеза оптимальных линейных систем с заданными спектральными свойствами, *Автомат. и телемех.*, 1981, выпуск 5, 33–41

УДК 62-505.1

МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАДАННЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

МАЗКО А. Г.

(Киев)

Рассматривается задача минимизации квадратичного критерия качества с учетом размещения спектра системы в заданной области. Предлагается обобщение известного матричного алгоритма построения субоптимального управления для широкого класса областей. В его основе лежит решение некоторого обобщенного уравнения Ляпунова.

1. Введение и постановка задачи

При аналитическом конструировании регуляторов (АКР) многомерных САУ большое внимание уделяется достижению желаемых динамических характеристик системы (время переходного процесса, величина перерегулирования и т. п.). Эти характеристики наиболее полным образом описываются с помощью условий, накладываемых на спектр замкнутой системы. В [1—6] решались одновременно задачи квадратичной оптимизации и управления спектром (модального управления). При этом желаемый спектр задавался точно [2—4] или был расположен в некоторых областях комплексной плоскости (смещенная левая полуплоскость, сектор, круг и др. [5, 6]), которые характеризуют, в частности, запас устойчивости и колебательность системы.

Достижение фиксированного набора собственных значений в задаче АКР ограничивает возможности удовлетворения других требований (минимум функционала, физическая реализуемость закона управления и др.). Задавая область желаемого расположения спектра, можно преодолеть или ослабить эти ограничения и построить подходящее субоптимальное управление. Большой интерес представляет расширение классов допустимых областей. Целью данной статьи является обобщение некоторых алгоритмов АКР на случай областей, ограниченных алгебраическими кривыми.

Перейдем к формальной постановке задачи. Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается линейной стационарной системой

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx,\quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

где x — n-вектор фазовых координат объекта, u — m-вектор управления, y — r-вектор измеряемых выходов, A, B, C — матрицы соответствующих размерностей ($\operatorname{rank} B=m$, $\operatorname{rank} C=r$).

Пусть желаемые спектральные свойства системы характеризуются размещением ее собственных значений в некоторой области, заданной в комплексной плоскости C^1 в виде [7]

$$\Lambda=\{\lambda\in C^1\,|\,\theta(\bar{\lambda},\lambda)>0\}, \tag{2}$$

где

$$\theta(\bar{\lambda},\lambda)\triangleq\sum_{i,j=0}^{N}\gamma_{ij}\bar{\lambda}^i\lambda^j=z_\lambda^*\Gamma z_\lambda,\quad z_\lambda=(1,\lambda,\ldots,\lambda^N)'.$$

Здесь и далее символами $'$ и * обозначаются соответствующие операции транспонирования и перехода к сопряженной матрице или вектору. Данная область Λ ограничена алгебраической кривой, порядок которой не превосходит $2N$, и ей поставлена в соответствие некоторая эрмитова матрица Γ, составленная из коэффициентов $\gamma_{ij}=\bar{\gamma}_{ji}$ $(i, j=0, 1, \ldots, N)$.

Определим усредненный критерий качества системы для всего допустимого множества начальных состояний $x_0\in\Omega$ [8]:

(3) $$J=\int_\Omega\rho(x_0)\int_0^\infty(x'Qx+u'Ru)\,dt\,dx_0,$$

где Q и R — симметричные положительно определенные матрицы ($Q=Q'>0$, $R=R'>0$), $\rho(x_0)>0$ — весовая функция начальных состояний (например, плотность распределения вероятностей начальных возмущений).

Ставится задача построения управления

$$u=-Py,$$

которое обеспечивает наименьшее значение функционала (3) на множестве управлений, сдвигающих собственные значения системы (1) в область Λ.

В случае, когда $\theta(\bar{\lambda}, \lambda)=-\bar{\lambda}-\lambda$ (Λ — левая полуплоскость), задача хорошо изучена. При $r=n$ она сводится к решению матричного уравнения Риккати [8]; при $r<n$ нахождение субоптимального управления может осуществляться путем минимизации функции [9]

(4) $$J(P)=\operatorname{tr}[W(P)X],$$

где $X=\int_\Omega\rho(x_0)x_0x_0'\,dx_0$, $W=W(P)$ — симметричное положительно определенное решение уравнения Ляпунова

(5) $$-M'W-WM=Q+C'P'RPC,$$

где $M=A-BPC$.

Необходимые условия минимума функции J получены Атансом и Левайном в виде системы трех нелинейных матричных уравнений. Она лежит в основе известных матричных алгоритмов квадратичной оптимизации по выходу [9, 10].

Если положить $\theta(\bar{\lambda}, \lambda)=-\bar{\lambda}-\lambda-2\alpha$ или $\theta(\bar{\lambda}, \lambda)=(i-\beta)\bar{\lambda}-(i+\beta)\lambda$ ($i=\sqrt{-1}$), то размещение спектра системы в соответствующих областях обеспечивает ей степень устойчивости, не меньшую чем α, и колебательность, не превосходящую β [5, 6].

Изложенный ниже подход к решению задачи для более общих областей основан на построении некоторого обобщенного уравнения Ляпунова [11], используемого в процессе оптимизации.

2. Критерий расположения спектра в заданной области

Наиболее распространенный критерий принадлежности спектра матрицы некоторой области формулируется с помощью матричного уравнения Ляпунова. Р. Калман [7] и Э. Джури [11] получили такие критерии для всех областей вида (2), у которых матрица Γ имеет ранг 2 и представима в виде

(6) $$\Gamma=pp^*-qq^*\ (p, q\in C^{N+1}).$$

Последнее ограничение преодолено в случае [11]

$$(7)\qquad \Gamma=\begin{bmatrix}\gamma_{00} & \gamma_{01} & \gamma_{02}\\ \gamma_{10} & \gamma_{11} & 0\\ \gamma_{20} & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \gamma_{11}\leqslant 0.$$

Следующая теорема дает критерий расположения спектра матрицы $M\in C^{n\times n}$ в произвольной области вида (2) при более слабых ограничениях на коэффициенты матрицы Г.

Теорема. Пусть область Λ, заданная в виде (2), такова, что неотрицательно определена матрица, зависящая от комплексного параметра λ:

$$(8)\qquad S_\lambda\overset{\Delta}{=}\Gamma z_\lambda z_\lambda^*\Gamma-\theta(\bar\lambda,\lambda)\Gamma\geqslant 0\quad(\lambda\in\Lambda).$$

Тогда спектр матрицы M расположен в области Λ в том и только в том случае, когда для произвольной эрмитовой положительно определенной матрицы $L\in C^{n\times n}$ существует единственное эрмитово положительно определенное решение $Y\in C^{n\times n}$ матричного уравнения

$$(9)\qquad \sum_{i,j=0}^{N}\gamma_{ij}M^{*i}YM^{j}=L.$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

В силу данной теоремы существование решения $Y=Y^*>0$ уравнения (9) для любой матрицы $L=L^*>0$ является достаточным условием принадлежности спектра матрицы M области Λ; при ограничении (8) это будет и необходимое условие. Можно показать, что условие (8) выполнено для матрицы (6) при любых $\lambda\in C^1$, а для матрицы (7) при $\lambda\in\Lambda$.

Таким образом, новый класс областей, который удовлетворяет условиям теоремы, является более общим, чем те классы, для которых формулировались подобные утверждения.

В [12] выделен класс областей Λ, характеризующихся в терминах ранга и сигнатуры матрицы Г в виде

$$(10)\qquad \operatorname{rank}\Gamma+\operatorname{signat}\Gamma=2,$$

т. е. Г имеет только одно положительное собственное значение. Исследуя свойства матрицы S_λ $(\lambda\in\Lambda)$, можно показать эквивалентность условий (8) и (10), т. е. совпадение классов областей Λ, определяемых этими условиями.

3. Матричный алгоритм синтеза субоптимального управления

Решая поставленную задачу, предполагаем, что область Λ желаемого расположения спектра замкнутой системы $\dot x=Mx$ находится в левой полуплоскости и удовлетворяет условиям теоремы.

Составим матричное уравнение

$$(11)\qquad \sum_{i,j=0}^{N}\gamma_{ij}M'^{i}VM^{j}=Q+C'P'RPC,$$

связывающее параметры системы управления, функционала качества и области Λ. Поскольку его правая часть $L=Q+C'P'RPC>0$, то, согласно теореме, принадлежность спектра системы области Λ эквивалентна условию $V=V(P)>0$. Пусть существуют такие P, для которых это условие выполнено.

Используя уравнение (11), преобразуем функционал (3):

$$J=\int\limits_{\Omega}\rho(x_0)\int\limits_0^\infty x'Lx\,dt\,dx_0=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\rho(x_0)\sum_{i,j=0}^{N}\gamma_{ij}\int\limits_0^\infty \frac{d^ix'}{dt^i}V\frac{d^jx}{dt^j}\,dt\,dx_0.$$

Для вычисления интегралов введем матрицу $H=H(P)$ как решение уравнения

(12) $\quad M'H+HM+V=0.$

Поскольку $d^jx/dt^j=M^jx\to 0$ при $t\to\infty$, $j=0, 1,\dots,N$ (система должна быть асимптотически устойчивой), то в результате получим представление функционала в виде (4), в котором

(13) $$W=\sum_{i,j=0}^{N}\gamma_{ij}M'^iHM^j.$$

Таким образом, задача сводится к минимизации функции (4), вычисляемой с помощью матричных соотношений (11), (12) и (13), при ограничении $V>0$.

При условиях (11) и (12) матрица W вида (13) удовлетворяет уравнению (5). Если область Λ такова, что

(14) $$\theta(\bar\lambda,\lambda)=-(\bar\lambda+\lambda)\theta_1(\bar\lambda,\lambda),\qquad \theta_1(\bar\lambda,\lambda)=\sum_{i,j=0}^{N-1}\delta_{ij}\bar\lambda^i\lambda^j,$$

то матрица W выражается через решение уравнения (11) в виде

(15) $$W=\sum_{i,j=0}^{N-1}\delta_{ij}M'^iVM^j.$$

Условие (14) выполнено, например, в том случае, когда коэффициенты матрицы Γ вещественны и удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_{00}=\gamma_{NN}=0,\quad \gamma_{kk}+2\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\gamma_{j,2k-j}=0\quad (k=1,2,\dots,N-1).$$

Поскольку матрица W удовлетворяет уравнению (5), то градиент функции (4) можно вычислить по формуле [9]

(16) $\quad dJ/dP=2(RPC-B'W)FC',$

где $F=F(P)$ — решение уравнения

(17) $\quad MF+FM'+X=0.$

Из необходимого условия минимума $dJ/dP=0$ следует

(18) $\quad P=R^{-1}B'WFC'(CFC')^{-1}.$

Система нелинейных матричных уравнений (11)—(13), (17) и (18) является аналогом системы, полученной Атансом и Левайном для левой полуплоскости, и накладывает условия минимума функционала на неизвестные матрицы P, $V=V'>0$, $H=H'>0$, $W=W'>0$, $F=F'\geqslant 0$, а также на матрицы функционала $Q=Q'>0$, $R=R'>0$ и $X=X'\geqslant 0$. Связь между областью Λ и функционалом J, полученная в виде этой матричной системы, может оказаться приемлемой для нахождения весовых матриц функционала, минимум которого достигается на управлении, сдвигающего спектр системы в область Λ.

Пусть матрицы Q, R и X заданы. Построим итерационный процесс по следующим правилам.

1. Выбрать P_0 так, чтобы спектр матрицы $M_0=A-BP_0C$ находился в области Λ.

2. Выбрав P_j $(j=0, 1, \ldots, k)$, найти V_k, H_k и F_k из системы линейных матричных уравнений

$$\sum_{i,j=0}^{N} \gamma_{ij} M_k'^i V_k M_k^j = L_k,$$

$$M_k' H_k + H_k M_k + V_k = 0,$$

$$M_k F_k + F_k M_k' + X = 0,$$

где $M_k=A-BP_kC$, $L_k=Q+C'P_k'RP_kC$.

3. Вычислить $W_k=W(P_k)$ по формуле (13).

4. Определить $(k+1)$-е приближение

$$P_{k+1}=R^{-1}B'W_kF_kC'(CF_kC')^{-1}.$$

Примечание. При условии (14) матрицы W_k можно вычислять по формуле (15), причем уравнения для H_k решать не нужно. Вычисление W_k по формуле (13) требует нахождения H_k. Для этого, используя (11) и (12), можно составить уравнения

$$\sum_{i,j=0}^{N+1} \alpha_{ij} M_k'^i H_k M_k^j = L_k, \tag{19}$$

где α_{ij} $(i, j=0, 1, \ldots, N+1)$ — коэффициенты полинома $\theta_2(\bar\lambda, \lambda) = -(\bar\lambda+\lambda)\theta(\bar\lambda, \lambda)$.

Построенный процесс вычислений полностью совпадает с алгоритмом, предложенным в [10], если Λ — левая полуплоскость. В этом случае $W_k = V_k$ $(k=0, 1, \ldots)$. Матрица W_k, вычисленная согласно (13) или (15) для более общих областей Λ, является единственным решением уравнения (5) при $P=P_k$. Поэтому [9]

$$J(P_0) \geqslant J(P_1) \geqslant \ldots \geqslant J(P_k) \geqslant \ldots.$$

Вопросы сходимости алгоритма рассматривались в [9, 10, 13]. В отдельных случаях доказана сходимость последовательности P_k $(k=0, 1, \ldots)$. Например, если $C=I_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица, то сходимость имеет место, причем последовательность W_k $(k=0, 1, \ldots)$ сходится к решению уравнения Риккати [13].

Таким образом, применение вышеописанного процесса вычислений или градиентных методов минимизации, использующих (16), позволяет не только проводить минимизацию функционала, но и контролировать на каждом шаге принадлежность спектра системы области Λ с помощью условия $V_k=-M_k'H_k-H_kM_k>0$ $(k=0, 1, \ldots)$. При этом главные вычислительные трудности состоят в решении линейных матричных уравнений вида (9) и выборе начального приближения P_0, сдвигающего спектр системы в область Λ.

Одним из методов решения уравнения (9) является сведение его к системе линейных алгебраических уравнений (см. приложение). Для нахождения P_0 можно применить, например, алгоритм, предложенный в [14], или методы модального управления [4, 8].

Изложенный подход применим к дискретным системам при условии, что желаемая область расположения спектра находится внутри единичного круга с центром в начале координат.

4. Примеры

1. Рассмотрим систему (1) и функционал (3) с параметрами [3]:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad C=X=I_3,$$

$$Q=\mathrm{diag}(1,2,3),\ R=I_2.$$

В качестве области Λ возьмем расположенную в левой полуплоскости внешность круга радиуса β с центром в точке $(-\beta, 0)$. Ее представляет матрица

$$\Gamma=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -2 & -\alpha\\ -1 & -\alpha & 0\end{bmatrix},\quad \alpha=\frac{1}{\beta},$$

для которой справедливы соотношения (8) и (14).

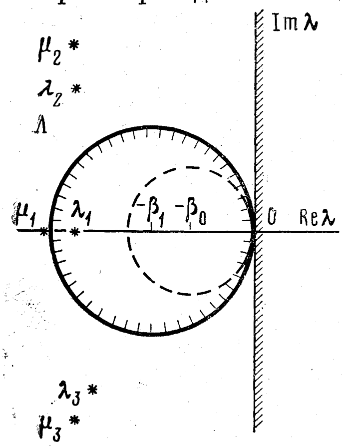

Рис. 1

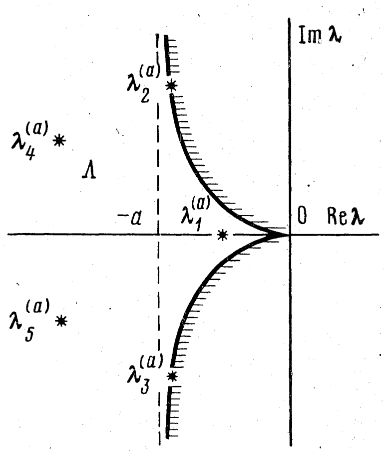

Рис. 2

Уравнение (11) и функция (4) имеют вид:

$$-M'^2V-VM^2-2M'VM-\alpha M'^2VM-\alpha M'VM^2=Q+P'P,$$

$$J(P)=\mathrm{tr}\,W,\ W=M'V+VM+\alpha M'VM.$$

В качестве начального приближения было взято значение [3]

$$P_0=\begin{bmatrix}0{,}661 & -0{,}428 & 0{,}238\\ -0{,}237 & 1{,}24 & 0{,}005\end{bmatrix},$$

которое минимизирует функционал ($J(P_0)=3{,}69$) и обеспечивает системе заданный спектр $\sigma(M_0)=\{1{,}5;\ -1{,}2\pm1{,}5i\}$.

Минимизация проводилась градиентным методом при двух значениях радиуса β (рис. 1). При $\beta=\beta_0=0{,}4$ получены оптимальные значения параметров

$$P^{(0)}=\begin{bmatrix}0{,}594 & -0{,}323 & 0{,}305\\ -0{,}323 & 1{,}21 & -0{,}213\end{bmatrix};\quad J(P^{(0)})=3{,}663;$$

$$\sigma(M^{(0)})=\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\};\ M^{(0)}=A-BP^{(0)};$$

$$\lambda_1=-1{,}43;\ \lambda_{2,3}=-1{,}19\pm1{,}39i.$$

Если $\beta=\beta_1=0{,}73$, то значения глобального минимума нельзя получить, поскольку $\lambda_1\notin\Lambda$. В этом случае получено минимальное значение функционала $J(P^{(1)})=3{,}666$ при

$$P^{(1)}=\begin{bmatrix} 0{,}622 & -0{,}353 & 0{,}279 \\ -0{,}28 & 1{,}23 & -0{,}134 \end{bmatrix}; \quad M^{(1)}=A-BP^{(1)};$$

$$\sigma(M^{(1)})=\{\mu_1,\mu_2,\mu_3\};\ \mu_1=-1{,}46;\ \mu_{2,3}=-1{,}2\pm1{,}43i;$$

$$J(P^{(0)})<J(P^{(1)})<J(P_0).$$

В точке $P^{(1)}$ нарушено условие $V>0$, поскольку μ_1 расположено на границе области Λ.

2. Рассмотрим движение гибкой ракеты с учетом одного тона изгибных колебаний, описываемое в виде (1) и (3) при следующих значениях параметров [15]:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2165 & -0{,}0356 & 0 \\ -0{,}0458 & 1 & -0{,}0133 & 0{,}0004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -29{,}81 & -0{,}0546 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}138 \\ -0{,}0348 \\ 0 \\ 29{,}56 \end{bmatrix},$$

$$C=X=I_5,\ R=1,\ Q=\mathrm{diag}(q_1,\dots,q_5),\ q_1=0{,}1;\ q_2=0{,}05;$$

$$q_3=0{,}5;\ q_4=q_5=10^{-4}.$$

Известны оптимальное значение матрицы обратной связи и спектр замкнутой системы

$$P^{(0)}=[-1{,}098,\ -1{,}346\ 0{,}0842\ 0{,}0145\ 0{,}0097];$$

$$\lambda_1^{(0)}=-0{,}04272;\quad \lambda_{2,3}^{(0)}=-0{,}152\pm5{,}46i;\quad \lambda_{4,5}^{(0)}=-0{,}77\pm0{,}585i.$$

Как видно, степень устойчивости и колебательность оптимальной системы равны соответственно $\alpha^{(0)}=0{,}04272$ и $\beta^{(0)}=35{,}3$.

Определим область Λ в виде (2) при

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a/2 \\ 0 & -a & -1 \\ a/2 & -1 & 0 \end{bmatrix},\quad a\geqslant0.$$

Границей этой области является циссоида Диоклеса (рис. 2), уравнение которой

$$\theta(\bar\lambda,\lambda)\equiv-\xi^3-a\eta^2-\xi\eta^2=0\ (\xi=\mathrm{Re}\,\lambda,\ \eta=\mathrm{Im}\,\lambda).$$

Для нее характерно следующее. Область Λ удовлетворяет условию (8) при $a\geqslant0$, причем она вырождается в левую полуплоскость при $a\to0$. Уравнения (11) и (13) имеют вид:

$$\frac{a}{2}M'^2V+\frac{a}{2}VM^2-aM'VM-M'^2VM-M'VM^2=Q+P'P,$$

$$W=\frac{a}{2}M'^2H+\frac{a}{2}HM^2-aM'HM-M'^2HM-M'HM^2.$$

Проведен расчет по описанному в разделе 3 алгоритму при двух значениях параметра a и начальном приближении

$$P_0=[-2\ -2\ 1\ 1\ 1]\ \ (\sigma(M_0)\subset\Lambda,\ J(P_0)=47{,}47).$$

В случае, когда Λ совпадает с левой полуплоскостью ($a=0$), получено оптимальное управление с матрицей $P^{(0)}$ ($J(P^{(0)})=26{,}429$). Если положить $a=0{,}2$, то после шести итераций нарушено условие $V>0$ при соответствующих значениях

$$P^{(a)}=[-1{,}098,\ -1{,}350\ 0{,}0844\ 0{,}0172\ 0{,}0113];$$

$\lambda_1^{(a)}=-0{,}04274;\quad \lambda_{2,3}^{(a)}=-0{,}178\pm5{,}457i;\quad \lambda_{4,5}^{(a)}=-0{,}77\pm0{,}585i;$

$J(P^{(a)})=26{,}436.$

В данном случае запас устойчивости $\alpha^{(a)}=0{,}04274$ больше, а колебательность замкнутой системы $\beta^{(a)}=30{,}7$ меньше, чем при оптимальном управлении. Увеличение параметра a приводит к уменьшению допустимой колебательности, которая характеризует изгибные колебания ракеты.

5. Заключение

Предложенный критерий расположения спектра в некоторой области позволяет установить связь между квадратичным функционалом и широким классом областей возможного размещения спектра линейных систем в виде нелинейных матричных уравнений, а также построить алгоритм минимизации функционала с учетом размещения спектра системы в желаемой области.

Автор выражает искреннюю признательность И. А. Луковскому, Н. А. Пустовойтову и В. Л. Харитонову за постоянное внимание и ценные замечания, учтенные при написании работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы. Прежде всего, условие (8) обеспечивает существование единственного решения Y уравнения (9). Действительно, для любых λ, $\mu\in\Lambda$

$$|\theta(\bar\lambda,\mu)|^2=z_\lambda^*\Gamma z_\mu z_\mu^*\Gamma z_\lambda\geqslant z_\lambda^*\Gamma z_\lambda z_\mu^*\Gamma z_\mu>0\ (\theta(\bar\lambda,\mu)\triangleq z_\lambda^*\Gamma z_\mu).$$

При условии $\theta(\bar\lambda,\mu)\neq0$ (λ, $\mu\in\Lambda$) всегда существует единственное решение уравнения (9) [16].

Предположим, что матрица M простая, v_s – ее линейно независимые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_s(s=1, 2,\ldots, n)$. Умножив уравнение (9) слева и справа соответственно на v_s^* и v_k, получим

$$v_s^*Yv_k=\frac{1}{\theta(\bar\lambda_s,\lambda_k)}v_s^*Lv_k\qquad(s,k=1,2,\ldots,n).$$

Отсюда, в частности, при $s=k$ вытекает утверждение достаточности.

Используя метод доказательства результата Шура [17], можно показать, что условие

$$\text{(П.1)}\qquad \Phi_n\triangleq\left\{\frac{1}{\theta(\bar\lambda_s,\lambda_k)}\right\}_{s,\,k=1}^n\geqslant0\ (\lambda_s\in\Lambda,\ s=1,2,\ldots,n)$$

обеспечивает положительную определенность решения Y. Если решение $Y=Y^*>0$ для любых $L=L^*>0$, то необходимо выполняется условие (П.1) [17]. Это означает, что (П.1) описывает наиболее общий класс областей и комплексной плоскости, для которых условие локализации спектра матрицы M можно сформулировать с помощью матричного уравнения Ляпунова.

Утверждение необходимости будет доказано, если из условия (8) получим (П.1). Используем метод индукции по числу n. Очевидно, $\Phi_1=[\theta(\bar\lambda_1,\lambda_1)]^{-1}>0$, поскольку $\lambda_1\in\Lambda$ по предположению.

Пусть $\Phi_{n-1}\geqslant0$, $\lambda_s\in\Lambda$ $(s=1, 2,\ldots, n)$. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $\Phi_n=\{\varphi_{sk}\}_{s,k=1}^n$ к виду

$$\tilde\Phi_n=\left[\begin{array}{c|c}G_{n-1}&0\\\hline\varphi_{n1}&\varphi_{nn}\end{array}\right],$$

где

$$G_{n-1}=\{g_{sk}/\varphi_{sk}\}_{s,k=1}^n,\ g_{sk}=\omega_{sk}/\varphi_{sn}\varphi_{nk},$$

$$\omega_{sk}=\varphi_{sn}\varphi_{nk}-\varphi_{nn}\varphi_{sk}=z_{\lambda_s}^*S_{\lambda_n}z_{\lambda_k}\ (s,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Поскольку $S_{\lambda_n}\geqslant0$, то существует представление

$$S_{\lambda_n}=T_n^*T_n.$$

Тогда

$$G_{n-1}=\sum_{j=0}^N\Psi_j^*\Phi_{n-1}\Psi_j\geqslant0,\qquad \det\Phi_n\geqslant0,$$

где $\Psi_j = \mathrm{diag}(\psi_{j1}, \psi_{j2}, \ldots, \psi_{jn})$, $[\psi_{0k}, \psi_{1k}, \ldots, \psi_{Nk}] = z'_{\lambda_k} T_n' \varphi_{kn}^{-1}$ $(j=0, 1, \ldots, N;$ $k=1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, $\Phi_n \geqslant 0$.

С помощью прямого произведения матриц уравнение (9) можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений [17]:

$$E \operatorname{vec} Y = \operatorname{vec} L,$$

где
$$E = \sum_{i,j=0}^{n} \gamma_{ij} M^{*i} \otimes M'^{j}, \quad \operatorname{vec} L = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}, \quad \operatorname{vec} Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix},$$

$$L = [L_1, \ldots, L_n], \quad Y = [Y_1, \ldots, Y_n].$$

Следовательно, элементами матрицы Y служат дробно-рациональные функции элементов матриц M и M^*. Известно [18], что любую квадратную матрицу с помощью бесконечно малых возмущений ее элементов можно сделать простой. Из соображений непрерывности ясно, что утверждение теоремы остается в силе для матрицы M общего вида. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреев Ю. Н.* Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами.– Автоматика и телемеханика, 1977, № 3, с. 5–50.
2. *Woodhead M. A., Porter B.* Optimal modal control.— Meas. and Control, 1973, v. 6, № 7, p. 301–303.
3. *Maki M. C., Van De Vegte J.* Optimization of Multiple-Input. Systems with Assigned Poles.— IEEE Trans. Automat. Control, 1974, v. AC-19, № 2, p. 130–133.
4. *Кожинская Л. И., Ворновицкий А. Э.* Управление качеством систем. М.: Машиностроение, 1979.
5. *Pal J. K., Mahalanabis A. K.* Optimal Stationary Feedback Control with specified relative stability.— Proc. IEE, 1973, v. 120, № 4, p. 509–513.
6. *Богачев А. В., Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Коровьяков А. Н.* Аналитическое конструирование регуляторов по корневым показателям.– Автоматика и телемеханика, 1979, № 8, с. 21–28.
7. *Kalman R. E.* Algebraic characterization of polynomials whose zeros lie in a certain algebraic domains.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1969, v. 64, № 3, p. 818–823.
8. *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. Киев: Вища школа, 1978.
9. *Athans M., Levine W. S.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable-Systems.– IEEE Trans. Automat. Control, 1970, v. AC-15, № 1, p. 44–50.
10. *Anderson B. D. O., Moore I. B.* Linear optimal control. N. Y.: Prentice-Hall, 1971.
11. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.
12. *Харитонов В. Л.* Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы.– Автоматика и телемеханика, 1981, № 5, с. 42–47.
13. *Kleinman D. L.* On the Iterative Technique for Riccati Equation Computations.– IEEE Trans. Automat. Control, 1968, v. AC-13, № 4, p. 114–115.
14. *Sirisena H. R., Choi S. S.* Pole placement in Prescribed Regions of the Complex Plane Using Output Feedback.– IEEE Trans. Automat. Control, 1975, v. AC-20, № 6, p. 810–812.
15. *Фишер Е. Е.* Применение квадратичной функции штрафа в качестве критерия при расчете линейной системы управления гибкой ракетой.– Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 7, с. 61–68.
16. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
17. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
18. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.V.1980

A MATRIX ALGORITHM FOR DESIGN OF OPTIMAL LINEAR SYSTEM WITH SPECIFIED PROPERTIES

MAZKO A. G.

The paper is concerned with minimization of a quadratic performance criterion with due regard for the location of the system spectrum in a specified field. A well-known matrix algorithm for design of suboptimal control is extended to a wide class of regions by solving a certain generalized Lyapunov equation.
