ISSN 0572-2691

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

3'2013

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины

Институт космических исследований
НАН Украины и ГКА Украины

УДК 517.935;519.718

А.Г. Мазко, Л.В. Богданович

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ И ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

В прикладных исследованиях возникают задачи анализа и синтеза систем управления, математические модели которых содержат неопределенные элементы (параметры, функции, случайные возмущения и т.п.). Методы изучения и достижения показателей качества таких систем и, прежде всего, устойчивости состояний равновесия позволяют с высокой надежностью использовать теоретические выводы о динамике реальных управляемых объектов (см., например, [1–5]).

Нулевое состояние нелинейной системы управления с дискретным временем

$$x_{t+1} = f(x_t, t, p) + B(x_t, t, p)u_t,\ \ x_t \in \mathbf{R}^n,\ \ u_t = Kx_t \in \mathbf{R}^m,\ \ t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

называется робастно устойчивым относительно заданных множеств параметров $\mathsf{P} \subset \mathbf{R}^r$ и коэффициентов матрицы усиления обратной связи $\mathsf{K} \subset \mathbf{R}^{m\times n}$, если оно устойчиво по Ляпунову при любых фиксированных $p \in \mathsf{P}$ и $K \in \mathsf{K}$. Здесь $f(\cdot)$ и $B(\cdot)$ — соответственно векторная и матричная функции, причем $f(0, p, t) \equiv 0$. Если $f(x, p, t) = A(x, t, p)x$, где $A(\cdot)$ — матричная функция, то при решении задач робастной устойчивости и стабилизации систем типа (1) удобно использовать методы квадратичных функций Ляпунова $v(x, t) = x^{\mathrm{T}} X_t x$ с матрицами $X_t = X_t^{\mathrm{T}} > 0$.

В качестве множеств неопределенности P и K системы (1) обычно используются интервалы, политопы, аффинные и эллипсоидальные множества матриц и др. Причем интервальные и аффинные множества матриц могут быть описаны в виде матричных политопов. При описании неопределенностей и условий робастной устойчивости систем управления в полуупорядоченных пространствах можно использовать конусные неравенства и конусные интервалы [6, 7].

В многочисленных работах в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) получены достаточные условия устойчивости линейных систем управления с неопределенными матрицами коэффициентов и обратной связи по измеряемому выходу. С обзором задач и известных методов анализа робастной устойчивости и стабилизации систем управления можно ознакомиться в работах [8, 9]. Следует отметить, что многие задачи стабилизации и оптимизации с динамической обратной связью (ДОС) сводятся к аналогичным задачам со статической обратной связью (СОС).

Данная публикация посвящена разработке новых методов анализа робастной устойчивости, стабилизации и оптимизации нелинейных разностных систем управления с обратной связью по измеряемому выходу, содержащему компоненты как фазовых переменных, так и управления. Используя и развивая результаты

 ISSN 0572-2691

работ [4, 10, 11], формулируются достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого состояния семейства систем управления с неопределенными матрицами коэффициентов и СОС по измеряемому выходу. Определяются также общая функция Ляпунова и верхняя оценка квадратичного функционала качества. В результате предлагаются новые методы оптимизации данного семейства систем. Применение полученных результатов сводится к решению систем ЛМН. Для решения ЛМН с постоянными матрицами может применяться достаточно эффективная процедура в системе MATLAB.

Используем следующие обозначения: I_n — единичная $n\times n$-матрица; $0_{n\times m}$ — нулевая $n\times m$-матрица; $X = X^{\mathrm{T}} > 0\ (\geq 0)$ — положительно (неотрицательно)-определенная симметричная матрица; $\lambda_{\max}(X)$ $(\lambda_{\min}(X))$ — максимальное (минимальное) собственное число эрмитовой матрицы; $\sigma(A)$ $(\rho(A))$ — спектр (спектральный радиус) матрицы A; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x; $\mathrm{Co}\,\{A_1,\ldots,A_r\}$ — выпуклый многогранник (политоп) с вершинами $A_1,\ldots, A_r$ в пространстве матриц вида $\mathrm{Co}\,\{A_1,\ldots,A_r\} = \left\{A = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i A_i : \alpha_i \geq 0, i = \overline{1,r}, \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 1\right\}$.

1. Робастная стабилизация нелинейных систем

Рассмотрим динамическую систему управления с дискретным временем, описываемую разностными уравнениями вида

$$x_{t+1} = A(x_t,t)x_t + B(x_t,t)u_t,\quad y_t = C(x_t,t)x_t + D(x_t,t)u_t, \tag{2}$$

где $x_t \in \mathbf{R}^n$, $u_t \in \mathbf{R}^m$, $y_t \in \mathbf{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода объекта, $t = 0,1,2,\ldots$. Управление системой осуществляется в виде СОС по выходу:

$$u_t = K(x_t,t)y_t,\quad K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t),\quad \widetilde{K}(x_t,t) \in \mathsf{K}, \tag{3}$$

где K — эллипсоидальное множество матриц в пространстве $\mathsf{R}^{m\times l}$ вида

$$\mathsf{K} = \{K : K^{\mathrm{T}}PK \leq Q\}, \tag{4}$$

которое определяют симметричные положительно-определенные матрицы P и Q соответствующих размеров $m\times m$ и $l\times l$. В силу эквивалентности матричных неравенств [12] имеем

$$K^{\mathrm{T}}PK \leq Q,\quad \begin{bmatrix} P^{-1} & K \\ K^{\mathrm{T}} & Q \end{bmatrix} \geq 0,\quad KQ^{-1}K^{\mathrm{T}} \leq P^{-1},$$

множество (4) можно описать также в виде $\mathsf{K} = \{K : KQ^{-1}K^T \leq P^{-1}\}$. При этом в случае $m = 1$ данный эллипсоид описывается скалярным неравенством.

Зависимость от x_t и t матриц A, B, C, D, K_* и $\widetilde{K}$ будем считать непрерывной и для простоты не указывать. Матрицы P и Q постоянные, хотя в дальнейших выкладках они также могут быть функциями x_t и t.

Согласно (2)–(4) должно выполняться неравенство

$$[x_t^{\mathrm{T}},\ u_t^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}(Q - K_*^{\mathrm{T}}PK_*)C & C^{\mathrm{T}}(QD + K_*^{\mathrm{T}}PG) \\ (D^{\mathrm{T}}Q + G^{\mathrm{T}}PK_*)C & \Delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \geq 0,$$

где $G = I_m - K_*D$, $\Delta = D^{\mathrm{T}}QD - G^{\mathrm{T}}PG$. Предположим, что

$$\Delta(x,t) < 0,\quad x \in \mathsf{S}_0,\quad t \in \mathsf{T}, \tag{5}$$

где $\mathsf{S}_0 = \{x \in R^n : \|x\| \leq h\}$ — окрестность точки $x = 0$, $\mathsf{T} = \{0,1,2,\ldots\}$. Тогда $x_t = 0$ влечет $u_t = 0$ и $x_t \equiv 0$ является состоянием равновесия системы. В дальнейшем предполагаем, что данное состояние равновесия изолированное, т.е. окрестность S_0 не содержит других состояний равновесия системы.

Задача состоит в построении условий, при которых нулевое состояние замкнутой системы управления (2), (3) асимптотически устойчиво по Ляпунову для любой матрицы $\widetilde{K} \in \mathsf{K}$. Матрица K_* выбирается для стабилизации, например, в том случае, когда нулевое состояние системы без управления $(u_t \equiv 0)$ неустойчиво. Для ее нахождения так же, как и в случае непрерывных систем, необходимо разрабатывать специальные методы.

Введем на множестве матриц $\mathsf{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$ при каждом $t \in \mathsf{T}$ нелинейный оператор

$$\mathsf{D} : \mathbf{R}^{m\times l} \to \mathbf{R}^{m\times l}, \ \mathsf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1} K \equiv K(I_l - DK)^{-1}. \tag{6}$$

Можно установить следующие свойства данного оператора:

1) если $K \in \mathsf{K}_D$, то

$$\mathsf{D}(K) \equiv K[I_l + D\mathsf{D}(K)] \text{ и } I_l + D\mathsf{D}(K) \equiv (I_l - DK)^{-1};$$

2) если $K_1, K_2 \in \mathsf{K}_D$, то $K_3 = (I_m - K_1 D)^{-1} K_2 \in \mathsf{K}_D$ и

$$\mathsf{D}(K_1 + K_2) \equiv \mathsf{D}(K_1) + \mathsf{D}(K_3)[I_l + D\mathsf{D}(K_1)]; \tag{7}$$

3) если $K \in \mathsf{K}_D$, то $K_* = -\mathsf{D}(K) \in \mathsf{K}_D$ и

$$\mathsf{D}(-\mathsf{D}(K)) = -K. \tag{8}$$

Покажем, что при условии (5) замкнутая система управления (2), (3) в окрестности нулевого состояния представляется в виде

$$x_{t+1} = M(x_t, t)x_t, \ M(x_t, t) = A + B\mathsf{D}(K)C. \tag{9}$$

Из (5) следует, что матрица G невырожденная и при любых $x \in \mathsf{S}_0$ и $t \in \mathsf{T}$ определены значения $\mathsf{D}(K_*)$ оператора (6). Если $\widetilde{K} \in \mathsf{K}$, то определены также значения $\mathsf{D}(K)$ и $\mathsf{D}(\hat{K})$, где $\hat{K} = G^{-1}\widetilde{K}$. Действительно, при условиях (3) и (5) имеем

$$D^{\mathrm{T}} \widetilde{K}^{\mathrm{T}} P \widetilde{K} D \le D^{\mathrm{T}} Q D < G^{\mathrm{T}} P G, \ \ F^{\mathrm{T}} P F < P,$$

где $F = \widetilde{K} D G^{-1}, P > 0$. Поэтому $\rho(F) < 1$ и матрица $I_m - F$ невырожденная, а вместе с ней матрицы $I_m - KD = (I_m - F)G$ и $I_m - \hat{K}D = G^{-1}(I_m - KD)$ также невырожденные. Исключая вектор управления из соотношений (2) и (3), получаем систему (9). В частности, при $K = K_*$ имеем систему

$$x_{t+1} = M_*(x_t, t), \ \ M_*(x_t, t) = A + B\mathsf{D}(K_*)C, \tag{10}$$

нулевое состояние которой должно быть асимптотически устойчивым. Согласно свойству (8) оператора D для достижения желаемых свойств и, в частности, устойчивости нулевого состояния системы (10) достаточно обеспечить эти свойства системе с матрицей $M_* = A - BKC$.

Получим решение поставленной задачи методом квадратичных функций Ляпунова, используя следующее утверждение.

Лемма 1 [11]. Пусть выполняются матричные неравенства

$$D^{\mathrm{T}} Q D + R - P < 0, \ \ \begin{bmatrix} W & U^{\mathrm{T}} & V^{\mathrm{T}} \\ U & R-P & D^{\mathrm{T}} \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \ (<0),$$

ISSN 0572-2691

где $P = P^{\mathrm{T}} > 0$, $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, $R = R^{\mathrm{T}} \ge 0$, $W = W^{\mathrm{T}} \le 0$, U, V и D — матрицы подходящих размеров. Тогда

$$W + U^{\mathrm{T}}\mathsf{D}(K)V + V^{\mathrm{T}}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K)U + V^{\mathrm{T}}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K)R\,\mathsf{D}(K)V \le 0\ (<0)$$

для любой матрицы $K \in \mathsf{K} = \{K : K^{\mathrm{T}}PK \le Q\}$.

Данное утверждение является обобщением аналогичного результата, полученного в [13] при некоторых дополнительных ограничениях относительно матриц D, R, P и Q.

Теорема 1. Пусть для некоторых $\varepsilon_i > 0\ (i = 0, 1, 2)$ при $x_t \equiv 0$ и $t \in \mathsf{T}$ выполняется система матричных неравенств

$$\varepsilon_1 I_n \le X_t \le \varepsilon_2 I_n, \tag{11}$$

$$B^{\mathrm{T}}X_{t+1}B + D^{\mathrm{T}}QD < G^{\mathrm{T}}PG, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n & M_*^{\mathrm{T}}X_{t+1}B & C_*^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_* & B^{T}X_{t+1}B - G^{\mathrm{T}}PG & D^{\mathrm{T}} \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{13}$$

где $M_* = A + B\mathsf{D}(K_*)C$, $C_* = C + D\mathsf{D}(K_*)C$. Тогда любое управление (3) обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы (2) и общую функцию Ляпунова $v(x, t) = x^{\mathrm{T}}X_t x$.

Доказательство. Функция v при условиях (11) удовлетворяет оценке $\varepsilon_1\|x\|^2 \le v(x_t, t) \le \varepsilon_2\|x\|^2$. Для того чтобы первая разность данной функции в силу системы (9) в окрестности S_0 точки $x = 0$ удовлетворяла оценке

$$v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t) \le -\varepsilon\|x_t\|^2,\ \varepsilon > 0,\ t \in \mathsf{T},$$

достаточно выполнения матричного неравенства

$$M^{\mathrm{T}}(x, t)X_{t+1}M(x, t) - X_t + \varepsilon I_n \le 0,\ x \in \mathsf{S}_0,\ t \in \mathsf{T}. \tag{14}$$

При этом согласно дискретному аналогу второй теоремы Ляпунова состояние $x_t \equiv 0$ данной системы равномерно асимптотически устойчиво.

Условие (14) означает, что

$$\sup_{x \in \mathsf{S}_0,\, t \in \mathsf{T}} \mu(x, t) \le -\varepsilon,\ \mu(x, t) = \lambda_{\max}(M^{\mathrm{T}}(x, t)X_{t+1}M(x, t) - X_t).$$

Наряду с (14) рассмотрим условие $\sup\limits_{t \in \mathsf{T}} \mu(0, t) \le -\varepsilon_0$, т.е.

$$M_0^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_0 - X_t + \varepsilon_0 I_n \le 0,\ t \in \mathsf{T}, \tag{15}$$

где $M_0 = M(0, t)$, $\varepsilon_0 > \varepsilon$. Из соображений непрерывности ясно, что существует окрестность S_0 точки $x = 0$, для которой (14) следует из (15). Используя свойство (7) оператора D при $x_t = 0$, перепишем матричное неравенство (15) в виде

$$W + U^{\mathrm{T}}\mathsf{D}(\widehat{K})V + V^{\mathrm{T}}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}(\widehat{K})U + V^{\mathrm{T}}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}(\widehat{K})R\mathsf{D}(\widehat{K})V \le 0,\ x_t = 0\ \ t \in \mathsf{T},$$

где $W = M_*^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n$, $U = B^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_*$, $V = C_*$, $R = B^{\mathrm{T}}X_{t+1}B$. При этом

$$\widetilde{K} \in \mathsf{K} \Leftrightarrow \widehat{K} = G^{-1}\widetilde{K} \in \widehat{\mathsf{K}} = \{K : K^{\mathrm{T}}\widehat{P}K \le Q\},$$

где $\widehat{P}=G^{\mathrm{T}}P$ и (5) является следствием (11), (12). Используя лемму 1, получаем условия (11)–(13), при которых выполняется матричное неравенство (15) и нулевое состояние замкнутой системы (9) асимптотически устойчиво при любом управлении (3).

Теорема доказана.

Отметим, что в [4] на основе так называемого свойства неущербности S-процедуры получено аналогичное утверждение с постоянной матрицей X в случае $P=I_m$, $Q=\mu I_l$, где μ — радиус устойчивости матриц обратной связи K для линейных автономных систем (2). Заметим, что матрицы P и $Q_1=Q^{-1}$ входят линейно в соотношения (12) и (13), причем (12) является следствием строгого неравенства (13). Поэтому эти матрицы наряду с X_t можно считать неизвестными и определять с помощью эффективной процедуры системы MATLAB. Это расширяет возможности методики квадратичной стабилизации [4] как для линейных, так и для нелинейных систем.

Предположим, что система (2) при $x_t=0$ и $t\in\mathbf{T}$ имеет неопределенные коэффициенты. Будем использовать, например, следующие условия:

$$A\in\mathrm{Co}\{A_1,\dots,A_{r_1}\},\;\; B\in\mathrm{Co}\{B_1,\dots,B_{r_2}\},\;\; C\in\mathrm{Co}\{C_1,\dots,C_{r_3}\}, \tag{16}$$

$$K_*\equiv 0,\;\; D\in\mathrm{Co}\{D_1,\dots,D_{r_4}\}, \tag{17}$$

где $x_t\equiv 0$, $t\in\mathbf{T}$, а заданные наборы постоянных матриц A_i, B_j, C_k и D_s являются вершинами некоторых политопов в пространствах $\mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{R}^{n\times m}, \mathbf{R}^{l\times n}$ и $\mathbf{R}^{l\times m}$ соответственно.

Лемма 2. Для любых наборов неотрицательных чисел α_i, β_j и γ_k, в сумме равных 1, и любых матриц $X=X^{\mathrm{T}}\geq 0$ и K соответствующих размеров выполняется неравенство

$$(A+BKC)^{\mathrm{T}}X(A+BKC)\leq\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}\sum_{k=1}^{r_3}\alpha_i\beta_j\gamma_k(A_i+B_jKC_k)^{\mathrm{T}}X(A_i+B_jKC_k),$$

где $A=\sum_{i=1}^{r_1}\alpha_iA_i$, $B=\sum_{j=1}^{r_2}\beta_jB_j$, $C=\sum_{k=1}^{r_3}\gamma_kC_k$, $\sum_{i=1}^{r_1}\alpha_i=\sum_{j=1}^{r_2}\beta_j=\sum_{k=1}^{r_3}\gamma_k=1$.

Данное утверждение устанавливается путем умножения очевидных неравенств

$$(M_{ijk}-M_{pqs})^{\mathrm{T}}X(M_{ijk}-M_{pqs})\geq 0,\;\; i,p=\overline{1,r_1},\;\; j,q=\overline{1,r_2},\;\; k,s=\overline{1,r_3},$$

где $M_{ijk}=A_i+B_jKC_k$, $M_{pqs}=A_p+B_qKC_s$, последовательно на α_i, β_j, γ_k, α_p, β_q, γ_s и их суммирования.

Пусть выполняются условия неопределенности (16). Тогда согласно лемме 2 для любой матрицы K матричное неравенство (15) вытекает из системы неравенств

$$M_{ijk}^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_{ijk}-X_t+\varepsilon_0I_n\leq 0,\;\; i=\overline{1,r_1},\;\; j=\overline{1,r_2},\;\; k=\overline{1,r_3},\;\; t\in\mathbf{T},$$

где $M_{ijk}=A_i+B_j\mathrm{D}(K)C_k$. Следовательно (см. доказательство теоремы 1), для выполнения условий (12) и (13) теоремы 1 достаточно выполнения соотношений

$$B_j^{\mathrm{T}}X_{t+1}B_j+D^{\mathrm{T}}QD<G^{\mathrm{T}}PG, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} M_{ijk}^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_{ijk}-X_t+\varepsilon_0 I_n & M_{ijk}^{\mathrm{T}}X_{t+1}B_j & C_*^{\mathrm{T}} \\ B_j^{\mathrm{T}}X_{t+1}M_{ijk} & B_j^{\mathrm{T}}X_{t+1}B_j-G^{\mathrm{T}}PG & D^{\mathrm{T}} \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{19}$$

где $M_{ijk}=A_i+B_j\mathsf{D}(K_*)C_k$, $i=\overline{1,r_1}$, $j=\overline{1,r_2}$, $k=\overline{1,r_3}$, $x_t\equiv 0$, $t\in\mathsf{T}$. Сформулируем аналогичное утверждение при более сильных предположениях.

Следствие. Пусть совместна система ЛМН с постоянными матрицами

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}XA_i-X & A_i^{\mathrm{T}}XB_j & C_k^{\mathrm{T}} \\ B_j^{\mathrm{T}}XA_i & B_j^{\mathrm{T}}XB_j-P & D_s^{\mathrm{T}} \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,\ X>0, \tag{20}$$

где $i=\overline{1,r_1}$, $j=\overline{1,r_2}$, $k=\overline{1,r_3}$, $s=\overline{1,r_4}$. Тогда любое управление (3) при $K_*\equiv 0$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы (2) с неопределенностями (16) и (17).

Замечание. Системы матричных неравенств (18)–(20) можно использовать при решении обратных задач робастной стабилизации. Например, для заданной матрицы $X=X^{\mathrm{T}}>0$ при условиях следствия, сформулированного выше, построить семейство систем стабилизации, отвечающее политопам матричных коэффициентов (16), (17) и эллипсоиду матриц обратной связи (4). В данной задаче неизвестными будут вершины политопов A_i, B_j, C_k и D_s, а также положительно-определенные матрицы P и Q, описывающие искомый эллипсоид.

2. Оценка квадратичного критерия качества семейства систем

Рассмотрим систему управления (2), (3) с квадратичным функционалом качества

$$J_u(x_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\varphi_t,\ \varphi_t=[x_t^{\mathrm{T}}\ u_t^{\mathrm{T}}]\Phi_t\begin{bmatrix} x_t \\ u_t\end{bmatrix},\ \Phi_t=\begin{bmatrix} S & N \\ N^{\mathrm{T}} & R\end{bmatrix},\ t\in\mathsf{T}, \tag{21}$$

где x_0 — вектор начальных условий, а блоки симметричной матрицы Φ_t (возможно зависящие от t) удовлетворяют соотношениям

$$S\ge NR^{-1}N^{\mathrm{T}}+\delta I_n,\ R>0,\ \delta>0,\ t\in\mathsf{T}. \tag{22}$$

Требуется описать множество управлений (3), обеспечивающих асимптотическую устойчивость состояния $x_t\equiv 0$ системы (2) и оценку

$$J_u(x_0)\le\omega, \tag{23}$$

где $\omega>0$ — некоторое максимально допустимое значение функционала (21).

Решение данной задачи будем проводить методом квадратичной функции Ляпунова $v(x,t)=x^{\mathrm{T}}X_t x$, матрица которой удовлетворяет требованиям

$$x_0^{\mathrm{T}}X_0x_0\le\omega,\quad \varepsilon_1 I_n\le X_t\le\varepsilon_2 I_n,\ \varepsilon_1,\varepsilon_2>0,\ t\in\mathsf{T}. \tag{24}$$

При условиях (3) и (5) определены значения $\mathsf{D}(K), \mathsf{D}(K_*)$ и $\mathsf{D}(\widehat{K})$, где $\widehat{K}=G^{-1}\widetilde{K}$, $G=I_m-K_*D$ (см. разд. 1). При этом замкнутая система представляется в виде (9), а первая разность функции v в силу данной системы и суммируемая функция φ_t имеют вид

$$v(x_{t+1},t+1)-v(x_t,t)=x_t^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}X_{t+1}M-X_t)x_t,\ \varphi_t=x_t^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}\Phi_t Lx_t,$$

где $L^{\mathrm{T}}=[I_n\ C^{\mathrm{T}}\mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K)]$. Потребуем, чтобы наряду с (5) и (24) выполнялись неравенства

$$v(x_{t+1},t+1)-v(x_t,t)\le-\varphi_t\le-\delta\|x_t\|^2,\ x_t\in\mathsf{S}_0,\ t\in\mathsf{T}, \tag{25}$$

где S_0 — окрестность точки $x = 0$, содержащая x_0. Для этого достаточно выполнения матричных неравенств (22) и

$$M_0^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_0 - X_t + L_0^{\mathrm{T}} \Phi_t L_0 \le -\varepsilon_0 I_n, \tag{26}$$

где $M_0 = M(0,t)$, $L_0 = L(0,t)$, $\varepsilon_0 > 0$. Тогда состояние $x_t \equiv 0$ системы (9) асимптотически устойчиво и с учетом (24), (25) получаем верхнюю оценку функционала (21):

$$J_u(x_0) \le \sum_{t=0}^{\infty} [v(x_t, t) - v(x_{t+1}, t+1)] = x_0^{\mathrm{T}} X_0 x_0 \le \omega. \tag{27}$$

Используя свойство (7) оператора D, приведем неравенство (26) к виду

$$W + U^{\mathrm{T}} \mathsf{D}(\hat{K}) V + V^{\mathrm{T}} \mathsf{D}^{\mathrm{T}}(\hat{K}) U + V^{\mathrm{T}} \mathsf{D}^{\mathrm{T}}(\hat{K}) \hat{R} \mathsf{D}(\hat{K}) V \le 0, \tag{28}$$

где $W = M_*^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_* - X_t + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n$, $U = B^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_* + N^{\mathrm{T}} + R\mathsf{D}(K_*)C$, $V = C_* = C + D\mathsf{D}(K_*)C$, $\Phi_* = L_*^{\mathrm{T}} \Phi_t L_*$, $L_*^{\mathrm{T}} = [I_n \;\; C^{\mathrm{T}} \mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K_*)]$, $\hat{R} = R + B^{\mathrm{T}} X_{t+1} B$. При этом выполняется критерий, приведенный в доказательстве теоремы 1.

Применяя лемму 1 и соотношения (24)–(28), получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть для некоторых $\varepsilon_i > 0$ $(i = 0, 1, 2)$ при $x_t = 0$ и $t \in \mathsf{T}$ выполняется система соотношений (24) и

$$B^{\mathrm{T}} X_{t+1} B + D^{\mathrm{T}} Q D + R < G^{\mathrm{T}} P G, \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_* - X_t + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & M_*^{\mathrm{T}} X_{t+1} B + N + C^{\mathrm{T}} \mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K_*) R & C_*^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_* + N^{\mathrm{T}} + R\mathsf{D}(K_*)C & B^{\mathrm{T}} X_{t+1} B - G^{\mathrm{T}} P G + R & D^{\mathrm{T}} \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0. \tag{30}$$

Тогда любое управление (3) обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы (2), общую функцию Ляпунова $v(x,t) = x^{\mathrm{T}} X_t x$ и оценку функционала качества (23).

Предположим, что система (2) имеет неопределенности типа (16). Тогда для выполнения условий (29) и (30) теоремы 2 достаточно выполнения системы соотношений (см. разд. 1)

$$B_j^{\mathrm{T}} X_{t+1} B_j + D^{\mathrm{T}} Q D + R < G^{\mathrm{T}} P G, \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} M_{ijk}^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_{ijk} - X_t + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & M_{ijk}^{\mathrm{T}} X_{t+1} B_j + N + C^{\mathrm{T}} \mathsf{D}^{\mathrm{T}}(K_*) R & C_*^{\mathrm{T}} \\ B_j^{\mathrm{T}} X_{t+1} M_{ijk} + N^{\mathrm{T}} + R\mathsf{D}(K_*)C & B_j^{\mathrm{T}} X_{t+1} B_j - G^{\mathrm{T}} P G + R & D^{\mathrm{T}} \\ C_* & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{32}$$

где $M_{ijk} = A_i + B_j \mathsf{D}(K_*) C_k$, $i = \overline{1, r_1}$, $j = \overline{1, r_2}$, $k = \overline{1, r_3}$, $x_t \equiv 0$, $t \in \mathsf{T}$. Сформулируем следствие теоремы 2 при более сильных предположениях.

Следствие. Пусть совместна система ЛМН с постоянными матрицами

$$B_j^{\mathrm{T}} X B_j + D_s^{\mathrm{T}} Q D_s + R < P, \quad \begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}} X A_i - X + S & A_i^{\mathrm{T}} X B_j + N & C_k^{\mathrm{T}} \\ B_j^{\mathrm{T}} X A_i + N^{\mathrm{T}} & B_j^{\mathrm{T}} X B_j - P + R & D_s^{\mathrm{T}} \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \quad X > 0, \tag{33}$$

где $i = \overline{1, r_1}$, $j = \overline{1, r_2}$, $k = \overline{1, r_3}$, $s = \overline{1, r_4}$. Тогда любое управление (3) при $K_* \equiv 0$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы (2) с неопределенностями (16), (17), общую функцию Ляпунова $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$ и оценку функционала качества (23).

 ISSN 0572-2691

На основе теоремы 2 и ее следствий можно сформулировать задачи оптимизации системы (2) и семейств систем (2), (16) и (2), (16), (17):

Задача 1. Минимизировать $\omega > 0$ при ограничениях (24), (29) и (30).

Задача 2. Минимизировать $\omega > 0$ при ограничениях (24), (31) и (32).

Задача 3. Минимизировать $\omega > 0$ при ограничениях (33).

Для решения данных задач в случае постоянных матриц могут использоваться различные методы математического программирования. В качестве параметров оптимизации могут быть положительно-определенные матрицы квадратичной функции Ляпунова (X), эллипсоида коэффициентов обратной связи (P и Q), а также функционала качества (Φ). При этом результаты расчетов зависят от вектора x_0.

3. Численный эксперимент

Рассмотрим систему управления однозвенного робота-манипулятора, круговое движение звена которого вокруг одного из концов осуществляется с помощью гибкого соединения звена и исполняющего механизма (рис. 1). Между исполняющим механизмом и концом звена расположена линейная торсионная пружина. Данная система описывается в виде двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, вытекающих из механического баланса исполняющего механизма (вала электродвигателя) и звена (руки робота-манипулятора) без учета сил трения и внешних возмущений или в векторно-матричной форме [14]:

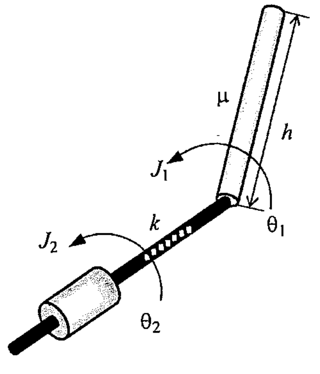

Рис. 1

$$\dot{x} = A_c(x)x + B_c u, \tag{34}$$

где

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1}\left(\mu g h \frac{\sin x_1}{x_1} + k\right) & 0 & k/J_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k/J_2 & 0 & -k/J_2 & -d/J_2 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь θ_1 и θ_2 — угловые координаты звена манипулятора и вала электродвигателя соответственно, u — управляющий момент, производимый электродвигателем, J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно звена манипулятора и электродвигателя, k — жесткость передаточного механизма, d — коэффициент демпфирования, μ — масса звена манипулятора, h — длина звена манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\mu g h \sin\theta_1$ — момент силы тяжести, действующей на звено манипулятора.

Проведем дискретизацию системы (34) в виде

$$x_{t+1} = A(x_t)x_t + Bu_t, \quad A(x_t) = I_4 + \tau A_c(x_t), \quad B = \tau B_c, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{35}$$

где $x_t = x(t\tau)$, $u_t = u(t\tau)$, τ — шаг дискретизации. Пусть $\tau = 0{,}0005$, $\mu g h = 5$, $d = 0{,}1$, $k = 100$, а моменты инерции J_1 и J_2 являются неопределенными параметрами и принимают значения на интервалах

$$0{,}8 \le J_1 \le 1{,}2, \quad 0{,}2 \le J_2 \le 0{,}4. \tag{36}$$

Предположим, что измерению доступен вектор выхода

$$y_t = Cx_t + Du_t = \begin{bmatrix} \theta_{1t} + 0{,}1u_t \\ \dot{\theta}_{2t} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

а управление ищется в виде СОС $u_t = Ky_t$, где $K = [k_1 \;\; k_2] = K_* + \widetilde{K}$. При $J_1 = 1$ и $J_2 = 0{,}3$ найден вектор $K_* = [-0{,}7295 \; -9{,}7213]$, для которого линейная система $x_{t+1} = M_* x_t$, $M_* = A(0) + B\mathrm{D}(K_*)C$ асимптотически устойчива и ее спектр $\sigma(M_*) = \{0{,}9925;\, 0{,}9963 \pm 0{,}0059i;\, 0{,}9997\}$ размещен внутри единичного круга [15]. Поведение решений исходной нелинейной системы (35), отвечающее управлению $u_t = K_* y_t$ и вектору начальных условий $x_0 = [1 \; -2 \; 0 \; 2]^{\mathrm{T}}$, изображено на рис. 2.

Для иллюстрации теоремы 2 зададим матрицу функционала (21): $S = 0{,}1 I_4$, $R = 0{,}01$, $N^{\mathrm{T}} = [0{,}01 \; 0 \; 0 \; 0{,}01]$. Система соотношений (32) состоит из четырех матричных неравенств, что соответствуют возможным значениям пары (J_1, J_2) на концах интервалов (36): $(0{,}8; 0{,}2)$, $(1{,}2; 0{,}2)$, $(0{,}8; 0{,}4)$ и $(1{,}2; 0{,}4)$. С помощью системы MATLAB найдены положительно-определенные матрицы

$$P = 7{,}9501, \quad Q = \begin{bmatrix} 0{,}1556 & 0{,}0039 \\ 0{,}0039 & 0{,}1554 \end{bmatrix}, \quad X = 10^4 \begin{bmatrix} 3{,}4285 & -0{,}0740 & -3{,}3185 & -0{,}0981 \\ -0{,}0740 & 0{,}0345 & 0{,}1304 & 0{,}0038 \\ -3{,}3185 & 0{,}1304 & 3{,}8678 & 0{,}1132 \\ -0{,}0981 & 0{,}0038 & 0{,}1132 & 0{,}0142 \end{bmatrix},$$

удовлетворяющие данной системе строгих неравенств при $\varepsilon_0 = 0$.

Таким образом, для всех значений моментов инерции (36) и вектора коэффициентов усиления обратной связи $K = K_* + \widetilde{K}$ из замкнутой области, ограниченной эллипсом $\mathsf{K} = \{K : KQ^{-1}K^{\mathrm{T}} \le P^{-1}\}$ (рис. 3), движение робота-манипулятора в окрестности нулевого состояния равновесия асимптотически устойчиво. При этом $v(x) = x^{\mathrm{T}} X x$ — общая функция Ляпунова, а значение данного функционала качества не превосходит $v(x_0) = 34973$.

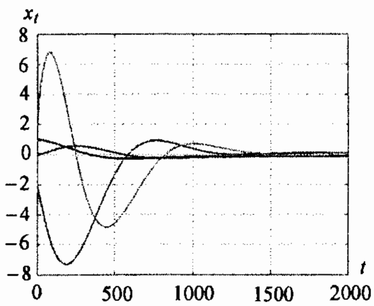

Рис. 2

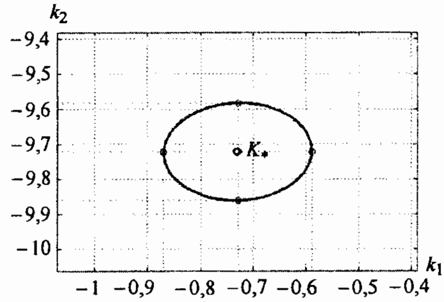

Рис. 3

Заключение

В данной работе получены новые методы робастной стабилизации и оптимизации нелинейных дискретных систем со статической обратной связью по измеряемому выходу, содержащему компоненты как состояния системы, так и управления. При этом значения неопределенных матричных коэффициентов могут принадлежать заданным политопам, в частности матричным интервалам или аффинным множествам, а возможные значения матрицы коэффициентов усиления обратной связи образуют эллипсоидальное множество.

Практическая реализация предложенных методов так же, как и в случае непрерывных систем [15], связана с решением линейных алгебраических матричных неравенств. Для этого может использоваться достаточно эффективная процедура в системе MATLAB. Отличительной особенностью полученных ЛМН от известных является возможность построения эллипсоида стабилизирующих матриц обратной связи, общей квадратичной функции Ляпунова, а также оценки квадратичного функционала качества для нелинейной системы управления с рассматриваемыми неопределенностями.

 ISSN 0572-2691

О.Г. Мазко, Л.В. Богданович

РОБАСТНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ТА ОЦІНКА ФУНКЦІОНАЛА ЯКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Розроблено нові методи аналізу робастної стабілізації та оптимізації дискретних систем керування зі зворотним зв'язком. Для сім'ї нелінійних систем з невизначеними матрицями коефіцієнтів і зворотним зв'язком за вимірюваним виходом формулюються достатні умови стійкості нульового стану зі спільною квадратичною функцією Ляпунова. Запропоновано розв'язання загальної задачі робастної стабілізації та оцінки квадратичного критерію якості сім'ї нелінійних дискретних систем. Застосування результатів зводиться до розв'язання систем лінійних матричних нерівностей.

A.G. Mazko, L.V. Bogdanovich

ROBUST STABILIZATION AND EVALUATION OF THE PERFORMANCE INDEX OF NONLINEAR DISCRETE CONTROL SYSTEMS

New methods for analysis of robust stability and optimization of discrete output feedback control systems are developed. Sufficient stability conditions of the zero state are formulated with the joint quadratic Lyapunov function for a family of nonlinear systems with uncertain coefficient matrices and a measured output feedback. The solution of general problem of robust stabilization and evaluation of the quadratic performance criterion for a family of nonlinear discrete systems are proposed. Applying the results reduces to solving the systems of linear matrix inequalities.

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
2. *Zhou K., Doyle J.C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood : Prentice Hall, 1996. — 596 p.
3. *Кунцевич В.М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев : Наук. думка, 2006. — 264 с.
4. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М. : Физматлит, 2007. — 280 с.
5. *Кунцевич В.М., Кунцевич А.В.* Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 12. — С. 105–118.
6. *Mazko A.G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems // An international book series «Stability, Oscillations and Optimization of Systems» / A.A. Martynyuk, P. Borne and C. Cruz Hernandez, eds. V. 2. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ. Ltd, 2008. — 270 p.
7. *Mazko A.G.* Cone inequalities and stability of dynamical systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2011. — **11**, N 3. — P. 303–318.
8. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.
9. *Алиев Ф.А., Ларин В.Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикладная механика. — 2011. — **47**, № 3. — С. 3–49.
10. *Мазко А.Г., Шрам В.В.* Устойчивость и стабилизация семейства псевдолинейных дифференциальных систем // Нелинейные колебания. — 2011. — **14**, № 2. — С. 227–237.
11. *Мазко А.Г.* Робастная устойчивость и оценка качества семейства нелинейных систем управления // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. — 2011. — **8**, № 2. — С. 174–186.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М. : Наука, 1988. — 552 с.
13. *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Systems Control Lett. — 1987. — **8**, N 4. — P. 351–357.
14. *Ghorbel F., Hung J.Y., Spong M.W.* Adaptive control of flexible-joint manipulators // IEEE Control Systems Mag. — 1989. — N 9. — P. 9–13.
15. *Мазко О.Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 2012.– Т. 9, № 1.– С. 213–230.

Получено 21.08.2012