МАЗКО Алексей Григорьевич – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Украины (г. Киев).

Лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (2008), автор более 120 научных публикаций и трёх монографий, заместитель главного редактора международного журнала *«Nonlinear Dynamics and Systems Theory»* (*www.e-ndst.kiev.ua*). Область научных интересов – теория устойчивости динамических систем, теория управления, математические проблемы механики. ✉ *mazko@imath.kiev.ua*

О книге ...

В книге изложены современные методы анализа и синтеза динамических систем, основанные на применении матричных уравнений и неравенств, а также техники сравнения относительно конусов пространства состояний. Большое внимание уделено матричным интерпретациям и обобщениям прямого метода Ляпунова для некоторых классов систем. На их основе предложены алгоритмы синтеза статических и динамических регуляторов по измеряемому выходу, обеспечивающих робастную устойчивость и оценку интегральных критериев качества управляемых систем с учётом неопределённостей.

Для специалистов в области прикладной математики и механики, которые развивают и применяют теорию устойчивости и стабилизации движения.

Праці Інституту математики НАН України

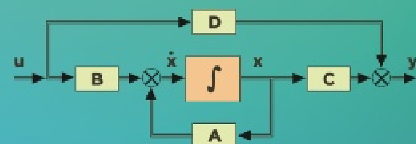
Том 102

Національна академія наук України
Інститут математики

А. Г. Мазко

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы матричных и конусных неравенств



Київ – 2016

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А. Г. МАЗКО

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы матричных и конусных неравенств

Київ — 2016

УДК 517.93; 519.71

Мазко А. Г. Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств / Мазко О. Г. // Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. — Т. 102. — Київ, 2016. — 332 с.

В книге изложены современные методы анализа и синтеза динамических систем, основанные на применении матричных уравнений и неравенств. Большое внимание уделено матричным интерпретациям метода функций Ляпунова для различных классов динамических систем, включая системы с неопределенностью. Представлены обобщения уравнения Ляпунова, лежащие в основе методов локализации спектра линейных систем. Изложены новые критерии стабилизируемости линейных систем и методы построения регуляторов, обеспечивающих робастную устойчивость состояния равновесия, общую квадратичную функцию Ляпунова и оценку функционала качества семейства нелинейных систем. Представлены новые подходы к решению обобщенных задач H_∞-оптимизации линейных и нелинейных систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами. Развита теория устойчивости непрерывных и дискретных систем в полуупорядоченном пространстве. В терминах конусных неравенств и положительно обратимых операторов описаны условия робастной устойчивости состояний равновесия обобщенных позитивных и монотонных систем. Разработаны новый метод построения инвариантных множеств и вытекающий из него принцип сравнения семейства систем.

Монография рассчитана на научных работников, инженеров и аспирантов, интересующихся теорией устойчивости и стабилизации динамических систем, матричным анализом и его приложениями.

Рецензенты: академик НАН Украины *А. А. Мартынюк*,
член-корреспондент НАН Украины *А. А. Бойчук*,
доктор физ.-мат. наук *Д. Я. Хусаинов*.

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины

ISBN 966-02-2571-7
ISBN 978-966-02-7839-4

А. Г. МАЗКО

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методы матричных и конусных неравенств

ПРАЦІ

Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 102

Засновано в 1994 році

Оглавление

Предисловие

В современной прикладной математике интенсивно развиваются спектральные и алгебраические методы исследования динамических систем, основанные на применении матричных уравнений и неравенств. Матричное уравнение Ляпунова представляет классический метод исследования, который успешно применяется не только в задачах анализа устойчивости движения, но и при проектировании управляемых систем с заданным качеством. Постоянно растущие требования к надежности и качеству проектируемых объектов приводят к использованию все более сложных математических моделей в пространстве состояний и необходимости развития матричных методов анализа и синтеза систем.

Данная книга посвящена систематическому изложению современных методов анализа и синтеза динамических систем, основанных на применении обобщенного уравнения Ляпунова, линейных матричных неравенств (ЛМН) и методики сравнения по конусу в полуупорядоченном пространстве. Главное внимание в работе уделяется задачам стабилизации и локализации спектра линейных систем, построения робастных стабилизирующих регуляторов для широких классов нелинейных систем управления, наиболее часто возникающих в приложениях. Математическое обоснование излагаемых методов включает многочисленные факты матричного анализа и теории линейных неравенств в полуупорядоченном пространстве.

Глава 1 посвящена теории линейных матричных уравнений и неравенств общего вида. Излагается теория матричных уравнений Сильвестра, включающая новые и известные методы трансформаций, анализа условий разрешимости и построения решений. В качестве основных результатов данной главы можно выделить ряд теорем, обобщающих теоремы Хилла и Шнайдера об инерции эрмитовых решений трансформируемых уравнений. Излагаются методы построения аналогов уравнения Ляпунова для матриц и матричных функций. Устанавливаются свойства решений таких уравнений (обобщенные теоремы Ляпунова, Островского–Шнайдера и др.), описывающие расположение собственных чисел относительно широких классов аналитических кривых. При этом определяются и используются системы расщепления спектра и решения обобщенных блочных спектральных задач. Методы обобщенного уравнения Ляпунова лежат в основе формулируемых теорем об устойчивости для некоторых классов дифференциальных, разностных, дифференциально-разностных и стохастических систем. Решения обобщенных спектральных задач могут быть использованы также при построении решений соответствующих классов дифференциальных и разностных систем.

Изложенные свойства ЛМН с неопределенными коэффициентами лежат в основе практического решения задач о робастной устойчивости, робастной стабилизации и оптимизации линейных и нелинейных систем управления (главы 2 – 6). При этом ключевую роль выполняют методы квадратичных функций Ляпунова и так называемые леммы о матричной неопределенности, в частности, лемма Питерсена и ее аналоги. В главе 2 приводятся основные определения и общие теоремы об устойчивости движения нелинейных систем, а также алгебраические условия робастной устойчивости некоторых классов нелинейных систем. В главе 3 излагаются современные методы построения статических и динамических регуляторов, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость линейных систем управления при дополнительных ограничениях, связанных с неполнотой информации о состояниях системы, оптимизацией квадратичного функционала качества и неопределенностью в уравнениях движения. Данные методы распространяются на класс нелинейных систем управления, представленных в векторно-матричной форме (глава 4).

В главе 5 приводятся результаты некоторых обобщений современной теории H_∞-оптимизации систем управления с управляемыми и наблюдаемыми выходами, возникшей в 90-е годы прошлого века. Критерии качества рассматриваемых, в частности, так называемых неэкспансивных систем описывает взвешенный уровень гашения входных сигналов или внешних и начальных возмущений.

В главе 6 рассматриваются системы управления с дискретным временем. Приводятся условия стабилизируемости линейных дискретных систем, методы робастной стабилизации и оценки квадратичных критериев качества нелинейных дискретных систем с полиэдральной неопределенностью, а также элементы теории H_∞-управления для дискретных систем.

Глава 7 посвящена изучению условий устойчивости динамических систем в полуупорядоченном банаховом пространстве. Определяются классы позитивных и монотонных систем относительно заданных конусов фазового пространства. Основными результатами исследований являются критерии асимптотической устойчивости линейных позитивных систем, сформулированные в терминах положительных и положительно обратимых операторов, методы исследования устойчивости состояний нелинейных монотонных систем, а также развитие методов сравнения систем в полуупорядоченном пространстве. Приводится решение задач о робастной устойчивости состояний линейных и нелинейных систем с интервальной неопределенностью, описываемой с помощью конусных неравенств. Формулируется общая задача позитивной стабилизации систем управления и способы ее решения для некоторых типов конусов в конечномерном пространстве. Данные результаты позволяют рассматривать ранее изученные матричные задачи анализа и синтеза, в частности, проблему робастной устойчивости с общих позиций теории операторов в полуупорядоченном пространстве.

В приложении приводится ряд известных определений и вспомогательных фактов, используемых при изложении основных утверждений.

Основной материал книги составляют результаты работ автора, опубликованных в периодической печати и монографиях [51, 119]. Приводятся также основные результаты зарубежных авторов в области матричных методов исследования динамических систем. В разделе «Комментарии и библиографические указания» даются необходимые ссылки на используемую литературу.

Надеюсь, что книга окажется полезной многим исследователям, интересующимся теорией устойчивости и стабилизации движения, а также инженерам, аспирантам и студентам высших технических учебных заведений.

Хочу поблагодарить моих коллег из Института математики НАН Украины за полезное обсуждение и техническую помощь при подготовке рукописи данной книги.

А. Г. Мазко

Указатель обозначений

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) — вещественное (комплексное) n-мерное пространство;

$\mathbb{R}^{n\times m}$ ($\mathbb{C}^{n\times m}$) — пространство вещественных (комплексных) матриц размеров $n \times m$;

$A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{n,m}$ — матрица размеров $n \times m$ с элементами a_{ij};

a_{i*} (a_{*j}) — i-я строка (j-й столбец) матрицы A;

0 — нулевые скаляр, вектор или матрица;

$I\,(I_n)$ — единичная матрица (порядка n);

$0_{n\times m}$ — нулевая матрица размеров $n \times m$;

$x = \mathrm{Re}\lambda$, $y = \mathrm{Im}\lambda$ — вещественная и мнимая части комплексного числа $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$;

$\mathbb{C}^-$ ($\mathbb{C}^+$) — открытая полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda < 0$ ($\mathrm{Re}\lambda > 0$);

$\overline{\mathbb{C}}^-$ ($\overline{\mathbb{C}}^+$) — замкнутая полуплоскость $\mathrm{Re}\lambda \leq 0$ ($\mathrm{Re}\lambda \geq 0$);

$\overline{\lambda} = x - iy$ — комплексно сопряженное число, $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$;

$\|x\|$ — евклидова норма вектора x;

(a, b) — скалярное произведение векторов a и b;

A^T, A^*, A^{-1}, A^- и A^+ — соответственно транспонированная, сопряженная, обратная, полуобратная и псевдообратная матрица к матрице A;

$\det A$, $\mathrm{rank}\, A$, $\mathrm{sign}\, A$, $\mathrm{tr}\, A$, $\mathrm{i}(A)$, $\sigma(A)$ и $\|A\|$ — соответственно детерминант, ранг, сигнатура, след, инерция, спектр и норма матрицы A;

$f(A)$ — аналитическая функция от матрицы A;

$\Lambda_f^{\pm}$ — открытые области, ограниченные кривой $f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$;

$\mathrm{i}_f^+(A)$, $\mathrm{i}_f^-(A)$, $\mathrm{i}_f^0(A)$ — количества точек спектра $\sigma(A)$, принадлежащих соответствующим множествам Λ_f^+, Λ_f^-, Λ_f^0;

$\lambda_{\max}(A)\,(\lambda_{\min}(A))$ — максимальное (минимальное) собственное значение эрмитовой матрицы $A = A^*$;

$\mathrm{i}_+(A)$, $\mathrm{i}_-(A)$, $\mathrm{i}_0(A)$ — количества положительных, отрицательных и нулевых собственных значений эрмитовой матрицы $A = A^*$ с учетом кратностей;

$A \otimes B$ — кронекерово произведение матриц A и B;

$A \odot B$ — произведение Шура матриц A и B;

$\oint$ — интеграл типа Коши по замкнутому контуру ω;

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}_{pq}$, $\mathcal{Y}_{pq}$ — множества в пространстве матриц;

$\mathcal{H}_n$ $(\mathcal{K}_n)$ — множество эрмитовых (неотрицательно определенных) матриц порядка n;

$\mathbf{L}X$, $\mathbf{L}_f X$, … — линейные операторы (преобразования X);

$\mathbf{I}$ — тождественный оператор;

$\mathbf{L} \trianglerighteq 0$ — положительный оператор;

$\rho(L)$ — спектральный радиус матрицы (оператора);

$\operatorname{Ker} L$ — ядро матрицы (оператора);

$A^\perp$ — ортогональное дополнение матрицы полного ранга A;

W_A — матрица, столбцы которой составляют базис ядра $\operatorname{Ker} A$;

$\mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\} = \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i A_i \,:\, \alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1,\nu}, \sum\limits_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 \Big\}$ — выпуклый многогранник (политоп) с вершинами A_i;

$\mathcal{K}$ — конус в полуупорядоченном пространстве $\mathcal{E}$;

$\mathcal{K}_0$ — множество внутренних точек конуса $\mathcal{K}$;

$X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$, $X \overset{\mathcal{K}}{<} Y$ — неравенства, порождаемые конусом $\mathcal{K}$;

$\mathbf{L}_1 \trianglelefteq \mathbf{L}_2$ — операторное неравенство, равносильное положительности оператора $\mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$.

Глава 1

Матричные уравнения и неравенства

Данная глава посвящена теории линейных матричных уравнений и неравенств и ее применению в задачах локализации собственных значений матриц, матричных полиномов и функций. Основные результаты, изложенные в данной главе, используются в последующих главах при разработке методов анализа и синтеза динамических систем.

В параграфе 1.1 приводятся условия разрешимости, свойства решений и методы трансформаций линейных матричных уравнений общего вида. Формулируются основные теоремы об инерции решений симметризованных матричных уравнений и их следствия при изучении спектральных свойств матричных семейств (обобщения теорем Хилла, Шнайдера и др.).

В параграфе 1.2 приводятся основные теоремы о локализации и распределении спектра матрицы относительно аналитических кривых в комплексной плоскости с использованием оператора Крейна–Далецкого (максимальные обобщения теорем Ляпунова, Островского–Шнайдера и др.).

В параграфе 1.3 формулируются основные теоремы о локализации и распределении спектра матричных функций на основе решений обобщенной спектральной задачи.

В параграфе 1.4 приводятся аналоги уравнения Ляпунова для дескрипторных систем, а также дифференциальных и разностных систем произвольного порядка.

В параграфе 1.5 изучаются ЛМН с неопределенными коэффициентами (политопами). Предлагаются методы их сведения к конечным системам линейных матричных уравнений.

В параграфе 1.6 обсуждаются простые методы локализации собственных значений матричных полиномов и функций, основанные на решении ЛМН. Предлагается решение задачи о робастной локализации спектра.

В параграфе 1.7 приводится описание матричных неравенств в терминах специальных функций следа. Данное описание используется при решении задач локализации и распределения спектра матрицы.

1.1 Линейные матричные уравнения общего вида

1.1.1 Ранг и инерция решений

Рассмотрим линейное матричное уравнение общего вида

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} c_{ij} A_i X B_j = Y, \tag{1.1.1}$$

где $A_i \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $B_j \in \mathbb{C}^{m\times q}$ и $Y \in \mathbb{C}^{p\times q}$ — заданные матрицы, c_{ij} — скалярные коэффициенты, составляющие матрицу $C \in \mathbb{C}^{k\times s}$. Пусть уравнение (1.1.1) разрешимо относительно $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Соотношение (1.1.1) эквивалентно системе

$$AZB = Y, \quad C \otimes X = Z, \tag{1.1.2}$$

где $\otimes$ — *кронекерово произведение*, A, B и Z — блочные матрицы вида

$$A = \big[A_1, \dots, A_k\big], \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} c_{11}X & \dots & c_{1s}X \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}X & \dots & c_{ks}X \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.1.1 *Если уравнение* (1.1.1) *разрешимо, то*

$$\operatorname{rank} C \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} Y + \operatorname{rank} W, \tag{1.1.3}$$

где $W = Z - ZBY^{-}AZ$, Y^{-} *— полуобратная матрица, определяемая уравнением* $YY^{-}Y = Y$. *При условиях сопряженности*

$$B = A^*, \quad C = C^*, \quad X = X^*, \quad Y = Y^*, \quad Y^{-} = Y^{-*} \tag{1.1.4}$$

наряду с (1.1.3) *выполняется равенство*

$$\operatorname{sign} C \operatorname{sign} X = \operatorname{sign} Y + \operatorname{sign} W. \tag{1.1.5}$$

Отметим, что равенства (1.1.3) и (1.1.5) можно записать в терминах индексов инерции:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}_+(C)\mathrm{i}_+(X) + \mathrm{i}_-(C)\mathrm{i}_-(X) &= \mathrm{i}_+(Y) + \mathrm{i}_+(W), \\ \mathrm{i}_-(C)\mathrm{i}_+(X) + \mathrm{i}_+(C)\mathrm{i}_-(X) &= \mathrm{i}_-(Y) + \mathrm{i}_-(W). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Приведем ряд следствий теоремы 1.1.1. Для любого решения уравнения (1.1.1) выполняются неравенства

$$\operatorname{rank} Y \le \operatorname{rank} C \operatorname{rank} X \le \operatorname{rank} Y + \delta,$$

где $\delta = \min\{kn + sm - \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} B, \operatorname{rank}(C^{-} \otimes X^{-} - BY^{-}A)\}$. Если $\delta = 0$, в частности, $C^{-} \otimes X^{-} = BY^{-}A$, то данное решение имеет минимальный ранг, равный $\operatorname{rank} Y / \operatorname{rank} C$. Из (1.1.3) вытекают формулы для вычисления ранга блочных матриц:

$$\operatorname{rank} \big[X_1, X_2\big] = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} L, \tag{1.1.7}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} R, \tag{1.1.8}$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} X_1 + \operatorname{rank} L + \operatorname{rank} R + \operatorname{rank} G, \tag{1.1.9}$$

где $\quad X_1 \in \mathbb{C}^{p\times q}, \quad X_2 \in \mathbb{C}^{p\times \tau}, \quad X_3 \in \mathbb{C}^{t\times q}, \quad X_4 \in \mathbb{C}^{t\times \tau},$

$$L = X_2 - X_1X_1^{-}X_2, \quad R = X_3 - X_3X_1^{-}X_1,$$

$$G = (I_t - RR^{-})T(I_\tau - L^{-}L), \quad T = X_4 - X_3X_1^{-}X_2.$$

При условиях (1.1.4) для любой эрмитовой матрицы-решения X уравнения (1.1.1) выполняются неравенства

$$\mathrm{i}_+(Y) \leq \mathrm{i}_+(C)\mathrm{i}_+(X) + \mathrm{i}_-(C)\mathrm{i}_-(X) \leq \mathrm{i}_+(Y) + \mathrm{i}_+(C^- \otimes X^- - A^*Y^-A),$$

$$\mathrm{i}_-(Y) \leq \mathrm{i}_-(C)\mathrm{i}_+(X) + \mathrm{i}_+(C)\mathrm{i}_-(X) \leq \mathrm{i}_-(Y) + \mathrm{i}_-(C^- \otimes X^- - A^*Y^-A).$$

Если при этом $\operatorname{sign} C = 0$, то

$$\operatorname{rank} C \operatorname{rank} X \geq \operatorname{rank} Y + |\operatorname{sign} Y| = 2\max\{\mathrm{i}_+(Y), \mathrm{i}_-(Y)\}.$$

В частности, если $Y > 0$ или $Y < 0$, то при условиях $\operatorname{rank} C = 2$ и $\operatorname{sign} C = 0$ решение X является невырожденной матрицей.

Если $C = 1$, то $W = X - XA^*Y^-AX$. В этом случае выполняются неравенства

$$\mathrm{i}_+(X) \geq \mathrm{i}_+(Y), \quad \mathrm{i}_-(X) \geq \mathrm{i}_-(Y). \tag{1.1.10}$$

При этом равенства в (1.1.10) достигаются в том и только в том случае, когда A^*Y^-A является полуобратной матрицей для X (*обобщенный закон инерции*). В *законе инерции Сильвестра* A — квадратная невырожденная матрица и $A^*Y^-A = X^-$. Кроме того, в рассматриваемом случае можно утверждать, что равенства $\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(Y) + r$ и $\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(Y)$ выполняются в том и только в том случае, когда W — неотрицательно определенная матрица ранга r. Аналогично, равенства $\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(Y)$ и $\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(Y) + r$ эквивалентны соотношениям $W \leq 0$, $\operatorname{rank} W = r$. Данные утверждения могут быть использованы при вычислении индексов инерции эрмитовой матрицы без каких-либо ограничений на ее миноры, подобных условиям теоремы Якоби [21]. Нахождение инерции матрицы X сводится к применению критериев знакоопределенности матриц Y и W. Так, если $p \times n$-матрица A выбрана так, что $Y > 0$ и $W \leq 0$, то $\mathrm{i}_+(X) = p$ и $\mathrm{i}_-(X) = \operatorname{rank} W$. Аналогично, при условиях $Y < 0$, $W \geq 0$ имеем $\mathrm{i}_+(X) = \operatorname{rank} W$ и $\mathrm{i}_-(X) = p$. Если $p = 1$ и $AXA^* = \alpha > 0$, то соотношения $\mathrm{i}_+(X) = 1$ и $\alpha X \leq XA^*AX$ эквивалентны.

Если матрица X представлена в блочном виде

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad X_1 = X_1{}^*, \quad X_2 = X_3{}^*, \quad X_4 = X_4{}^*,$$

то наряду с (1.1.9) выполнено равенство

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign} X_1 + \operatorname{sign} G. \tag{1.1.11}$$

Равенства (1.1.9) и (1.1.11) эквивалентны соотношениям

$$i_\pm(X) = i_\pm(X_1) + i_\pm(G) + \operatorname{rank} L, \tag{1.1.12}$$

$$\mathrm{i}_0(X) = \mathrm{i}_0(X_1) + \mathrm{i}_0(G) - 2\operatorname{rank} L. \tag{1.1.13}$$

В частности, имеем следующие критерии:

$$\mathrm{i}_+(X) = \mathrm{i}_+(X_1) \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2, \quad X_4 \le X_3 X_1^- X_2;$$

$$\mathrm{i}_-(X) = \mathrm{i}_-(X_1) \quad \Longleftrightarrow \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2, \quad X_4 \ge X_3 X_1^- X_2;$$

$$X \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 \ge 0, \quad X_4 \ge X_3 X_1^- X_2, \quad X_2 = X_1 X_1^- X_2.$$

При условии невырожденности блока X_1 эрмитовой матрицы X справедливы утверждения *леммы Шура*:

$$X \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 > 0, \quad X_4 \ge X_3 X_1^{-1} X_2; \tag{1.1.14}$$

$$X > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 > 0, \quad X_4 > X_3 X_1^{-1} X_2; \tag{1.1.15}$$

Аналогичные утверждения можно сформулировать для матрицы X, выделяя блок X_4.

1.1.2 Трансформации и условия разрешимости

При изучении матричных уравнений важную роль выполняют системы преобразований (*трансформаций*), приводящие их к более простому виду. В частности, нас интересуют возможности приведения уравнения (1.1.1) к аналогичному уравнению с треугольными матричными коэффициентами, условия разрешимости которого хорошо изучены.

Рассмотрим два уравнения вида (1.1.1):

$$\mathbf{M}X \stackrel{\Delta}{=} A(C \otimes X)B = Y, \tag{1.1.16}$$

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} \stackrel{\Delta}{=} L(D \otimes \widehat{X})R = \widehat{Y}, \tag{1.1.17}$$

где

$$A = \big[A_1, \ldots, A_k\big], \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & \ldots & c_{ks} \end{bmatrix},$$

$$L = \big[L_1, \ldots, L_{\widehat{k}}\big], \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{\widehat{s}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \ldots & d_{1\widehat{s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{\widehat{k}1} & \ldots & d_{\widehat{k}\widehat{s}} \end{bmatrix}.$$

Определим систему преобразований

$$\begin{gathered} P_1AP^{(2)} = P_3LP^{(4)}, \quad Q^{(1)}BQ_2 = Q^{(3)}RQ_4, \\ C = S_1GS_2, \quad D = S_3GS_4, \quad P_1YQ_2 = P_3\widehat{Y}Q_4, \end{gathered} \tag{1.1.18}$$

а также структуру решений уравнений (1.1.16) и (1.1.17)

$$\mathbf{X}(H) = P_2HQ_1, \quad \widehat{\mathbf{X}}(H) = P_4HQ_3, \tag{1.1.19}$$

где $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, $Q^{(1)} = S_2 \otimes Q_1$, $Q^{(3)} = S_4 \otimes Q_3$, P_t, Q_t, S_t $(t = \overline{1,4})$, G и H — некоторые матрицы подходящих размеров. При этом используем ранговые ограничения на матрицы преобразований, в частности,

$$\operatorname{rank} P_1 = p, \quad \operatorname{rank} Q_2 = q, \tag{1.1.20}$$

$$\operatorname{rank} P_2 = n, \quad \operatorname{rank} Q_1 = m, \tag{1.1.21}$$

$$\operatorname{rank} P_3 = \widehat{p}, \quad \operatorname{rank} Q_4 = \widehat{q}, \tag{1.1.22}$$

$$\operatorname{rank} P_4 = \widehat{n}, \quad \operatorname{rank} Q_3 = \widehat{m}, \tag{1.1.23}$$

$$\operatorname{rank} S_1 = k, \quad \operatorname{rank} S_2 = s, \tag{1.1.24}$$

$$\operatorname{rank} S_3 = \widehat{k}, \quad \operatorname{rank} S_4 = \widehat{s}. \tag{1.1.25}$$

Теорема 1.1.2 *Пусть параметры уравнений* (1.1.16) *и* (1.1.17) *связаны системой* (1.1.18). *Тогда, если выполнены условия* (1.1.20) *и уравнение* (1.1.17) *разрешимо в виде* $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(H)$, *то* $X = \mathbf{X}(H)$ *является решением уравнения* (1.1.16). *Если выполнены условия* (1.1.22) *и уравнение* (1.1.16) *разрешимо в виде* $X = \mathbf{X}(H)$, *то* $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(H)$ *— решение уравнения* (1.1.17).

Связь между решениями вида (1.1.19) и правыми частями уравнений (1.1.16) и (1.1.17) в системе преобразований (1.1.18) можно представить в виде

$$X = P_2 P_4^- \widehat{X} Q_3^- Q_1 + X_0, \quad \widehat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3 + \widehat{X}_0,$$

$$Y = P_1^- P_3 \widehat{Y} Q_4 Q_2^- + Y_0, \quad \widehat{Y} = P_3^- P_1 Y Q_2 Q_4^- + \widehat{Y}_0,$$

где $X_0 = P_2 H_0 Q_1$, $\widehat{X}_0 = P_4 \widehat{H}_0 Q_3$, H_0, $\widehat{H}_0$, Y_0 и $\widehat{Y}_0$ — произвольные матрицы такие, что $P_4 H_0 Q_3 = 0$, $P_2 \widehat{H}_0 Q_1 = 0$, $P_1 Y_0 Q_2 = 0$ и $P_3 \widehat{Y}_0 Q_4 = 0$. В частности, при $H_0 = 0$ и $\widehat{H}_0 = 0$ имеем следующие утверждения.

Следствие 1.1.1 *Для того, чтобы матрица* X *была решением уравнения* (1.1.16), *при условиях* (1.1.20) *и* (1.1.21) *достаточно, а при условиях* (1.1.21) *и* (1.1.22) *необходимо, чтобы матрица* $\widehat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3$ *удовлетворяла уравнению* (1.1.17). *Аналогично, для того, чтобы уравнение* (1.1.16) *было разрешимо в виде* $X = P_2 P_4^- \widehat{X} Q_3^- Q_1$, *при условиях* (1.1.20) *и* (1.1.23) *достаточно, а при условиях* (1.1.22) *и* (1.1.23) *необходимо, чтобы матрица* $\widehat{X}$ *удовлетворяла уравнению* (1.1.17).

Выделим следующие системы преобразований (1.1.18):

$$P_1AP^{(2)} = L,\ Q^{(1)}BQ_2 = R,\ C = S_1DS_2,\ P_1YQ_2 = \widehat{Y};\ (1.1.26)$$

$$AP^{(2)} = P_3L,\ Q^{(1)}B = RQ_4,\ C = S_1DS_2,\ Y = P_3\widehat{Y}Q_4;\ (1.1.27)$$

$$P_1A = LP^{(4)},\ BQ_2 = Q^{(3)}R,\ S_3CS_4 = D,\ P_1YQ_2 = \widehat{Y};\ (1.1.28)$$

$$A = P_3LP^{(4)},\ B = Q^{(3)}RQ_4,\ S_3CS_4 = D,\ Y = P_3\widehat{Y}Q_4.\ (1.1.29)$$

Если удается построить систему (1.1.26) или (1.1.27), то решение уравнения (1.1.16) можно определить согласно (1.1.19) в виде $X = \mathbf{X}(\widehat{X})$, где $\widehat{X}$ — решение уравнения (1.1.17). Аналогично, при использовании систем (1.1.28) и (1.1.29) имеем $\widehat{X} = \widehat{\mathbf{X}}(X)$.

Отметим, что каждое из ограничений (1.1.20) – (1.1.25) позволяет упростить систему (1.1.18). Так, если выполнены равенства (1.1.22), (1.1.23) и (1.1.25), то, исходя из (1.1.18), можно построить новую систему преобразований вида (1.1.26) путем полуобращения матриц полного ранга.

Сформулируем условия разрешимости уравнений (1.1.16) и (1.1.17), предполагая, что все матрицы L_i и R_j в системе (1.1.18) имеют квазитреугольную структуру:

$$L_i = \begin{bmatrix} L_{11}^{(i)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\alpha 1}^{(i)} & \dots & L_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad R_j = \begin{bmatrix} R_{11}^{(j)} & \dots & R_{1\beta}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_{\beta\beta}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad (1.1.30)$$

где $L_{tt}^{(i)} \in \mathbb{C}^{l_{t1}\times l_{t2}}$, $R_{\tau\tau}^{(j)} \in \mathbb{C}^{r_{\tau 1}\times r_{\tau 2}}$, $t = \overline{1,\alpha}$, $\tau = \overline{1,\beta}$. При этом оператор уравнения (1.1.17) представляется в блочном виде $\widehat{\mathbf{M}} = \mathbf{K} + \mathbf{N}$, где

$$\mathbf{K}\widehat{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}\widehat{X}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1\beta}\widehat{X}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{\alpha 1}\widehat{X}_{\alpha 1} & \dots & \mathbf{K}_{\alpha\beta}\widehat{X}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_{t\tau}\widehat{X}_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij}L_{tt}^{(i)}\widehat{X}_{t\tau}R_{\tau\tau}^{(j)},$$

$$\mathbf{N}\widehat{X} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{N}_{12}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{1\beta}\widehat{X} \\ \mathbf{N}_{21}\widehat{X} & \mathbf{N}_{22}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{2\beta}\widehat{X} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{N}_{\alpha 1}\widehat{X} & \mathbf{N}_{\alpha 2}\widehat{X} & \dots & \mathbf{N}_{\alpha\beta}\widehat{X} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{t\tau}\widehat{X} = \sum_{\xi=1}^{t}\sum_{\zeta=1}^{\tau}\sum_{i=1}^{\widehat{k}}\sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij} L_{t\xi}^{(i)} \widehat{X}_{\xi\zeta} R_{\zeta\tau}^{(j)}, \quad \xi + \zeta < t + \tau.$$

Уравнение (1.1.17) сводится к системе $\alpha\beta$ матричных уравнений

$$\mathbf{K}_{11}\widehat{X}_{11} = \widehat{Y}_{11}, \quad \mathbf{K}_{t\tau}\widehat{X}_{t\tau} + \mathbf{N}_{t\tau}\widehat{X} = \widehat{Y}_{t\tau}, \quad t + \tau > 2, \qquad (1.1.31)$$

где $\widehat{X}_{t\tau} \in \mathbb{C}^{l_{t2}\times r_{\tau 1}}$ и $\widehat{Y}_{t\tau} \in \mathbb{C}^{l_{t1}\times r_{\tau 2}}$ — блоки соответствующих матриц X и Y, $t = \overline{1,\alpha}$, $\tau = \overline{1,\beta}$.

Пусть все диагональные блоки матриц (1.1.30) квадратные: $l_{t1} = l_{t2}$, $r_{\tau 1} = r_{\tau 2}$. Операторы $\mathbf{N}_{t\tau}$ действуют лишь на блоки $\widehat{X}_{\xi\zeta}$ матрицы $\widehat{X}$ при $\xi \le t$, $\zeta \le \tau$ и $\xi + \zeta \ne t + \tau$. Это можно использовать в рекуррентной процедуре исключения неизвестных системы (1.1.31), представляющей доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.1.3 *Матричное уравнение* (1.1.17) *с квазитреугольными коэффициентами* (1.1.30) *имеет единственное решение при любой правой части в том и только в том случае, когда обратимы все операторы* $\mathbf{K}_{t\tau}$. *При этом данное решение представляется в виде*

$$\widehat{X} = \widehat{Y}_1 + \mathbf{N}_1\widehat{Y}_1 + \ldots + \mathbf{N}_1^{\nu-1}\widehat{Y}_1, \quad \nu = \alpha + \beta - 1, \qquad (1.1.32)$$

где

$$\mathbf{N}_1 = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{N}, \quad \widehat{Y}_1 = \mathbf{K}^{-1}\widehat{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{-1}\widehat{Y}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1\beta}^{-1}\widehat{Y}_{1\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{\alpha 1}^{-1}\widehat{Y}_{\alpha 1} & \dots & \mathbf{K}_{\alpha\beta}^{-1}\widehat{Y}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при условиях (1.1.30) спектр оператора $\widehat{\mathbf{M}}$ состоит из объединения спектров всех операторов $\mathbf{K}_{t\tau}$. Операторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_1$ являются нильпотентными. Их индексы нильпотентности совпадают и не превосходят ν. Если матрицы (1.1.30) являются треугольными, то операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}^{-1}$ определяют *произведения Шура*:

$$\mathbf{K}\widehat{X} = \Omega \odot \widehat{X}, \quad \mathbf{K}^{-1}\widehat{Y} = \Delta \odot \widehat{Y}, \tag{1.1.33}$$

где

$$\Omega = \Sigma_l D \Sigma_r^T = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\alpha 1} & \dots & \omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \; \Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \dots & 1/\omega_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \dots & 1/\omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} L_{11}^{(1)} & \dots & L_{11}^{(\widehat{k})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{\alpha\alpha}^{(1)} & \dots & L_{\alpha\alpha}^{(\widehat{k})} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & \dots & R_{11}^{(\widehat{s})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{\beta\beta}^{(1)} & \dots & R_{\beta\beta}^{(\widehat{s})} \end{bmatrix}.$$

В этом случае спектр $\sigma(\widehat{\mathbf{M}})$ образуют элементы матрицы Ω, а неравенства

$$w_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{\widehat{s}} d_{ij} L_{tt}^{(i)} R_{\tau\tau}^{(j)} \neq 0, \quad t = \overline{1,\alpha}, \quad \tau = \overline{1,\beta}, \tag{1.1.34}$$

представляют критерий однозначной разрешимости уравнения (1.1.17).

Условия разрешимости и решения исходного уравнения (1.1.16) можно получить с помощью приведенных соотношений и следствий теоремы 1.1.2 для различных вариантов системы преобразований (1.1.18), в частности, (1.1.26) – (1.1.29).

1.1.3 Основные теоремы об инерции решений

Рассмотрим класс симметризованных матричных уравнений

$$\mathbf{M}X = Y, \quad \mathbf{M}X \triangleq \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j{}^* \equiv A(C \otimes X)A^*, \tag{1.1.35}$$

где C, X и Y — эрмитовы матрицы порядка k, n и p соответственно, $A = \big[A_1, \ldots, A_k\big]$, $A_i \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $i = \overline{1, k}$.

Изучим свойства оператора $\mathbf{M}$ и инерцию эрмитовых решений уравнения (1.1.35), используя системы преобразований типа (1.1.26) – (1.1.29):

$$P_1AP^{(2)} = L,\ C = S_1DS_1{}^*,\ P_1YP_1{}^* = \widehat{Y},\ X = P_2\widehat{X}P_2{}^*; \tag{1.1.36}$$

$$AP^{(2)} = P_3L,\ C = S_1DS_1{}^*,\ Y = P_3\widehat{Y}P_3{}^*,\ X = P_2\widehat{X}P_2{}^*; \tag{1.1.37}$$

$$P_1A = LP^{(4)},\ S_3CS_3{}^* = D,\ P_1YP_1{}^* = \widehat{Y},\ P_4XP_4{}^* = \widehat{X}; \tag{1.1.38}$$

$$A = P_3LP^{(4)},\ S_3CS_3{}^* = D,\ Y = P_3\widehat{Y}P_3{}^*,\ P_4XP_4{}^* = \widehat{X}. \tag{1.1.39}$$

Предположим, что существует одна из систем преобразований (1.1.36) – (1.1.39), приводящая к семейству треугольных матриц:

$$L_i = \begin{bmatrix} l_{11}^{(i)} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21}^{(i)} & l_{22}^{(i)} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ l_{\alpha1}^{(i)} & l_{\alpha2}^{(i)} & \ldots & l_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \widehat{k}}. \tag{1.1.40}$$

При этом $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, а $P_1, \ldots, P_4$ — некоторые матрицы полного ранга α.

Для каждой из систем (1.1.36)–(1.1.39) определим семейства матриц

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{X}_{t\tau}, \quad \mathcal{X}_{t\tau} = \{X :\ \mathrm{i}_+(\widehat{X}) = t,\ \mathrm{i}_-(\widehat{X}) = \tau\},$$

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{Y}_{t\tau}, \quad \mathcal{Y}_{t\tau} = \{Y :\ \mathrm{i}_+(\widehat{Y}) = t,\ \mathrm{i}_-(\widehat{Y}) = \tau\}.$$

Если используются системы (1.1.36) или (1.1.37), то $\mathcal{X}$ — множество эрмитовых матриц, представимых в виде $X = P_2\widehat{X}P_2{}^*$. При этом, если $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$, то $\mathrm{i}_+(X) = t$ и $\mathrm{i}_-(X) = \tau$, поскольку P_2 —

матрица полного ранга по столбцам. Для систем (1.1.38) или (1.1.39) принадлежность $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ означает, что $\widehat{X} = P_4 X P_4{}^*$ — эрмитова матрица с индексами инерции $\mathrm{i}_+(\widehat{X}) = t \leq \mathrm{i}_+(X)$ и $\mathrm{i}_-(\widehat{X}) = \tau \leq \mathrm{i}_-(X)$. Аналогично, с помощью матриц P_1 и P_3 описываются множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_{t\tau}$. Отметим, что при $\alpha = n$ ($\alpha = p$) в каждом случае (1.1.36) – (1.1.39) множество $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ состоит из всех эрмитовых $\alpha \times \alpha$-матриц, а $\mathcal{X}_{\alpha 0}$ ($\mathcal{Y}_{\alpha 0}$) — подмножество положительно определенных матриц. Множества $\mathcal{X}_{00}$ и $\mathcal{Y}_{00}$ являются подпространствами. В частности, для систем (1.1.37) и (1.1.39), а также (1.1.36) и (1.1.38) при $\alpha = p$ подпространство $\mathcal{Y}_{00}$ нулевое.

Наряду с (1.1.35) рассмотрим матричное уравнение

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} = \widehat{Y}, \quad \widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} \triangleq \sum_{i,j=1}^{\widehat{k}} d_{ij} L_i \widehat{X} L_j{}^* \equiv L(D \otimes \widehat{X}) L^*. \qquad (1.1.41)$$

Для каждой системы (1.1.36) – (1.1.39) операторы $\mathbf{M}$ и $\widehat{\mathbf{M}}$ связаны одним из соотношений

$$P_1(\mathbf{M}X)P_1{}^* = \widehat{\mathbf{M}}\widehat{X}, \quad \mathbf{M}X = P_3(\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X})P_3{}^*. \qquad (1.1.42)$$

В силу ранговых ограничений на $P_1, \ldots, P_4$ равенство $\mathcal{Y} = \mathbf{M}\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00}$ выполняется в том и только в том случае, когда

$$\omega_{t\tau} = \sum_{i,j=1}^{\widehat{k}} d_{ij}\, l_{tt}^{(i)}\, \overline{l_{\tau\tau}^{(j)}} \neq 0, \quad t, \tau = \overline{1, \alpha}, \qquad (1.1.43)$$

где $\omega_{t\tau}$ — собственные числа оператора $\widehat{\mathbf{M}}$. При этом

$$\widehat{\mathbf{M}}\widehat{X} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \gamma_{t\tau}^{ij}\, E_{ti} \widehat{X} E_{\tau j}^*, \quad \widehat{\mathbf{M}}^{-1}\widehat{Y} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \theta_{t\tau}^{ij}\, E_{ti} \widehat{Y} E_{\tau j}^*, \qquad (1.1.44)$$

где E_{pq} — матрицы с единственным ненулевым элементом, равным 1 и расположенным на пересечении p-й строки и q-го столбца, $\gamma_{t\tau}^{ij}$ и $\theta_{t\tau}^{ij}$ — скалярные коэффициенты, связанные рекуррентными соотношениями

$$\gamma_{t\tau}^{t\tau} = \omega_{t\tau},\ \theta_{t\tau}^{t\tau} = \frac{1}{\omega_{t\tau}},\ \sum_{\xi=i}^{t}\sum_{\zeta=j}^{\tau}\gamma_{\xi\zeta}^{ij}\theta_{t\tau}^{\xi\zeta} = 0,\ i \leq t,\ j \leq \tau,\ i+j < t+\tau.$$

Построим из скалярных коэффициентов разложений (1.1.44) блочные матрицы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{\alpha 1} & \dots & \Gamma_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{\alpha 1} & \dots & \Theta_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad (1.1.45)$$

где $\Gamma_{t\tau} = \|\gamma_{t\tau}^{ij}\|_{i,j=1}^{t,\tau}$, $\Theta_{t\tau} = \|\theta_{t\tau}^{ij}\|_{i,j=1}^{t,\tau}$, и выделим главные подматрицы из собственных значений операторов (1.1.44):

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\alpha 1} & \dots & \omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \dots & 1/\omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \dots & 1/\omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}.$$

Лемма 1.1.1 *Если* $\mathrm{i}_+(\Omega) = 1$, *то условия* (1.1.43) *и матричное неравенство* $\Delta \geq 0$ *выполнены в том и только в том случае, когда все диагональные элементы матрицы* Ω *положительны:*

$$\omega_{tt} > 0, \quad t = \overline{1,\alpha}. \quad (1.1.46)$$

Более того, если $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, *то условия* (1.1.43) *и матричное неравенство* $\Theta \geq 0$ *эквивалентны скалярным неравенствам* (1.1.46).

Лемма 1.1.2 *Пусть* $\Delta \in \mathcal{H}_n$ *— эрмитова матрица. Тогда* $\Delta \odot H \geq 0$ *для любой матрицы* $H \geq 0$ *в том и только в том случае, когда* $\Delta \geq 0$. *Строгое неравенство* $\Delta \odot H > 0$ *выполняется для любой матрицы* $H > 0$ *в том и только в том случае, когда* $\Delta \geq 0$ *и все диагональные элементы матрицы* Δ *положительны.*

Теорема 1.1.4 *Если выполнены неравенства*

$$\omega_{tt} \neq 0, \quad t = \overline{1,\alpha}, \tag{1.1.47}$$

то существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$*, удовлетворяющие уравнению* (1.1.35)*. При этом* t *и* τ *совпадают с количествами положительных и отрицательных чисел* (1.1.47)*:*

$$t = \sum_{s=1}^{\alpha} \mathrm{i}_+(\omega_{ss}), \quad \tau = \sum_{s=1}^{\alpha} \mathrm{i}_-(\omega_{ss}), \quad t + \tau = \alpha. \tag{1.1.48}$$

Если

$$\mathrm{i}_+(\Gamma) \le 1, \quad \mathrm{i}_-(\Gamma) \le 1, \tag{1.1.49}$$

и существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$*, удовлетворяющие условию* $Y - \mathbf{M}X \in \mathcal{Y}_{00}$*, то выполняются соотношения* (1.1.47) *и* (1.1.48)*.*

Теорема 1.1.5 *Если выполнены неравенства* (1.1.46)*, то существуют матрицы* $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$*, удовлетворяющие уравнению* (1.1.35)*. Если* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$ *и существуют матрицы* $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ *и* $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$*, удовлетворяющие условию* $Y - \mathbf{M}X \in \mathcal{Y}_{00}$*, то выполнены неравенства* (1.1.46)*.*

Теорема 1.1.6 *При условиях* (1.1.43) *и* $\Theta \ge 0$ *выполняется включение*

$$\mathcal{Y}_{\alpha 0} \subseteq \mathbf{M}\mathcal{X}_{\alpha 0} + \mathcal{Y}_{00}. \tag{1.1.50}$$

Неравенства (1.1.43), (1.1.46) *и* $\Delta \ge 0$ *являются следствием включения* (1.1.50)*.*

Отметим, что ограничения на инерцию матриц Γ и Ω в утверждениях леммы 1.1.1 и теорем 1.1.4 – 1.1.6 можно заменить аналогичными свойствами инерции матриц C и D. Так как

$$\Gamma = ZDZ^*, \ Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_\alpha \end{bmatrix}, \ Z_t = \begin{bmatrix} l_{t1}^{(1)} & \dots & l_{t1}^{(\widehat{k})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{tt}^{(1)} & \dots & l_{tt}^{(\widehat{k})} \end{bmatrix}, \ t = \overline{1,\alpha},$$

то $i_\pm(\Gamma) \le i_\pm(D)$. Если используются системы преобразований (1.1.38) и (1.1.39), то $i_\pm(D) \le i_\pm(C)$. Для систем (1.1.36) и (1.1.37) выполнены противоположные неравенства. Если все матрицы (1.1.40) являются диагональными, то элементы матриц Γ и Θ, не принадлежащие соответствующим подматрицам Ω и Δ, нулевые. В этом случае включение (1.1.50) эквивалентно условиям (1.1.43) и $\Delta \ge 0$, а утверждения теоремы 1.1.6 следуют из леммы 1.1.2. Если $\theta_{t\tau}^{ij} = 0$ при $(t,i) \notin \Sigma$ или $(\tau, j) \notin \Sigma$, где $\Sigma = \{(t,i) : \max\{t-1,1\} \le i \le t \le \alpha\}$, то включение (1.1.50) эквивалентно условиям (1.1.43) и $\Theta \ge 0$.

Пусть задано семейство матриц $A_\lambda \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $\lambda \in \Lambda$, где Λ — некоторое множество индексов. В качестве A_λ может выступать матричная функция, однозначно определенная на множестве параметров Λ, или набор матриц одинаковых размеров.

Определение 1.1.1 Семейство A_λ называется *коллективом порядка* α, если существуют матрицы $P_1 \in \mathbb{C}^{\alpha\times n}$ и $P_2 \in \mathbb{C}^{m\times\alpha}$ полного ранга α, не зависящие от λ и такие, что все матрицы $L_\lambda = P_1 A_\lambda P_2 \in \mathbb{C}^{\alpha\times\alpha}$ имеют треугольную форму одного и того же типа (нижнюю или верхнюю). В частности, если все матрицы L_λ диагональные, то коллектив A_λ *идеальный*. Коллектив A_λ порядка α называется *правым*, *левым* или *нейтральным*, если соответственно $A_\lambda P_2 = P_3 L_\lambda$, $P_1 A_\lambda = L_\lambda P_4$ или $A_\lambda = P_3 L_\lambda P_4$ при $\lambda \in \Lambda$, где $P_3 \in \mathbb{C}^{n\times\alpha}$ и $P_4 \in \mathbb{C}^{\alpha\times m}$ — матрицы полного ранга α. Векторы $l_\lambda \in \mathbb{C}^\alpha$, составленные из диагональных элементов треугольных матриц L_λ, образуют *собственность коллектива* A_λ.

Если $P_2 = P_1^{-1}$, то коллектив A_λ порядка $\alpha = n$ представляет семейство матриц, одновременно приводимых к треугольной форме с помощью преобразования подобия. В этом случае векторы собственности l_λ состоят из собственных значений соответствующих матриц A_λ.

Семейство аналитических *функций от матрицы* $f_k(A)$, где $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $(k = 1, 2, \dots)$ есть коллектив порядка n с векторами собственности l_k, компонентами которых являются значения функций f_k на спектре $\sigma(A)$. Семейства коммутирующих и *квазикоммутирующих* матриц $A_k \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющих соотношениям

$$A_k(A_iA_j - A_jA_i) = (A_iA_j - A_jA_i)A_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots,$$

одновременно приводимы к треугольной форме преобразованием подобия [90, 111] и, следовательно, являются коллективами порядка n. Если A_k ($k = 1, 2, \dots$) — коллектив порядка α, то матричная функция $A_\lambda = \sum_k f_k(\lambda)A_k$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) также является коллективом порядка α. В частности, регулярный пучок $A_\lambda = A - \lambda B$ является коллективом порядка n с векторами собственности, определяемыми канонической формой Кронекера данного пучка (см. параграф 8.4).

Рассмотрим матричное уравнение (1.1.35) и предположим, что семейство его матричных коэффициентов A_i является коллективом порядка $\alpha \le \min\{n, p\}$. Тогда можно построить систему преобразований (1.1.36), приводящую к уравнению (1.1.41) с треугольными коэффициентами (1.1.40). При этом скалярные коэффициенты можно оставить без изменений, полагая $D = C$. Если коллектив A_i является правым, левым или нейтральным, то мы используем соответствующие системы преобразований (1.1.37), (1.1.38) или (1.1.39). Матрица, составленная из собственных значений оператора $\widehat{\mathbf{M}}$, представима в виде

$$\Omega = \|\omega_{ij}\|_{i,j=1}^{\alpha} = \Sigma\, C\, \Sigma^*, \quad \Sigma = [l_1, \dots, l_k],$$

где $l_t \in \mathbb{C}^\alpha$ — векторы собственности коллектива A_i. Теоремы 1.1.4 – 1.1.6 дают общую методику изучения и оценки элементов собственности коллектива A_i в терминах индексов инерции эрмитовых решений уравнения (1.1.35). Приведем следствия этих теорем в случае $\alpha = n = p$.

Теорема 1.1.7 *Матричное неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j{}^* > 0 \tag{1.1.51}$$

разрешимо в том и только в том случае, когда $\omega_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$. *При этом существует решение* $X = X^*$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\mathrm{i}_+(X) = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{i}_+(\omega_{ss}), \;\; \mathrm{i}_-(X) = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{i}_-(\omega_{ss}), \;\; \mathrm{i}_0(X) = 0. \tag{1.1.52}$$

Если $X = X^*$ *— произвольное решение матричного неравенства* (1.1.51) *при ограничениях* $\mathrm{i}_\pm(C) \leq 1$, *то выполнены соотношения* (1.1.52).

Теорема 1.1.8 *Если* $\omega_{ii} > 0$, $i = \overline{1, n}$, *то существует положительно определенное решение* $X > 0$ *матричного неравенства* (1.1.51). *Обратное утверждение выполняется при ограничении* $\mathrm{i}_+(C) = 1$.

Теорема 1.1.9 *Неравенства*

$$\left\| \frac{1}{\omega_{ij}} \right\|_1^n \geq 0, \quad \omega_{ij} \neq 0, \quad i, j = \overline{1, n},$$

необходимы, а соотношения

$$\mathrm{i}_+(C) = 1, \quad w_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, n},$$

достаточны для того, чтобы уравнение (1.1.35) *имело положительно определенное решение* $X > 0$ *при любой положительно определенной правой части* $Y > 0$.

Данные утверждения можно усилить в случае идеального коллектива A_i.

1.2 Обобщенное уравнение Ляпунова для аналитических кривых

Рассмотрим линейное матричное уравнение

$$\mathbf{L}_f X \triangleq -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\omega}\oint\limits_{\overline{\omega}} f(\lambda,\overline{\mu})(A-\lambda I_n)^{-1}X(A-\mu I_n)^{-1*}d\lambda\, d\overline{\mu} = Y, \tag{1.2.1}$$

где $A, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — заданные матрицы, X — неизвестная матрица, ω ($\overline{\omega}$) — простой замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(A)$ ($\sigma(A^*)$) и отделяющий в комплексной плоскости замкнутую область Ω ($\overline{\Omega}$), $f \in \mathcal{H}$ — *эрмитова функция*, удовлетворяющая тождеству $f(\lambda,\overline{\mu}) \equiv \overline{f(\mu,\overline{\lambda})}$, аналитическая в области $\Omega\times\overline{\Omega}$ и описывающая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множества точек

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) > 0\right\}, \tag{1.2.2}$$

$$\Lambda_f^- = \left\{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) < 0\right\}, \tag{1.2.3}$$

$$\Lambda_f^0 = \left\{\lambda : f(\lambda,\overline{\lambda}) = 0\right\}. \tag{1.2.4}$$

Оператор Далецкого–Крейна $\mathbf{L}_f$ сохраняет пространство эрмитовых матриц $\mathcal{H}_n$. В частности, для функций с разделяющимися переменными

$$f(\lambda,\overline{\mu}) = \sum_{p,q}\gamma_{pq} f_p(\lambda)\,\overline{f_q(\mu)}, \tag{1.2.5}$$

$$\mathbf{L}_f X = \sum_{p,q}\gamma_{pq} f_p(A) X f_q(A)^*,\ f_p(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega} f_p(\lambda)(A-\lambda I_n)^{-1}d\lambda,$$

где γ_{pq} — элементы эрмировой матрицы Γ, $f_p(A)$ — аналитические *функции от матрицы* A. Спектральные и алгебраические свойства линейных операторов типа $\mathbf{L}_f$ описаны в [27, 51].

Спектр $\sigma(\mathbf{L}_f)$ состоит из n^2 чисел $f(\lambda_i,\overline{\lambda}_j)$, $i,j = \overline{1,n}$, где $\sigma(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ — спектр матрицы A. Пусть $\lambda_1,\dots,\lambda_\alpha$ —

все попарно различные точки $\sigma(A)$. Тогда *характеристический и минимальный полиномы* матрицы A имеют вид

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_\alpha)^{n_\alpha}, \quad \theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_\alpha)^{m_\alpha},$$

где $m_t \le n_t$, $t = \overline{1, \alpha}$, $m = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} m_t \le n = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} n_t$. Критерий обратимости оператора L_f представляет система неравенств

$$f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) \ne 0, \quad t, \tau = \overline{1, \alpha}. \tag{1.2.6}$$

При этом обратный оператор $\mathbf{L}_f^{-1} = \mathbf{L}_\varphi$, где $\varphi(\lambda, \overline{\mu}) = 1/f(\lambda, \overline{\mu})$.

Определим количества точек спектра $\sigma(A)$, принадлежащих множествам (1.2.2) – (1.2.4):

$$\mathrm{i}_f^+(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^+} n_t, \;\; \mathrm{i}_f^-(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^-} n_t, \;\; \mathrm{i}_f^0(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} n_t. \tag{1.2.7}$$

Ставится задача оценки чисел (1.2.7) в терминах индексов инерции решений уравнения (1.2.1). В частности, нас интересуют условия, при которых $\mathrm{i}_f^+(A) = n$, т. е. $\sigma(A) \subseteq \Lambda_f^+$.

Используя разложение *резольвенты*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti},$$

и вычисляя производные интегралов типа Коши, имеем

$$\mathbf{L}_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t} f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) A_{ti} X A_{\tau j}^* = \sum_{p,q=1}^{m} \gamma_{pq} A^p X A^{q*}, \tag{1.2.8}$$

где $f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) = \dfrac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \overline{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$ и $\gamma_{pq} = \overline{\gamma}_{qp}$ — скалярные коэффициенты, а A_{ti} — *компоненты матрицы* A, представимые в виде полиномов от A.

Обозначим через $\mathcal{K}_n$ множество эрмитовых неотрицательно определенных матриц порядка n. Данное множество является *воспроизводящим конусом* пространства $\mathbb{C}^{n\times n}$. Оператор $\mathbf{L}_f$, оставляющий инвариантным конус $\mathcal{K}_n$ ($\mathbf{L}_f\mathcal{K}_n \subseteq \mathcal{K}_n$), *положителен* относительно данного конуса. Оператор $\mathbf{L}_f$ *положительно обратим*, если $\mathcal{K} \subseteq \mathbf{L}_f\mathcal{K}$, т. е. обратный оператор $\mathbf{L}_f^{-1}$ положителен. Данное свойство оператора $\mathbf{L}_f$ означает, что для любой матрицы $Y > 0$ ($Y \geq 0$) уравнение (1.2.1) имеет решение $X > 0$ ($X \geq 0$).

На основе формулы (1.2.8) и известных свойств компонент матрицы [21] устанавливаются следующие утверждения.

Лемма 1.2.1 *Существуют матрицы $X > 0$ и $Y > 0$, удовлетворяющие уравнению* (1.2.1), *в том и только в том случае, когда выполнены неравенства*

$$f(\lambda_t, \overline{\lambda}_t) > 0, \quad t = \overline{1, \alpha}. \tag{1.2.9}$$

Лемма 1.2.2 *Оператор $\mathbf{L}_f$ положителен относительно конуса $\mathcal{K}_n$ в том и только в том случае, когда выполнено матричное неравенство*

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{\alpha 1} & \cdots & F_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{1.2.10}$$

где $F_{t\tau} = \|f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)\|_{i,j=1}^{m_t, m_\tau}$, $t, \tau = \overline{1, \alpha}$. Оператор $\mathbf{L}_f$ оставляет инвариантным множество положительно определенных матриц в том и только в том случае, когда выполнена система неравенств (1.2.9) *и* (1.2.10).

Лемма 1.2.3 *Оператор $\mathbf{L}_f$ положительно обратим относительно конуса $\mathcal{K}_n$ в том и только в том случае, когда выполнены неравенства* (1.2.6) *и матричное неравенство*

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \quad \varphi(\lambda, \overline{\mu}) \triangleq \frac{1}{f(\lambda, \overline{\mu})}. \tag{1.2.11}$$

Лемма 1.2.4 *Если*

$$\mathrm{i}_+\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}\right) = 1, \tag{1.2.12}$$

то система неравенств (1.2.6) *и* (1.2.11) *эквивалентна неравенствам* (1.2.9).

Для матрицы простой структуры условие (1.2.11) представляется в виде

$$\Gamma_\varphi\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} = \left\|\frac{1}{f(\lambda_i,\overline{\lambda}_j)}\right\|_{i,j=1}^m \geq 0. \tag{1.2.13}$$

Пусть $\mathcal{H}_0^m$ — класс эрмитовых функций $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию (1.2.13) для любого набора точек $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ из области Λ_f^+ вида (1.2.2).

Лемма 1.2.5 *Если $f \in \mathcal{H}_0^m$, то неравенство* (1.2.11) *выполнено для любых наборов точек $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha \in \Lambda_f^+$ и натуральных чисел $m_1, \dots, m_\alpha$, сумма которых не превосходит m.*

Теорема 1.2.1 (обобщенная теорема Ляпунова). *Пусть заданы матрица $A \in C^{n\times n}$ и функция $f \in \mathcal{H}_0^m$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *спектр матрицы A расположен в области Λ_f^+;*

2) *существуют матрицы $X > 0$ и $Y > 0$, удовлетворяющие уравнению* (1.1.35)*;*

3) *для любой матрицы $Y > 0$ уравнение* (1.1.35) *имеет решение $X > 0$;*

4) *оператор $\mathbf{L}_f$ положительно обратим относительно конуса неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}_n$.*

Теорема 1.2.1 представляет критерии принадлежности спектра матрицы максимально допустимому классу областей типа Λ_f^+. Действительно, если условие (1.2.13) нарушено при некоторых $\lambda_t \in \Lambda_f^+$, то согласно лемме 1.2.3 критерий включения

$\sigma(A) \subseteq \Lambda_f^+$ не выполняется для любой матрицы A с собственными значениями λ_t, $t = \overline{1, m}$. Если степень минимального полинома матрицы A не известна, то в условиях теоремы 1.2.1 можно положить $f \in \mathcal{H}_0^n$.

Выделим в $\mathcal{H}_0^m$ важные подклассы эрмитовых функций, которые определяются более простыми соотношениями, чем неравенства (1.2.13), и содержат некоторые известные классы функций. При этом будем предполагать, что каждое из множеств (1.2.2) – (1.2.4) не пусто.

Можно установить, что классу $\mathcal{H}_0^m$ принадлежат эрмитовы функции, представимые в виде $f(\lambda, \overline{\mu}) = u(\lambda, \overline{\mu}) - v(\lambda, \overline{\mu})$, где u и v таковы, что $\Lambda_f^+ \subset \Lambda_u^+$ и для любых $\lambda, \mu \in \Lambda_f^+$

$$|u(\lambda, \overline{\mu})|^2 \geq u(\lambda, \overline{\lambda})\, u(\mu, \overline{\mu}), \quad |v(\lambda, \overline{\mu})|^2 \leq v(\lambda, \overline{\lambda})\, v(\mu, \overline{\mu}).$$

Имеет место следующая схема включений

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_2 & \subset & \mathcal{H}_1 & \subset & \mathcal{H}_0 & & \\ \cap & & \cap & & \cap & & \\ \mathcal{H}_2^m & \subset & \mathcal{H}_1^m & \subset & \mathcal{H}_0^m & \subset & \mathcal{H}\,. \end{array}$$

Здесь подклассы функций определены в виде

$$\mathcal{H}_0: \quad f(\lambda, \overline{\mu}) \neq 0, \ \frac{1}{f(\lambda, \overline{\mu})} = \sum_k \varphi_k(\lambda)\, \overline{\varphi_k(\mu)}, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_f^+;$$

$$\mathcal{H}_1: \quad f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - \sum_{k>1} f_k(\lambda)\, \overline{f_k(\mu)};$$

$$\mathcal{H}_2: \quad f(\lambda, \mu) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - f_2(\lambda)\, \overline{f_2(\mu)};$$

$$\mathcal{H}_1^m: \quad \mathrm{i}_+ \left(\left\| f(\mu_i, \overline{\mu}_j) \right\|_1^m \right) = 1, \quad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+;$$

$$\mathcal{H}_2^m: \quad \mathrm{i}_\pm \left(\left\| f(\mu_i, \overline{\mu}_j) \right\|_1^m \right) \leq 1, \quad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \notin \Lambda_f^0.$$

Каждая функция (1.2.5) принадлежит классу $\mathcal{H}_1$, если выполнено одно из эквивалентных условий $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$,

$\operatorname{rank}\Gamma+\operatorname{sign}\Gamma = 2$ или $\Gamma z z^*\Gamma - z^*\Gamma z\Gamma \geq 0$, где z — любой вектор, для которого $z^*\Gamma z > 0$. В частности, функция (1.2.5) описывает алгебраическую кривую второго порядка, если [31]

$$f_1(\lambda) = 1,\ f_2(\lambda) = \lambda,\ f_3(\lambda) = \lambda^2,\ \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \gamma_{22} \leq 0.$$

Класс $\mathcal{H}_1$ состоит из функций (1.2.5), для которых $\operatorname{rank}\Gamma = 2$ и $\operatorname{sign}\Gamma = 0$.

Известно, что матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений в том и только в том случае, когда ЛМН $AX+XA^* > 0$ разрешимо относительно X. При этом количества собственных значений матрицы A с положительными и отрицательными вещественными частями с учетом кратностей совпадают соответственно с $\mathrm{i}_+(X)$ и $\mathrm{i}_-(X)$. Данное утверждение дает распределение спектра $\sigma(A)$ относительно мнимой оси в терминах индексов инерции эрмитовых форм (*теоремы Островского–Шнайдера* и *Тaусски*).

Пусть $\mathrm{i}_f^+(A)$, $\mathrm{i}_f^-(A)$ и $\mathrm{i}_f^0(A)$ — количества точек спектра $\sigma(A)$ с учетом кратностей, принадлежащих соответствующим множествам (1.2.2), (1.2.3) и (1.2.4). Равенство $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ определяет свойство *дихотомии спектра* относительно кривой Λ_f^0.

Лемма 1.2.6 *Пусть функция $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет соотношениям*

$$\mathrm{i}_\pm\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{pmatrix}\right) \leq p_\pm, \quad \forall\, \mu_1,\ldots,\mu_m \in \Lambda,$$

где $p_\pm \geq 0$ — целые числа, $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ — некоторое открытое множество. Тогда для любых наборов точек $\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha \in \Lambda$ и натуральных чисел $m_1,\ldots,m_\alpha$, сумма которых не превосходит m, выполнены неравенства

$$\mathrm{i}_\pm\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}\right) \leq p_\pm. \qquad (1.2.14)$$

На основе разложения (1.2.8) и леммы 1.2.6 при $p_{\pm} = 1$ устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1.2.2 (обобщенная теорема инерции). *Матричное неравенство*

$$\mathbf{L}_f X > 0 \tag{1.2.15}$$

разрешимо в том и только в том случае, когда $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$. *При этом существует решение* $X = X^*$, *для которого*

$$\mathrm{i}_f^+(A) = \mathrm{i}_+(X), \quad \mathrm{i}_f^-(A) = \mathrm{i}_-(X), \quad \mathrm{i}_0(X) = 0. \tag{1.2.16}$$

Если X *— решение неравенства* (1.2.15) *при* $f \in \mathcal{H}_2^m$, *то* $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ *и выполнены соотношения* (1.2.16).

Следствие 1.2.1 *Пусть* $f \in \mathcal{H}_2$, $Y > 0$ *и* X *— решение уравнения* (1.2.1). *Тогда кривая* (1.2.4) *не пересекается со спектром* $\sigma(A)$, *а в областях* (1.2.2) *и* (1.2.3) *находятся соответственно* $\mathrm{i}_+(X)$ *и* $\mathrm{i}_-(X)$ *собственных значений матрицы* A *с учетом кратностей.*

Следующее утверждение решает задачу о принадлежности собственных значений матрицы заданной кривой. Подобные задачи возникают, например, при изучении условий устойчивости и апериодичности некоторых механических систем.

Теорема 1.2.3 *Если однородное матричное уравнение*

$$\mathbf{L}_f X = 0 \tag{1.2.17}$$

имеет ненулевое решение $X \geq 0$, *то* $\mathrm{i}_f^0(A) \geq \operatorname{rank} X$. *При этом, если* $X > 0$, *то весь спектр матрицы* A *расположен на кривой* (1.2.4). *Обратно, если* $\mathrm{i}_f^0(A) \neq 0$, *то уравнение* (1.2.17) *имеет неотрицательно определенное решение любого ранга из интервала* $0 < \operatorname{rank} X \leq \sum\limits_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} \xi_t$, *где* ξ_t *— геометрическая кратность собственного значения* $\lambda_t \in \sigma(A)$.

Если матрица A имеет простую структуру, т. е. $\xi_t = n_t$, $t = \overline{1, \alpha}$, то согласно теореме 1.2.3 оценка $\mathrm{i}_f^0(A) \geq r$ выполняется в том и только в том случае, когда уравнение (1.2.17) имеет неотрицательно определенное решение ранга r.

На основе теорем 1.2.1 – 1.2.3 можно получить описание различных областей и множеств в комплексной плоскости, содержащих весь спектр матрицы или его часть (см. [51, С. 51–56]). Некоторые утверждения данных теорем можно усилить, используя дополнительные ограничения типа управляемости пары матриц и его обобщений.

Определение 1.2.1 Пара (A, B) матриц размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно называется *управляемой*, если для некоторого k выполняется равенство $\operatorname{rank}\left[B, AB, \ldots, A^k B\right] = n$.

Лемма 1.2.7 *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *пара матриц* (A, B) *управляема;*
2) $\operatorname{rank}\left[\, B, \lambda I_n - A \,\right] \equiv n$, $\lambda \in \sigma(A)$*;*
3) *пара матриц* (A, X)*, где* $X = BB^*$*, управляема;*
4) $X + (\lambda I_n - A)(\lambda I_n - A)^* > 0$, $\lambda \in \sigma(A)$*;*
5) *существует функция* $f \in \mathcal{H}$ *такая, что* $L_f X > 0$.

Лемма 1.2.8 *Пусть задана матричная последовательность*

$$X_1 \geq 0, \quad X_{k+1} = X_1 + \mathbf{L} X_k, \quad k = 1, 2, \ldots\ , \tag{1.2.18}$$

где $\mathbf{L}$ *— линейный положительный относительно конуса* $\mathcal{K}_n$ *оператор. Тогда выполнены соотношения*

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_q = r_{q+1} = \cdots = r, \tag{1.2.19}$$

где $q \leq n - r_1 + 1$, $r_k = \operatorname{rank} X_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Полагая в лемме 1.2.8 $X_1 = BB^*$ и $\mathbf{L}X = AXA^*$, имеем свойство управляемости пары матриц (A, B) в виде равенства $r = n$, причем $q \leq \min\{m, n - r_1 + 1\}$, где m — степень минимального полинома матрицы A.

Теорема 1.2.4 *Пусть матрицы X и Y удовлетворяют уравнению* (1.2.1). *Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) *из управляемости пары (A, Y) следует управляемость пары (A, X);*

2) *если $X \geq 0$ и $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$, то из управляемости пары (A, X) следует управляемость пары (A, Y);*

3) *если $Y \geq 0$ и пара (A, Y) управляема, то $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$;*

4) *если $X \geq 0$, $Y \geq 0$ и пара (A, Y) управляема, то $\mathrm{i}_f^+(A) = n$;*

5) *если $X \geq 0$, $Y \geq 0$ и пара (A, X) управляема, то $\mathrm{i}_f^-(A) = 0$;*

6) *если $X \geq 0$, $Y = 0$ и пара (A, X) управляема, то $\mathrm{i}_f^0(A) = n$.*

Теорема 1.2.5 *Пусть $f = u - v \in \mathcal{H}_1$, $\psi = \sum\limits_{j=0}^{s} u^{s-j} v^j$, где*

$$u(\lambda, \overline{\mu}) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)}, \quad v(\lambda, \overline{\mu}) = \sum_{k>1} f_k(\lambda)\, \overline{f_k(\mu)}, \quad s \geq 1,$$

и выполнены условия

$$\sigma(A) \subset \Lambda_f^+, \quad \mathbf{L}_\psi Y > 0. \tag{1.2.20}$$

Тогда уравнение (1.2.1) *имеет единственное решение $X > 0$.*

Обратно, если $X > 0$ — единственное решение уравнения (1.2.1) *при $Y \geq 0$, то выполняются условия* (1.2.20), *где $s = n - \operatorname{rank} Y$.*

Теорема 1.2.6 *Пусть матрицы A, $Y = BB^* \geq 0$ и функция $f(\lambda, \overline{\mu}) = f_1(\lambda)\, \overline{f_1(\mu)} - f_2(\lambda)\, \overline{f_2(\mu)}$ класса $\mathcal{H}_2$ удовлетворяют условию*

$$\operatorname{rank}\big[\, F_0 B, \ldots, F_s B \,\big] = n, \tag{1.2.21}$$

где $F_k = f_1^{s-k}(A) f_2^k(A)$, $k = \overline{0, s}$, $s = n - \operatorname{rank} Y$, и уравнение (1.2.1) *имеет решение X. Тогда $\mathrm{i}_f^0(A) = 0$ и выполняются соотношения* (1.2.16).

Утверждение теоремы 1.2.6 выполняется при условиях управляемости пары матриц (A, Y) и ограничениях [97]

$$h(\lambda_t) \neq h(\lambda_\tau) \quad (t \neq \tau), \quad h'(\lambda_t) \neq 0 \quad (m_t > 1), \qquad (1.2.22)$$

где $h(\lambda) = [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)]/[f_1(\lambda) - f_2(\lambda)]$. Эти ограничения эквивалентны совпадению геометрических кратностей собственных значений λ_t матрицы A с соответствующими геометрическими кратностями собственных значений $h(\lambda_t)$ матрицы $h(A)$. При использовании ограничения (1.2.21), в отличие от (1.2.22), информация о спектре $\sigma(A)$ не требуется.

1.3 Расщепление и локализация спектра матричных функций

Пусть $F(\lambda)$ – матрица размеров $n \times n$, составленная из однозначных аналитических функций и удовлетворяющая условию регулярности $\chi(\lambda) = \det F(\lambda) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Все нули функции $\chi(\lambda)$ образуют ее *спектр* $\sigma(F)$.

Определение 1.3.1 Матрицы $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $T \neq 0 \in \mathbb{C}^{n\times m}$ образуют *правую пару* (U, T) матричной функции $F(\lambda)$, если для некоторой аналитической в окрестности точек $\sigma(U)$ матрицы-функции $\Phi(\lambda)$ выполнено тождество $F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. (U, T) является *левой парой* $F(\lambda)$, если (U^T, T^T) — правая пара $F^T(\lambda)$.

Правые и левые пары (U, T) матричных функций вида $F(\lambda) = \sum\limits_i f_i(\lambda)A_i$, где $f_i(\lambda)$ — скалярные функции, A_i — постоянные матрицы, определяются соответствующими равенствами

$$\sum_i A_i T f_i(U) = 0, \quad \sum_i f_i(U) T A_i = 0.$$

Индексом наблюдаемости (*управляемости*) пары (U, T) называется максимальное значение r неубывающей последовательности $r_k = \operatorname{rank} E_k$, где

$$E_k = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{k-1} \end{bmatrix} \quad \Big(E_k = \big[T, UT, \ldots, U^{k-1}T\big]\Big), \ \ k = 1, 2, \ldots .$$

При этом $r_1 < \cdots < r_h = r_{h+1} = \cdots = r$ и выполняются оценки

$$\operatorname{rank} T + h - 1 \leq r \leq m, \quad 1 \leq h \leq m_0, \tag{1.3.1}$$

где h — наименьшее значение индекса k, при котором $r_k = r_{k+1}$, m_0 — степень минимального полинома матрицы U. Если $F(\lambda)$ — матричный полином степени s, то $h \leq s$.

Правая наблюдаема (левая управляема) пара (U, T) матричной функции $F(\lambda)$ называется правой (левой) *собственной парой* данной матричной функции. Собственная пара (U, T) матричной функции $F(\lambda)$ с максимально возможным порядком m матрицы U называется *максимальной*.

Лемма 1.3.1 *Пусть (U, T) — правая (левая) пара матрицы-функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) r. Тогда, по крайней мере, r точек спектра $\sigma(U)$ являются собственными значениями матрицы-функции $F(\lambda)$. В частности, при $r = m$ выполняется включение $\sigma(U) \subseteq \sigma(F)$. Обратное включение $\sigma(F) \subseteq \sigma(U)$ выполняется при условии*

$$\operatorname{rank}\big[F(\lambda), \Phi(\lambda)\big] \equiv n \ \left(\operatorname{rank}\begin{bmatrix} F(\lambda) \\ \Phi(\lambda) \end{bmatrix} \equiv n\right), \quad \lambda \in \sigma(F). \tag{1.3.2}$$

Доказательство данного утверждения основано на применении декомпозиции Калмана, выделяющей наблюдаемую (управляемую) часть линейных систем [46]. Если правая (левая) собственная пара (U, T) матрицы-функции $F(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.3.2), то согласно лемме 1.3.1 $\sigma(U) = \sigma(F)$ и она является максимальной.

Пусть (U, T) — правая (левая) пара матричной функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) r и ей соответствует подмножество спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$, состоящее из r собственных значений (см. лемму 1.3.1). Изучим расположение точек $\sigma_0(F)$ относительно заданных множеств (1.2.2) – (1.2.4), используя множества матриц

$$\begin{gathered}\mathcal{K} = \{X : \mathbf{M}X \geq 0\}, \\ \mathcal{K}_{pq} = \{X : \mathrm{i}_+(\mathbf{M}X) = p, \ \ \mathrm{i}_-(\mathbf{M}X) = q\}, \end{gathered} \tag{1.3.3}$$

определяемые оператором $\mathbf{M}X = E_h X E_h^*$, и соотношения

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{M}Y, \tag{1.3.4}$$

$$S_\lambda \geq 0, \quad \operatorname{rank} S_\lambda = r, \quad \lambda \in \sigma_0(F). \tag{1.3.5}$$

Здесь в случаях правой и левой пар (U, T) соответственно полагаем

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{M}\mathbf{L}_f X, \quad S_\lambda = \mathbf{M}Y + E_h(\lambda I_m - U)(\lambda I_m - U)^* E_h^*$$

и

$$\mathbf{M}_f X = \mathbf{L}_f \mathbf{M}X, \quad S_\lambda = \mathbf{M}Y + (\lambda I_m - U)E_h E_h^*(\lambda I_m - U)^*,$$

где оператор

$$\mathbf{L}_f X \triangleq -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\omega} \oint\limits_{\overline{\omega}} f(\lambda, \overline{\mu})(U - \lambda I_m)^{-1} X (U - \mu I_m)^{-1*} d\lambda \, d\overline{\mu}$$

типа (1.2.1) построен для матрицы U, а h определено в (1.3.1). Если $F(\lambda)$ — матричный полином степени s, то наряду с (1.3.1) выполнено неравенство $h \leq s$.

Теорема 1.3.1 *Если матрицы* $X \in \mathcal{K}$ *и* $Y \in \mathcal{K}$ *удовлетворяют соотношениям* (1.3.4) *и* (1.3.5), *то подмножество* *спектра* $\sigma_0(F)$ *матричной функции* $F(\lambda)$, *расположено в области* Λ_f^+. *Если к тому же выполнено условие* (1.3.2), *то* $\sigma_0(F) = \sigma(F) \subset \Lambda_f^+$. *Обратно, если* $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^+$ *и* $f \in \mathcal{H}_0^r$, *то для любой матрицы* $Y \in \mathcal{K}$ *уравнение* (1.3.4) *имеет решение* $X \in \mathcal{K}$.

Теорема 1.3.2 *Если матрицы* $X \in \mathcal{K}_{pq}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ *удовлетворяют уравнению* (1.3.4), *а* $f \in \mathcal{H}_2^r$, *то выполнены равенства*

$$r_+ = p, \quad r_- = q, \quad r_0 = 0, \tag{1.3.6}$$

где r_+, r_- *и* r_0 *— количества точек подмножества* $\sigma_0(F)$, *принадлежащих соответственно* Λ_f^+, Λ_f^- *и* Λ_f^0. *Обратно, если для некоторых* p *и* q *выполняются равенства* (1.3.6), *то существуют матрицы* $X \in \mathcal{K}_{pq}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{r0}$, *удовлетворяющие уравнению* (1.3.4).

Теорема 1.3.3 *Если матрицы* $X \in \mathcal{K}_{p0}$ *и* $Y \in \mathcal{K}_{00}$ *удовлетворяют уравнению* (1.3.4), *то выполнена оценка* $r_0 \geq p$. *В частности, при* $p = r$ *выполняется включение* $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^0$. *Обратно, если* $r_0 \neq 0$, $Y \in \mathcal{K}_{00}$, $0 < p \leq \xi$, *где* ξ *— сумма геометрических кратностей собственных значений матрицы* U, *принадлежащих множеству* $\sigma_0(F) \cap \Lambda_f^0$, *то уравнение* (1.3.4) *имеет решение* $X \in \mathcal{K}_{p0}$.

Доказательство теорем 1.3.1 − 1.3.3 основано на применении леммы 1.3.1 и соответствующих утверждений теорем 1.2.1 − 1.2.3.

Ограничения (1.3.2) и (1.3.5) в теореме 1.3.1 в случае правой пары (U, T) выполняются, если

$$F(\lambda)F(\lambda)^* + \Phi(\lambda)Y\Phi(\lambda)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma_0(F). \tag{1.3.7}$$

В случае левой пары (U, T) условия (1.3.5) являются следствием матричного неравенства

$$F(\lambda)F(\lambda)^* + \Psi(\lambda)Y\Psi(\lambda)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma_0(F), \tag{1.3.8}$$

где $\Psi(\lambda) = \left[I_m, \lambda I_m, \dots, \lambda^{h-1} I_m\right]$. При использовании теоремы 1.3.1 выполнение условий (1.3.2), (1.3.5), (1.3.7) и (1.3.8) можно проверять лишь в некоторой окрестности точек $\sigma_0(F)$, не принадлежащих Λ_f^+. Если $Y > 0$, то условия (1.3.5) и (1.3.8) выполняются при любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ограничения $f \in \mathcal{H}_0^r$ и $f \in \mathcal{H}_2^r$ в теоремах 1.3.1 и 1.3.2 выполняются соответственно при $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$ и $\mathrm{i}_\pm(\Gamma) \leq 1$. Если $f \in \mathcal{H}_2$, то множество матриц $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ в теореме 1.3.2 можно расширить, полагая $Y \in \mathcal{K}_{p0}$, $p \leq r$ и используя дополнительные ограничения на f и U (см. теорему 1.2.6).

Рассмотрим класс матричных функций, допускающих *правильную факторизацию*

$$F(\lambda) = F_0(\lambda) F_1(\lambda), \quad \sigma(F_0) \cap \sigma(F_1) = \emptyset, \tag{1.3.9}$$

где $F_1(\lambda) = A - \lambda B$ — *регулярный пучок матриц*, т. е. $\det F_1(\lambda) \not\equiv 0$. При определении правых пар данной матричной функции используем *каноническую форму* Кронекера пучка $F_1(\lambda)$ [21]:

$$P(A - \lambda B)Q \equiv \left[\begin{array}{c|c} J - \lambda I_l & 0 \\ \hline 0 & I_{n-l} - \lambda N \end{array}\right], \tag{1.3.10}$$

где $P, Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — квадратные невырожденные матрицы, $J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $\sigma(J) = \sigma_0(F)$, N — нильпотентная матрица размера $(n-l) \times (n-l)$, элементы верхней наддиагонали которой равны 0 или 1, а остальные элементы нулевые. Множество *конечных элементарных делителей* пучка $F_1(\lambda)$ состоит из элементарных делителей матрицы J. Индекс нильпотентности матрицы N определяется максимальной степенью *бесконечных элементарных делителей* пучка $F_1(\lambda)$. Полагая

$$U = J, \quad T = Q \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi(\lambda) = -F_0(\lambda) P^{-1} \begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix},$$

при условиях (1.3.9) и (1.3.10) имеем правую собственную пару (U, T) матричной функции $F(\lambda)$. При этом $E_h = T$, $h = 1$, а множества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ в утверждениях теорем 1.3.1 – 1.3.3 состоят из эрмитовых матриц X, для которых соответственно $\mathrm{i}_-(X) = 0$ и $\mathrm{i}(X) = \{p, q, l - p - q\}$.

Для матричной функции (1.3.9) построим уравнение (1.3.4) с операторами

$$\mathbf{M}_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_\omega \oint_{\overline{\omega}} f(\lambda, \overline{\mu}) D_\lambda X D_\mu{}^* d\lambda\, d\overline{\mu}, \quad \mathbf{M}Y = \Delta Y \Delta^*, \tag{1.3.11}$$

где ω ($\overline{\omega}$) — простой замкнутый контур, охватывающий $\sigma_0(F)$ ($\sigma_0(F^*)$). *Мультипликативная производная* $D_\lambda = F'(\lambda)F^{-1}(\lambda)$ матрицы $F(\lambda)$ и матричный аналог *логарифмического вычета* функции $\Delta = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_\omega D_\lambda\, d\lambda$ относительно множества точек $\sigma_0(F)$ удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{tr} D_\lambda \equiv \chi'(\lambda)/\chi(\lambda), \quad \lambda \notin \sigma(F), \quad \operatorname{tr} \Delta = n_1 + \cdots + n_\alpha = l,$$

где $\chi(\lambda) = \det F(\lambda)$, n_t — кратности всех попарно различных точек $\lambda_t \in \sigma_0(F)$, $t = \overline{1, \alpha}$. Каждое собственное значение $\lambda_t \in \sigma_0(F)$ является полюсом порядка m_t матричной функции D_λ, в окрестности которого справедливо разложение

$$D_\lambda = \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti} + S_t(\lambda),$$

где A_{ti} — постоянные матрицы, $S_t(\lambda)$ — аналитическая в данной окрестности матрица-функция. Используя ряд Тейлора для функции f в окрестности точек $(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$ и теорему о вычетах, имеем представление оператора (1.3.11):

$$\mathbf{M}_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t, m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) A_{ti} X A_{\tau j}^*, \tag{1.3.12}$$

где

$$f_{ij}(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \overline{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau),$$

$$\sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1} = \Delta, \quad \operatorname{tr} A_{ti} = \begin{cases} n_t, & i = 1, \\ 0, & i > 1. \end{cases}$$

Для функций f с разделяющимися переменными используем представление

$$\mathbf{M}_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q{}^*, \tag{1.3.13}$$

где

$$F_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} f_p(\lambda) D_\lambda d\lambda = \sum_{t,i=1}^{\alpha, m_t} \frac{d^{i-1} f_p(\lambda_t)}{d\lambda_t^{i-1}} A_{ti}, \ \operatorname{tr} F_p = \sum_{t=1}^{\alpha} n_t f_p(\lambda_t).$$

При условиях (1.3.9) и (1.3.10) матричные коэффициенты в соотношениях (1.3.11) – (1.3.13) представляются в виде (см. формулу (1.2.8), а также [51, С. 68–72])

$$A_{ti} = G J_{ti} H, \quad F_p = G f_p(J) H, \quad \Delta = GH, \tag{1.3.14}$$

где

$$G = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} F_0(\lambda) P^{-1} \begin{bmatrix} R_\lambda \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda, \quad H = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} \big[R_\lambda, 0\big] P F_0^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

$J_{ti} = \alpha_{ti}(J)$ — компоненты матрицы J с резольвентой $R_\lambda = (\lambda I_l - J)^{-1}$. При этом m_t совпадают с геометрическими кратностями собственных значений $\lambda_t \in \sigma(J)$, $t = \overline{1, \alpha}$.

Таким образом, для матричных функций, допускающих правильную факторизацию (1.3.9) при условии $\operatorname{rank} \Delta = l$, справедливы утверждения теорем 1.3.1 – 1.3.3 о локализации подмножества спектра $\sigma_0(F) = \sigma(J) \subseteq \sigma(F)$, состоящего из $r = l$ собственных значений, в терминах решений матричного уравнения (1.3.4) с операторами (1.3.11). При этом множества матриц $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ вида (1.3.3) определяет оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, а вместо условия (1.3.5) используется соотношение

$$S_\lambda = HYH^* + (\lambda I_l - J)(\lambda I_l - J)^* > 0, \quad \lambda \in \sigma(J).$$

1.4 Аналоги уравнения Ляпунова для линейных динамических систем

1.4.1 Дескрипторные системы

Объектами исследования многих прикладных задач являются *дескрипторные* непрерывные и дискретные системы уравнений

$$B\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0; \tag{1.4.1}$$

$$Bx_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.4.2}$$

где A и B — матрицы регулярного пучка $F(\lambda) = A - \lambda B$ размеров $n \times n$, спектр $\sigma(F)$ которого состоит из l собственных значений с учетом кратностей, x_0 — вектор начальных состояний. Построение решений таких систем и анализ их устойчивости можно проводить на основе теории канонических форм матричных пучков, а также путем использования обобщенных обратных матриц (см., например, [18, 21]).

Условия устойчивости системы (1.4.1) определяются расположением спектра $\sigma(F)$ относительно мнимой оси. Число $\varepsilon = \min\limits_{\lambda \in \sigma(F)} (-\mathrm{Re}\lambda)$ характеризует спектральный *запас устойчивости* системы (1.4.1). Система (1.4.1) называется *α-устойчивой*, если ее спектр расположен в открытой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$, при этом $\varepsilon > \alpha \geq 0$. Аналогично, величина $\varepsilon = \min\limits_{\lambda \in \sigma(F)} (1 - |\lambda|)$ определяет спектральный запас устойчивости системы (1.4.2) относительно единичной окружности. Система (1.4.2) называется *β-устойчивой*, если ее спектр расположен внутри круга $|\lambda| < \beta$, где $\varepsilon > 1 - \beta \geq 0$.

Если B — невырожденная матрица, то $l = n$. В этом случае системы (1.4.1) и (1.4.2) приводятся к форме Коши путем обращения матрицы B. Если матрица B вырождена, то

$$l = n - \sum_{i=1}^{\tau} \nu_i = \mathrm{rank}\, B - \sum_{i=1}^{\tau} \nu_i + \tau, \tag{1.4.3}$$

где $\nu_1, \ldots, \nu_\tau$ — степени бесконечных элементарных делителей пучка матриц $F(\lambda)$. Данное равенство вытекает из канонической формы (1.3.10) регулярного пучка матриц. Число (1.4.3) определяет размерность некоторого подпространства, которому принадлежат начальные состояния и траектории систем (1.4.1) и (1.4.2). В дальнейшем будем использовать также число

$$\nu = \begin{cases} 0, & \det B \neq 0, \\ \max\limits_{1 \leq i \leq \tau} \nu_i, & \det B = 0. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Построение аналогов уравнения Ляпунова вида (1.3.4) для систем (1.4.1) и (1.4.2) и применение теорем 1.3.1 – 1.3.3 о локализации спектра в общем случае основаны на вычислении правых или левых пар (U, T) пучка матриц $F(\lambda)$, определяемых соответствующими уравнениями

$$AT = BTU, \quad TA = UTB. \tag{1.4.5}$$

При этом $h = 1$ и $E_h = T$.

Если $Z \neq 0$ — нетривиальное решение системы уравнений

$$AZB = BZA, \quad Z = ZBZ, \tag{1.4.6}$$

то выполняются соотношения

$$AZ = BZAZ, \quad ZA = ZAZB, \tag{1.4.7}$$

т. е. (AZ, Z) и (ZA, Z) является соответственно правой и левой парами пучка матриц $F(\lambda)$. Поэтому решения Z ранга $r \neq 0$ каждого из уравнений (1.4.7), в частности, системы (1.4.6), определяют подмножества спектра $\sigma_0(F)$, для которых применимы теоремы локализации 1.3.1 – 1.3.3. При этом системы соотношений

$$\sum_{p,q} \gamma_{pq} Z f_p(AZ) X f_q^*(AZ) Z^* = ZYZ^*, \quad AZ = BZAZ, \tag{1.4.8}$$

$$\sum_{p,q} \gamma_{pq} f_p(ZA) ZXZ^* f_q^*(ZA) = ZYZ^*, \quad ZA = ZAZB, \quad (1.4.9)$$

могут служить аналогами уравнения Ляпунова для классов систем (1.4.1), (1.4.2) и функций (1.2.5).

Согласно (1.3.10) общее решение системы (1.4.6) определяют соотношения

$$Z = Q \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \quad JZ_0 = Z_0 J, \quad Z_0 = Z_0^2, \qquad (1.4.10)$$

где Z_0 — произвольный *проектор матрицы* J. При этом, если $r \neq 0$ — ранг матрицы Z_0, то для некоторой невырожденной матрицы S выполнены соотношения

$$Z_0 = S^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \quad SJS^{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}, \qquad (1.4.11)$$

где $J_0 \in \mathbb{C}^{r \times r}$. Отсюда следует, что система уравнений (1.4.6) имеет непустое множество решений ранга r в том и только в том случае, когда r равно сумме порядков жордановых блоков матрицы J, отвечающих некоторому набору элементарных делителей пучка $F(\lambda)$. В случае $S = I_l$ решение (1.4.10) системы (1.4.6) представимо в интегральном виде:

$$Z = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\omega (A - \lambda B)^{-1} d\lambda, \quad \operatorname{rank} Z = r,$$

где контур ω охватывает некоторую часть спектра $\sigma_0(F)$, состоящую из r собственных значений с учетом кратностей. В том случае, когда $\sigma_0(F)$ — весь спектр, мы имеем решение системы (1.4.6) максимального ранга, равного общему количеству собственных значений l пучка $F(\lambda)$.

Если Z — решение системы (1.4.6) ранга r, то согласно (1.4.10) и (1.4.11) при построении операторов (1.3.12) и (1.3.13) можно использовать матрицы

$$A_{ti} = \begin{cases} \alpha_{ti}(\Theta), & \alpha_{ti}(0) = 0, \\ \Delta\alpha_{ti}(\Theta), & \alpha_{ti}(0) \neq 0, \end{cases} \quad F_p = \begin{cases} f_p(\Theta), & f_p(0) = 0, \\ \Delta f_p(\Theta), & f_p(0) \neq 0, \end{cases} \qquad (1.4.12)$$

$$\Delta = BZ = G^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G, \ \Theta = AZ = G^{-1}\begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G, \quad (1.4.13)$$

где

$$G = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} P, \quad \sigma(J_0) \subseteq \sigma(F).$$

При этом определено подмножество спектра $\sigma_0(F)$, совпадающее с $\sigma(J_0)$, а матрицы (1.4.13) обладают следующими свойствами:

$$\operatorname{rank}\Delta = r, \quad \Delta^2 = \Delta, \quad \Delta\Theta = \Theta\Delta = \Theta, \quad \sigma_0(F) \subseteq \sigma(\Theta). \quad (1.4.14)$$

Условием типа управляемости для собственных значений $\lambda \in \sigma_0(F)$ являются соотношения

$$S_\lambda = \Delta Y \Delta^* + \Delta(\lambda I_n - \Theta)(\lambda I_n - \Theta)\Delta^* \geq 0, \operatorname{rank} S_\lambda = r. \quad (1.4.15)$$

Если $Y > 0$, то данные соотношения выполняются при любых $\lambda \in \mathbb{C}$.

Следовательно, если операторы (1.3.12) и (1.3.13) определены с помощью соотношений (1.4.12) и (1.4.13) для произвольного решения Z системы (1.4.6) ранга $r \neq 0$, а множества матриц $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ вида (1.3.3) определяет оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, то при условиях (1.4.15) расположение подмножества спектра $\sigma_0(F)$ пучка матриц $F(\lambda)$, состоящего из $r \leq l$ собственных значений, относительно заданных множеств Λ_f^+, Λ_f^- и Λ_f^0 можно описать с помощью теорем 1.3.1 – 1.3.3. При этом система матричных соотношений (1.3.4) и (1.4.6) служит аналогом уравнения Ляпунова для дескрипторных систем (1.4.1) и (1.4.2).

Отметим, что каждому решению Z системы (1.4.6) ранга $r \neq 0$ соответствует подмножество спектра $\sigma_0(F) = \sigma(J_0)$, которое совпадает со спектром матрицы $\Theta_0 = R^*AL$, где L и R^* — множители скелетного разложения $Z = LR^*$ $(L, R \in C^{n\times r})$.

Матрицы A_{ti} в (1.4.12) попарно коммутируют и удовлетворяют соотношениям

$$A_{t1}^2 = A_{t1}, \quad \sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1} = \Delta, \quad A_{t1}A_{ti} = A_{ti}A_{t1} = A_{ti},$$

$$A_{ti}A_{\tau j} = 0 \quad (t \neq \tau), \quad A_{ti} = \frac{1}{(i-1)!}(\Theta - \lambda_t \Delta)^{i-1} A_{t1}.$$

Для приближенного вычисления матриц Δ и Θ можно использовать *лорановское разложение* мультипликативной производной

$$D_\lambda = \lambda^{\nu-2}K^{\nu-1} + \cdots + \lambda K^2 + K + \frac{1}{\lambda}\Delta + \frac{1}{\lambda^2}\Theta + \frac{1}{\lambda^3}\Theta^2 + \cdots,$$

вытекающее из соотношений

$$D_\lambda = -B(A-\lambda B)^{-1} = -P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} (J-\lambda I_l)^{-1} & 0 \\ \hline 0 & N(I_{n-l}-\lambda N)^{-1} \end{array}\right] P,$$

$$(J-\lambda I)^{-1} = -\sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda-\lambda_t)^i} J_{ti}, \quad (I_{n-l}-\lambda N)^{-1} = \sum_{i=0}^{\nu-1} \lambda^i N^i,$$

где K и N — нильпотентные матрицы.

Отметим следующие алгебраические и спектральные свойства операторов типа (1.3.12) и (1.3.13) в случае регулярного пучка матриц $F(\lambda)$:

$$\mathbf{M}_{f_1}\mathbf{M}_{f_2} = \mathbf{M}_{f_2}\mathbf{M}_{f_1} = \mathbf{M}_{f_1 f_2}, \quad c_1\mathbf{M}_{f_1} + c_2\mathbf{M}_{f_2} = \mathbf{M}_{c_1 f_1 + c_2 f_2},$$

$$\mathbf{M}g\left(\mathbf{M}_{f_1}, \ldots, \mathbf{M}_{f_s}\right) = \mathbf{M}_{g(f_1,\ldots,f_s)},$$

$$\mathbf{M}_f W_{t\tau} = f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau) W_{t\tau}, \quad W_{t\tau} = A_{tm_t} C_{t\tau} A^*_{\tau m_\tau} \neq 0,$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы, $g, f_1, \ldots, f_s$ — эрмитовы функции, $C_{t\tau}$ — некоторые матрицы. Если w — собственное значение оператора $\mathbf{M}_f$ кратности q, то либо $w = f(\lambda_t, \overline{\lambda}_\tau)$ и $q \geq n_t n_\tau$, либо $w = 0$ и $q \geq n^2 - r^2$. Используя свойства матричных коэффициентов A_{ti}, можно получить общее представление собственных элементов оператора $\mathbf{M}_f$ (см. [51, С. 20–24]).

Приведем некоторые спектральные свойства пучка матриц $F(\lambda) = A - \lambda B$ и условия асимптотической устойчивости систем (1.4.1) и (1.4.2), используя соотношения

$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{11}AXA^* = Y, \qquad (1.4.16)$$

$$\operatorname{rank}\bigl[F(\lambda), Y\bigr] \equiv n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.4.17}$$

$$\operatorname{rank}(BXB^*) = l. \tag{1.4.18}$$

Обозначим через l_+, l_- и l_0 количества точек спектра $\sigma(F)$, принадлежащих соответствующим множествам Λ_f^+, Λ_f^- и Λ_f^0 вида (1.2.2) – (1.2.4), определяемых эрмитовой функцией $f(\lambda, \overline{\lambda}) = \gamma_{00} + \gamma_{10}\lambda + \gamma_{01}\overline{\lambda} + \gamma_{11}\lambda\overline{\lambda}$. В качестве Λ_f^0 служит некоторая прямая или окружность с центром в точке $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11}$, отделяющая области $\Lambda_f^\pm$.

Лемма 1.4.1 *Если матрицы $X = X^*$ и $Y = Y^* \geq 0$ удовлетворяют соотношениям* (1.4.16) *и* (1.4.17), *то $l_0 = 0$ и выполнены неравенства*

$$l_+ \leq \mathrm{i}_+(BXB^*), \quad l_- \leq \mathrm{i}_-(BXB^*). \tag{1.4.19}$$

При этом равенства в (1.4.19) *достигаются в том и только в том случае, когда выполнено условие* (1.4.18). *При условии $l_0 = 0$ существуют матрицы $X = X^*$ и $Y = Y^* \geq 0$, удовлетворяющие соотношениям* (1.4.16) – (1.4.18).

Утверждения леммы 1.4.1 устанавливаются на основе канонической формы пучка матриц (1.3.10) и теоремы инерции, условиям которой соответствует функция f.

Замечание 1.4.1 Если правая часть уравнения (1.4.16) имеет вид

$$Y = BHB^*, \quad H > 0, \tag{1.4.20}$$

то выполнено тождество (1.4.17). При этом его решение X удовлетворяет условию (1.4.18) в каждом из случаев: 1) $\nu \leq 1$; 2) $\gamma_{11} = 0$, $\nu \leq 2$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\nu \leq 2$, $\gamma \notin \sigma(F)$, где $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11}$, а число ν определено в (1.4.3). При условиях

$$f(\lambda, \overline{\mu}) \neq 0, \quad \lambda, \mu \in \sigma(F), \tag{1.4.21}$$

уравнение (1.4.16) разрешимо для любой матрицы вида (1.4.20) в каждом из случаев: 1) $\nu \leq 1$; 2) $\gamma_{11} = 0$, $\nu \leq 2$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \notin \sigma(F)$; 4) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \in \sigma(F)$, $\zeta_\gamma = \xi_\gamma$, где $\zeta_\gamma(\xi_\gamma)$ — алгебраическая (геометрическая) кратность точки спектра $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11} \in \sigma(F)$. Если $\gamma_{11} = 0$, то для любой матрицы (1.4.20) уравнение (1.4.16) имеет решение X в том и только в том случае, когда выполнены условия (1.4.21) и $\nu \leq 2$.

Сформулируем условия включения $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$ в терминах линейных матричных неравенств.

Лемма 1.4.2 *Пусть существуют эрмитовы матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям*

$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{11}AXA^* \geq BYB^*, \quad (1.4.22)$$

$$BXB^* \geq 0, \quad Y > 0. \quad (1.4.23)$$

Тогда $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$. При этом в случае $\gamma_{11} = 0$ ($\gamma_{11} < 0$) необходимо $\nu \leq 2$ ($\nu \leq 1$).

Обратно, если $\sigma(F) \subset \Lambda_f^+$ и либо $\gamma_{11} = 0$ и $\nu \leq 2$, либо $\gamma_{11} < 0$ и $\nu \leq 1$, то система матричных неравенств (1.4.22) *и* (1.4.23) *совместна.*

Лемма 1.4.3 *Пусть соотношениям* (1.4.16) *и* (1.4.17) *удовлетворяют эрмитовы матрицы*

$$X = T\widehat{X}T^*, \quad Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \geq 0, \quad (1.4.24)$$

где T — любая ненулевая $n \times m$-матрица, для которой

$$\operatorname{rank}\left[AT, BT\right] = \operatorname{rank}(BT). \quad (1.4.25)$$

Тогда $l_0 = 0$ и выполнены равенства

$$l_+ = \mathrm{i}_+(X), \quad l_- = \mathrm{i}_-(X). \quad (1.4.26)$$

При условии $l_0 = 0$ существуют эрмитовы матрицы X и Y вида (1.4.24)*, удовлетворяющие соотношениям* (1.4.16) – (1.4.18) *и* (1.4.26).

Замечание 1.4.2 Равенство (1.4.25) означает, что существует матрица U, для которой $AT = BTU$. Поэтому матрицы T, X и Y в лемме 1.4.3 имеют следующую структуру:

$$T = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \; X = Q\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^*, \; Y = P^{-1}\begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1*},$$

где $X_1 = R\widehat{X}R^*$, $Y_1 = R\widehat{Y}R^*$, $JR = RU$, $R \in \mathbb{C}^{l\times m}$, $\operatorname{rank} R = \operatorname{rank} T = l \le m$. Кроме того, $\sigma(F) \subset \sigma(U)$, если

$$\operatorname{rank}\,[F(\lambda), BT] \equiv n, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.4.27}$$

Для матриц Y вида (1.4.24) из (1.4.17) следует (1.4.27), причем в случае $\widehat{Y} > 0$ условия (1.4.17) и (1.4.27) эквивалентны.

Замечание 1.4.3 Условия существования матриц X и Y, удовлетворяющих уравнению (1.4.16) и имеющих заданную структуру (1.4.24), зависят лишь от спектра $\sigma(F)$ и не связаны со свойствами бесконечных элементарных делителей пучка $F(\lambda)$. Если $\nu \le 3$, то при определении матрицы T в лемме 1.4.3 вместо условия (1.4.25) может быть использовано линейное уравнение $AT = BS$ относительно T и S. При этом утверждения леммы 1.4.3 остаются в силе в каждом из случаев: 1) $\nu \le 2$; 2) $\nu = 3, \gamma_{11} = 0$; 3) $\nu = 3, \gamma_{11} \ne 0, \gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11} \notin \sigma(F)$.

Теорема 1.4.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *дифференциальная система* (1.4.1) α*-устойчива;*

2) *существуют матрицы* $X = X^*$ *и* $Y = Y^* \ge 0$*, удовлетворяющие соотношениям*

$$-2\alpha BXB^* - AXB^* - BXA^* = Y, \tag{1.4.28}$$

$$BXB^* \ge 0, \quad \operatorname{rank}\bigl[F(\lambda), Y\bigr] \equiv n \;\; (\operatorname{Re}\lambda \ge -\alpha); \tag{1.4.29}$$

3) *для любой матрицы вида* $Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \ge 0$ *при условиях* (1.4.25) *и* $\widehat{Y} > 0$ *уравнение* (1.4.28) *имеет решение* $X = T\widehat{X}T^* \ge 0$.

Теорема 1.4.2 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *дискретная система* (1.4.2) β*-устойчива;*

2) *существуют матрицы* $X = X^*$ *и* $Y = Y^* \geq 0$*, удовлетворяющие соотношениям*

$$\beta^2 BXB^* - AXA^* = Y, \tag{1.4.30}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad \operatorname{rank}\big[F(\lambda), Y\big] \equiv n \quad (|\lambda| \geq \beta); \tag{1.4.31}$$

3) *для любой матрицы вида* $Y = BT\widehat{Y}T^*B^* \geq 0$ *при условиях* (1.4.25) *и* $\widehat{Y} > 0$ *уравнение* (1.4.30) *имеет решение* $X = T\widehat{X}T^* \geq 0$.

При построении функций Ляпунова для систем (1.4.1) и (1.4.2) в виде квадратичной формы $v(x) = x^*B^*XBx$ можно использовать решения сопряженных матричных уравнений

$$-2\alpha B^*XB - A^*XB - B^*XA = B^*YB, \tag{1.4.32}$$

$$\beta^2 B^*XB - A^*XA = B^*YB, \tag{1.4.33}$$

где $\alpha \geq 0$, $0 < \beta \leq 1$. Если матрицы $X = X^*$ и $Y = Y^* > 0$ удовлетворяют соотношениям (1.4.32) и $B^*XB \geq 0$, то система (1.4.1) α-устойчива, а функция $v(x)$ и ее производная на нетривиальных решениях $x(t)$ данной системы удовлетворяют неравенствам

$$v(x) > 0, \quad \frac{dv(x)}{dt} = -x^*(B^*YB + 2\alpha B^*XB)x < 0.$$

Аналогично, если матрицы $X = X^*$ и $Y = Y^* > 0$ удовлетворяют соотношениям (1.4.33) и $B^*XB \geq 0$, то система (1.4.2) β-устойчива, а функция $v(x)$ и ее первая разность на нетривиальных решениях x_k данной системы удовлетворяют неравенствам

$$v(x_k) > 0, \quad v(x_{k+1}) - v(x_k) = -x_k{}^*B^*\left[Y + (1-\beta^2)X\right]Bx_k < 0,$$

где $k = 0, 1, \dots$.

Функции Ляпунова для асимптотически устойчивых систем (1.4.1) и (1.4.2) всегда можно определить в виде $v(x) = x^* B^* X B x$, полагая в (1.4.32) и (1.4.33)

$$X = Z^* \widehat{X} Z \geq 0, \quad Y = Z^* \widehat{Y} Z \geq 0,$$

где $\widehat{Y} > 0$, а Z — решение максимального ранга l матричной системы (1.4.6). Условия устойчивости данных систем описываются также в терминах матриц

$$X = E^* \widehat{X} E \geq 0, \quad Y = E^* \widehat{Y} E \geq 0,$$

где $\widehat{Y} > 0$, $E = (BZ)^k$, $k \geq \nu$, удовлетворяющих уравнениям (1.4.32) и (1.4.33). При этом в качестве Z можно выбрать решение линейного уравнения $AZB = BZA$, в частности, $Z = F^{-1}(z)$, $z \notin \sigma(F)$.

1.4.2 Дифференциальные и разностные системы s-го порядка

Построим аналоги уравнения Ляпунова для класса динамических систем

$$F(\mathbf{D})x(t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1.4.34}$$

где $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$ — регулярный матричный полином размеров $n \times n$ и степени s, $\mathbf{D}$ — оператор дифференцирования или смещения по t. Важными для приложений подклассами систем типа (1.4.34) являются дифференциальные и разностные системы 2-го порядка

$$A_2 \ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_0 x = 0, \tag{1.4.35}$$

$$A_2 x_{t+2} + A_1 x_{t+1} + A_0 x_t = 0, \quad t = 0, 1, \dots, \tag{1.4.36}$$

отвечающие квадратичному пучку матриц $F(\lambda)$.

Соотношения, определяющие правые и левые пары (U,T) матричного полинома $F(\lambda)$, имеют вид

$$A_0T + A_1TU + \cdots + A_sTU^s = 0, \qquad (1.4.37)$$

$$TA_0 + UTA_1 + \cdots + U^sTA_s = 0. \qquad (1.4.38)$$

При этом матричная функция $\Phi(\lambda)$ определяется соответствующими выражениями

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_jTU^{j-i}, \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} U^{j-i}TA_j.$$

Введем блочные матрицы размеров $ns \times ns$:

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s-1} & 0 & \cdots & I \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{s-1} & A_s \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Все скалярные спектральные характеристики (собственные значения, конечные и бесконечные элементарные делители) линейных сопровождающих пучков матриц $L_1(\lambda) = A - \lambda B$ и $L_2(\lambda) = A - \lambda C$ совпадают и полностью определяют соответствующие спектральные характеристики матричного полинома $F(\lambda)$.

Лемма 1.4.4 (U,T) — *правая пара матричного полинома $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости r в том и только в том случае, когда*

$$AE_s = CE_sU, \quad E_s = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} E_s = r. \qquad (1.4.39)$$

Аналогично, (U,T) — левая пара матричного полинома $F(\lambda)$ индекса управляемости r в том и только в том случае, когда

$$E_sA = UE_sB, \;\; E_s = \left[T, UT, \ldots, U^{s-1}T\right], \;\; \operatorname{rank} E_s = r. \quad (1.4.40)$$

Данное утверждение описывает связь между правыми (левыми) парами матричного полинома и его сопровождающего пучка $L_2(\lambda)$ $(L_1(\lambda))$. Кроме того, из соотношений $AS_1 = S_1A = S_3$, $BS_1 = S_1C = S_2$ и (1.4.39) ((1.4.40)) следует равенство $AZ = BZU$ $(ZA = UZC)$ при $Z = S_1E_s$ $(Z = E_sS_1)$, определяющее правую (левую) пару пучка матриц $L_1(\lambda)$ $(L_2(\lambda))$.

Правые и левые пары матричного полинома $F(\lambda)$ можно определить также путем решения относительно Z одной из систем

$$AZB = BZA, \quad Z = ZBZ, \qquad (1.4.41)$$

$$AZC = CZA, \quad Z = ZCZ. \qquad (1.4.42)$$

При этом выполняются равенства $AZ = BZU$ и $ZA = UZC$, если соответственно $U = AZ$ и $U = ZA$. Используя блочную структуру матриц A, B и C, можно показать, что нахождение матрицы Z в (1.4.41) или (1.4.42) сводится к решению системы $2s$ матричных уравнений относительно $T_1, \ldots, T_s$:

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=p+1}^{s}(A_iT_{i+j-p}A_j - A_jT_{i+j-p}A_i) = 0, \;\; p = \overline{0, s-1},$$

$$T_q = \sum_{i=q}^{s}\sum_{j=i}^{s} T_iA_jT_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=-1}^{i-1} T_iA_jT_{q+j-i}, \;\; q = \overline{1, s}, \qquad (1.4.43)$$

где $T_0 = A_{-1} = 0$. Например, решение системы (1.4.41) имеет следующую структуру:

$$
Z = \left[\begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & \cdots & T_s \\ \hline G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{s-11} & G_{s-12} & \cdots & G_{s-1s} \end{array} \right], \tag{1.4.44}
$$

где

$$
G_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p} A_j T_{q-p+j}, & p < q, \\ \sum\limits_{j=p+1}^{s} A_j T_{q-p+j}, & p \geq q. \end{cases}
$$

Аналогично, решение $T_1, \ldots, T_s$ системы (1.4.43) составляет первый блочный столбец матрицы Z, удовлетворяющей равенствам (1.4.42).

Лемма 1.4.5 *Пусть* $T_1, \ldots, T_s$ *— решение матричной системы* (1.4.43)*. Тогда матрицы*

$$
T = [T_1, \ldots, T_s], \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{p-1} A_i T_{q-p+i+1}, & p \leq q, \\ \sum\limits_{i=p}^{s} A_i T_{q-p+i+1}, & p > q, \end{cases}
$$

образуют правую пару (U, T)*, а матрицы*

$$
T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_s \end{bmatrix}, \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{q-1} T_{p-q+i+1} A_i, & p \geq q, \\ \sum\limits_{i=q}^{s} T_{p-q+i+1} A_i, & p < q, \end{cases}
$$

левую пару (U, T) *матричного полинома* $F(\lambda)$.

Построим блочные матрицы $\Delta = BZ$ и $\Theta = AZ$ вида

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{s1} & \cdots & \Delta_{ss} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \cdots & \Theta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{s1} & \cdots & \Theta_{ss} \end{bmatrix}, \tag{1.4.45}$$

где

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j}, \ p < q, \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j}, \quad p \geq q, \end{cases} \qquad \Theta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j+1}, \ p \leq q, \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j+1}, \quad p > q. \end{cases}$$

В случае квадратичного пучка матриц $F(\lambda)$ при $s = 2$ матрицы (1.4.45) имеют вид

$$\begin{gathered} \Delta = BZ = \left[\begin{array}{c|c} A_1T_1 + A_2T_2 & -A_0T_1 \\ \hline A_2T_1 & A_2T_2 \end{array}\right], \\ \Theta = AZ = \left[\begin{array}{c|c} -A_0T_1 & -A_0T_2 \\ \hline A_2T_2 & -A_0T_1 - A_1T_2 \end{array}\right], \end{gathered} \tag{1.4.46}$$

где T_1 и T_2 — решение системы четырех матричных уравнений

$$\begin{gathered} A_0T_1A_1 - A_1T_1A_0 = A_2T_2A_0 - A_0T_2A_2, \\ A_0T_1A_2 - A_2T_1A_0 = A_2T_2A_1 - A_1T_2A_2, \\ T_1 = T_1A_1T_1 + T_1A_2T_2 + T_2A_2T_1, \\ T_2 = T_2A_2T_2 - T_1A_0T_1. \end{gathered} \tag{1.4.47}$$

Лемма 1.4.6 *Пусть* $T_1, \ldots, T_s$ *— нетривиальное решение системы* (1.4.43) *и* $\operatorname{rank} \Delta = r \geq 1$. *Тогда* Δ *является проектором матрицы* Θ *и, по крайней мере,* r *собственных значений матрицы* Θ *с учетом кратностей образуют подмножество спектра* $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$ *матричного полинома* $F(\lambda)$. *При этом, если* $\lambda \in \sigma(\Theta)$, *то либо* $\lambda \in \sigma_0(F)$, *либо* $\lambda = 0$.

Данное утверждение устанавливается с помощью представления матриц (1.4.45) в виде (1.4.13) на решениях Z системы (1.4.41). При этом выполняются соотношения (1.4.14) и определяется подмножество спектра $\sigma_0(F)$ матричного полинома $F(\lambda)$, совпадающее с $\sigma(J_0)$, а также с $\sigma(R^*AL)$, где L и R^* — множители скелетного разложения $Z = LR^*$.

Следовательно, если операторы (1.3.12) и (1.3.13) определены с помощью соотношений (1.4.12) и (1.4.45) для нетривиального решения $T_1, \ldots, T_s$ системы (1.4.43), а множества матриц $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ вида (1.3.3) определяет оператор $\mathbf{M}X = \Delta X \Delta^*$, то при условиях (1.4.15) расположение подмножества спектра $\sigma_0(F)$ матричного полинома $F(\lambda)$, состоящего из $r = \operatorname{rank}\Delta$ собственных значений, относительно заданных множеств Λ_f^+, Λ_f^- и Λ_f^0 можно описать с помощью теорем 1.3.1 – 1.3.3. При этом система матричных соотношений (1.3.4) и (1.4.43) служит аналогом уравнения Ляпунова для класса динамических систем (1.4.34).

Замечание 1.4.4 При построении правых и левых пар матричного полинома можно использовать лишь линейные уравнения систем (1.4.41) – (1.4.43). Так, с помощью (1.3.10) нетрудно установить, что если $AZB = BZA$, то для некоторой матрицы U пара (U, T), где $T = (ZB)^k$, $k \geq \nu$, удовлетворяет равенству $TA = UTB$. Если при этом $\operatorname{rank} Z = \operatorname{rank}(BZ)$, то в качестве T может быть выбрана также матрица Z.

Изложим еще один подход к построению аналогов уравнения Ляпунова для систем типа (1.4.34), основанный на вычислении первых s интегралов

$$H_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{1.4.48}$$

где ω — замкнутый контур, отделяющий подмножество спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$. Применяя формулу Фробениуса для обращения сопровождающего пучка матриц $L_1(\lambda) = A - \lambda B$ при $\lambda \notin \sigma(F)$, приходим к соотношениям

$$
\begin{aligned}
-L_1^{-1}(\lambda) &= S_1 W(\lambda) + F_1(\lambda),\\
L_1'(\lambda)L_1^{-1}(\lambda) &= S_2 W(\lambda) + F_2(\lambda),\\
\lambda L_1'(\lambda)L_1^{-1}(\lambda) &= S_3 W(\lambda) + F_3(\lambda),
\end{aligned}
\tag{1.4.49}
$$

где

$$
W(\lambda) = \begin{bmatrix} F^{-1}(\lambda) & \lambda F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{s-1}F^{-1}(\lambda) \\ \lambda F^{-1}(\lambda) & \lambda^2 F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^s F^{-1}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{s-1}F^{-1}(\lambda) & \lambda^s F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{2s-2}F^{-1}(\lambda) \end{bmatrix},
$$

$F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ — некоторые полиномиальные матрицы. Интегрируя равенства (1.4.49) по замкнутому контуру ω, имеем

$$
Z = S_1 H, \quad \Delta = BZ = S_2 H, \quad \Theta = AZ = S_3 H, \tag{1.4.50}
$$

где

$$
H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_s \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H_s & H_{s+1} & \cdots & H_{2s-1} \end{bmatrix}.
$$

Интегралы (1.4.48) удовлетворяют системе соотношений

$$
\begin{gathered}
A_0 H_1 + A_1 H_2 + \cdots + A_s H_{s+1} = 0,\\
A_0 H_2 + A_1 H_3 + \cdots + A_s H_{s+2} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_0 H_p + A_1 H_{p+1} + \cdots + A_s H_{s+p} = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

Отсюда следует, что блоки Z_{pq} матрицы Z имеют вид

$$Z_{pq} = \begin{cases} \sum\limits_{j=p}^{s} A_j H_{j+q-p+1}, & q < p, \\ H_q, & p = 1, \\ -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j H_{j+q-p+1}, & q \geq p > 1, \end{cases} \tag{1.4.51}$$

и все матрицы (1.4.50) выражаются через первые s интегралов $H_1, \ldots, H_s$.

Отметим, что если контур ω охватывает весь спектр $\sigma(F)$, то матрицы H_p совпадают с коэффициентами главной части лорановского разложения резольвенты в окрестности бесконечно удаленной точки

$$F^{-1}(\lambda) = H_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} H_1 + \frac{1}{\lambda^2} H_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda^s} H_s + \cdots . \tag{1.4.52}$$

Матрицы Δ и Θ в (1.4.50) удовлетворяют соотношениям (1.4.13) при $S = I_l$, а также (1.4.14). Сопоставляя (1.4.51) с соответствующими блоками решения (1.4.44) системы (1.4.41), приходим к следующему утверждению.

Лемма 1.4.7 *Матричной системе* (1.4.43) *удовлетворяет семейство интегралов*

$$T_p = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad p = \overline{1, s}, \tag{1.4.53}$$

где ω — замкнутый контур, отделяющий любое подмножество спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(F)$. При этом, если $\sigma_0(F) = \sigma(F)$, то в лемме 1.4.5 (U, T) *— правая (левая) пара матричного полинома $F(\lambda)$, для которой выполняется соответствующее условие* (1.3.2) *и* $\sigma(F) \subseteq \sigma(U)$.

Следовательно, утверждения теорем 1.3.1 – 1.3.3 могут быть сформулированы в терминах решений аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома $F(\lambda)$, построенных с помощью семейства s интегралов (1.4.53).

1.5 Матричные неравенства с неопределенными коэффициентами

Рассмотрим линейный оператор в пространстве матриц

$$\mathbf{M}(p) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_m, \quad \mathbf{M}(p)X = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_i(p_i) X A_j^*(p_j), \qquad (1.5.1)$$

где γ_{ij} — скалярные коэффициенты, составляющие эрмитову матрицу $\Gamma \in \mathcal{H}_\nu$, а значения матричных коэффициентов $A_i = A_i(p_i)$, зависящих от векторных параметров

$$p_i = \big[p_{i1}, \dots, p_{i\nu_i}\big]^T \in \mathcal{P}_{\nu_i} \triangleq \Big\{q \in \mathbb{R}^{\nu_i} : \, q_k \geq 0, \, \sum_{k=1}^{\nu_i} q_k = 1\Big\},$$

образуют семейство политопов

$$\mathcal{A}_i = \mathrm{Co}\big\{A_{i1}, \dots, A_{i\nu_i}\big\} = \Big\{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : A = \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik} A_{ik}, \, p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}\Big\}.$$

Общий вектор параметров $p = [p_1^T, ..., p_\nu^T]^T \in \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\nu_1} \times \cdots \times \mathcal{P}_{\nu_\nu}$ имеет порядок $\alpha = \nu_1 + \cdots + \nu_\nu$. Семейство операторов (1.5.1), отвечающее всем возможным комбинациям вершин A_{ir_i} политопов $\mathcal{A}_i$, имеет вид

$$\mathbf{M}_{r_1 \dots r_\nu} X = \sum_{i,j=1}^{\nu} \gamma_{ij} A_{ir_i} X A_{jr_j}^*, \quad r_i \in \big\{1, \dots, \nu_i\big\}. \qquad (1.5.2)$$

Их количество равно $\nu_1 \cdots \nu_\nu$. Если $\nu_i = 1$ для некоторого i, то $r_i = 1$ и в (1.5.1) соответствующий матричный коэффициент A_i не зависит от p_i. Выделим подмножество индексов

$J \subseteq \{1,\dots,\nu\}$, которым отвечают матричные коэффициенты A_i, зависящие от p_i.

Лемма 1.5.1 *Для любого вектора $p \in \mathcal{P}_\nu$ выполняется матричное неравенство*

$$pp^T \le \mathrm{diag}\{p_1,\dots,p_\nu\}. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. Очевидно, что при $p \in \mathcal{P}_\nu$ выполняется равенство $\mathrm{diag}\{p_1,\dots,p_\nu\} - pp^T = D(I_\nu - qq^T)D^T$, где $D = \mathrm{diag}\{\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_\nu}\}$, $q = [\sqrt{p_1},\dots,\sqrt{p_\nu}]$, причем $\|q\| = 1$. Пусть Q — матрица ортогонального дополнения вектора q, т. е. $q^TQ = 0$ и $\det S \ne 0$, где $S = [q, Q]$. Тогда

$$S^T(I_\nu - qq^T)S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q^TQ \end{bmatrix} \ge 0.$$

Следовательно, $I_\nu - qq^T \ge 0$ и выполняется матричное неравенство (1.5.3).

Лемма доказана.

Лемма 1.5.2 *Для любого вектора $p \in \mathcal{P}_\nu$ выполняется матричное неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\nu} p_iA_iXA_i^* \ge \Big(\sum_{i=1}^{\nu} p_iA_i\Big)X\Big(\sum_{i=1}^{\nu} p_iA_i^*\Big), \tag{1.5.4}$$

где $A_1,\dots,A_\nu \in \mathbb{C}^{m\times n}$ — заданный набор матриц, $X = X^* \ge 0$.

Доказательство. Перепишем соотношение (1.5.4) в виде

$$\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_{ij}A_iXA_j^* = A(\Gamma \otimes X)A^* \ge 0,$$

где $A = [A_1,\dots,A_\nu]$, а скалярные коэффициенты γ_{ij} составляют матрицу $\Gamma = \mathrm{diag}\{p_1,\dots,p_\nu\} - pp^T$. Согласно лемме 1.5.1

$\Gamma \geq 0$ при $p \in \mathcal{P}_\nu$. Учитывая свойства кронекерового произведения, имеем $\Gamma \otimes X \geq 0$ и, следовательно, выполняется матричное неравенство (1.5.4).

Лемма доказана.

Из соотношения (1.5.4), в частности, следует, что для любой матрицы $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\nu\}$ выполняется неравенство

$$x^* A X A^* x \leq \max_i (x^* A_i X A_i^* x), \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Лемма 1.5.3 *Пусть при всех $i \in J$ выполняется одно из условий*

$$\gamma_{ii} = 0, \quad X = X^*, \tag{1.5.5}$$

или

$$\gamma_{ii} \leq 0, \quad X = X^* \geq 0. \tag{1.5.6}$$

Тогда эквивалентны системы матричных неравенств

$$\mathbf{M}(p)X \geq 0\,(>0\,), \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.5.7}$$

и

$$\mathbf{M}_{r_1 \ldots r_\nu} X \geq 0\,(>0\,), \quad r_i \in \{1, \ldots, \nu_i\}, \ i = \overline{1, \nu}. \tag{1.5.8}$$

Доказательство. Очевидно, что система неравенств (1.5.8) является следствием параметрической системы неравенств (1.5.7) без ограничений (1.5.5) или (1.5.6). Действительно, если в (1.5.7) положить $p = [e_{1r_1}^T, ..., e_{\nu r_\nu}^T]^T$, где $e_{ir_i} = [0, ..., 1, ..., 0]^T \in \mathbb{R}^{\nu_i}$ — единичные векторы в $\mathbb{R}^{\nu_i}$, $i = \overline{1, \nu}$, то получим соотношения (1.5.8).

Для доказательства обратного утверждения представим операторы (1.5.1) и (1.5.2) в виде

$$\mathbf{M}(p)X = \mathbf{L}(p)X - \mathbf{R}(p)X, \quad \mathbf{M}_{r_1 \ldots r_\nu} X = \mathbf{L}_{r_1 \ldots r_\nu} X - \mathbf{R}_{r_1 \ldots r_\nu} X,$$

где

$$\mathbf{L}(p) = \sum_{i \notin J} \gamma_{ii} A_i X A_i^* + \sum_{i \neq j} \gamma_{ij} A_i(p_i) X A_j^*(p_j),$$

$$\mathbf{L}_{r_1\dots r_\nu} = \sum_{i\notin J}\gamma_{ii}A_iXA_i^* + \sum_{i\neq j}\gamma_{ij}A_{ir_i}XA_{jr_j}^*,$$

$$\mathbf{R}(p) = -\sum_{i\in J}\gamma_{ii}A_i(p_i)XA_i^*(p_i), \quad \mathbf{R}_{r_1\dots r_\nu} = -\sum_{i\in J}\gamma_{ii}A_{ir_i}XA_{ir_i}^*.$$

Параметры p_{ik} входят в выражение $\mathbf{L}(p)$ линейно, а операторы $\mathbf{R}(p)$ и $\mathbf{R}_{r_i\dots r_\nu}$ положительны относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц.

При условиях (1.5.5) операторы $\mathbf{M}(p)$ и $\mathbf{L}(p)$ совпадают. Построим мажоранту для оператора $\mathbf{R}(p)$ при условиях (1.5.6). Согласно лемме 1.5.2 при $p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}$ и $X \geq 0$ имеем

$$A_i(p_i)XA_i^*(p_i) \leq \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik}A_{ik}XA_{ik}^*.$$

Следовательно, при условиях (1.5.6) имеем оценку оператора

$$\mathbf{M}(p)X \geq \mathbf{L}(p)X + \sum_{i\in J}\gamma_{ii}\sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik}A_{ik}XA_{ik}^*, \quad p \in \mathcal{P}. \qquad (1.5.9)$$

Пусть выполняется система матричных неравенств (1.5.8), т. е.

$$\mathbf{M}_{r_1,\dots,r_\nu}X = \mathbf{L}_{r_1,\dots,r_\nu}X + \sum_{i\in J}\gamma_{ii}A_{ir_i}XA_{ir_i}^* \geq 0, \qquad (1.5.10)$$

где $r_i \in \{1,\dots,\nu_i\}$, $i = \overline{1,\nu}$. Для каждого фиксированного $i \in \{1,\dots,\nu\}$ умножим все неравенства системы (1.5.10), содержащие слагаемые с индексом r_i, последовательно на $p_{i1},\dots,p_{i\nu_i}$ и просуммируем полученные неравенства, учитывая, что $p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}$. При этом рассматриваем два случая.

а) $i \notin J$. В новом матричном неравенстве возникают слагаемые типа $\gamma_{ij}A_i(p_i)XA_{jr_j}^*$, $\gamma_{ji}A_{jr_j}XA^*(p_i)$, $i \neq j$. Все остальные слагаемые выражения (1.5.10) войдут в это неравенство без изменений.

б) $i \in J$. В новом матричном неравенстве, кроме слагаемых, указанных в случае а), появятся также слагаемые типа

$$\gamma_{ii} \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik} A_{ik} X A_{ik}^*, \quad i \in J.$$

На последнем шаге при $i = \nu$ в результате указанных операций с неравенствами (1.5.8) приходим к выражению, совпадающему с правой частью неравенства (1.5.9) и являющемуся неотрицательно определенной матрицей.

Таким образом, при каждом $p \in \mathcal{P}$ неравенство (1.5.7) является следствием системы неравенств (1.5.8). При этом, если в (1.5.8) все матрицы положительно определены, то выражение (1.5.7) также является положительно определенной матрицей.

Лемма доказана.

Замечание 1.5.1 Оценка оператора (1.5.9) получена на основе леммы 1.5.2 при ограничениях (1.5.6). В общем случае оператор (1.5.1) представляется в виде

$$\mathbf{M}(p)X = W\big(G(p) \otimes X\big)W^*, \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.5.11}$$

где $W = \big[A_{11}, \ldots, A_{1\nu_1}; \ldots; A_{\nu 1}, \ldots, A_{\nu\nu_\nu}\big]$, а эрмитова матрица $G(p)$ при условиях $\lambda_{\min}(\Gamma) \le 0$ и $\lambda_{\max}(\Gamma) \ge 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\lambda_{\min}(\Gamma) D \le G(p) = P \Gamma P^T \le \lambda_{\max}(\Gamma) D,$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_\nu \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_\nu \end{bmatrix},$$

где $D_i = \operatorname{diag}\{p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}\}$, $i = \overline{1, \nu}$. При этом имеем двустороннюю оценку оператора (1.5.1):

$$\lambda_{\min}(\Gamma) \mathbf{M}_0(p) X \le \mathbf{M}(p) X \le \lambda_{\max}(\Gamma) \mathbf{M}_0(p) X, \quad p \in \mathcal{P}, \tag{1.5.12}$$

$$\mathbf{M}_0(p) X = W(D \otimes X) W^* = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{\nu_i} p_{ik} A_{ik} X A_{ik}^*, \quad X = X^* \ge 0.$$

Лемма 1.5.4 *Пусть выполняется система матричных неравенств*

$$Y + A_i Z + Z^* A_i^* + A_i X A_i^* \leq 0 \ (< 0) \quad i = \overline{1, \nu}, \tag{1.5.13}$$

где $X = X^* \geq 0$, $Y = Y^*$, Z *и* A_i *— заданные матрицы подходящих размеров. Тогда для любой матрицы* $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\nu\}$ *справедливо матричное неравенство*

$$Y + AZ + Z^* A^* + AXA^* \leq 0 \ (< 0). \tag{1.5.14}$$

Лемма 1.5.5 *Для любых векторов* $p_r \in \mathcal{P}_{\nu_r}$ $(r = 1, 2, 3)$ *выполняется матричное неравенство*

$$(A + BKC)X(A + BKC)^* \leq \sum_{i=1}^{\nu_1} \sum_{j=1}^{\nu_2} \sum_{k=1}^{\nu_3} p_{1i} p_{2j} p_{3k} M_{ijk} X M_{ijk}^*,$$

где

$$A = \sum_{i=1}^{\nu_1} p_{1i} A_i,\ B = \sum_{j=1}^{\nu_2} p_{2j} B_j,\ C = \sum_{k=1}^{\nu_3} p_{3k} C_k,\ M_{ijk} = A_i + B_j K C_k,$$

$X = X^T \geq 0$, A_i, B_j, C_k *и* K *— заданные матрицы подходящих размеров.*

Утверждения лемм 1.5.4 и 1.5.5 следуют из леммы 1.5.2.

Замечание 1.5.2 Известно, что интервальные и аффинные множества матриц описываются в виде политопов. Например, каждая матрица $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ из интервала $\underline{A} \leq A \leq \overline{A}$ представляется в виде

$$A = \sum_{k=1}^{\nu} p_k A_k, \quad A_k = \|a_{t\tau}^k\|_{t,\tau=1}^{m,n}, \quad p = [p_1, \dots, p_\nu]^T \in \mathcal{P}_\nu,$$

где $a_{t\tau}^k \in \{\underline{a}_{t\tau}, \overline{a}_{t\tau}\}$, $\underline{A} = \|\underline{a}_{t\tau}\|_{t,\tau=1}^{m,n}$, $\overline{A} = \|\overline{a}_{t\tau}\|_{t,\tau=1}^{m,n}$, $\nu = 2^{nm}$.

Можно сформулировать аналоги лемм 1.5.2 – 1.5.5 для матричных неравенств с интервальной и аффинной неопределенностью коэффициентов соответствующих операторов.

1.6 Методы ЛМН в задачах локализация спектра

1.6.1 Матричные функции и аналитические области

Рассмотрим регулярную матричную функцию

$$F(\lambda) = f_0(\lambda)A_0 + \cdots + f_s(\lambda)A_s, \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.6.1}$$

где $A_0, \ldots, A_s \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — заданные матрицы, $f_0(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)$ — скалярные функции, аналитические в окрестности спектра $\sigma(F)$ и такие, что $z_s(\lambda) = \big[f_0(\lambda), \ldots, f_s(\lambda)\big] \neq 0$, $\lambda \in \sigma(F)$. Изучим расположение точек спектра $\sigma(F)$ относительно областей

$$\Omega = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \mathrm{i}_+(V(\lambda, \overline{\lambda})) \geq 1\big\}, \;\; \widehat{\Omega} = \big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon V(\lambda, \overline{\lambda}) \leq 0\big\}, \tag{1.6.2}$$

где $V(\lambda, \overline{\lambda})$ — эрмитова матричнозначная функция. Очевидно, что $\Omega \cap \widehat{\Omega} = \emptyset$ и $\Omega \cup \widehat{\Omega} = \mathbb{C}$.

Введем блочные матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix}, \quad A^{\perp *} = [B_0, \ldots, B_s],$$

для которых выполняются соотношения

$$A^{\perp *}A = 0, \quad A^+A = I_n, \quad \det T \neq 0, \quad T = \big[A^{+*}, A^{\perp}\big], \tag{1.6.3}$$

где $A^+ = (A^*A)^{-1}A^*$ — псевдообратная матрица.

Лемма 1.6.1 *Пусть выполняется одно из соотношений*

$$\big[I_{n(s+1)}, A\big]\, W \,\big[I_{n(s+1)}, A\big]^* > 0 \tag{1.6.4}$$

или

$$A^{\perp *}LA^{\perp} > 0, \tag{1.6.5}$$

где

$$W = \begin{bmatrix} L & G \\ G^* & H \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{00} & \dots & L_{0s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{s0} & \dots & L_{ss} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_s \end{bmatrix},$$

а матричная функция $V(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=0}^{s} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}L_{ij}$ *определяет области* (1.6.2). *Тогда* $\sigma(F) \cap \widehat{\Omega} = \emptyset$, *т. е.* $\sigma(F) \subset \Omega$.

Доказательство. Очевидно, что

$$F(\lambda) = Z_s(\lambda)A, \quad V(\lambda, \overline{\lambda}) = Z_s(\lambda)LZ_s^*(\lambda),$$

где $Z_s(\lambda) = \big[f_0(\lambda)I_n, \dots, f_s(\lambda)I_n\big] = z_s(\lambda) \otimes I_n$. Умножив (1.6.4) слева и справа соответственно на $Z_s(\lambda)$ и $Z_s^*(\lambda)$, имеем

$$F(\lambda)G^*(\lambda) + G(\lambda)F^*(\lambda) + F(\lambda)HF^*(\lambda) + V(\lambda, \overline{\lambda}) > 0,$$

где $G(\lambda) = Z_s(\lambda)G$. Пусть $v_0^* \neq 0$ — левый собственный вектор матричной функции $F(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F)$. Умножим полученное матричное неравенство при $\lambda = \lambda_0$ слева и справа соответственно на v_0^* и v_0, получим $v_0^* V(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)v_0 > 0$, что означает $\lambda_0 \in \Omega$.

Учитывая соотношения (1.6.3), приведем матричное неравенство (1.6.4) к виду

$$T^* \big[I_{n(s+1)}, A\big]\, W \big[I_{n(s+1)}, A\big]^* T = \begin{bmatrix} P & N \\ N^* & Q \end{bmatrix} > 0,$$

где $P = H + G^*A^{+*} + A^+G + A^+LA^{+*}$, $Q = A^{\perp *}LA^{\perp}$, $N = (G^* + A^+L)A^{\perp}$. Согласно лемме Шура данное неравенство эквивалентно двум матричным неравенствам, первое из которых совпадает с (1.6.5), а второе всегда можно достичь путем выбора матрицы $H > 0$. Поэтому из матричного неравенства (1.6.5) также следует включение $\sigma(F) \subset \Omega$.

Лемма доказана.

Отметим, что в лемме 1.6.1 блоки матрицы W удовлетворяют условиям $n(s+1) \leq \mathrm{i}_+(W) < n(s+2)$, $1 \leq \mathrm{i}_+(L) < n(s+1)$. Матрицу H целесообразно искать в виде положительно определенной матрицы, например, можно положить $H = I_n$. Если неравенство (1.6.4) выполняется при $H \leq 0$, то все собственные значения матричной функции $G(\lambda)$ также, как и $F(\lambda)$, должны принадлежать области Ω.

Полагая в лемме 1.6.1 $L = \Gamma \otimes X$, где Γ и X — эрмитовы матрицы соответствующих размеров $s+1 \times s+1$ и $n \times n$, получаем условия локализации спектра $\sigma(F)$ в области Ω, описываемой скалярной эрмитовой функцией $f(\lambda, \overline{\lambda}) = z_s(\lambda) \Gamma z_s^*(\lambda)$.

Теорема 1.6.1 *Если для некоторых матриц G, $H = H^*$ и $X = X^* \geq 0$ $(X \neq 0)$ выполняется одно из соотношений*

$$AG^* + GA^* + AHA^* + \Gamma \otimes X > 0 \tag{1.6.6}$$

или

$$\sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} B_i X B_j^* > 0, \tag{1.6.7}$$

то все собственные значения матричной функции $F(\lambda)$ расположены в области

$$\Omega = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} f_i(\lambda) \overline{f_i(\lambda)} > 0 \Big\}.$$

Лемма 1.6.2 *Пусть $f_0(\lambda) \neq 0$ в некоторой окрестности точек $\sigma(F)$ и выполняется матричное неравенство*

$$[A^*, I_n]\, W \,[A^*, I_n]^* > 0. \tag{1.6.8}$$

Тогда $\sigma(F) \subset \Omega$, где область Ω определяется в виде (1.6.2) *при*

$$V(\lambda, \overline{\lambda}) = \begin{bmatrix} \Psi^*(\lambda) L \Psi(\lambda) & f_0(\lambda) \Psi^*(\lambda) G \\ \overline{f_0(\lambda)} G^* \Psi(\lambda) & f_0(\lambda) \overline{f_0(\lambda)} H \end{bmatrix},$$

$$\Psi(\lambda) = \begin{bmatrix} -f_1(\lambda)I_n & \dots & -f_s(\lambda)I_n \\ f_0(\lambda)I_n & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n\times n} & \dots & f_0(\lambda)I_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $v_0 \neq 0$ — правый собственный вектор матричной функции $F(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F)$. Тогда после умножения неравенства (1.6.8) слева и справа соответственно на $\overline{f_0(\lambda_0)}v_0^*$ и $f_0(\lambda_0)v_0$ с учетом соотношений

$$f_0(\lambda_0)A_0v_0 = -\sum_{i=1}^{s} f_i(\lambda_0)A_iv_0, \quad w_0^* = \left[v_0^*A_1^*, \dots, v_0^*A_m^*, v_0^*\right] \neq 0,$$

имеем $w_0^*V(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)w_0 > 0$, что означает $\lambda_0 \in \Omega$.

Лемма доказана.

Отметим, что в лемме 1.6.2 блоки матрицы W удовлетворяют условиям $n \leq \mathrm{i}_+(W) < n(s+2)$, $1 \leq \mathrm{i}_+(L) < n(s+1)$.

Теорема 1.6.2 *Если совместна система ЛМН*

$$\sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij}A_i^*XA_j > 0, \quad X \geq 0, \tag{1.6.9}$$

то все собственные значения матричной функции $F(\lambda)$ расположены в области $\Omega = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{i}_+(\Phi^*(\lambda)\Gamma\Phi(\lambda)) \geq 1\right\}$, где

$$\Phi(\lambda) = \left[\frac{-z(\lambda)}{f_0(\lambda)I_s}\right], \quad z(\lambda) = [f_1(\lambda), \dots, f_s(\lambda)].$$

Данное утверждение вытекает из леммы 1.6.2 при $L = \Gamma \otimes X$ и нулевых G и H. Аналогичное утверждение сформулировано в [51] при более слабых ограничениях (типа управляемости) на выражения (1.6.9). Леммы 1.6.1 и 1.6.2 дополняют и обобщают известные методы локализации собственных чисел матричных функций в терминах линейных матричных неравенств (1.6.4), (1.6.5), (1.6.8) и их частных случаев (1.6.6), (1.6.7) и (1.6.9) (см. [51, с. 94–98] и [119, с. 93–97]).

Замечание 1.6.1 В теореме 1.6.2 область Ω описывает скалярная функция $f(\lambda,\overline{\lambda}) = z_s(\lambda)\widetilde{\Gamma} z_s^*(\lambda) > 0$, если положить

$$\Gamma = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \multirow{2}{*}{$0_{2\times s-1}$} \\ 1 & \gamma & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{s-1\times 2}} & -Q^{-1} \end{array}\right], \ \widetilde{\Gamma} = \left[\begin{array}{cc|c} \gamma & -1 & \multirow{2}{*}{$0_{2\times s-1}$} \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0_{s-1\times 2}} & Q \end{array}\right],$$

где $Q = Q^* > 0$.

Пример 1.6.1 Рассмотрим регулярный матричный квазиполином

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1} A_2 + \cdots + e^{-\lambda\tau_{s-1}} A_s, \ \ \tau_i \geq 0, \ i = \overline{1, s-1}.$$

Если для некоторых чисел γ, $q_1 > 0, \ldots, q_{s-1} > 0$ и матрицы $X \geq 0$ выполняется матричное неравенство

$$A_0^* X A_1 + A_1^* X A_0 + \gamma A_1^* X A_1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{q_i} A_{i+1}^* X A_{i+1} > 0, \quad (1.6.10)$$

то согласно теореме 1.6.2 все точки спектра $\sigma(F)$ принадлежат области $\Omega = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda + \overline{\lambda} < \gamma + \sum\limits_{i=1}^{s-1} q_i e^{-(\lambda+\overline{\lambda})\tau_i}\right\}$. Если $\gamma \leq -q_1 - \cdots - q_{s-1}$, то данная область целиком расположена в левой полуплоскости. В этом случае имеем достаточные условия устойчивости квазиполинома $F(\lambda)$ в виде линейного матричного неравенства (1.6.10) (см. [51, 119]). Этот результат может быть использован при изучении абсолютной устойчивости линейных систем управления с запаздыванием.

1.6.2 Матричные полиномы и алгебраические области

Рассмотрим регулярный матричный полином размера $n \times n$

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s, \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.6.11)$$

и класс алгебраических областей в комплексной плоскости

$$\Lambda_k = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \, f(\lambda, \overline{\lambda}) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij} \lambda^i \overline{\lambda}^j > 0 \Big\}, \quad (1.6.12)$$

где $s \geq 1$, $k \geq 1$, γ_{ij} — скалярные коэффициенты, составляющие эрмитову матрицу Γ. Будем предполагать, что $\Lambda_k \neq \emptyset$ и $\Lambda_k \neq \mathbb{C}$, т. е. $\mathrm{i}_{\pm}(\Gamma) \neq 0$. Очевидно, что Λ_1 — область, ограниченная некоторой прямой или окружностью. В частности, левой полуплоскости и единичному кругу соответствуют матрицы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (1.6.13)$$

Класс областей Λ_2 содержит все области, ограниченные алгебраическими кривыми второго порядка.

Пусть $m = \max\{s, k\}$ и $r = m - k$. Построим матрицы

$$A = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_{00} & \dots & X_{0r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{r0} & \dots & X_{rr} \end{bmatrix}$$

соответствующих размеров $n(m+1) \times n$, $n(m+1) \times n$ и $n(r+1) \times n(r+1)$ и введем линейные операторы

$$\mathbf{L}(X) = C(\Gamma \otimes X)C^T, \quad \mathbf{M}(X) = D(\Gamma \otimes X)D^*, \quad (1.6.14)$$

где $C = R \otimes I_n = \big[C_0, \dots, C_k\big]$, $D = A^{\perp *} C = \big[D_0, \dots, D_k\big]$,

$$R = \big[E, \Delta E, \dots, \Delta^k E\big], \ \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1\times m} & 0 \\ I_m & 0_{m\times 1} \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} I_{r+1} \\ 0_{k\times r+1} \end{bmatrix},$$

$A^{\perp *} = \big[B_0, \ldots, B_m\big]$ — матрица, определяемая соотношениями (1.6.3). Блоки A_i при $i > s$ должны быть такими, чтобы спектр матричного полинома $F_m(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^m A_m$ содержал изучаемый спектр $\sigma(F)$. Например, можно положить $A_i = 0$, $i > s$. В случае $k \leq s$ данные блоки в A отсутствуют.

Пусть $\widehat{\Lambda}_k \triangleq \mathbb{C} \backslash \Lambda_k$ — замкнутое дополнение области Λ_k, а $\Lambda_r(X)$ — область, определяемая эрмитовой матрицей X в виде

$$\Lambda_r(X) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \, Z_r(\lambda) X Z_r^*(\lambda) = \sum_{i,j=0}^{r} \lambda^i \overline{\lambda}^j X_{ij} \geq 0\Big\},$$

где $Z_r(\lambda) = \big[I_n, \lambda I_n, \ldots, \lambda^r I_n\big]$.

Теорема 1.6.3 *Пусть для некоторых матриц G, $H = H^*$ и $X = X^*$ выполняются включения*

$$\widehat{\Lambda}_k \subseteq \Lambda_r(X) \tag{1.6.15}$$

и одно из матричных неравенств

$$AG^* + GA^* + AHA^* + \mathbf{L}(X) > 0 \tag{1.6.16}$$

или

$$\mathbf{M}(X) > 0. \tag{1.6.17}$$

Тогда все собственные значения матричного полинома $F(\lambda)$ расположены в области Λ_k.

Доказательство. Матрица R размеров $m{+}1 \times (k{+}1)(r{+}1)$, определенная в (1.6.14), имеет следующую структуру:

$$R = \left[\begin{array}{c|c|c|c} I_{r+1} & 0_{1\times r+1} & & 0_{1\times r+1} \\ 0_{1\times r+1} & I_{r+1} & \ldots & 0_{k-1\times r+1} \\ 0_{k-1\times r+1} & 0_{k-1\times r+1} & & I_{r+1} \end{array}\right].$$

Очевидно, что $F_m(\lambda) = Z_m(\lambda)A$ и $f(\lambda, \overline{\lambda}) = z_k(\lambda)\Gamma z_k^*(\lambda)$, где

$$Z_m(\lambda) = \big[I_n, \lambda I_n, \ldots, \lambda^m I_n\big] = z_m(\lambda) \otimes I_n, \quad z_m(\lambda) = \big[1, \lambda, \ldots, \lambda^m\big].$$

Используя структуру матрицы C и свойства кронекерового произведения, имеем

$$Z_m(\lambda)C = (z_m(\lambda) \otimes I_n)(R \otimes I_n) = z_m(\lambda)R \otimes I_n =$$

$$= \big[z_r(\lambda), \lambda z_r(\lambda), \dots, \lambda^k z_r(\lambda)\big] \otimes I_n = z_k(\lambda) \otimes Z_r(\lambda).$$

Умножив матричное неравенство (1.6.16) слева (справа) на матрицу полного ранга $Z_m(\lambda)$ $(Z_m^*(\lambda))$, получим

$$F_m(\lambda)G_m^*(\lambda) + G_m(\lambda)F_m^*(\lambda) + F_m(\lambda)HF_m^*(\lambda) +$$

$$+[z_k(\lambda) \otimes Z_r(\lambda)](\Gamma \otimes X)\big[z_k^*(\lambda) \otimes Z_r^*(\lambda)\big] =$$

$$= F_m(\lambda)G_m^*(\lambda) + G_m(\lambda)F_m^*(\lambda) + F_m(\lambda)HF_m^*(\lambda) +$$

$$+ f(\lambda, \overline{\lambda})Z_r(\lambda)XZ_r^*(\lambda) > 0,$$

где $G_m(\lambda) = G_0 + \lambda G_1 + \dots + \lambda^m G_m$ — некоторый матричный полином.

Пусть $\lambda = \lambda_0 \in \sigma(F)$ — произвольное собственное значение матричного полинома $F(\lambda)$ и $\lambda_0 \notin \Lambda_k$, т. е. $\lambda_0 \in \widehat{\Lambda}_k$. Тогда согласно (1.6.15) $f(\lambda_0, \overline{\lambda}_0)\, Z_r(\lambda_0)XZ_r^*(\lambda_0) \le 0$ и, следовательно,

$$F_m(\lambda_0)G_m^*(\lambda_0) + G_m(\lambda_0)F_m^*(\lambda_0) + F_m(\lambda_0)HF_m^*(\lambda_0) > 0.$$

Однако, это не так, поскольку $\sigma(F) \subseteq \sigma(F_m)$ и

$$v_0^*\big[F_m(\lambda_0)G_m^*(\lambda_0) + G_m(\lambda_0)F_m^*(\lambda_0) + F_m(\lambda_0)HF_m^*(\lambda_0)\big]v_0 = 0,$$

где $v_0^* \ne 0$ — левый собственный вектор матричного полинома $F_m(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F_m)$. Из полученного противоречия следует, что при условиях (1.6.15) и (1.6.16) должно быть $\lambda_0 \in \Lambda_k$.

Тот факт, что неравенство (1.6.17) также обеспечивает включение $\sigma(F) \subset \Lambda_k$, устанавливается путем конгруэнтного преобразования выражения (1.6.16) с матрицей $T = [A^{+*}, A^{\perp}]$ и применения леммы Шура (см. доказательство леммы 1.6.1).

Теорема доказана.

Теорема 1.6.3 обобщает и развивает известные методы локализации спектра матричного полинома, предложенные в [109, 110] для класса областей Λ_1. Она сформулирована без ограничений на порядок используемых алгебраических кривых, а условие (1.6.15) в общем случае не требует положительной определенности решений соответствующих матричных неравенств.

Замечание 1.6.2 Доказательство теоремы 1.6.3 может быть получено в виде следствия леммы 1.6.1. Действительно, в случае матричного полинома следует положить $f_i(\lambda) = \lambda^i$, $i = \overline{0, m}$, и при условии (1.6.15) выполняется включение $\Omega \subseteq \Lambda_k$. Ограничение (1.6.15) на блочную матрицу X выполняется для любой области Λ_k в том случае, когда $\Lambda_r(X)$ — вся комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы искомая матрица X была *положительно* (*неотрицательно*) *λ-определенной*, т. е.

$$Z_r(\lambda) X Z_r^*(\lambda) = \sum_{i,j=0}^{r} \lambda^i \overline{\lambda}^j X_{ij} > 0 \; (\geq 0), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Данное свойство имеет, например, блочная матрица X, положительно (неотрицательно) определенная в обычном смысле.

Замечание 1.6.3 Если $k \geq s$, то $m = k$, $r = 0$ и $C = I_{n(k+1)}$. В этом случае в (1.6.16) и (1.6.17) используем операторы $\mathbf{L}(X) = \Gamma \otimes X$ и $\mathbf{M}(X) = A^{\perp *} L(X) A^{\perp}$. При этом неизвестные матрицы X и H имеют одинаковые размеры $n \times n$ и в теореме 1.6.3 вместо условия (1.6.15) используем неравенство $X = X^* \geq 0$ $(X \neq 0)$.

Отметим, что если $\det A_0 \neq 0$, то матрицу $A^{\perp *}$, удовлетворяющую соотношениям (1.6.3), всегда можно построить в виде

$$A^{\perp *} = \begin{bmatrix} \widehat{A}_1 & I_n & \dots & 0_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{A}_m & 0_{n\times n} & \dots & I_n \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_i = \begin{cases} -A_i A_0^{-1}, & i \leq s, \\ 0_{n\times n}, & i > s. \end{cases} \tag{1.6.18}$$

В случае $k = s$ оператор $\mathbf{M}(X)$ в (1.6.17) с учетом (1.6.18) имеет блочную структуру:

$$\mathbf{M}(X) = \begin{bmatrix} Y_{11}(Z) & \dots & Y_{1s}(Z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{s1}(Z) & \dots & Y_{ss}(Z) \end{bmatrix}, \quad X = A_0 Z A_0^*, \qquad (1.6.19)$$

где $Y_{pq}(Z) = \gamma_{00} A_p Z A_q^* - \gamma_{p0} A_0 Z A_q^* - \gamma_{0q} A_p Z A_0^* + \gamma_{pq} A_0 Z A_0^*$, $p, q = \overline{1, s}$.

Если $\det A_0 = 0$, то вместо $F(\lambda)$ и Λ_k можно рассматривать матричный полином $F_\alpha(\lambda)$ и область Λ_k^α вида

$$F_\alpha(\lambda) = F(\lambda + \alpha) = \sum_{i=0}^{s} \lambda^i A_{\alpha i},$$

$$\Lambda_k^\alpha = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : f\big(\lambda + \alpha, \overline{\lambda} + \overline{\alpha}\big) = \sum_{i,j=0}^{k} \gamma_{ij}^\alpha \lambda^i \overline{\lambda}^j > 0 \Big\},$$

где $A_{\alpha 0} = F(\alpha)$, $\det A_{\alpha 0} \neq 0$. Для регулярного матричного полинома $F(\lambda)$ число $\alpha \notin \sigma(F)$ с указанными свойствами существует. При этом $\sigma(F_\alpha) = \sigma(F) - \alpha$ и $\sigma(F) \subset \Lambda_k \iff \sigma(F_\alpha) \subset \Lambda_k^\alpha$.

Существуют различные способы сведения спектральных задач для матричных полиномов к аналогичным задачам для линейных пучков матриц. Приведем метод работы [42], основанный на применении матриц типа $A^\perp$, удовлетворяющих соотношениям (1.6.3). Используя блочное представление $A^{\perp *} = \big[B_0, \dots, B_s\big]$ при $m = s$, построим пучок матриц

$$D_1 - \lambda D_0 = \big[B_1, \dots, B_s\big] - \lambda \big[B_0, \dots, B_{s-1}\big], \qquad (1.6.20)$$

D_0 и D_1 — матрицы размеров $ns \times ns$, и рассмотрим следующие соотношения:

$$v^* F(\lambda) = 0, \quad v \neq 0; \qquad (1.6.21)$$

$$u^* (D_1 - \lambda D_0) = 0, \quad u \neq 0; \qquad (1.6.22)$$

$$u^* A^{\perp *} = v^* Z_s(\lambda), \quad v = B_0^* u \neq 0. \tag{1.6.23}$$

Соотношения (1.6.21) и (1.6.22) определяют собственные значения и соответствующие левые собственные векторы матричного полинома (1.6.11) и пучка матриц (1.6.20). Легко установить эквивалентность соотношений (1.6.22) и (1.6.23). С другой стороны, из определения матрицы $A^{\perp *}$ и представления $F(\lambda) = Z_s(\lambda)A$ вытекает эквивалентность соотношений (1.6.21) и (1.6.23) для некоторого вектора $u \neq 0$. Следовательно, соотношения (1.6.21) и (1.6.22) эквивалентны. Причем, тождественное выполнение одного из равенств (1.6.21) или (1.6.22) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ влечет тождественное выполнение другого из них. Это означает, что свойства регулярности матричного полинома (1.6.11) и пучка матриц (1.6.20) также эквивалентны.

Лемма 1.6.3 *Множества всех различных собственных значений λ_i матричного полинома* (1.6.11) *и пучка матриц* (1.6.20) *совпадают, а их соответствующие левые собственные векторы связаны соотношениями $v_i^* = u_i^* B_0$ $(i = \overline{1, l})$.*

Сформулируем критерии принадлежности спектра матричного полинома $F(\lambda)$ областям класса Λ_1. В этом случае

$$E = \begin{bmatrix} I_s \\ 0_{1\times s} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1\times s} & 0 \\ I_s & 0_{s\times 1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(X) = \gamma_{00} D_0 X D_0^* + \gamma_{01} D_0 X D_1^* + \gamma_{10} D_1 X D_0^* + \gamma_{11} D_1 X D_1^*,$$

где D_0 и D_1 — матрицы линейного пучка (1.6.20).

Учитывая лемму 1.6.3 и общие свойства положительно обратимых операторов в пространстве эрмитовых матриц, сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1.6.4 *Включение $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ выполняется в том и только том случае, когда существуют эрмитовы матрицы X и Y, удовлетворяющие соотношениям*

1) $\mathbf{M}(X) = Y \geq 0$, $\operatorname{rank}\big[D_1 - \lambda D_0, Y\big] \equiv ns$ $(\lambda \in \widehat{\Lambda}_1)$, $D_0 X D_0^* \geq 0$.

Если матрица D_0 невырожденная, то данное включение эквивалентно каждому из следующих утверждений:

2) *матричное неравенство $\mathbf{M}(X) > 0$ разрешимо относительно $X = X^* > 0$;*

3) *для любой матрицы $Y = Y^* > 0$ матричное уравнение $\mathbf{M}(X) = Y$ имеет решение $X = X^* > 0$;*

4) *оператор $\mathbf{M}$ положительно обратим относительно конуса неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}_{ns}$.*

Доказательство утверждения достаточности критерия 1) состоит в следующем. Если предположить, что некоторое собственное значение $\lambda \in \widehat{\Lambda}_1$, то согласно (1.6.22) для соответствующего левого собственного вектора u^* должны выполняться противоречивые соотношения

$$f(\lambda, \overline{\lambda}) \leq 0, \quad u^* D_0^* X D_0 u \geq 0, \quad f(\lambda, \overline{\lambda})\, u^* D_0^* X D_0 u = u^* Y u > 0.$$

При условии $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ матрицы X и Y в критерии 1) всегда можно построить в виде (см. лемму 1.4.3)

$$X = Z\widehat{X}Z^*, \quad Y = D_0 Z \widehat{Y} Z^* D_0^*, \quad \operatorname{rank}\big[D_1 Z, D_0 Z\big] = \operatorname{rank}(D_0 Z).$$

В случае невырожденной матрицы D_0 критерии 2) – 4) вытекают из теоремы 1.2.1.

Пример 1.6.2 Пусть $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1$ — регулярный пучок матриц и Λ_1 — область вида (1.6.12). Матричное выражение (1.6.16) в теореме 1.6.3 имеет вид

$$\left[\begin{array}{c|c} A_0 H A_0^* + A_0 G_0^* + G_0 A_0^* + \gamma_{00} X & A_0 H A_1^* + A_0 G_1^* + G_0 A_1^* + \gamma_{01} X \\ \hline A_1 H A_0^* + A_1 G_0^* + G_1 A_0^* + \gamma_{10} X & A_1 H A_1^* + A_1 G_1^* + G_1 A_1^* + \gamma_{11} X \end{array}\right].$$

Матричное неравенство, построенное с использованием оператора (1.6.19) для линейного пучка $F_\alpha(\lambda) = F(\alpha) + \lambda A_1$ и области $\Lambda_1^\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} : f(\lambda + \alpha, \overline{\lambda} + \overline{\alpha}) > 0\}$, приводится к виду

$$\mathbf{M}(X) = \gamma_{00} A_1 Z A_1^* - \gamma_{10} A_0 Z A_1^* - \gamma_{01} A_1 Z A_0^* + \gamma_{11} A_0 Z A_0^* > 0.$$

При этом $X = F(\alpha)ZF^*(\alpha)$, $A^{\perp *} = \big[B_0, B_1\big] = \big[-A_1F^{-1}(\alpha), I_n\big]$, $\alpha \notin \sigma(F)$. Данное неравенство в силу эквивалентности включений $\sigma(F) \subset \Lambda_1$ и $\sigma(F_\alpha) \subset \Lambda_1^\alpha$ можно использовать в утверждениях теорем 1.6.3 и 1.6.4 для исходного пучка матриц $F(\lambda)$ и области Λ_1. В частности, существование решений $Z = Z^* > 0$ матричных неравенств $A_0ZA_1^* + A_1ZA_0^* > 0$ и $A_1ZA_1^* - A_0ZA_0^* > 0$ равносильно размещению спектра $\sigma(F)$ внутри соответственно левой полуплоскости и единичного круга.

Пример 1.6.3 Пусть $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$ — регулярный квадратичный пучок матриц и Λ_k — область вида (1.6.12), $k \le 2$. Для класса областей Λ_1 имеем

$$1 = k < s = 2, \quad m = 2, \quad r = 1, \quad X = \begin{bmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(X) = \begin{bmatrix} \gamma_{00}X_{00} & \gamma_{00}X_{01} + \gamma_{01}X_{00} & \gamma_{01}X_{01} \\ \gamma_{00}X_{10} + \gamma_{10}X_{00} & \sum\limits_{i,j=0}^{1} \gamma_{ij}X_{1-i1-j} & \gamma_{01}X_{11} + \gamma_{11}X_{01} \\ \gamma_{10}X_{10} & \gamma_{10}X_{11} + \gamma_{11}X_{10} & \gamma_{11}X_{11} \end{bmatrix}.$$

Для класса областей Λ_2 в (1.6.16) и (1.6.19) используем операторы

$$\mathbf{L}(X) = \begin{bmatrix} \gamma_{00}X & \gamma_{01}X & \gamma_{02}X \\ \gamma_{10}X & \gamma_{11}X & \gamma_{12}X \\ \gamma_{20}X & \gamma_{21}X & \gamma_{22}X \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}(X) = \begin{bmatrix} Y_{11}(Z) & Y_{12}(Z) \\ Y_{21}(Z) & Y_{22}(Z) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} Y_{11}(Z) &= \gamma_{00}A_1ZA_1^* - \gamma_{10}A_0ZA_1^* - \gamma_{01}A_1ZA_0^* + \gamma_{11}A_0ZA_0^*, \\ Y_{12}(Z) &= \gamma_{00}A_1ZA_2^* - \gamma_{10}A_0ZA_2^* - \gamma_{02}A_1ZA_0^* + \gamma_{12}A_0ZA_0^*, \\ Y_{22}(Z) &= \gamma_{00}A_2ZA_2^* - \gamma_{20}A_0ZA_2^* - \gamma_{02}A_2ZA_0^* + \gamma_{22}A_0ZA_0^*. \end{aligned}$$

Пример 1.6.4 Пусть $F(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda^s a_s$ — скалярный полином степени s. Матричное неравенство (1.6.16) имеет вид $ag^* + ga^* + haa^* + \mathbf{L}(X) > 0$, где $a \in \mathbb{C}^{s+1}$ — вектор коэффициентов полинома $F(\lambda)$, $h \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{C}^{s+1}$. При определении оператора $\mathbf{L}(X)$ для класса областей Λ_1 используем матрицы

$$E = \begin{bmatrix} I_s \\ 0_{1\times s} \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 0_{1\times s} & 0 \\ I_s & 0_{s\times 1} \end{bmatrix}, R = \left[\begin{array}{c|c} I_s & 0_{1\times s} \\ 0_{1\times s} & I_s \end{array}\right], X = \|x_{ij}\|_{i,j=0}^{s-1}.$$

В частности, для левой полуплоскости и единичного круга, отвечающим матрицам (1.6.13), данный оператор имеет соответствующий вид:

$$\mathbf{L}(X) = -\begin{bmatrix} 0 & x_{00} & \dots & x_{0s-2} & x_{0s-1} \\ x_{00} & x_{01}+x_{10} & \dots & x_{0s-1}+x_{1s-2} & x_{1s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{s-20} & x_{s-10}+x_{s-21} & \dots & x_{s-1s-2}+x_{s-2s-1} & x_{s-1s-1} \\ x_{s-10} & x_{s-11} & \dots & x_{s-1s-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}(X) = \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0s-1} & 0 \\ x_{10} & x_{11}-x_{00} & \dots & x_{1s-1}-x_{0s-2} & -x_{0s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{s-10} & x_{s-11}-x_{s-20} & \dots & x_{s-1s-1}-x_{s-2s-2} & -x_{s-2s-1} \\ 0 & -x_{s-10} & \dots & -x_{s-1s-2} & -x_{s-1s-1} \end{bmatrix}.$$

Для каждой области Λ_k при $k \geq s$ оператор $\mathbf{L}(X) = x\Gamma$ является матричнозначной функцией скалярного аргумента $X = x$.

1.6.3 Робастная локализация спектра

В приложениях важными являются задачи робастной устойчивости и робастной локализации спектра, формулируемые для заданных семейств динамических систем. При решении данных задач могут оказаться полезными сформулированные выше результаты для матричных функций и полиномов.

Рассмотрим класс областей Λ_k вида (1.6.12) и параметрическое семейство регулярных матричных полиномов размера $n\times n$

$$F(\lambda,p)=A_0(p_0)+\lambda A_1(p_1)+\dots+\lambda^s A_s(p_s), \tag{1.6.24}$$

где значения матричных коэффициентов $A_i(p_i)$, зависящих от векторных параметров

$$p_i=[p_{i1},\dots,p_{i\nu_i}]^T\in\mathcal{P}_{\nu_i}=\Big\{q\in\mathbb{R}^{\nu_i}:\ q_k\geq 0,\ \sum_{k=1}^{\nu_i}q_k=1\Big\},$$

образуют семейство политопов $\mathcal{A}_i=\mathrm{Co}\big\{A_{i1},\dots,A_{i\nu_i}\big\}$, $i=\overline{0,s}$. Общий вектор параметров $p=[p_0^T,\dots,p_s^T]^T\in\mathcal{P}=\mathcal{P}_{\nu_0}\times\dots\times\mathcal{P}_{\nu_s}$ имеет порядок $\nu=\nu_0+\dots+\nu_s$.

Пусть $s\geq 1$, $k\geq 1$, $m=\max\{s,k\}$ и $r=m-k$. Выделим все матричные полиномы, отвечающие вершинам политопов:

$$F_{t_0\dots t_s}(\lambda)=A_{0t_0}+\lambda A_{1t_1}+\dots+\lambda^s A_{st_s},\quad t_i\in\{1,\dots,\nu_i\},\quad i=\overline{0,s}.$$

Их количество равно $\nu_0\cdots\nu_s$. Если $\nu_i=1$, то $t_i=1$ и в (1.6.24) соответствующий матричный коэффициент A_i не зависит от p_i.

Теорема 1.6.5 *Пусть для некоторых матриц G, $H=H^*\leq 0$ и $X_{t_0\dots t_s}=X^*_{t_0\dots t_s}$, $t_i\in\{1,\dots,\nu_i\}$, выполняются условие* (1.6.15) *и система матричных неравенств*

$$A_{t_0\dots t_s}G^*+GA^*_{t_0\dots t_s}+A_{t_0\dots t_s}HA^*_{t_0\dots t_s}+\mathbf{L}(X_{t_0\dots t_s})>0, \tag{1.6.25}$$

где $\mathbf{L}$ — линейный оператор, определенный в (1.6.14),

$$A_{t_0\dots t_s}=\begin{bmatrix}A_0\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix},\quad A_i=\begin{cases}A_{it_i}, & i\leq s\\ 0, & i>s\end{cases},\quad i=\overline{0,m}.$$

Тогда при любом $p\in\mathcal{P}$ все собственные значения матричного полинома (1.6.24) *расположены в области Λ_k вида* (1.6.12).

Доказательство. Покажем, что для любого $p \in \mathcal{P}$ выполняется матричное неравенство

$$A(p)G^* + GA^*(p) + A(p)HA^*(p) + \mathbf{L}(X(p)) > 0, \qquad (1.6.26)$$

где

$$A(p) = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{cases} A_i(p_i), & i \le s \\ 0_{n\times n}, & i > s \end{cases}, \quad i = \overline{0, m},$$

$X(p)$ — неотрицательная линейная комбинация матриц $X_{t_0 \ldots t_s}$, удовлетворяющая условию (1.6.15).

Все неравенства системы (1.6.25) упорядочиваются наборами индексов $\{t_0 \ldots t_s\}$. Зафиксируем индексы $i = 0$ и $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}$, $j \ne 0$. Затем умножим ν_0 неравенств (1.6.25), отвечающих наборам индексов $\{1, t_1 \ldots t_s\}, \ldots, \{\nu_0, t_1 \ldots t_s\}$, соответственно на $p_{01}, \ldots, p_{0\nu_0}$, и просуммируем их, учитывая, что $p_0 = [p_{01}, \ldots, p_{0\nu_0}]^T \in \mathcal{P}_{\nu_0}$. Для всевозможных комбинаций индексов $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}$, $j \ne 0$, выполним такие же операции. Полученные неравенства будем использовать в системе (1.6.25) вместо уже рассмотренных неравенств. При этом все неравенства данной системы можно упорядочить наборами индексов $\{t_1 \ldots t_s\}$, где $t_j \in \{1, \ldots, \nu_j\}$, $j = \overline{1, s}$. Аналогичную процедуру выполним при каждом $i = \overline{1, s}$, используя векторы $p_i = [p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}]^T \in \mathcal{P}_{\nu_i}$. На последнем шаге получим одно блочное неравенство, к первым $s + 1$ диагональным блокам которого прибавим и вычтем соответствующие выражения $A_i(p_i)HA_i(p_i)^*$. В результате получим неравенство

$$A(p)G^* + GA^*(p) + A(p)HA^*(p) + S(p) + \mathbf{L}(X(p)) > 0,$$

где $S(p)$ — блочно-диагональная матрица с диагональными блоками

$$S_i = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\nu_i} p_{ij} A_{ij} H A_{ij}^* - A_i(p_i) H A_i^*(p_i), & i \le s, \\ 0_{n\times n}, & i > s, \end{cases} \qquad i = \overline{1, m}.$$

Представим первые s данных блоков в виде $S_i = W_i\big[(P_i - p_i p_i^T) \otimes H\big] W_i^*$, где $W_i = [A_{i1}, \ldots, A_{i\nu_i}]$, $P_i = \mathrm{diag}\{p_{i1}, \ldots, p_{i\nu_i}\}$. Согласно лемме 1.5.1 $P_i \geq p_i p_i^T$ при $p_i \in \mathcal{P}_i$. Поскольку $H = H^* \leq 0$, то с учетом свойств кронекерового произведения эрмитовых матриц получаем, что $S(p) \leq 0$ при $p \in \mathcal{P}$. Следовательно, выполняется матричное неравенство (1.6.26) и согласно теореме 1.6.3 все собственные значения матричного полинома (1.6.24) расположены в области Λ_k вида (1.6.12) для любого $p \in \mathcal{P}$.

Теорема доказана.

Замечание 1.6.4 Если система матричных неравенств (1.6.25) выполняется при $H = H^* \leq 0$, то она выполняется и при $H = 0$. Поэтому при использовании теоремы 1.6.5 всегда можно положить $H = 0$. Если $H = H^* < 0$, то матричное неравенство (1.6.26) эквивалентно блочному неравенству

$$\begin{bmatrix} A(p)G^* + GA^*(p) + \mathbf{L}(X(p)) & A(p) \\ A^*(p) & -H^{-1} \end{bmatrix} > 0. \qquad (1.6.27)$$

В аналогичном виде представляются все неравенства системы (1.6.25). Зависимость от параметров p в (1.6.27) линейна. Поэтому в данном случае можно провести доказательство теоремы 1.6.5 без использования леммы 1.5.1.

Теорему 1.6.5 можно использовать для параметрических и интервальных семейств регулярных матричных полиномов

$$F(\lambda, p) = \sum_{i=1}^{\nu} p_i(A_{0i} + \lambda A_{1i} + \cdots + \lambda^s A_{si}), \quad p \in \mathcal{P}_\nu, \qquad (1.6.28)$$

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s, \quad \underline{A}_i \leq A_i \leq \overline{A}_i, \quad i = \overline{0, s}. \quad (1.6.29)$$

Семейство (1.6.24) можно привести к виду (1.6.28) в том случае, когда все векторы параметров $p_i \in \mathcal{P}_{\nu_i}$ имеют одинаковую размерность ν и совпадают. В этом случае система (1.6.25) состоит из ν матричных неравенств. Интервальное семейство (1.6.29), наиболее часто используемое в приложениях, также описывается в виде (1.6.24) (см. замечание 1.5.2). При этом система (1.6.25) состоит из $2^{(s+1)n^2}$ матричных неравенств.

Отметим, что с помощью лемм 1.6.1 и 1.6.2 можно получить аналоги теоремы 1.6.5 для семейств матричных функций

$$F(\lambda, p) = \sum_{i=0}^{s} f_i(\lambda) A_i(p_i), \ \det F(\lambda, p) \not\equiv 0, \ p = [p_0^T, ..., p_s^T]^T \in \mathcal{P},$$

и соответствующих классов областей вида (1.6.2).

Пример 1.6.5 Рассмотрим управляемую двухмассовую механическую систему (рис. 1.1), описываемую уравнениями [92]

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + d_1 \dot{x}_1 + (c_1 + c_{12}) x_1 - c_{12} x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + d_2 \dot{x}_2 + (c_2 + c_{12}) x_2 - c_{12} x_1 = u. \end{cases} \tag{1.6.30}$$

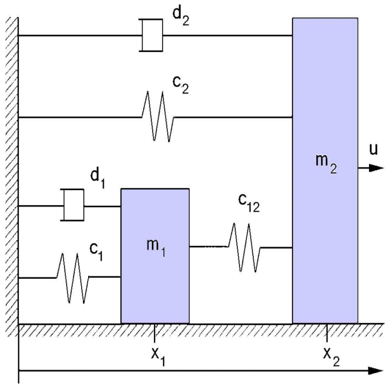


Рис. 1.1. Механическая система.

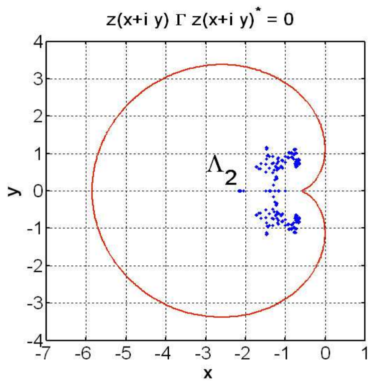


Рис. 1.2. Область Λ_2.

В [109] проведен анализ робастной устойчивости данной системы с интервальной неопределенностью параметров $\underline{a} \le a = [c_1, c_2, d_1, d_2, m_1, m_2] \le \overline{a}$ и требованием размещения спектра внутри круга радиуса 12 с центром в точке $(-12, 0)$.

Определим в левой полуплоскости область

$$\Lambda_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ z(\lambda)\Gamma z^*(\lambda) > 0\}, \qquad (1.6.31)$$

где

$$z(\lambda) = \begin{bmatrix}1, \lambda, \lambda^2\end{bmatrix}, \quad \Gamma = -\begin{bmatrix} \frac{9}{16}\alpha^4 & \frac{7}{4}\alpha^3 & \frac{9}{4}\alpha^2 \\ \frac{7}{4}\alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha \\ \frac{9}{4}\alpha^2 & 3\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

Границей данной области является кривая 4-го порядка, называемая улиткой Паскаля (рис. 1.2), уравнение которой имеет вид $[(x+h)^2 + y^2 + 2\alpha(x+h)]^2 - \beta^2[(x+h)^2 + y^2] = 0$, где $\beta = 2\alpha$, $h = \alpha/2$. Положим $\alpha = 1.3$, $\underline{a} = \begin{bmatrix}5, 6, 6, 9, 2, 4\end{bmatrix}$, $\overline{a} = \begin{bmatrix}6, 7, 7, 10, 4, 7\end{bmatrix}$, $c_{12} = 1$. Тогда интервальный матричный полином (1.6.29), соответствующий разомкнутой системе, имеет вид $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$, где

$$\underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \le A_0 = \begin{bmatrix} c_1+1 & -1 \\ -1 & c_2+1 \end{bmatrix} \le \overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \le A_1 = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \le \overline{A}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \le A_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \le \overline{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Система (1.6.25) с неизвестными $X_{t_0t_1t_2}$, G и H состоит из 64-х матричных неравенств. Полагая $G_i = (\underline{A}_i + \overline{A}_i)/2$ $(i = 0, 1, 2)$ и $H = 0$, с помощью системы MATLAB установлено, что эта система имеет решение $X = X^* > 0$. Следовательно, система (1.6.30) робастно устойчива и все ее собственные значения находятся в области (1.6.31) при указанных интервальных неопределенностях. На рис. 1.2 показано расположение всех собственных значений 64-х квадратичных пучков матриц $F_{t_0t_1t_2}(\lambda)$ $(t_0, t_1, t_2 \in \{1, \ldots, 4\})$ в данной области.

1.7 Матричные неравенства в терминах функций следа

1.7.1 Функции следа $\mu(A)$ и $\mu_*(A)$

В пространстве матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ введем скалярные функции

$$\mu(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - \nu\,\mathrm{tr}A^2, \quad \mu_*(A) = \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}A^* - \nu\,\mathrm{tr}(AA^*), \quad (1.7.1)$$

где ν — заданное вещественное число. Поскольку след матрицы совпадает с суммой ее собственных значений, то

$$\mu(A) = \varphi(z) \triangleq \Big(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\Big)^2 - \nu\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2,$$

где $z = \xi + i\eta$, $\xi = \big[\xi_1,\dots,\xi_n\big]^T$, $\eta = \big[\eta_1,\dots,\eta_n\big]^T$, $\lambda_k = \xi_k + i\eta_k \in \sigma(A)$, $k = \overline{1,n}$. Если спектр $\sigma(A)$ вещественный, то $\mu(A) = \varphi(\xi) \in \mathbb{R}$. Функция $\mu_*(A)$ всегда принимает вещественные значения и представляется в виде

$$\mu_*(A) = \mu(A_R) + \mu(A_I), \quad (1.7.2)$$

где $A_R = (A + A^*)/2$ и $A_I = (A - A^*)/(2i)$ — эрмитовы составляющие в разложении $A = A_R + iA_I$.

Имеют место неравенства [20]

$$\mathrm{tr}(AA^*) \geq \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2, \quad \mathrm{tr}A_R^2 \geq \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2, \quad \mathrm{tr}A_I^2 \geq \sum_{k=1}^{n}\eta_k^2. \quad (1.7.3)$$

Здесь равенства выполняются в том и только в том случае, когда матрица A *нормальная*, т. е. $AA^* = A^*A$. Соотношения (1.7.3) являются следствием более общих неравенств Вейля для собственных и сингулярных чисел матрицы [21]. С помощью соотношений (1.7.1) – (1.7.3) при $\nu \geq 0$ можно установить неравенства

$$\mu(A_R) \leq \varphi(\xi), \quad \mu(A_I) \leq \varphi(\eta), \quad \mu_*(A) \leq \varphi(\xi) + \varphi(\eta). \quad (1.7.4)$$

Очевидно, что если $\nu \le 0$, то $\varphi(\xi) \ge 0$ для любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если же $\nu \ge n$, то из представления

$$\varphi(\xi) = (n-\nu)\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 - \sum_{k<s\le n}(\xi_k - \xi_s)^2 \tag{1.7.5}$$

следует $\varphi(\xi) \le 0$. Далее будем предполагать, что $0 \le \nu \le n$.

Отметим, что представление (1.7.5) является следствием тождества Лагранжа [20]

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k\Big)^2 \equiv \sum_{k<s\le n}(\xi_k\eta_s - \xi_s\eta_k)^2.$$

Обозначим через $p(A)$ и $q(A)$ количества собственных значений матрицы A с учетом кратностей соответственно с положительными и отрицательными вещественными частями.

Лемма 1.7.1 *Если выполняются условия*

$$\mathrm{tr}A_R > 0, \quad \mu(A_R) > 0, \quad 0 \le \nu < n, \tag{1.7.6}$$

то $p(A) > \nu$. *Аналогично,* $q(A) > \nu$*, если*

$$\mathrm{tr}A_R < 0, \quad \mu(A_R) > 0, \quad 0 \le \nu < n. \tag{1.7.7}$$

Доказательство. Так как $\mathrm{tr}A_R = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, то из неравенства $\mathrm{tr}A_R > 0$ следует, что $p(A) \ge 1$. Пусть $\xi_k > 0$ $(k = \overline{1,p})$ и $\xi_k \le 0$ $(k = \overline{p+1,n})$, где $p = p(A) < n$. В случае $p = n$ неравенство $p > \nu$ выполняется согласно предположению $\nu < n$.

Если $\mu(A_R) > 0$, то $\varphi(\xi) > 0$ и с учетом соотношений (1.7.5), (1.7.6) и

$$\mathrm{tr}A_R = \sum_{k=1}^{p}\xi_k + \sum_{k=p+1}^{n}\xi_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{p}\xi_k\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k \le -\Big(\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k\Big)^2,$$

получаем

$$\varphi(\xi) = \Big(\sum_{k=1}^{p}\xi_k\Big)^2 + \Big(\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k\Big)^2 + 2\sum_{k=1}^{p}\xi_k\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k - \nu\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 \le$$

$$\le \Big(\sum_{k=1}^{p}\xi_k\Big)^2 - \nu\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2 - \Big(\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k\Big)^2 - \nu\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k^2 =$$

$$= (p-\nu)\sum_{k=1}^{p}\xi_k^2 - \sum_{k<s\le p}(\xi_k-\xi_s)^2 - \Big(\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k\Big)^2 - \nu\sum_{k=p+1}^{n}\xi_k^2.$$

Отсюда следует необходимость выполнения неравенства $p > \nu$.

Аналогично можно установить, что неравенство $q > \nu$ является следствием соотношений (1.7.7). Кроме того, можно воспользоваться доказанным утверждением, так как $q(A) = p(-A)$.

Лемма доказана.

Замечание 1.7.1 Из доказательства леммы 1.7.1 следует, что нестрогие неравенства $p(A) \ge \nu$ и $q(A) \ge \nu$ выполняются при $0 < \nu \le n$, если $\mu(A_R) \ge 0$ и соответственно $\mathrm{tr}A_R > 0$ и $\mathrm{tr}A_R < 0$. Если же $\mu(A_R) \ge 0$ при $0 \le \nu \le n$, то можно гарантировать, что $q(A) \le n-\nu$ и $p(A) \le n-\nu$, если соответственно $\mathrm{tr}A_R \ge 0$ и $\mathrm{tr}A_R \le 0$.

Замечание 1.7.2 Если матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет вещественный спектр или $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то в (1.7.4) $\varphi(\eta) \le 0$. В этом случае утверждения леммы 1.7.1 и замечание 1.7.1 сохраняют силу, если вместо $\mu(A_R)$ использовать функцию $\mu_*(A)$.

Если матрица A эрмитова, то ее спектр вещественный и функции $\mu(A)$, $\mu(A_R)$ и $\mu_*(A)$ совпадают. В этом случае имеем следующее утверждение.

Следствие 1.7.1 *Пусть $A = A^*$ — эрмитова матрица и выполняются условия $\mu(A) > 0$ и $n-1 \le \nu < n$. Тогда она положительно (отрицательно) определена в том и только в* *том случае, когда* $\mathrm{tr}A > 0$ $(\mathrm{tr}A < 0)$. *Если же* $\mu(A) \geq 0$ *и* $n-1 \leq \nu \leq n$, *то неотрицательная (неположительная) определенность матрицы* $A = A^*$ *эквивалентна неравенству* $\mathrm{tr}A \geq 0$ $(\mathrm{tr}A \leq 0)$.

1.7.2 Локализация и дихотомия спектра матрицы относительно аналитических кривых

Пусть аналитическая кривая Λ_f^0 вида (1.2.4) разделяет комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две непустые области Λ_f^+ и Λ_f^-, где $f(\lambda,\overline{\lambda}) = \sum\limits_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(\lambda)\overline{f_j(\lambda)}$ — эрмитова функция, γ_{ij} — коэффициенты эрмитовой матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_1^r$. Поставим в соответствие матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и функции f линейный оператор

$$\mathbf{L}_f X = \sum_{i,j=1}^{r} \gamma_{ij} f_i(A) X f_j^*(A). \tag{1.7.8}$$

При условиях обратимости (1.2.6) данного оператора имеет место *дихотомия спектра* $\sigma(A)$ относительно кривой Λ_f^0, т. е. $\sigma(A)\cap\Lambda_f^0 = \emptyset$. Понятие *экспоненциальной дихотомии* для класса линейных систем является обобщением свойства дихотомии спектра относительно мнимой оси [124].

Используя теоремы 1.2.1, 1.2.2 и следствие 1.7.1, получаем следующие утверждения.

Теорема 1.7.1 *Пусть* $\nu \in [\,n-1, n)$ *и для некоторой матрицы* $X = X^*$ *совместна система неравенств*

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{L}_f X) > 0, \quad \mu(\mathbf{L}_f X) > 0, \tag{1.7.9}$$

Тогда выполняются следующие утверждения:

1) $\sigma(A) \cap \Lambda_f^0 = \emptyset$;
2) *если* $X > 0$, *то* $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$;
3) *если* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, *то* $\mathrm{i}_0(X) = 0$;

4) *если* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = \mathrm{i}_-(\Gamma) = 1$*, то в областях* Λ_f^+ *и* Λ_f^- *расположены соответственно* $\mathrm{i}_+(X)$ *и* $\mathrm{i}_-(X)$ *собственных значений матрицы* A *с учетом кратностей.*

Замечание 1.7.3 Если оператор $\mathbf{L}_f$ обратим, то система неравенств (1.7.9) имеет решение $X = X^*$. Например, решение матричного уравнения

$$\mathbf{L}_f X = Y, \tag{1.7.10}$$

где $Y = \alpha I_n$, $\alpha > 0$, удовлетворяет системе (1.7.9). Если $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$, то включение $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ выполняется в том и только в том случае, когда для любой матрицы $Y = Y^* > 0$ уравнение (1.7.10) имеет решение $X = X^* > 0$ (см. параграф 1.2).

Таким образом, имеем следующий критерий включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$.

Теорема 1.7.2 *Пусть* $\nu \in [\,n-1, n)$ *и* $\mathrm{i}_+(\Gamma) = 1$*. Тогда все собственные значения матрицы* A *расположены в области* Λ_f^+ *в том и только в том случае, когда система неравенств* (1.7.9) *имеет решение* $X = X^* > 0$*.*

Условия локализации и распределения спектра матрицы A в теоремах 1.7.1 и 1.7.2 можно ослабить, используя свойства типа управляемости пары матриц (A, Y), где $Y = \mathbf{L}_f X \geq 0$ (см. леммы 1.2.7 и 1.2.8). Например, в утверждении 2) теоремы 1.7.1 вместо условий (1.7.9) можно использовать соотношения

$$\operatorname{tr} Y > 0, \quad \mu(Y) \geq 0, \quad \operatorname{tr}(\mathbf{W}Y) > 0, \quad \mu(\mathbf{W}Y) > 0,$$

где $Y = \mathbf{L}_f X$, $\quad \mathbf{W}Y = \sum\limits_{k=0}^{q-1} A^k Y A^{*k}$, $q = \min\{m, n - \operatorname{rank} Y + 1\}$, $m \leq n$ — степень минимального полинома матрицы A.

Отметим, что изложенные в параграфе 1.6 утверждения о локализации собственных значений матричных функций, а также различные методы анализа и синтеза систем, связанные с матричными неравенствами, могут быть сформулированы с использованием введенных функций следа $\mu(A)$ и $\mu_*(A)$ вида (1.7.1).

Глава 2

Устойчивость и робастность динамических систем

В классической теории устойчивости движения объектами исследования являются точные математические модели. Однако, в реальных задачах неизбежно возникают разного рода неопределенности, которые в уравнениях движения присутствуют в виде неизвестных параметров, коэффициентов, случайных возмущений и т. п. Данные неопределенные элементы описывают некоторые множества, характеризующие робастность (грубость) изучаемых математических моделей. В качестве множеств неопределенностей обычно используются интервалы, политопы, аффинные и эллипсоидальные множества матриц и др. Современные методы исследования показателей качества таких систем и, прежде всего, устойчивости состояний равновесия позволяют обеспечить высокую надежность функционирования моделируемых объектов в реальных условиях.

Проблема робастной устойчивости динамической системы состоит в описании условий асимптотической устойчивости ее состояний равновесия в терминах исходных данных и множеств неопределенностей математической модели. Данная глава посвящена методам решения данной проблемы для некоторых классов систем с полиэдральной неопределенностью матричных коэффициентов. В параграфе 2.1 приводятся основные понятия и теоремы об устойчивости состояний равновесия нелинейных дифференциальных систем. В параграфе 2.2 формулируются критерии и достаточные условия устойчивости классов линейных автономных и неавтономных систем. В параграфе 2.3 излагаются способы построения алгебраических условий устойчивости класса линейных дифференциальных систем второго порядка. В терминах линейных матричных неравенств формулируются условия робастной абсолютной устойчивости линейных систем с запаздыванием (параграф 2.4) и условия робастной устойчивости в среднеквадратическом стохастических систем типа Ито (параграф 2.5). Результаты параграфа 1.7 используются при построении условий асимптотической устойчивости линейных систем, не разрешенных относительно производных (параграф 2.6).

2.1 Основные определения и теоремы об устойчивости движения

Рассмотрим систему *нелинейных* дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = g(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, определенный в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0$ его начального значения x_0, g — векторная функция, непрерывная по всем аргументам и удовлетворяющая *условию Липшица*

$$\|g(x,t) - g(z,t)\| \leq L\|x - z\|, \quad x, z \in \mathcal{S}_0, \quad L = \text{const} > 0.$$

В качестве $\mathcal{S}_0$ обычно служит шар $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq h\}$.

При данных предположениях выполняются теоремы о локальном существовании на конечном интервале, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных $t_0 > 0$ и $x_0 \in \mathcal{S}_0$ решения $x(t) = X(t, t_0, x_0)$ системы (2.1.1). В теории устойчивости Ляпунова каждое решение системы бесконечно продолжимо вправо, т. е. $x(t) \in \mathcal{S}_0$ существует при $t_0 \leq t < \infty$. Пусть $z(t) = Z(t, t_0, z_0)$ — одно из таких решений системы (2.1.1), $z(t_0) = z_0$.

Определение 2.1.1 Решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что любое другое решение $x(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяет условию

$$\|x_0 - z_0\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \|x(t) - z(t)\| \leq \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Если при этом $\delta = \delta(\varepsilon)$ не зависит от t_0, то устойчивость решения $z(t)$ называется *равномерной* по начальному моменту. Решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *неустойчивым по Ляпунову*, если для некоторых $\varepsilon > 0$, $t_0 > 0$ и любого $\delta > 0$ существуют решение $x(t)$ и момент $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такие, что $\|x_0 - z_0\| < \delta$ и $\|x(t_1 - z(t_1)\| \geq \varepsilon$.

Определение 2.1.2 Решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $t_0 > 0$ существует $\delta = \delta(t_0) > 0$ такое, что все решения $x(t)$ удовлетворяют условию

$$\|x_0 - z_0\| \leq \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \big[x(t) - z(t)\big] = 0. \tag{2.1.3}$$

Множество начальных векторов x_0, для которых выполняется условие (2.1.3), называется *областью притяжения* решения $z(t)$, при этом $z(t)$ является *аттрактором* системы (2.1.1). Если данная область заполняет все пространство $\mathbb{R}^n$, то решение $z(t)$ называется *аимптотически устойчивым в целом*. Решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$ и $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ такие, что все решения $x(t)$ удовлетворяют условию (2.1.3) при $t \geq t_0 + t_1$.

Определение 2.1.3 Решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *экспоненциально устойчивым*, если существуют положительные числа α, β и γ такие, что каждое ее решение $x(t)$ при $\|x_0 - z_0\| \leq \beta$ и $t \geq t_0$ удовлетворяет оценке

$$\|x(t) - z(t)\| \leq \gamma\, \|x_0 - z_0\|\, e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{2.1.4}$$

В данных определениях решение $z(t)$ системы (2.1.1) называется *невозмущенным*, а решение $x(t)$ — *возмущенным*. Если система (2.1.1) *автономная* (f не зависит от t) или ω-*периодическая* $\big(f(x, t + \omega) \equiv f(x, t)\big)$, то каждое ее устойчивое по Ляпунову решение является равномерно устойчивым по начальному моменту, а каждое асимптотически устойчивое решение является равномерно асимптотически устойчивым. Из экспоненциальной устойчивости решения $z(t)$ системы (2.1.1) следует его асимптотическая устойчивость.

Следует отметить, что задачи исследования разных типов устойчивости решения $z(t)$ системы (2.1.1) обычно сводятся к аналогичным задачам об устойчивости нулевого решения $x \equiv 0$ (*состояния равновесия*) системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(0, t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.5}$$

где $f(x, t) = g\big(x + z(t), t\big) - g\big(z(t), t\big)$.

Достаточно универсальным и эффективным методом в теории устойчивости движения является метод *функций Ляпунова* вида $v : \mathcal{S}_0 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{S}_0$ — окрестность начала координат $x = 0$. Такие функции должны быть непрерывно дифференцируемыми и удовлетворять тождеству $v(0, t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Определение 2.1.4 Функция $v(x, t)$ называется *положительно определенной*, если существует функция $w : \mathcal{S}_0 \to \mathbb{R}$ такая, что $v(x, t) \geq w(x) > 0$ при всех $t \geq 0$ и $x \neq 0$, причем $v(0, t) \equiv w(0) = 0$. Функция $v(x, t)$ называется *неотрицательно определенной*, если $v(x, t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$. Функция $v(x, t)$ называется *отрицательно* (*неположительно*) *определенной*, если $-v(x, t)$ — положительно (неотрицательно) определенная функция. Функция $v(x, t)$ называется *знакоопределенной*, если она положительно или отрицательно определенная.

Функция $v(x, t)$ имеет *бесконечно малый высший предел* при $x \to 0$, если $v(x, t) \overset{t}{\rightrightarrows} 0$ при $\|x\| \to 0$, $t \geq t_0$. Функция $v(x, t)$

допускает *бесконечно большой низший предел* при $x \to \infty$, если $v(x,t) \overset{t}{\rightrightarrows} \infty$ при $\|x\| \to \infty$, $t \geq t_0$.

Выражение

$$\dot{v}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + f^T(x,t)\,\mathrm{grad}_x v(x,t) \tag{2.1.6}$$

называется *производной по времени функции v в силу системы* (2.1.5). При вычислении данного выражения решения системы (2.1.5) не используются.

Теорема 2.1.1 (первая теорема Ляпунова). *Если существует положительно определенная функция $v(x,t)$, допускающая неположительно определенную производную $\dot{v}(x,t)$ в силу системы* (2.1.5), *то нулевое состояние $x \equiv 0$ данной системы устойчиво по Ляпунову.*

При условиях теоремы 2.1.1 каждое решение системы (2.1.5) с начальным вектором $x_0 \in \mathcal{S}_0$ бесконечно продолжаемо вправо и ограничено при $t \geq t_0$. Если функция Ляпунова $v(x,t)$ в теореме 2.1.1 допускает бесконечно малый высший предел при $x \to 0$, то нулевое состояние $x \equiv 0$ системы (2.1.5) равномерно устойчиво по начальному моменту (К. П. Персидский).

Теорема 2.1.2 (ворая теорема Ляпунова). *Пусть существует положительно определенная функция $v(x,t)$, допускающая бесконечно малый высший предел при $x \to 0$ и отрицательно определенную производную $\dot{v}(x,t)$ в силу системы* (2.1.5). *Тогда нулевое состояние $x \equiv 0$ данной системы асимптотически устойчиво.*

Если условия теоремы 2.1.2 дополнить требованием существования бесконечно большого низшего предела функции $v(x,t)$ при $x \to \infty$, то нулевое состояние $x \equiv 0$ системы (2.1.5) будет асимптотически устойчивым в целом (теорема Барбашина–Красовского [17]).

Теорема 2.1.3 (третья теорема Ляпунова). *Пусть существует функция $v(x, t)$, допускающая бесконечно малый высший предел при $x \to 0$ и знакоопределенную производную $\dot{v}(x, t)$ в силу системы* (2.1.5). *Если любая окрестность $\mathcal{S}_0$ содержит точку x_0 такую, что $v(x_0, t_0)\,\dot{v}(x_0, t_0) > 0$ при некотором $t_0 \geq 0$, то нулевое состояние $x \equiv 0$ данной системы неустойчиво по Ляпунову.*

Условия теоремы 2.1.3 можно ослабить, если рассматривать лишь некоторую часть окрестности $\mathcal{S}_0$, примыкающую к началу координат (Н. Г. Четаев). Функции $v(x, t)$, удовлетворяющие условиям первой, второй и третьей теорем Ляпунова, называются функциями Ляпунова соответственно *1-го, 2-го и 3-го рода.*

Основные утверждения метода функций Ляпунова допускают обращение (см., например, [41]). Так, для системы (2.1.5) найдены условия существования функций Ляпунова 1-го рода (К. П. Персидский) и 2-го рода (Х. Л. Массера).

Отметим, что использованные свойства функций Ляпунова и их производных в силу системы могут быть эквивалентно определены в терминах так называемых *$\mathcal{K}$-функций.* Непрерывная функция $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ называется $\mathcal{K}$-функцией, если она монотонно возрастающая и $\omega(0) = 0$. В сформулированных утверждениях требование положительной определенности функции Ляпунова $v(x, t)$ можно заменить условием $v(x, t) \geq \omega(\|x\|)$, где $\omega \in \mathcal{K}$ — некоторая $\mathcal{K}$-функция. Аналогично, существование бесконечно малого высшего предела функции $v(x, t)$ при $x \to \infty$ эквивалентно условию $v(x, t) \leq \omega(\|x\|)$.

Приведем следствия теорем 2.1.1 и 2.1.2 для широкого класса нелинейных систем, представимых в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = A(x, t)\,x, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.7}$$

где $A(x, t)$ — непрерывная матричная функция. Нелинейные системы подобной структуры иногда называют *квазилинейными.*

Очевидно, что нулевое состояние $x \equiv 0$ является состоянием равновесия системы (2.1.7). При изучении устойчивости данного состояния целесообразным является применение метода квадратичных функций Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t)x$ с непрерывно дифференцируемой положительно определенной матрицей $X(t)$. В этом случае выражение (2.1.6) производной по времени в силу системы (2.1.7) представляется в виде:

$$\dot{v}(x,t) = x^T Y(x,t)x, \quad Y(x,t) = \dot{X}(t) + A^T(x,t)X(t) + X(t)A(x,t).$$

Следствие 2.1.1 *Если для некоторой симметричной матрицы $X(t)$ и некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения*

$$\varepsilon I_n \le X(t), \quad Y(x,t) \le 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \ \ t \ge t_0,$$

то состояние $x \equiv 0$ системы (2.1.7) устойчиво по Ляпунову. Если же

$$\varepsilon_1 I_n \le X(t) \le \varepsilon_2 I_n, \quad Y(0,t) \le -\delta I_n, \quad t \ge t_0,$$

где $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$ и $\delta > 0$, то данное состояние равномерно асимптотически устойчиво.

Данные утверждения вытекают из теорем 2.1.1, 2.1.2 и соотношений

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 \|x\|^2 \le \lambda_{\min}\big(X(t)\big)\|x\|^2 \le v(x,t) \le \lambda_{\max}\big(X(t)\big)\|x\|^2 \le \varepsilon_2 \|x\|^2, \\ \dot{v}(x,t) \le \lambda_{\max}\big(Y(x,t)\big)\|x\|^2 \le -\delta_1 \|x\|^2, \quad 0 < \delta_1 < \delta. \end{gathered} \tag{2.1.8}$$

При этом из непрерывной зависимости $Y(x,t)$ следует, что $Y(x,t) \le -\delta_1 I_n$ в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0$ при $t \ge t_0$ как только $Y(0,t) \le -\delta I_n$.

Следует отметить, что каждая дифференциальная система (2.1.5) с непрерывно дифференцируемой векторной функцией f представима в виде (2.1.7), при этом [16]

$$A(x,t) = \frac{1}{n}\int_0^1 J(\theta x, t)\, d\theta, \quad J(x,t) = \left\| \frac{\partial f_i(x,t)}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n.$$

Здесь $J(x,t)$ — *матрица Якоби* векторной функции $f(x,t)$.

Теорема 2.1.4 (Н. Н. Красовский [41]). *Пусть векторная функция $f(x,t)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по компонентам x в окрестности $\mathcal{S}_0$ при $t \geq t_0$. Тогда нулевое состояние $x \equiv 0$ системы* (2.1.5) *экспоненциально устойчиво в том и только в том случае, когда в некоторой окрестности $\widetilde{\mathcal{S}}_0 \subseteq \mathcal{S}_0$ при $t \geq t_0$ существует непрерывно дифференцируема функция Ляпунова $v(x,t)$, удовлетворяющая неравенствам*

$$\varepsilon_1 \|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \varepsilon_2 \|x\|^2, \; \dot{v}(x,t) \leq -\varepsilon_3 \|x\|^2, \; \left\| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\| \leq \varepsilon_4 \|x\|,$$

где $\varepsilon_i > 0$ — некоторые постоянные, $i = \overline{1,4}$.

Вторую теорему Ляпунова можно усилить для класса нелинейных *автономных* систем

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{2.1.9}$$

Теорема 2.1.5 (Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский [16]). *Пусть существует положительно определенная функция $v(x)$, допускающая неположительно определенную производную $\dot{v}(x)$ в силу системы* (2.1.9)*, причем множество $\{x : \dot{v}(x) = 0\}$ не содержит целых траекторий системы* (2.1.9)*, кроме точки $x = 0$. Тогда нулевое состояние $x \equiv 0$ данной системы асимптотически устойчиво.*

Рассмотрим *квазилинейную* дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)\, x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0, \tag{2.1.10}$$

где $A(t)$ — непрерывная и ограниченная матричная функция, а векторная функция $\varphi(x,t)$ удовлетворяет условию

$$\|\varphi(x,t)\| \leq \beta \|x\|^{1+\alpha}, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq t_0, \quad \alpha > 0, \;\; \beta > 0. \tag{2.1.11}$$

При этом $\varphi(0,t) \equiv 0$ и данная система имеет тривиальное решение $x \equiv 0$. Из (2.1.11) также следует, что

$$\lim_{\|x\|\to 0} \sup_{t\geq t_0} \frac{\|\varphi(x,t)\|}{\|x\|} = 0. \tag{2.1.12}$$

Каждая система вида (2.1.5), у которой непрерывны все частные производные $\partial^2 f_k(x,t)/\partial x_i \partial x_j$ $(k,i,j=\overline{1,n})$, представима в виде (2.1.10). В этом случае линейная система

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.13}$$

где $A(t) = J(0,t)$ — матрица Якоби векторной функции $f(x.t)$ при $x = 0$, называется *линейным приближением* системы (2.1.5).

Теорема 2.1.6 *Если система линейного приближения* (2.1.13) *экспоненциально устойчива, то состояние* $x \equiv 0$ *нелинейной системы* (2.1.10) *асимптотически устойчиво. Если система линейного приближения* (2.1.13) *является автономной, то из ее асимптотической устойчивости (неустойчивости) следует асимптотическая устойчивость (неустойчивость) состояния* $x \equiv 0$ *нелинейной системы* (2.1.10).

Обобщим класс нелинейных систем (2.1.10) в виде

$$E(x)\dot{x} = A(x,t)\,x + \varphi(x,t), \quad t \geq t_0, \tag{2.1.14}$$

где $E(x)$ и $A(x,t)$ — непрерывные и ограниченные матричные функции при $x \in \mathcal{S}_0$ и $t \geq t_0$.

Теорема 2.1.7 *Пусть векторная функция* $\varphi(x,t)$ *удовлетворяет условию* (2.1.11) *и для некоторой непрерывно дифференцируемой матрицы* $X(t) = X^T(t) > 0$ *выполняются соотношения*

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \tag{2.1.15}$$

$$E_0^T \dot{X}(t) E_0 + A_0^T(t) X(t) E_0 + E_0^T X(t) A_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad \varepsilon_0 > 0, \tag{2.1.16}$$

где $E_0 = E(0)$, $A_0(t) = A(0,t)$, $t \geq t_0$. *Тогда состояние* $x \equiv 0$ *системы* (2.1.14) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Для выполнения матричного неравенства (2.1.16) необходимо, чтобы матрица E_0 была невырожденной. В противном случае умножение справа и слева данного неравенства соответственно на q и q^T, где q — собственный вектор матрицы E_0, отвечающий ее нулевому собственному значению, приводит к противоречию. Невырожденной должна быть также матрица $E(x)$ в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$.

Построим функцию Ляпунова 2-го рода для системы (2.1.14) в виде $v(x,t) = x^T E_0^T X(t) E_0 x$, где $X(t) = X^T(t) > 0$ — непрерывно дифференцируемая матричная функция. Производная данной функции в силу системы (2.1.14) имеет вид

$$\dot{v}(v,t) = x^T Y(x,t) x + 2x^T E_0^T X(t) E_1(x) \varphi(x,t), \tag{2.1.17}$$

где

$$Y(x,t) = E_0^T \dot{X}(t) E_0 + A_1^T(x,t) X(t) E_0 + E_0^T X(t) A_1(x,t),$$

$$A_1(x,t) = E_1(x) A(x,t), \quad E_1(x) = E_0 E^{-1}(x).$$

При условии (2.1.16) в силу непрерывности используемых матричных функций для некоторого $\delta_1 < \varepsilon_0$ в окрестности точки $x = 0$ имеем неравенство $x^T Y(x,t) x \leq -\delta_1 \|x\|^2$, $t \geq t_0$.

Для оценки второго слагаемого в (2.1.17) используем условия (2.1.11), (2.1.15) и следствие неравенства Коши

$$x^T X y \leq \sqrt{x^T X x \, y^T X y}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

выполняемого для любой матрицы $X = X^T \geq 0$. Получаем:

$$x^T E_0^T X(t) E_1(x) \varphi(x,t) \leq \sqrt{x^T E_0^T X E_0 x \varphi^T(x,t) E_1^T(x) X E_1(x) \varphi(x,t)}$$

$$\leq \varepsilon_2 \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^T E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^T(x) E_1(x))}\, \|x\| \|\varphi(x,t)\|$$

$$\leq \varepsilon_2 \beta \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^T E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^T(x) E_1(x))}\, \|x\|^{\alpha} \|x\|^2.$$

При достаточно малых значениях $\|x\|$ для некоторого $\delta_2 > 0$ имеем

$$-\delta_1 + 2\varepsilon_2 \beta \sqrt{\lambda_{\max}(E_0^T E_0) \sup_{x \in \mathcal{S}_0} \lambda_{\max}(E_1^T(x) E_1(x))}\, \|x\|^{\alpha} \leq -\delta_2 < 0$$

и, следовательно, $\dot{v}(v,t) \leq -\delta_2 \|x\|^2$, т. е. функция $v(x,t)$ удовлетворяет условиям второй теоремы Ляпунова. При этом состояние $x \equiv 0$ системы (2.1.14) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Методы функций Ляпунова успешно применяются при исследовании систем с последействием, с импульсным воздействием и других классов динамических систем (см., например, [28, 35, 87, 88, 91, 108]).

Существенным развитием и обобщением метода функций Ляпунова в теории устойчивости является *метод сравнения* систем. При этом роль функции Ляпунова выполняет оператор, отображающий пространство состояний исследуемой сложной системы в пространство состояний вспомогательной *системы сравнения*. Решения систем сравнения обладают свойствами типа монотонности относительно некоторого конуса в пространстве состояний, что существенно упрощает исследование их устойчивости и асимптотических свойств.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^r$ конус неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}^r_+$ и дифференциальную систему

$$\dot{y} = F(y,t), \quad F(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.18}$$

правая часть которой определена в некоторой окрестности точки $y = 0$. Векторная функция $F(y,t)$ называется *квазимонотонно возрастающей* относительно конуса $\mathcal{K}$, если при всех $i = \overline{1,r}$

и $t \geq t_0$ выполняется условие

$$y \overset{\mathcal{K}}{\leq} z, \quad y_i = z_i \implies F_i(y,t) \leq F_i(z,t). \tag{2.1.19}$$

В частности, если $F(y,t)$ дифференцируема по компонентам y, то условие (2.1.19) эквивалентно соотношениям

$$\frac{\partial F_i(y,t)}{\partial y_j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,r}, \quad t \geq t_0.$$

Системы вида (2.1.18), удовлетворяющие условию (2.1.19), называются *системами Важевского* [79]. Конус $\mathcal{K}$ является инвариантным множеством данного класса систем. Состояние $y \equiv 0$ системы (2.1.18) называется *устойчивым в конусе* $\mathcal{K}$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что

$$y_0 \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \|y_0\| \leq \delta \implies y(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \|y(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Если при этом $\|y(t)\| \to 0$ для некоторого $\delta > 0$, то состояние $y \equiv 0$ системы (2.1.18) *асимптотически устойчиво в конусе* $\mathcal{K}$.

Теорема 2.1.8 (В. М. Матросов [1]). *Пусть существует векторная непрерывно дифференцируемая функция* $v(x,t) = \big[v_1(x,t), ..., v_r(x,t)\big]^T$ *такая, что:*

1) $v(0,t) \equiv 0$, $t \geq t_0$;

2) *функция* $v_0(x,t) = \max\limits_j v_j(x,t)$ *положительно определена и допускает бесконечно малый высший предел при* $x \to 0$;

3) *выполняется конусное неравенство*

$$\dot v(x,t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} F(v(x,t),t), \quad t \geq t_0, \tag{2.1.20}$$

где $F(y,t)$ *— некоторая квазимонотонно возрастающая функция,* $\dot v(x,t)$ *— производная векторной функции* $v(x,t)$ *в силу системы* (2.1.5) *вида*

$$\dot v(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \left\| \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^{r,n} f(x,t).$$

Тогда из устойчивости (равномерной асимптотической устойчивости) состояния $y \equiv 0$ системы (2.1.18) *следует устойчивость (равномерная асимптотическая устойчивость) состояния $x \equiv 0$ системы* (2.1.5).

Если все компоненты векторной функции $v(x,t)$ неотрицательно определены и выполняются условия теоремы 2.1.8, то для устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния $x \equiv 0$ системы (2.1.5) достаточно, чтобы состояние $y \equiv 0$ системы Важевского (2.1.19) было устойчиво (асимптотически устойчиво) в конусе $\mathcal{K}$.

Для класса нелинейных автономных систем Важевского

$$\dot{y} = F(y), \quad v(0,t) \equiv 0, \quad t \geq t_0, \tag{2.1.21}$$

справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.9 (А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский [76]). *Состояние $y \equiv 0$ системы Важевского* (2.1.21) *асимптотически устойчиво в конусе $\mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда совместна система неравенств*

$$F(y) \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad y \overset{\mathcal{K}}{>} 0. \tag{2.1.22}$$

2.2 Критерии устойчивости линейных систем

Рассмотрим *линейную* дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \geq t_0, \tag{2.2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ — непрерывная матричная функция. Свойства устойчивости одного заданного решения системы (2.2.1) эквивалентны соответствующим свойствам устойчивости всех решений. Поэтому в утверждениях об устойчивости решений линейных систем часто с целью сокращения выкладок используют термин “устойчивость системы”. Например, утверждается, что из экспоненциальной устойчивости системы (2.2.1) в смысле определения 2.1.3 следует ее асимптотическая устойчивость. Если матрица A постоянная, то справедливо и обратное утверждение.

Для системы (2.2.1) используется понятие экспоненциальной устойчивости с более сильными требованиями, чем в определении 2.1.3.

Определение 2.2.1 Система (2.2.1) называется *экспоненциально устойчивой*, если каждое ее решение удовлетворяет двусторонней оценке

$$\gamma_1 \|x_0\| e^{-\alpha_1(t-t_0)} \leq \|x(t)\| \leq \gamma_2 \|x_0\| e^{-\alpha_2(t-t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (2.2.2)$$

где γ_1, γ_2, α_1 и α_2 — некоторые положительные постоянные.

Теорема 2.2.1 *Система* (2.2.1) *является экспоненциально устойчивой в том и только в том случае, когда для некоторой непрерывной симметричной матрицы $Y(t)$ существует непрерывно дифференцируемое решение $X(t)$ матричного уравнения*

$$\dot{X}(t) + A^T(t)X(t) + X(t)A(t) = Y(t) \quad (2.2.3)$$

и выполняются соотношения

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad -\delta_1 I_n \leq Y(t) \leq -\delta_2 I_n, \quad t \geq t_0, \quad (2.2.4)$$

где ε_1, ε_2, δ_1 и δ_2 — некоторые положительные постоянные.

Данное утверждение является следствием соотношений (2.1.8) и теоремы Малкина [74] об экспоненциальной устойчивости линейных систем, сформулированной в терминах двух квадратичных форм. Соотношение (2.2.3) называется матричным *дифференциальным уравнением Ляпунова*, решение которого определяет квадратичную функцию Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t)x$.

Критерий асимптотической устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad t \geq t_0, \tag{2.2.5}$$

формулируется в терминах решений матричного *алгебраического уравнения Ляпунова*

$$A^T X + XA = Y. \tag{2.2.6}$$

Теорема 2.2.2 *Система* (2.2.5) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для любой матрицы* $Y = Y^T < 0$ *существует единственное решение* $X = X^T > 0$ *уравнения* (2.2.6).

Приведем спектральные критерии устойчивости и асимптотической устойчивости системы (2.2.5).

Теорема 2.2.3 *Система* (2.2.5) *устойчива в том и только в том случае, когда ее спектр* $\sigma(A)$ *расположен в замкнутой левой полуплоскости* $\overline{\mathbb{C}}^-$, *причем, собственным значениям матрицы* A, *расположенным на мнимой оси, отвечают простые элементарные делители. Система* (2.2.5) *является асимптотически устойчивой в том и только в том случае, когда матрица* A *гурвицева, т. е.* $\sigma(A) \subset \mathbb{C}^-$.

В условиях устойчивости класса неавтономных линейных систем (2.2.1) роль спектра выполняет совокупность всех *характеристических показателей* Ляпунова. Характеристическим показателем скалярной функции $x(t)$ называется предел

$$\chi[x] = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|, \tag{2.2.7}$$

равный конечному числу или $\pm\infty$. Характеристическими показателями векторной и матричной функций являются наибольшие из характеристических показателей их компонент. *Фундаментальная матрица* системы (2.2.1)

$$\Phi(t) = \left[x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right],$$

составленная из максимального числа линейно независимых решений $x^{(i)}(t)$, называется *нормальной*, если сумма характеристических показателей $\sum_{i=1}^{n}\chi[x^{(i)}(t)]$ есть наименьшая по сравнению с другими фундаментальными матрицами данной системы. Множество всех различных конечных характеристических показателей системы составляет ее *спектр*. Спектр системы (2.2.1) с непрерывной ограниченной $n\times n$-матрицей $A(t)$ состоит из $m \leq n$ характеристических чисел

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m.$$

Теорема 2.2.4 *Для асимптотической устойчивости системы* (2.2.5) *достаточно, чтобы ее максимальный характеристический показатель* α_m *был отрицателен.*

Для минимального и максимального характеристических показателей системы (2.2.5) выполняются оценки

$$\alpha_1 \geq \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(S(\tau))d\tau, \quad \alpha_m \leq \overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(S(\tau))d\tau,$$

где $S(\tau) = \dfrac{1}{2}\big[A(\tau) + A^T(\tau)\big]$. Данные оценки спектра вытекают из *неравенства Важевского*

$$\|x(t_0)\|\,e^{\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{\min}(S(\tau))d\tau} \leq \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\|\,e^{\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_{\max}(S(\tau))d\tau}, \quad (2.2.8)$$

которое выполняется для любого решения $x(t)$ системы (2.2.1).

Полный спектр системы (2.2.1) состоит из n характеристических показателей с учетом их *кратностей*. Кратность n_i характеристического показателя α_i равна количеству столбцов некоторой нормальной фундаментальной матрицы с данным характеристическим показателем.

Для системы (2.2.1) имеет место неравенство Ляпунова

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} n_i\alpha_i - \underline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\,A(\tau)\,d\tau \geq 0.$$

Если при этом выполняется равенство, то система (2.2.1) называется *правильной*. Величина μ называется *мерой неправильности* системы (2.2.1).

Существенным дополнением к теории устойчивости состояний нелинейных систем по линейному приближению является следующий результат.

Теорема 2.2.5 (Х. Л. Массера [78]) *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\|\varphi(x,t)\| \le \beta(t)\|x\|^{\alpha}$, *где* $\alpha > 1$, $\beta(t) > 0$ *— функция с нулевым характеристическим показателем;*

2) $\max\limits_{1\le i\le m} \alpha_i < -\mu/(\alpha-1)$, *где* α_i *— характеристические показатели линейной системы* (2.2.1) *с мерой неправильности* μ.

Тогда состояние $x \equiv 0$ *квазилинейной системы* (2.1.10) *асимптотически устойчиво.*

Всякая *приводимая* линейная система является правильной. Система (2.2.1) называется приводимой, если существует *матрица Ляпунова* $L(t)$ такая, что *преобразование Ляпунова* $y = L(t)x$ переводит данную систему в систему с постоянной матрицей B:

$$\dot{y} = By, \quad \dot{L}(t)L^{-1}(t) + L(t)A(t)L^{-1}(t) \equiv B.$$

Непрерывно дифференцируемая матрица $L(t)$ является матрицей Ляпунова, если $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ ограничены и $|\det L(t)| \ge c > 0$ при $t \ge t_0$.

Система (2.2.1) является приводимой в том и только в том, случае, когда некоторая ее фундаментальная матрица представляется в виде $\Phi(t) = L(t)e^{t\Lambda}$, где $L(t)$ — матрица Ляпунова, Λ — постоянная матрица (*теорема Еругина*). Так как преобразование Ляпунова линейной системы не изменяет ее спектр, то спектр приводимой системы составляют вещественные части собственных значений постоянной матрицы Λ. Следовательно, приводимая линейная система (2.2.1) устойчива тогда и только тогда, когда все ее характеристические показатели $\alpha_i \leq 0$, причем нулевым значениям α_i отвечают простые элементарные делители матрицы Λ. Приводимая линейная система (2.2.1) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\alpha_i < 0$, $i = \overline{1, m}$.

Для системы (2.2.1) с непрерывной ω-периодической матрицей $A(t)$ нормированная фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(t) = L(t)\, e^{t\Lambda}, \quad L(t+\omega) \equiv L(t), \quad \Lambda = \frac{1}{\omega} \ln \Phi(\omega), \qquad (2.2.9)$$

где $L(t)$ — непрерывная ω-периодическая невырожденная матрица, $L(0) = I_n$, ln — функция логарифма матрицы (*теорема Флоке* [30]). При этом $\Phi(t+\omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$, где $\Phi(\omega)$ — *матрица монодромии* системы (2.2.1).

Собственные значения λ_i матрицы Λ называются *характеристическими показателями*, а собственные значения ρ_i матрицы $\Phi(\omega)$ — *мультипликаторами* системы (2.2.1) с ω-периодической матрицей $A(t)$. Число ρ является мультипликатором системы (2.2.1) тогда и только тогда, когда для некоторого ее нетривиального решения выполняется условие $x(t+\omega) = \rho x(t)$.

Матрица $L(t)$ в (2.2.9) является матрицей Ляпунова. В силу теоремы Еругина периодическая линейная система является приводимой. Следовательно, система (2.2.1) с ω-периодической матрицей $A(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_i принадлежат замкнутому единичному кругу $|\rho| \leq 1$, причем значениям $|\rho_i| = 1$ отвечают простые элементарные делители матрицы монодромии $\Phi(\omega)$. Данная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $|\rho_i| < 1$, $i = \overline{1, m}$.

2.3 Дифференциальные системы второго порядка

Многие физические объекты описываются в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$C\ddot{x} + B\dot{x} + Ax = 0, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq t_0, \tag{2.3.1}$$

где матричные коэффициенты A, B и C размеров $n \times n$ могут быть функциями компонент векторов обобщенных координат x и скоростей $\dot{x}$, а также времени t. Система (2.3.1) представима в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$E\dot{z} = Mz, \quad z \in \mathbb{C}^{2n}, \quad t \geq t_0, \tag{2.3.2}$$

где

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A & -B \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}.$$

При построении условий устойчивости состояния $z \equiv 0$ данной системы используются различные предположения относительно матричных коэффициентов. В случае, когда матрица C не зависит от t, условия асимптотической устойчивости состояния $z \equiv 0$ системы (2.3.2) можно описать в терминах матричных неравенств (см. теорему 2.1.7).

Пусть система (2.3.1) является линейной автономной и ей соответствует регулярный квадратичный пучок матриц

$$F(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2, \quad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если выполняются соотношения

$$TA + UTB + U^2TC = 0, \quad \operatorname{rank}\big[\, T, UT \,\big] = m, \tag{2.3.3}$$

где $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $T \in \mathbb{C}^{m\times n}$, то (U,T) является левой собственной парой квадратичного пучка $F(\lambda)$. Если при этом m принимает максимально возможное значение, то собственная пара (U,T)

пучка $F(\lambda)$ является максимальной. В этом случае спектр пучка $\sigma(F)$ совпадает со спектром матрицы U (см. параграф 1.3).

Соотношения (2.3.3) приводятся к виду

$$ZM = UZE, \quad \operatorname{rank} Z = m,$$

где $Z = \left[TB + UTC, T \right]$, (U, Z) — собственная пара линейного пучка матриц $M - \lambda E$, спектр которого совпадает с $\sigma(F)$. Матрицу Z можно определить как решение системы уравнений

$$MZE = EZM, \quad Z = ZEZ,$$

имеющее следующую структуру

$$Z = \begin{bmatrix} T_1B + T_2C & T_1 \\ -T_1A & T_2 \end{bmatrix}.$$

При этом множество левых пар квадратичного пучка $F(\lambda)$, удовлетворяющих первому соотношению (2.3.3), образуют матрицы

$$U = ZM = \begin{bmatrix} -T_1A & T_2C \\ -T_2A & -T_1A - T_2B \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix},$$

где T_1 и T_2 — произвольное решение алгебраической системы

$$\begin{array}{rcl} AT_1B - BT_1A & = & CT_2A - AT_2C, \\ AT_1C - CT_1A & = & CT_2B - BT_2C, \\ T_1 & = & T_1BT_1 + T_1CT_2 + T_2CT_1, \\ T_2 & = & T_2CT_2 - T_1AT_1. \end{array}$$

В частности, решения данной системы можно построить в интегральном виде

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad T_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda F^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

где ω — замкнутый контур, отделяющий некоторую часть спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(U)$. В случае, когда матрица C невырожденная, можно положить $T_1 = 0$ и $T_2 = C^{-1}$.

Теорема 2.3.1 *Пусть* (U,T) *— максимальная левая собственная пара квадратичного пучка матриц* $F(\lambda)$. *Тогда дифференциальная система* (2.3.1) *устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, когда существуют матрицы* $X = X^* > 0$ *и* $Y = Y^* \geq 0\,(> 0)$, *удовлетворяющие уравнению* $U^*X + XU = -Y$. *При этом функция Ляпунова системы определяется в виде* $v(z) = z^*R^*XRz$, *где* $R = \left[\,TB + UTC, TC\,\right]$, *и на нетривиальных ее решениях удовлетворяет условиям* $v(z) > 0$ *и* $\dfrac{dv(z)}{dt} = -z^*R^*YRz < 0$.

Сформулируем коэффициентные условия устойчивости системы (2.3.1), основанные на решении ЛМН

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & V \\ V^* & X_2 \end{bmatrix} > 0, \quad -M^*XE - E^*XM = Y \geq 0\,(> 0), \quad (2.3.4)$$

относительно $X_1 = X_1^*$, $X_2 = X_2^*$ и V. Матрица Y в (2.3.4) имеет следующую структуру

$$Y = \begin{bmatrix} A^*V^* + VA & -X_1 + A^*X_2C + VB \\ -X_1 + C^*X_2A + B^*V^* & B^*X_2C + C^*X_2B - VC - C^*V^* \end{bmatrix}.$$

Соотношения (2.3.4) в случае $Y > 0$ являются критерием асимптотической устойчивости системы (2.3.1).

Полагая в соотношениях (2.3.4)

$$X_1 = VCV^* + H, \quad X_2 = C^{-1}, \quad V = (B-U)^*C^{-1},$$

и применяя лемму Шура к блочным матрицам X и Y, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.3.2 *Пусть* $C = C^* > 0$ *и существуют матрицы* U *и* $H = H^* > 0$ *такие, что*

$$U + U^* > 0, \quad A^*C^{-1}(B-U) + (B-U)^*C^{-1}A \geq W\,(> W), \quad (2.3.5)$$

где $W = (L - H)^*(U + U^*)^{-1}(L - H)$, $L = A + U^*C^{-1}(B - U)$. *Тогда дифференциальная система* (2.3.1) *устойчива (асимптотически устойчива). При этом функция Ляпунова системы определяется в виде* $v(z) = z^*Zz$, *где*

$$Z = \begin{bmatrix} (B-U)^*C^{-1}(B-U) + H & (B-U)^* \\ B-U & C \end{bmatrix}.$$

На основе теоремы 2.3.2 можно сформулировать различные коэффициентные условия устойчивости и асимптотической устойчивости системы (2.3.1), отвечающие дополнительным ограничениям на неизвестные матрицы U и H [4,8]. В частности, полагая

$$U = \theta B, \quad H = \frac{\gamma}{2}(A+A^*) + \delta B^*C^{-1}B, \quad \delta = \theta(1-\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

и учитывая, что

$$0 < \delta \leq \frac{1}{4}, \quad \alpha + \beta = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \geq 2, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2\sqrt{\delta}}, \quad \beta = \frac{2-\gamma}{2\sqrt{\delta}},$$

имеем следующее утверждение.

Следствие 2.3.1 *Пусть для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\alpha + \beta \geq 2$, *выполняются матричные неравенства*

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad B^*C^{-1}B + \alpha(\alpha+\beta)(A + A^*) > 0, \tag{2.3.6}$$

$$A^*C^{-1}B + B^*C^{-1}A - (\alpha A - \beta A^*)(B + B^*)^{-1}(\alpha A^* - \beta A) \geq 0 \, (> 0), \tag{2.3.7}$$

Тогда система (2.3.1) *устойчива (асимптотически устойчива).*

В данном утверждении выделим случай $\beta = 2 - \alpha$.

Следствие 2.3.2 *Пусть для некоторого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *выполняются матричные неравенства*

$$C = C^* > 0, \quad B + B^* > 0, \quad B^*C^{-1}B + 2\alpha(A + A^*) > 0, \tag{2.3.8}$$

$$\Gamma(\alpha) = \alpha^2 P + \alpha R + Q \leq 0 \ (< 0), \tag{2.3.9}$$

где

$$P = (A + A^*)(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$
$$R = -2(A + A^*)(B + B^*)^{-1}A - 2A^*(B + B^*)^{-1}(A + A^*),$$
$$Q = 4A^*(B + B^*)^{-1}A - A^*C^{-1}B - B^*C^{-1}A.$$

Тогда система (2.3.1) *устойчива (асимптотически устойчива).*

Определение 2.3.1 Квадратичный пучок матриц $\Gamma(\alpha) = \alpha^2 P + \alpha R + Q$, где $P = P^* > 0$, $R = R^*$ и $Q = Q^*$, называется *гиперболическим*, *почти гиперболическим* и *эллиптическим*, если соответственно $\omega(x) > 0$, $\omega(x) \geq 0$ и $\omega(x) < 0$ для любого вектора $x \neq 0$, где $\omega(x) = (x^* R x)^2 - 4x^* P x x^* Q x$.

Лемма 2.3.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Квадратичный пучок матриц* $\Gamma(\alpha)$ *является гиперболическим (почти гиперболическим);*

2) *существует* $\alpha \in \mathbb{R}$, *для которого* $\Gamma(\alpha) < 0$ $\big(\Gamma(\alpha) \leq 0\big)$*;*

3) $\Gamma(\alpha)$ *имеет вещественные собственные значения* $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_{2n}$ *и* $\Gamma(\alpha) < 0$ $(\Gamma(\alpha) \leq 0)$ *при* $\alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1}$ $(\alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1})$.

Если матрица $A + A^*$ невырожденная, то при условии (2.3.9) следствия 2.3.2 квадратичный пучок матриц $\Gamma(\alpha)$ является почти гиперболическим (гиперболическим). Упорядочим все собственные значения данного пучка:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq \cdots \leq \alpha_{2n}.$$

Следствие 2.3.3 *Пусть выполняются условия* $A + A^* > 0$, $B + B^* > 0$ *и* $C = C^* > 0$. *Тогда система* (2.3.1) *устойчива (асимптотически устойчива), если*

$$\Gamma(\alpha) \leq 0, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha_{n+1} \ \big(\Gamma(\alpha) < 0, \quad 0 \leq \alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1}\big).$$

Если же $A+A^* < 0$, $B+B^* > 0$ *и* $C = C^* > 0$, *то для устойчивости (асимптотической устойчивости) системы* (2.3.1) *достаточно, чтобы*

$$\Gamma(\alpha) \le 0, \quad \alpha_n \le \alpha \le \alpha_{n+1} \le 0 \ \big(\Gamma(\alpha) < 0, \quad \alpha_n < \alpha < \alpha_{n+1} \le 0\big).$$

Отметим, что для класса систем (2.3.1), описывающих механические объекты, $C = C^* > 0$ — матрица инерции, $B = D + G$ — матрица диссипативных и гироскопических сил, а $A = K + S$ — матрица потенциальных и неконсервативных сил, причем $D = D^*$, $K = K^*$, $G = -G^*$, $S = -S^*$. Утверждения теоремы 2.3.2 и ее следствий могут быть сформулированы с учетом данных свойств матричных коэффициентов системы (2.3.1). Например, в следствиях 2.3.1 и 2.3.2 следует учесть, что $A + A^* = 2K$ и $B + B^* = 2D$.

Рассмотрим систему (2.3.1) с неопределенными матричными коэффициентами

$$A \in \mathrm{Co}\,\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \quad B \in \mathrm{Co}\,\{B_1, \ldots, B_{\nu_2}\}, \tag{2.3.10}$$

$$C \in \mathrm{Co}\,\{C_1, \ldots, C_{\nu_1}\}. \tag{2.3.11}$$

Система (2.3.1) робастно устойчива относительно множеств неопределенностей (2.3.10) и (2.3.11), если она асимптотически устойчива при любых значениях матричных коэффициентов из данных множеств. Согласно (2.3.4) система (2.3.1) робастно устойчива относительно неопределенностей (2.3.10) и (2.3.11), если совместна система ЛМН

$$X > 0, \quad M_{ij}^* X E_k + E_k^* X M_{ij} < 0, \quad i = \overline{1, \nu_1},\ j = \overline{1, \nu_2},\ k = \overline{1, \nu_3},$$

где

$$E_k = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_i & -B_j \end{bmatrix}.$$

Из теоремы 2.3.2 и ее следствий вытекают достаточные условия робастной устойчивости системы (2.3.1) при фиксированной матрице C. В частности, имеем следующее утверждение.

Теорема 2.3.3 *Пусть для некоторых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *таких, что* $\alpha + \beta \geq 2$, *выполняется система матричных неравенств*

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad \alpha(A_i + A_i^*) \geq 0,$$

$$A_i^* C^{-1} B_j + B_j^* C^{-1} A_i > (\alpha A_i - \beta A_i^*)(B_j + B_j^*)^{-1}(\alpha A_i^* - \beta A_i),$$
$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}.$$

Тогда система (2.3.1) *робастно устойчива относительно неопределенностей* (2.3.10).

Выделим достаточные условия робастной устойчивости системы (2.3.1) относительно неопределенностей (2.3.10), отвечающие случаям $\beta = 2 - \alpha$ при $\alpha \in \{0, 1, -1\}$:

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad \Gamma_{ij}(0) < 0,$$

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad A_i + A_i^* \geq 0, \quad \Gamma_{ij}(1) < 0,$$

$$C = C^* > 0, \quad B_j + B_j^* > 0, \quad A_i + A_i^* \leq 0, \quad \Gamma_{ij}(-1) < 0,$$

где $i = \overline{1, \nu_1}$, $j = \overline{1, \nu_2}$. Здесь $\Gamma_{ij}(\alpha)$ — гиперболические квадратичные пучки матриц вида (2.3.9) при $A = A_i$ и $B = B_j$. Поэтому условия робастной устойчивости системы (2.3.1) относительно неопределенностей (2.3.10) можно также сформулировать в терминах средних собственных значений данных квадратичных пучков матриц (см. следствие 2.3.3).

2.4 Робастная абсолютная устойчивость линейных систем с запаздыванием

Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$A_0\, x(t) + A_1 \frac{dx(t)}{dt} + A_2\, x(t - \tau_1) + \cdots + A_s\, x(t - \tau_{s-1}) = 0, \quad (2.4.1)$$

где $A_0, \dots, A_s$ — постоянные $n \times n$-матрицы, $\tau_i \geq 0$ — параметры постоянных запаздываний, $x(\theta) = x_0(\theta)$, $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$, $0 \leq t_0 \leq t$, $\tau = \max\limits_i \tau_i$, $i = \overline{1, s-1}$.

Нулевое решение системы (2.4.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t > t_0$, как только $\|x(\theta)\| < \delta$ при $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$. Нулевое решение системы (2.4.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и $\|x(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$. Задача об *абсолютной устойчивости* для системы (2.4.1) состоит в построении условий, накладываемых на матричные коэффициенты, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво при любых постоянных значениях $\tau_i \geq 0$, $i = \overline{1, s-1}$.

Лемма 2.4.1 *Для асимптотической устойчивости системы* (2.4.1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матричного квазиполинома*

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1} A_2 + \ldots + e^{-\lambda\tau_{s-1}} A_s$$

имели отрицательные вещественные части.

Из леммы 2.4.1 и теоремы 2.7.2 из [119] вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.4.1 *Если эрмитовы матрицы X, Y, Q и G удовлетворяют соотношениям*

$$A_0 X A_1{}^* + A_1 X A_0{}^* + C(G \otimes X)C^* = Y, \tag{2.4.2}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad Y \geq CQC^*, \tag{2.4.3}$$

$$g_\lambda{}^* H^{-1} g_\lambda \geq \gamma, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}^+, \tag{2.4.4}$$

где

$$B^* = [A_1{}^*, \dots, A_s{}^*], \quad C = [A_1, \dots, A_s], \quad G = \begin{bmatrix} \gamma & h^* \\ h & H \end{bmatrix},$$

$$Q > 0, \quad H < 0, \quad g_\lambda = h - \left[\, e^{-\tau_1 \lambda}, \ldots, e^{-\tau_{s-1} \lambda} \right]^T,$$

то нулевое решение системы (2.4.1) *асимптотически устойчиво.*

В случае диагональной матрицы G имеем достаточные условия абсолютной устойчивости системы (2.4.1).

Теорема 2.4.2 *Если эрмитовы матрицы X и Y удовлетворяют соотношениям* (2.4.3) *и уравнению*

$$A_0 X A_1{}^* + A_1 X A_0{}^* + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i A_i X A_i{}^* = Y, \tag{2.4.5}$$

где $\gamma_1 = 1/\gamma_2 + \ldots + 1/\gamma_s$, $\gamma_i < 0$, то система (2.4.1) *абсолютно устойчива.*

Рассмотрим систему (2.4.1) с неопределенными матричными коэффициентами

$$A_i \in \mathrm{Co}\left\{ A_{i1}, \ldots, A_{i\alpha_i} \right\}, \quad i = \overline{0, s}. \tag{2.4.6}$$

Система (2.4.1) называется *робастно абсолютно устойчивой*, если ее нулевое решение абсолютно устойчиво при любых значениях матричных коэффициентов из заданных множеств, в частности, политопов (2.4.6).

Так как условия (2.4.3) выполняются при $X \geq 0$ и $Y > 0$, то на основе теоремы 2.4.2 и леммы 1.5.3 имеем следующее утверждение.

Теорема 2.4.3 *Если для некоторой матрицы $X = X^* \geq 0$ и некоторых $\gamma_i < 0$ выполняется система ЛМН*

$$A_{0k_0} X A_{1k_1}^* + A_{1k_1} X A_{0k_0}^* + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i A_{ik_i} X A_{ik_i}^* > 0, \quad k_i = \overline{1, \alpha_i}, \tag{2.4.7}$$

где $\gamma_1 = 1/\gamma_2 + \ldots + 1/\gamma_s$, то система (2.4.1) *робастно абсолютно устойчива.*

2.5 Робастная устойчивость в среднем квадратическом стохастических систем типа Ито

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = \Big[Adt + \sum_{i=1}^{s} B_i\, dw_i(t)\Big]x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (2.5.1)$$

где A, B_i — постоянные $n \times n$-матрицы, w_i — компоненты s-мерного стандартного винеровского процесса, для которого

$$\mathbf{M}\{dw(t)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{dw(t)dw^*(t)\} = I_s\, dt.$$

Здесь $\mathbf{M}$ — символ математического ожидания.

Нулевое решение системы (2.5.1) называется *асимптотически устойчивым в среднеквадратическом*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $t \geq t_0$ условное математическое ожидание любого решения $x(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{M}\big\{\|x(t)\| \,\big|\, \|x_0\| < \delta\big\} < \varepsilon, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\big\{\|x(t)\| \,\big|\, \|x_0\| < \delta\big\} = 0.$$

При изучении условий устойчивости в среднеквадратическом системы (2.5.1) используются функции Ляпунова $v(x) = x^*Xx$, где X — положительно определенная матрица, подлежащая определению. Математическое ожидание производной функции $v(x)$ в силу системы (2.5.1) представляется в виде

$$\mathbf{M}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = x(t)^*\Big(A^*X + XA + \sum_{i=1}^{s} B_i{}^*XB_i\Big)x(t).$$

Из второго метода Ляпунова для стохастических систем вытекают следующие алгебраические условия асимптотической устойчивости в среднеквадратическом системы (2.5.1).

Теорема 2.5.1 *Если для некоторой положительно определенной матрицы Y матричное уравнение*

$$-A^*X - XA - \sum_{i=1}^{s} B_i{}^* X B_i = Y \tag{2.5.2}$$

имеет положительно определенное решение X, то нулевое решение системы (2.5.1) *асимптотически устойчиво в среднеквадратическом.*

Рассмотрим систему (2.5.1) с неопределенными матричными коэффициентами

$$A \in \mathrm{Co}\left\{A_1, \ldots, A_\alpha\right\},\ B_i \in \mathrm{Co}\left\{B_{i1}, \ldots, B_{i\beta_i}\right\},\ i = \overline{1, s}. \tag{2.5.3}$$

Система (2.5.1) называется *робастно устойчивой в среднеквадратическом*, если ее нулевое решение асимптотически устойчиво в среднеквадратическом при любых значениях матричных коэффициентов из заданных множеств, в частности, политопов (2.5.3).

На основе теоремы 2.5.1 и леммы 1.5.3 имеем следующее утверждение.

Теорема 2.5.2 *Если для некоторой матрицы $X = X^* > 0$ выполняется система ЛМН*

$$A_k^*X + XA_k + \sum_{i=1}^{s} B_{ik_i}^* X B_{ik_i} < 0, \quad k = \overline{1, \alpha}, \quad k_i = \overline{1, \beta_i}, \tag{2.5.4}$$

то система (2.5.1) *робастно устойчива в среднеквадратическом.*

2.6 Условия устойчивости линейных систем в терминах функций следа

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$E\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6.1}$$

где E и A — матрицы размеров $n \times n$. Сформулируем критерий асимптотической устойчивости системы (2.6.1), используя функцию матричного следа $\mu(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - \nu\,\mathrm{tr}A^2$ (см. параграф 1.7). Будем предполагать, что матрица E невырожденная и параметр $\nu = n - 1$.

Теорема 2.6.1 *Система* (2.6.1) *асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для некоторой симметричной положительно определенной матрицы* $X = X^T > 0$ *выполняются неравенства*

$$\mathrm{tr}\,(AXE^T) < 0, \quad \mu(AXE^T + EXA^T) > 0. \tag{2.6.2}$$

Доказательство. Согласно теореме Ляпунова система (2.6.1) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для любой матрицы $Y = Y^T < 0$ существует единственное решение $X = X^T > 0$ матричного уравнения

$$AXE^T + EXA^T = Y. \tag{2.6.3}$$

Если матрица $X = X^T > 0$ удовлетворяет условиям (2.6.2), то для матрицы Y вида (2.6.3) выполняются условия отрицательной определенности в следствии 1.7.1 и, следовательно, система (2.6.1) асимптотически устойчива. Обратно, если система (2.6.1) асимптотически устойчива, то существует матрица $X = X^T > 0$, удовлетворяющая условиям (2.6.2). Действительно, множество симметричных отрицательно определенных матриц Y, удовлетворяющих неравенству $\mu(Y) > 0$, непустое. Например, можно положить $Y = \alpha I_n$, $\alpha < 0$. При этом

$$\mathrm{tr}\,(AXE^T) = n\alpha/2 < 0,$$

$$\mu(AXE^T + EXA^T) = (n\alpha)^2 - \nu\, n\alpha^2 = n\alpha^2 > 0,$$

где $X = X^T > 0$ — решение уравнения Ляпунова (2.6.3), т. е. выполняются неравенства (2.6.2).

Теорема доказана.

Рассмотрим линейную систему управления

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = Ky, \tag{2.6.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и измеряемого выхода системы, E, A, B, C и K — постоянные матрицы соответствующих размеров. Замкнутая система имеет вид

$$E\dot{x} = (A + BKC)x. \tag{2.6.5}$$

Теорема 2.6.2 *Пусть для некоторых матриц* K_0 *и* $X = X^T > 0$ *выполняются условия*

$$\mathrm{tr}(A_0 X E^T) < 0, \quad \mu(A_0 X E^T + EXA_0^T) > 0, \tag{2.6.6}$$

где $A_0 = A + BK_0C$*. Тогда для любой матрицы коэффициентов усиления обратной связи* $K = K_0 + \widetilde{K}$ *такой, что*

$$\mathrm{tr}(B\widetilde{K}CXE^T) \le 0, \quad \mu(B\widetilde{K}CXE^T + EXC^T\widetilde{K}^T B^T) \ge 0, \tag{2.6.7}$$

замкнутая система (2.6.5) *асимптотически устойчива. При этом* $v(x) = x^T X^{-1} x$ *является общей функцией Ляпунова системы для данного множества стабилизирующих управлений.*

Доказательство. Замкнутая система (2.6.5) при $K = K_0 + \widetilde{K}$ асимптотически устойчива, если для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняются матричное неравенство $Y_0 + Y_1 = Y < 0$, где

$$Y_0 = A_0 X E^T + EXA_0^T, \quad Y_1 = B\widetilde{K}CXE^T + EXC^T\widetilde{K}^T B^T,$$

обеспечивающие отрицательную определенность производной функции Ляпунова $v(x) = x^T X^{-1} x$ в силу данной системы.

Покажем, что неравенство $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$ является следствием соотношений $\mathrm{tr}\, Y_0\, \mathrm{tr}\, Y_1 \ge 0$, $\mu(Y_0) > 0$ и $\mu(Y_1) \ge 0$. Действительно,

$$[\mathrm{tr}(Y_0 + Y_1)]^2 = (\mathrm{tr}Y_0 + \mathrm{tr}Y_1)^2 = (\mathrm{tr}Y_0)^2 + (\mathrm{tr}Y_1)^2 + 2\mathrm{tr}Y_0\, \mathrm{tr}Y_1 >$$

$$
\begin{aligned}
&> \nu\,\mathrm{tr}Y_0^2 + \nu\,\mathrm{tr}Y_1^2 + 2\nu\sqrt{\mathrm{tr}Y_0^2\,\mathrm{tr}Y_1^2} \geq \\
&\geq \nu\,[\mathrm{tr}Y_0^2 + \mathrm{tr}Y_1^2 + 2|\mathrm{tr}(Y_0Y_1)|] \geq \\
&\geq \nu\,\mathrm{tr}(Y_0 + Y_1)^2,
\end{aligned}
$$

т. е. $\mu(Y_0 + Y_1) > 0$. Здесь использовано также неравенство Коши–Буняковского для симметричных матриц [20]

$$|\mathrm{tr}\ (Y_0Y_1)|^2 \leq \mathrm{tr}\ Y_0^2\,\mathrm{tr}Y_1^2.$$

Следовательно, согласно теореме 2.6.1 условия (2.6.6) и (2.6.7) обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.6.5).

Теорема доказана.

Отметим, что для системы (2.6.1) при условии регулярности $\det(A - \lambda E) \not\equiv 0$ можно сформулировать достаточные условия асимптотической устойчивости в терминах функций следа некоторых матриц, используя следствие 1.7.1 и систему линейных матричных неравенств

$$AXE^T + EXA^T + EYE^T \leq 0, \quad EXE^T \geq 0. \tag{2.6.8}$$

При этом матрица E может быть вырожденной. Если существуют матрицы $X = X^T$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие соотношениям (2.6.8), то система (2.6.1) асимптотически устойчива. Критерием асимптотической устойчивости данной системы является разрешимость системы неравенств (2.6.8) в виде

$$X = Z\widehat{X}Z^T, \quad Y = Z\widehat{Y}Z^T, \quad \widehat{Y} > 0,$$

где Z — решение максимального ранга алгебраической системы (1.4.6). Данные утверждения устанавливаются с помощью канонической формы Кронекера регулярного пучка матриц $A - \lambda E$ (см. теорему 1.4.1).

Пример 2.6.1 Рассмотрим нелинейную систему управления, описывающую динамику маятника с маховиком [10],

$$E\dot{x} = A(x)x + B\,u, \quad y = Cx, \quad u = Ky, \tag{2.6.9}$$

где

$$x = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1\chi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J\chi & J_r + J_m\chi \\ 0 & J_r\chi + J_m\chi^2 & J_r + J_m\chi^2 \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (m_0b + m_1h)\,g\chi\,\varphi(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \ \varphi(\psi) = \frac{\sin\psi}{\psi}, \ C = I_3.$$

Здесь $J = J_v + J_r + J_m + m_1h^2$ — полный момент инерции системы, а $\varphi(\psi)$ — непрерывная функция. В данном случае измеряемым выходом системы является ее вектор состояния.

Возьмем следующие значения механических параметров маятника и характеристик двигателя маховика:

$$m_0 = 1\,\text{кг}, \ m_1 = 3\,\text{кг}, \ b = 0,1\,\text{м}, \ h = 0,13\,\text{м},$$

$$J_v = 0,0392\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \ J_m = 0,03\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \ J_r = 0,0001\,\text{кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$\chi = 0,1, \ c_1 = 0,08\,\text{Н}\cdot\text{м/В}, \ c_2 = 0,0076\,\text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}.$$

В окрестности нулевого состояния равновесия маятника функция $\varphi(\psi) \approx 1$, а линейное приближение замкнутой системы (2.6.9) имеет вид (2.6.5), где $A = A(0)$ и $\det E \neq 0$.

Используя систему MATHCAD, находим матрицы

$$K_0 = \begin{bmatrix} 14,1388 & 1,856 & 1,0375 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,614 & -0,048 & -30,7606 \\ -0,048 & 49,5901 & -441,8941 \\ -30,7606 & -441,8941 & 6082,4 \end{bmatrix} > 0,$$

удовлетворяющие условиям (2.6.6):

$$\mathrm{tr}(A_0XE^T) = -0.0963 < 0, \quad \mu(A_0XE^T + EXA_0^T) = 0,0002 > 0,$$

где $A_0 = A(0) + BK_0$. При этом спектр системы (2.6.5)

$$\sigma(F) = \big\{ -5,0585; -2,3712 \pm 3,4193i \big\},$$

где $F(\lambda) = A_0 - \lambda E$ — пучок матриц.

Таким образом, в силу теоремы 2.6.1 и теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению состояние $x \equiv 0$ нелинейной системы (2.6.9) с управлением $u = K_0x$ асимптотически устойчиво. При этом $v(x) = x^TX^{-1}x$ является функцией Ляпунова данной системы.

Глава 3

Стабилизация и оптимизация линейных систем управления

В данной главе рассматривается класс линейных систем управления с обратной связью по измеряемому выходу. Предполагается, что измеряемый выход формируется в виде линейных комбинаций векторов как фазовых переменных, так и управления. При этом внешние возмущения в уравнениях движения системы и измеряемых переменных не учитываются.

В параграфе 3.1 излагаются некоторые известные и новые методы построения стабилизирующих управлений в виде статической обратной связи по измеряемому выходу.

В параграфе 3.2 приводятся методы построения динамической обратной связи, обеспечивающей асимптотическую устойчивость замкнутой линейной системы управления.

В параграфе 3.3 в терминах ЛМН формулируются условия робастной устойчивости линейных систем управления с неопределенными матрицами коэффициентов в уравнениях движения, измеряемого выхода и регулятора.

В параграфе 3.4 излагаются методы оптимизации линейных систем управления с квадратичным критерием качества, основанные на решении матричных уравнений и неравенств.

В параграфе 3.5 приводятся условия стабилизируемости класса дескрипторных систем управления с помощью статических и динамических регуляторов.

3.1 Системы стабилизации со статической обратной связью

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления (входа) и наблюдаемого (измеряемого) выхода объекта, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица коэффициентов системы, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — матрица входа, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ — матрица выхода по состоянию и $D \in \mathbb{R}^{l\times m}$ — матрица выхода по управлению (матрица обхода), определяющая прямую зависимость выхода от входа. Будем предполагать, что матрицы B и C имеют полный ранг соответственно по столбцам и по строкам:

$$\operatorname{rank} B = m, \quad \operatorname{rank} C = l. \tag{3.1.2}$$

Блок-схема данной системы управления (3.1.1) приведена на рис. 3.1. Ее особенностью является возможность использования в обратной связи измерений линейных комбинаций как вектора состояния системы, так и управления.

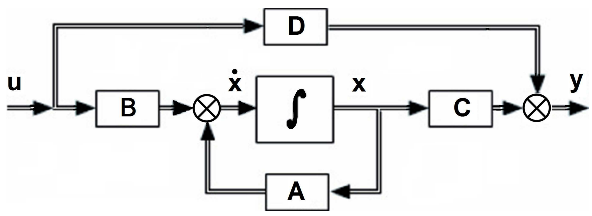


Рис. 3.1. Блок-схема системы управления.

Управление u в системе (3.1.1) определяем в виде линейной *обратной связи по выходу*

$$u = Ky, \tag{3.1.3}$$

где K — матрица коэффициентов усиления размеров $m \times l$. Одна из главных задач состоит в нахождении матрицы K, при которой замкнутая система (3.1.1) асимптотически устойчива.

При решении задач стабилизации для системы (3.1.1) будем использовать ортогональные дополнения и псевдообратные матрицы матричных коэффициентов B и C, которые при условиях (3.1.2) определяются соотношениями

$$B^T B^\perp = 0, \quad \det\left[B, B^\perp\right] \neq 0, \quad B^+ = (B^T B)^{-1} B^T, \tag{3.1.4}$$

$$C^\perp C^T = 0, \quad \det\left[C^T, C^{\perp T}\right] \neq 0, \quad C^+ = C^T (C C^T)^{-1}. \tag{3.1.5}$$

При использовании матрицы $B^\perp$ ($C^\perp$) предполагается, что $m < n$ ($l < n$).

3.1.1 Обратная связь по состоянию

Пусть в системе (3.1.1) $C = I_n$ и $D = 0$. В данном случае наблюдаемым выходом системы является вектор x, а управление u определяется в виде линейной *обратной связи по состоянию*:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = Kx. \tag{3.1.6}$$

Пара матриц (A, B) называется *стабилизируемой*, если существует матрица $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, для которой замкнутая система

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + BK, \tag{3.1.7}$$

асимптотически устойчива. Множество таких матриц обратной связи K обозначим через $\mathcal{K}(A, B)$.

Достаточным условием стабилизируемости пары (A, B) является ее свойство *управляемости*, эквивалентное каждому из условий

$$\operatorname{rank}\left[\, B, AB, \ldots, A^{n-1}B \,\right] = n, \tag{3.1.8}$$

$$\operatorname{rank}\left[\, A - \lambda I_n, B \,\right] = n, \quad \lambda \in \sigma(A). \tag{3.1.9}$$

Равенство (3.1.8) представляет критерий управляемости Калмана системы (3.1.6), а условие (3.1.9) равносильно *управляемости спектра* данной системы. Если равенство (3.1.9) выполняется на спектре $\sigma(A)$, то оно выполняется и во всей плоскости $\mathbb{C}$.

Приведем критерии стабилизируемости системы (3.1.6).

Теорема 3.1.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Пара* (A, B) *стабилизируема, т.е.* $\mathcal{K}(A, B) \neq \emptyset$.

2) *Существуют матрицы* $X = X^T > 0$ *и* Z, *для которых*

$$AX + XA^T + BZ + Z^T B^T < 0, \tag{3.1.10}$$

при этом

$$K = ZX^{-1} \in \mathcal{K}(A, B). \tag{3.1.11}$$

3) *Существует матрица* $X = X^T > 0$, *для которой*

$$AX + XA^T < 2BB^T, \tag{3.1.12}$$

при этом

$$K = -\gamma B^T X^{-1} \in \mathcal{K}(A, B), \quad \gamma \geq 1. \tag{3.1.13}$$

4) *Существует матрица* $X = X^T > 0$, *для которой*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)\, B^{\perp} < 0, \tag{3.1.14}$$

при этом

$$K = -\gamma B^T X^{-1} \in \mathcal{K}(A, B), \quad \gamma \geq \gamma_0, \tag{3.1.15}$$

где $\gamma_0 > 0$ *— некоторое число.*

5) *Если* $\lambda \in \sigma(A)$ *и* $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$, *то*

$$\mathrm{rank}\left[\, A - \lambda I_n, B \,\right] = n. \tag{3.1.16}$$

При выполнении одного из утверждений 2) – 4) *квадратичная форма* $v(x) = x^T X^{-1} x$ *является функцией Ляпунова для замкнутой системы* (3.1.7).

Доказательство. Очевидно, что 1) $\Rightarrow$ 2), так как нелинейное относительно $X = X^T > 0$ и K матричное неравенство Ляпунова

$$Y = (A + BK)X + X(A + BK)^T < 0, \tag{3.1.17}$$

эквивалентное асимптотической устойчивости системы (3.1.7), при условии (3.1.11) приводится к виду (3.1.10). В частности при $Z = B^T$ имеем неравенство (3.1.12), т. е. 2) $\Rightarrow$ 3). При этом каждая матрица (3.1.13) удовлетворяет неравенству (3.1.17).

Далее, умножая соотношение (3.1.12) слева и справа соответственно на $B^{\perp T}$ и $B^{\perp}$ приходим к неравенству (3.1.14), т. е. 3) $\Rightarrow$ 4). При этом существует $\gamma_0 > 0$ такое, что каждая матрица (3.1.15) удовлетворяет неравенству (3.1.17). Действительно, используя невырожденную матрицу $T = \left[B^{+T}, B^{\perp}\right]$, преобразуем соотношение (3.1.17):

$$T^T Y T = \begin{bmatrix} B^+ L B^{+T} - 2\gamma I_n & B^+ L B^{\perp} \\ B^{\perp T} L B^{+T} & S \end{bmatrix} < 0,$$

где $L = AX + XA^T$, $S = B^{\perp T} L B^{\perp}$. Данное соотношение в силу леммы Шура [21] эквивалентно двум неравенствам

$$S < 0, \quad H = B^+(L - LB^{\perp} S^{-1} B^{\perp T} L) B^{+T} < 2\gamma I_n.$$

Здесь первое неравенство совпадает с (3.1.14), а второе выполняется при $\gamma > \gamma_0 = \lambda_{\max}(H)/2$. Тем самым показано, что 4) $\Rightarrow$ 1).

При выполнении одного из соотношений (3.1.10), (3.1.12) или (3.1.14) при $X = X^T > 0$ положительно определенная квадратичная форма $v(x) = x^T X^{-1} x$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы (3.1.7), поскольку ее производная в силу данной системы с учетом (3.1.17) отрицательна:

$$\dot{v}(x) = x^T W x < 0, \quad x \neq 0,$$

где $W = M^T X^{-1} + X^{-1} M = X^{-1} Y X^{-1} < 0$.

Покажем, что 3) $\Rightarrow$ 5). Пусть $q^* \neq 0$ — левый собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению $\lambda \in \sigma(A)$ и $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Тогда согласно (3.1.12) имеем

$$0 \leq q^*(AX + XA^T)q = 2\mathrm{Re}\lambda\, q^*Xq < 2\|q^*B\|^2, \quad q^*B \neq 0.$$

Для любого другого вектора $q^* \neq 0$ выполняется неравенство $q^*(A - \lambda I_n) \neq 0$. Следовательно,

$$q^*\big[\, A - \lambda I_n, B \,\big] \neq 0, \quad \forall q \in \mathbb{C}^n,$$

что равносильно условию (3.1.16).

Наконец, покажем, что 5) $\Rightarrow$ 1). Обратимся к декомпозиции Калмана неуправляемой системы (3.1.6):

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + A_3 z_2 + B_1 u, \quad \dot{z}_2 = A_2 z_2, \tag{3.1.18}$$

где

$$x = Gz = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}AG = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad G^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

G — невырожденная матрица, $z_1 \in \mathbb{R}^r$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, $r = \mathrm{rank}\big[B, AB, \ldots, A^{n-1}B\big]$. При этом $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ и подмножество спектра $\sigma(A_2)$ неуправляемо. Так как пара матриц (A_1, B_1) управляема, то система (3.1.18) стабилизируема в том и только в том случае, когда $\sigma(A_2) \subseteq \mathbb{C}^-$. Данное спектральное свойство системы (3.1.18) вытекает из утверждения 5), поскольку условие (3.1.16) с учетом декомпозиции (3.1.18) сводится к виду

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} A_1 - \lambda I_r & A_3 & B_1 \\ 0 & A_2 - \lambda I_{n-r} & 0 \end{bmatrix} = n,$$

где блок $A_2 - \lambda I_{n-r}$ должен быть невырожденным при $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}^+$.

Теорема доказана.

Свойство управляемости (3.1.9) является усилением требования стабилизируемости (3.1.16). Сопоставляя условия (3.1.9) и (3.1.16), видим, что для управляемости пары матриц (A, B) необходимо и достаточно, чтобы обе пары матриц (A, B) и $(-A, B)$ были стабилизируемы (см. также [105]).

Из утверждений 2) – 4) теоремы 3.1.1 вытекают достаточно эффективные способы построения стабилизирующей матрицы обратной связи $K \in \mathcal{K}(A, B)$, основанные на решении ЛМН (3.1.10), (3.1.12) и (3.1.14). Условия разрешимости данных неравенств совпадают и эквивалентны стабилизируемости пары (A, B). Преимущества использования неравенства (3.1.14) по сравнению с (3.1.10) и (3.1.12) очевидны, если учитывать размеры соответствующих матричных выражений. Однако, при использовании неравенства (3.1.14) коэффициент γ в (3.1.15) может быть достаточно большим, а его точная оценка затруднительна. Поэтому в данном случае целесообразно решать последовательно два ЛМН (3.1.14) и (3.1.17).

Отметим также, что в силу утверждения 2) теоремы 3.1.1 множество всех стабилизирующих матриц обратной связи по состоянию описывается в терминах ЛМН:

$$\mathcal{K}(A, B) = \left\{ZX^{-1} : AX + XA^T + BZ + Z^T B^T < 0,\, X = X^T > 0\right\}.$$

Если в теореме 3.1.1 всюду вместо A использовать выражение $A_\alpha = A + \alpha I_n$ при $\alpha \geq 0$, то каждое из утверждений 2) – 5) является критерием стабилизируемости системы (3.1.6) со спектральным запасом $\varepsilon > \alpha$, т. е. достижения ее свойства α-устойчивости.

3.1.2 Обратная связь по выходу $y = Cx$

Рассмотрим систему управления (3.1.1) при $D = 0$:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad u = Ky. \tag{3.1.19}$$

Двойственным свойством стабилизируемости системы является детектируемость. Пара матриц (A, C) называется *детек-*

тируемой, если пара (A^T, C^T) стабилизируема. Достаточным условием детектируемости пары (A, C) является ее свойство *наблюдаемости*, эквивалентное каждому из условий

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{3.1.20}$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda I_n \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \sigma(A). \tag{3.1.21}$$

Равенство (3.1.20) представляет критерий наблюдаемости Калмана системы (3.1.19), а условие (3.1.21) равносильно *наблюдаемости спектра* данной системы.

Тройка матриц (A, B, C) называется *стабилизируемой*, если существует матрица обратной связи K, при которой замкнутая система

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + BKC \tag{3.1.22}$$

асимптотически устойчива. Пусть $\mathcal{K}(A, B, C)$ — множество таких матриц K.

Следующее утверждение дает методику размещения спектра системы (3.1.22) относительно мнимой оси и, в частности, метод поиска стабилизирующих матриц $K \in \mathcal{K}(A, B, C)$.

Лемма 3.1.1 *Существует матрица K, для которой спектр $\sigma(M)$ состоит из p и q точек в соответствующих полуплоскостях $\mathbb{C}^-$ и $\mathbb{C}^+$, в том и только в том случае, когда разрешима относительно $X = X^T$ система соотношений*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)B^{\perp} < 0, \tag{3.1.23}$$

$$\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}, \quad \mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \tag{3.1.24}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^T \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix},$$

$H_0 = B^+(L - LRL)B^{+T}, H_1 = CX(I_n - RL)B^{+T}, H_2 = -CXRXC^T,$

$$L = AX + XA^T, \quad R = B^\perp S^{-1} B^{\perp T}, \quad S = B^{\perp T} L B^\perp.$$

При условиях (3.1.23) *и* (3.1.24) *матрица* K *может быть найдена путем решения одного из эквивалентных матричных неравенств*

$$H_0 + KH_1 + H_1^T K^T + KH_2 K^T < 0, \tag{3.1.25}$$

$$AX + XA^T + BKCX + XC^T K^T B^T < 0. \tag{3.1.26}$$

Доказательство. Согласно теореме инерции [125] матрица M имеет p и q $(p + q = n)$ собственных значений с учетом кратностей в полуплоскостях $\mathbb{C}^-$ и $\mathbb{C}^+$ соответственно лишь в том случае, когда матричное неравенство (3.1.26) имеет решение $X = X^T$ с инерцией $\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}$. Если при этом $p = n$, то $\sigma(M) \subset \mathbb{C}^-$.

Пусть матричное неравенство (3.1.26) разрешимо относительно $X = X^T$ и K. Покажем, что выполняются соотношения (3.1.23) и (3.1.24).

Применяя лемму Шура к блочной матрице $T^T Y T < 0$, где

$$Y = AX + XA^T + BKCX + XC^T K^T B^T, \; T = \left[B^{+T}, B^\perp\right], \; \det T \neq 0,$$

имеем систему неравенств

$$S < 0, \quad Y_1 = H_0 + KH_1 + H_1^T K^T + KH_2 K^T < 0, \tag{3.1.27}$$

эквивалентную (3.1.26). Инерции матриц H и

$$\begin{bmatrix} I_m & K \\ 0 & I_l \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ K^T & I_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & H_3^T \\ H_3 & H_2 \end{bmatrix}$$

совпадают, поэтому согласно общей формуле (1.1.12) для индексов инерции блочных матриц имеем $i_\pm(H) = i_\pm(Y_1) + i_\pm(H_4)$, где

$H_4 = H_2 - H_3 Y_1^{-1} H_3^T$, $H_3 = H_1 + H_2 K^T$. При условиях (3.1.27) с учетом структуры блоков матрицы H получаем $\mathrm{i}_-(H) = m$ и

$$\mathrm{i}_+(H) = \mathrm{i}_+(H_4) = \operatorname{rank}\left[CXB^{\perp}, H_3\right] = \operatorname{rank}(CXT\Psi) = l,$$

где Ψ — невырожденная матрица вида

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_{n-m} & -S^{-1}B^{\perp T}(XC^T K^T + LB^{+T}) \end{bmatrix}.$$

Покажем, что при условиях (3.1.23) и (3.1.24) матричные неравенства (3.1.25) и (3.1.26) разрешимы относительно K. Используя спектральное разложение невырожденной симметричной матрицы H, имеем

$$H = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T & V_2^T \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = l, \quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = m.$$

При этом $\det U_2 \neq 0$. Действительно, $U_2 U_2^T - V_2 V_2^T = H_2 \geq 0$ и поэтому (см. лемму 8.1.1) $V_2 = U_2 G$, где G — некоторая $l \times m$–матрица такая, что $GG^T \leq I_l$. Но тогда $\operatorname{rank}\left[U_2, V_2\right] = \operatorname{rank} U_2 = l$.

Покажем, что существует матрица K, для которой $\det(V_1 + KV_2) \neq 0$ и

$$Y_1 = (U_1 + KU_2)(U_1 + KU_2)^T - (V_1 + KV_2)(V_1 + KV_2)^T < 0.$$

Последнее неравенство выполняется, если положить $U_1 + KU_2 = (V_1 + KV_2)F$ или $KU_2(I_l - GF) = V_1 F - U_1$, где F — такая $m \times l$–матрица, что $FF^T < I_m$. Тогда, учитывая, что $GG^T \leq I_l$, имеем $GFF^T G^T < I_l$ и $\rho(GF) < 1$. Следовательно, при условиях (3.1.23) и (3.1.24) матрица

$$K = (V_1 F - U_1)(I_l - GF)^{-1} U_2^{-1}$$

удовлетворяет соотношениям (3.1.25) и (3.1.26). При этом матрица $V_1 + KV_2 = N(I_m - FG)^{-1}$ невырожденная, поскольку таковыми являются матрицы

$$\begin{bmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N & U_1 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_l & U_2^{-1}V_2 \end{bmatrix}, \quad N = V_1 - U_1U_2^{-1}V_2.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.1.1 Блочная матрица в (3.1.24) представляется в виде $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^T\widehat{H}_2^{-1}\widehat{H}_1$, где

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^T \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+LB^{+T} & B^+XC^T & B^+LB^\perp \\ CXB^{+T} & 0 & CXB^\perp \\ \hline B^{\perp T}LB^{+T} & B^{\perp T}XC^T & S \end{array}\right] =$$

$$= V \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix} V^T = W\Delta W^T, \quad \Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^\perp \\ A^TB^{+T} & C^T & A^TB^\perp \end{bmatrix}, \quad W^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^\perp \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу (1.1.12) для вычисления индексов инерции блочной матрицы $\widehat{H}$ и учитывая, что $S < 0$, а $V \in \mathbb{R}^{n+l\times 2n}$ — матрица полного ранга $n + l$, имеем

$$\mathrm{i}_+(\widehat{H}) = \mathrm{i}_+(H) \le n, \quad \mathrm{i}_-(\widehat{H}) = \mathrm{i}_-(H) + n - m \le n.$$

В то же время $W \in \mathbb{R}^{n+l\times n+l}$ — квадратная невырожденная матрица. Поэтому $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta)$ и в утверждении леммы 3.1.1 вместо (3.1.24) можно использовать соотношения

$$\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}, \quad \mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}. \tag{3.1.28}$$

Отметим, что в некоторых случаях матрицу коэффициентов обратной связи, удовлетворяющей соотношениям (3.1.25) и (3.1.26), можно построить в виде

$$K = -\gamma B^TX^{-1}C^+. \tag{3.1.29}$$

Например, если разрешима относительно X система соотношений

$$AX + XA^T < 2\,BB^T, \quad (C^+C - I_n)X^{-1}B = 0, \tag{3.1.30}$$

то матрица (3.1.29) при $\gamma \geq 1$ удовлетворяет линейному неравенству (3.1.26). Если же

$$\gamma > \lambda_{\max}(H_0)/2, \quad C^{\perp}X^{-1}B = 0, \tag{3.1.31}$$

где X и H_0 определены в (3.1.23) и (3.1.24), то матрица (3.1.29) является решением квадратичного неравенства (3.1.25). При этом последние равенства в (3.1.30) и (3.1.31) эквивалентны.

Если в лемме 3.1.1 вместо A использовать выражение $A_\alpha = A + \alpha I_n$, то получим критерий существования обратной связи по выходу системы (3.1.19), при которой заданные количества ее собственных значений с учетом кратностей удовлетворяют соответствующим условиям $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$ и $\mathrm{Re}\lambda > -\alpha$. В частности, при $\alpha \geq 0$ и $X = X^T > 0$ данный критерий дает необходимые и достаточные условия достижения α-устойчивости системы (3.1.19).

Приведем критерии стабилизируемости системы (3.1.19), основанные на решении матричных уравнений и неравенств.

Теорема 3.1.2 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Тройка* (A, B, C) *стабилизируема.*

2) *Система соотношений*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)\,B^{\perp} < 0, X = X^T > 0, \mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \tag{3.1.32}$$

где матрица H *определена в* (3.1.24)*, совместна.*

3) *Система соотношений*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)\,B^{\perp} < 0,\ X = X^T > 0,\ \mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}, \tag{3.1.33}$$

где

$$\Delta = \begin{bmatrix} AX + XA^T & XC^T \\ CX & 0 \end{bmatrix},$$

совместна.

4) *Система матричных неравенств*

$$B^{\perp T}(AX+XA^T)B^{\perp} < 0,\ C^{\perp}(A^TX^{-1}+X^{-1}A)C^{\perp T} < 0 \quad (3.1.34)$$

имеет решение $X = X^T > 0$.

5) *Матричное неравенство*

$$AX+XA^T-XC^TCX+(BK+XC^T)(BK+XC^T)^T < 0 \quad (3.1.35)$$

разрешимо относительно $X = X^T > 0$ *и* K.

6) *Пара* (A, B) *стабилизируема, пара* (A, C) *детектируема и матричное уравнение*

$$AX + XA^T - XC^TCX + (BK + XC^T)(BK + XC^T)^T = -BB^T \quad (3.1.36)$$

разрешимо относительно $X = X^T \geq 0$ *и* K.

В теореме 3.1.2 критерии стабилизируемости 2) и 3) системы (3.1.19) являются следствиями леммы 3.1.1 и замечания 3.1.1, а критерий 4) вытекает из условий разрешимости двучленных линейных матричных неравенств [103] (см. лемму 8.3.1 и вывод аналогичного критерия стабилизируемости дискретных систем в теореме 6.1.2). Доказательства критериев 4) – 6) имеются в соответствующих работах [96, 99, 116] (см. также [13]).

Отметим, что эквивалентность критериев 3) и 4) можно установить путем вычисления инерции блочной матрицы

$$\Delta_1 = W_1^T \Delta W_1 = \left[\begin{array}{c|cc} C^{\perp}L_1C^{\perp T} & 0 & C^{\perp}L_1C^{+} \\ \hline 0 & 0 & I_l \\ C^{+T}L_1C^{\perp T} & I_l & C^{+T}L_1C^{+} \end{array}\right], \quad (3.1.37)$$

где

$$L_1 = A^TY + YA, \quad W_1 = \begin{bmatrix} YC^{\perp T} & 0 & YC^{+} \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = X^{-1}.$$

Так как W_1 — квадратная невырожденная матрица, то согласно (1.1.12) $\mathrm{i}_\pm(\Delta) = \mathrm{i}_\pm(\Delta_1) = \mathrm{i}_\pm(C^\perp L_1 C^{\perp T}) + l$. Поэтому равенство $\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\}$ равносильно второму матричному неравенству (3.1.34).

При выполнении утверждений 2), 3) или 4) теоремы 3.1.2 соответствующая матрица стабилизирующего регулятора K может быть определена как решение одного из матричных неравенств (3.1.25) или (3.1.26). В утверждениях 5) и 6) такая матрица K должна удовлетворять соответствующим соотношениям (3.1.35) и (3.1.36). В [113] на основе соотношений (3.1.34) приведено параметрическое описание всего множества стабилизирующих матриц $K \in \mathcal{K}(A, B, C)$.

3.1.3 Обратная связь по выходу $y = Cx + Du$

Пусть в системе (3.1.1) $D \neq 0$. В данном случае обратная связь (3.1.3) определяется *неявно*, так как вектор наблюдаемого выхода $y = Cx + Du$ явно содержит управление u.

Введем на множестве матриц $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$ нелинейный оператор

$$\mathbf{D} : \mathbb{R}^{m\times l} \to \mathbb{R}^{m\times l}, \quad \mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K. \tag{3.1.38}$$

Если $K \in \mathcal{K}_D$, то обратную связь по выходу $y = Cx + Du$ с матрицей коэффициентов K можно рассматривать как обратную связь по выходу $\tilde{y} = Cx$ с матрицей коэффициентов $\mathbf{D}(K)$.

Для каждой матрицы обратной связи $K \in \mathcal{K}_D$ замкнутая система (3.1.1) имеет вид

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C. \tag{3.1.39}$$

Пусть $\mathcal{K}(A, B, C, D) \subseteq \mathcal{K}_D$ — множество матриц обратной связи K, при которых замкнутая система (3.1.39) асимптотически устойчива.

Приведем без доказательства используемые в дальнейшем свойства оператора (3.1.38):

1) если $K \in \mathcal{K}_D$, то

$$\mathbf{D}(K) \equiv K(I_l - DK)^{-1}, \quad I_l + D\mathbf{D}(K) \equiv (I_l - DK)^{-1}; \tag{3.1.40}$$

2) если $K_1 \in \mathcal{K}_D$ и $K_2 \in \mathcal{K}_{D_1}$, то $K_1 + K_2 \in \mathcal{K}_D$ и

$$\mathbf{D}(K_1 + K_2) = \mathbf{D}(K_1) + (I_m - K_1 D)^{-1}\mathbf{D}_1(K_2)\,(I_l - DK_1)^{-1}, \tag{3.1.41}$$

где $\mathbf{D}_1(K_2) = (I_m - K_2 D_1)^{-1} K_2$, $D_1 = (I_l - DK_1)^{-1} D$;

3) если $-K_0 \in \mathcal{K}_D$, то $K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D$ и

$$\mathbf{D}(K) = K_0. \tag{3.1.42}$$

Согласно (3.1.42) для достижения желаемых свойств и, в частности, устойчивости системы (3.1.39) достаточно обеспечить эти свойства системе с матрицей $M_0 = A + BK_0C$. Если для некоторой матрицы X матричное неравенство Ляпунова (3.1.26) разрешимо относительно K, то всегда можно подобрать решение K_0 такое, что $-K_0 \in \mathcal{K}_D$. Например, полагая $K_0 = \gamma K$, для некоторого γ выполняются соотношения $AX + XA^T + \gamma\,(BKCX + XC^TK^TB^T) < 0$ и $\det(I + \gamma KD) \neq 0$. Это следует из непрерывной зависимости от γ собственных чисел приведенных матричных выражений. Поэтому каждое из утверждений 2) – 6) теоремы 3.1.2 дает методику поиска стабилизирующих матриц $K \in \mathcal{K}(A, B, C, D)$ при дополнительном требовании $K \in \mathcal{K}_D$. В частности, имеем следующий критерий.

Теорема 3.1.3 *Линейная система* (3.1.39) *стабилизируема с помощью регулятора* (3.1.3) *в том и только в том случае, когда существует матрица* $X = X^T > 0$, *удовлетворяющая соотношениям* (3.1.33). *При этом стабилизирующая матрица обратной связи может быть определена в виде*

$$K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D, \tag{3.1.43}$$

где K_0 *— решение ЛМН* (3.1.26).

Учитывая соотношения (3.1.23), (3.1.24), (3.1.31) и (3.1.42), имеем достаточные условия, гарантирующие α-устойчивость системы (3.1.39).

Следствие 3.1.1 *Пусть для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется система соотношений*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T + 2\alpha X)\,B^{\perp} < 0, \quad C^{\perp}X^{-1}B = 0, \qquad (3.1.44)$$

где $\alpha \geq 0$. Тогда матрица обратной связи K, определяемая соотношениями

$$K = -\mathbf{D}(K_0),\ \ K_0 = \gamma\, B^T X^{-1} C^{+} \in \mathcal{K}_D,\ \ \gamma > \lambda_{\max}(H_0)/2,$$

обеспечивает α-устойчивость замкнутой системы (3.1.39).

Приведем необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (3.1.1) в терминах свойств управляемости и наблюдаемости. Рассмотрим матричную функцию

$$\Lambda(\lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \qquad (3.1.45)$$

Если пара (A, B) управляема или пара (A, C) наблюдаема, то $\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) \geq n$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Используя свойства ранга блочной матрицы, имеем

$$\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) \equiv n + \operatorname{rank}\Phi(\lambda), \quad \lambda \notin \sigma(A),$$

где $\Phi(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D$ — матричная *передаточная функция* системы (3.1.1). Обратимся к общей канонической декомпозиции Калмана системы (3.1.1). В общем случае существует невырожденная матрица G такая, что

$$G^{-1}AG = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad G^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$CG = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}.$$

При этом преобразование $x = Gz$ приводит к системе

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_3 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1u, \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u, \\ \dot{z}_3 = A_{33}z_3 + A_{34}z_4, \\ \dot{z}_4 = A_{44}z_4, \end{cases} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

$$y = C_2z_2 + C_4z_4 + Du, \quad u = Ky,$$

в которой пары матриц

$$(A_{22}, B_2), \quad \left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$$

являются управляемыми, а пары матриц

$$(A_{22}, C_2), \quad \left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \right)$$

— наблюдаемыми (см., например, [135, 138]). Пространство состояний данной системы состоит из таких подпространств: управляемое и ненаблюдаемое ($z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$), управляемое и наблюдаемое ($z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$), неуправляемое и ненаблюдаемое ($z_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$), неуправляемое и наблюдаемое ($z_4 \in \mathbb{R}^{n_4}$), причем $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$. Кроме того, справедливы соотношения

$$\Phi(\lambda) = C_2(\lambda I_{n_2} - A_{22})^{-1}B_2 + D, \quad \lambda \notin \sigma(A_{22}),$$

$$\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{22}) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44}),$$

$$\sigma(M) = \sigma(A_{11}) \cup \sigma(M_2) \cup \sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44}),$$

$$G^{-1}MG = \begin{bmatrix} A_{11} & M_{12} & A_{13} & M_{14} \\ 0 & M_{22} & 0 & M_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad K \in \mathcal{K}_D,$$

$$P\Lambda(\lambda)Q = \left[\begin{array}{cccc|c} A_{11}-\lambda I_{n_1} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & B_1 \\ 0 & A_{22}-\lambda I_{n_2} & 0 & A_{24} & B_2 \\ 0 & 0 & A_{33}-\lambda I_{n_3} & A_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44}-\lambda I_{n_4} & 0 \\ \hline 0 & C_2 & 0 & C_4 & D \end{array}\right],$$

где

$$P = \begin{bmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = A_{12} + B_1\mathbf{D}(K)C_2, \quad M_{14} = A_{14} + B_1\mathbf{D}(K)C_2,$$

$$M_{22} = A_{22} + B_2\mathbf{D}(K)C_2, \quad M_{24} = A_{24} + B_2\mathbf{D}(K)C_2.$$

M — матрица замкнутой системы (3.1.39), $\Lambda(\lambda)$ — матричная функция вида (3.1.45). Из данных соотношений следует, что система (3.1.1) является стабилизируемой в том и только в том случае, когда стабилизируема управляемая и наблюдаемая подсистема

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u, \quad y = C_2x + Du, \quad u = Ky,$$

а часть спектра системы $\sigma(A_{11})\cup\sigma(A_{33})\cup\sigma(A_{44})$, не обладающая одним из свойств управляемости или наблюдаемости, расположена в полуплоскости $\mathbb{C}^-$.

Отметим, что неуправляемая часть спектра $\sigma(A_{33}) \cup \sigma(A_{44})$ расположена в полуплоскости $\mathbb{C}^-$, если выполняются условия

$$\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) = n + m, \quad \lambda \in \sigma(A), \quad \mathrm{Re}\lambda \geq 0.$$

Аналогично, при условиях

$$\operatorname{rank}\Lambda(\lambda) = n + l, \quad \lambda \in \sigma(A), \quad \mathrm{Re}\lambda \geq 0,$$

ненаблюдаемая часть спектра $\sigma(A_{11}) \cup \sigma(A_{33})$ расположена в полуплоскости $\mathbb{C}^-$.

3.2 Динамическая обратная связь

Определим *динамическую обратную связь* для системы управления (3.1.1) в виде

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{3.2.1}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния динамического регулятора (*компенсатора*), Z, V, U и K — неизвестные матрицы соответствующих размеров $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ и $m \times l$. Число r называется *порядком* динамического регулятора. В частном случае $r = 0$ имеем статический регулятор $u = Ky$.

При $r \neq 0$ соотношения (3.1.1) и (3.2.1) можно записать в компактном виде:

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{3.2.2}$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, системы соотношений (3.1.1) и (3.2.1) являются следствием (3.2.2) и структуры приведенных блочных матриц.

Лемма 3.2.1 *Система управления* (3.1.1) *с динамической обратной связью* (3.2.1) *порядка* $r \neq 0$ *эквивалентна системе управления со статической обратной связью* (3.2.2).

Таким образом, задачи управления и, в частности, стабилизации системы (3.1.1) с динамической обратной связью (3.2.1) сводятся к аналогичным задачам управления для системы (3.2.2) со статической обратной связью. Следует отметить, что в задачах управления при условиях неполной информации о состоянии объекта динамические регуляторы имеют более широкие возможности, чем статические.

Нелинейный оператор

$$\widehat{\mathbf{D}} : \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+l)} \to \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+l)}, \quad \widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = (I_{r+m} - \widehat{K}\widehat{D})^{-1}\widehat{K},$$

можно представить в блочном виде

$$\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}(K) & (I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1} & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

где $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. При этом замкнутая система (3.2.2) имеет вид

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}, \tag{3.2.3}$$

где

$$\widehat{M} = \left[\begin{array}{c|c} M & B(I_m - KD)^{-1}U \\ \hline V(I_l - DK)^{-1}C & Z + VD(I_m - KD)^{-1}U \end{array}\right],$$

$$M = A + B\mathbf{D}(K)C, \quad K \in \mathcal{K}_D.$$

Согласно (3.1.2), (3.1.4) и (3.1.5) имеем выражения ортогональных дополнений и псевдообратных матриц для матричных коэффициентов $\widehat{B}$ и $\widehat{C}$ полного ранга:

$$\widehat{B}^{\perp} = \begin{bmatrix} B^{\perp} \\ 0_{r\times(n-m)} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}^{+} = (\widehat{B}^T\widehat{B})^{-1}\widehat{B}^T = \begin{bmatrix} B^{+} & 0_{m\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}^{\perp} = \left[C^{\perp}, 0_{(n-l)\times r}\right], \quad \widehat{C}^{+} = \widehat{C}^T(\widehat{C}\widehat{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} C^{+} & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times l} & I_r \end{bmatrix}.$$

Данные соотношения могут быть использованы при построении условий стабилизируемости системы (3.1.1) с помощью динамического регулятора (3.2.1). Например, учитывая утверждения 3) и 4) теоремы 3.1.2 и лемму 3.2.1, имеем следующее утверждение.

Теорема 3.2.1 *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Существует динамический регулятор* (3.2.1) *порядка* $r \leq n$*, обеспечивающий асимптотическую устойчивость системы* (3.1.1).

2) *Существуют матрицы* $X = X^T > 0$ *и* $X_0 = X_0^T > 0$*, удовлетворяющие соотношениям*

$$X \geq X_0, \quad \mathrm{rank}(X - X_0) \leq r, \tag{3.2.4}$$

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)\, B^{\perp} < 0, \quad \mathrm{i}(\Delta_0) = \{l, n, 0\}, \tag{3.2.5}$$

где

$$\Delta_0 = \begin{bmatrix} AX_0 + X_0A^T & X_0C^T \\ CX_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Существуют матрицы* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$*, удовлетворяющие соотношениям*

$$B^{\perp T}(AX + XA^T)B^{\perp} < 0, \quad C^{\perp}(A^TY + YA)\, C^{\perp T} < 0, \tag{3.2.6}$$

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \mathrm{rank}\, W \leq n + r. \tag{3.2.7}$$

Доказательство. Учитывая утверждение 3 теоремы 3.1.2 и лемму 3.2.1, имеем критерий стабилизируемости системы (3.1.1) с помощью динамического регулятора (3.2.1):

$$\widehat{B}^{\perp T}(\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T)\widehat{B}^{\perp} < 0, \quad \mathrm{i}(\widehat{\Delta}) = \{l + r, n + r, 0\}, \tag{3.2.8}$$

где

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T & \widehat{X}\widehat{C}^T \\ \widehat{C}\widehat{X} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Здесь первое соотношение с учетом структуры блочных матриц совпадает с матричным неравенством в (3.2.5) относительно X.

Используем конгруэнтное преобразование матрицы $\widehat{\Delta}$:

$$L\widehat{\Delta}L^T = \begin{bmatrix} \Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{bmatrix}, \tag{3.2.9}$$

где

$$L = \begin{bmatrix} I_n & -X_1^T X_2^{-1} & 0 & -AX_1^T X_2^{-1} \\ 0 & 0 & I_l & -CX_1^T X_2^{-1} \\ 0 & I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & X_2 \\ X_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь диагональный блок Δ_0 определен в (3.2.5) при $X_0 = X - X_1^T X_2^{-1} X_1$. При этом $\mathrm{i}(\Delta_1) = \{r, r, 0\}$, $X \geq X_0$ и $\mathrm{rank}\,(X - X_0) = \mathrm{rank}\,(X_1^T X_2^{-1} X_1) \leq r$.

Следовательно, из (3.2.8) вытекают соотношения (3.2.4) и (3.2.5) для некоторых матриц $X > 0$ и $X_0 > 0$. Обратно, если система соотношений (3.2.4) и (3.2.5) разрешима относительно $X > 0$ и $X_0 > 0$, то с учетом (3.2.9) можно найти блочную матрицу $\widehat{X} > 0$, удовлетворяющую соотношениям (3.2.8). При этом матрица X должна быть ее первым диагональным блоком, а в качестве X_1 и X_2 можно выбрать, например, соответственно множитель разложения $X - X_0 = X_1^T X_1 \geq 0$ и единичную матрицу I_r.

Эквивалентность утверждений 1) и 3) является следствием теоремы 3.1.2 (утверждение 4)) и леммы 3.2.1. На основе приведенных соотношений можно непосредственно установить эквивалентность утверждений 2) и 3). При этом матрицы X и X_0 удовлетворяют утверждению 2) в том и только в том случае, когда матрицы X и $Y = X_0^{-1}$ удовлетворяют утверждению 3) (см. соотношение вида (3.1.37) для преобразованной матрицы Δ_0).

Теорема доказана.

Следует отметить, что для выполнения соотношений (3.2.7) необходимо, чтобы матрицы X и Y были положительно определенными. Ранговое условие в (3.2.7) эквивалентно неравенству $\mathrm{rank}\,(I_n - YX) \le r$. Данное неравенство, а также ранговое условие в (3.2.4) всегда выполняются в случае динамического регулятора полного порядка $r = n$ (см. также [12]).

Алгоритм построения стабилизирующего динамического регулятора (3.2.1) порядка $r \le n$ для системы (3.1.1), вытекающий из утверждения 2) теоремы 3.2.1, состоит из следующих этапов:

1) Определение матриц $X = X^T > 0$ и $X_0 = X_0^T > 0$, удовлетворяющих соотношениям (3.2.4) и (3.2.5).

2) Разложение неотрицательно определенной матрицы

$$X - X_0 = X_1^T X_1 \ge 0, \quad X_1 \in \mathbb{R}^{r\times n}, \quad \mathrm{rank} X_1 \le r.$$

3) Решение ЛМН

$$\widehat{A}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A}^T + \widehat{B}\widehat{K}_0\widehat{C}\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{C}^T\widehat{K}_0^T\widehat{B}^T < 0$$

относительно $\widehat{K}_0$ при ограничении $\det\,(I_m + K_0 D) \ne 0$, где

$$\widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & I_r \end{bmatrix} > 0, \quad \widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

4) Вычисление матриц регулятора (3.2.1) по формулам

$$K = (I_m + K_0 D)^{-1} K_0, \quad U = (I_m + K_0 D)^{-1} U_0,$$

$$V = V_0 (I_l + D K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0 D (I_m + K_0 D)^{-1} U_0.$$

Теорема 3.2.2 *Пусть* (A, B) *и* (A, C) *— соответственно стабилизируема и детектируема пары матриц. Тогда существует динамический регулятор* (3.2.1) *на основе наблюдателя полного порядка* $r = n$*, который обеспечивает асимптотическую устойчивость системы* (3.1.1).

Доказательство. Положим в (3.2.1)

$$Z = A - GC + (B - GD)U, \quad V = G + (B - GD)K, \qquad (3.2.10)$$

где $K \in \mathcal{K}_D$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — некоторые матрицы. Тогда первое уравнение описывает динамику *наблюдателя*

$$\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi - Du), \tag{3.2.11}$$

а замкнутую систему (3.1.1), (3.2.1) можно представить в эквивалентной форме

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x}, \quad \widetilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 & B(I_m - KD)^{-1}U \\ 0_{n\times n} & M_1 \end{bmatrix}, \ \widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \tag{3.2.12}$$

где $M_0 = A + B(I_m - KD)^{-1}(U + KC)$, $M_1 = A - GC$, $e = \xi - x$. В частности, если $K = 0$, то $M_0 = A + BU$.

По предположению существуют матрицы K, U и G такие, что матрицы M_0 и M_1 гурвицевы и система (3.2.12) асимптотически устойчива. При этом $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. (3.2.11) является асимптотическим наблюдателем системы (3.1.1). Искомые матрицы стабилизирующего динамического регулятора (3.2.1) могут быть определены с помощью соотношений (3.2.10) и

$$U = -KC - (I_m - KD)B^T X^{-1}, \quad G = Y^{-1}C^T, \tag{3.2.13}$$

где $K \in \mathcal{K}_D$ — любая матрица, а $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ являются решениями соответствующих ЛМН

$$AX + XA^T < 2\,BB^T, \quad A^TY + YA < 2\,C^TC. \tag{3.2.14}$$

Теорема доказана.

Отметим, что условий теоремы 3.2.2 и, более того, свойств управляемости и наблюдаемости соответствующих пар матриц (A, B) и (A, C) недостаточно для существования стабилизирующей статической обратной связи $u = Ky$ для системы (3.1.1).

3.3 Робастная стабилизация линейных систем

Рассмотрим систему управления (3.1.1) со статической обратной связью (3.1.3). Предположим, что для некоторой матрицы коэффициентов усиления $K_* \in \mathcal{K}_D$ замкнутая система

$$\dot{x} = M_* x, \quad M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \tag{3.3.1}$$

асимптотически устойчива. Здесь $\mathbf{D}(\cdot)$ — нелинейный оператор вида (3.1.38), определяемый матрицей D. Из соображений непрерывности ясно, что для каждого значения K в некоторой окрестности точки K_* пространства матриц $\mathbb{R}^{m\times l}$ замкнутая система (3.1.39) асимптотически устойчива.

Построим множество стабилизирующих управлений в виде

$$u = K\,y, \quad K = K_* + \widetilde{K}, \quad \widetilde{K} \in \mathcal{K}, \tag{3.3.2}$$

где $\mathcal{K}$ — эллипсоидальное множество матриц

$$\mathcal{K} = \{K : K^T P K \le Q\} \tag{3.3.3}$$

в пространстве $\mathbb{R}^{m\times l}$, которое описывают положительно определенные матрицы $P = P^T > 0$ и $Q = Q^T > 0$ соответствующих размеров $m \times m$ и $l \times l$. В силу эквивалентности соотношений

$$K^T P K \le Q, \quad \begin{bmatrix} P^{-1} & K \\ K^T & Q \end{bmatrix} \ge 0, \quad K Q^{-1} K^T \le P^{-1},$$

множество (3.3.3) можно описать также в виде

$$\mathcal{K} = \{K : K Q^{-1} K^T \le P^{-1}\}.$$

При этом в случае $m = 1$ эллипсоид $\mathcal{K}$ описывается с помощью скалярного неравенства.

Из (3.3.3) следует $\lambda_{\min}(P) K^T K \le K^T P K \le Q \le \lambda_{\max}(Q) I_l$, поэтому

$$\|K\| = \sqrt{\lambda_{\max}(K^T K)} \le \rho_* = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}}. \tag{3.3.4}$$

Число ρ_* будем называть *радиусом стабилизации* системы (3.1.1).

Сформулируем вспомогательное утверждение, лежащее в основе вывода дальнейших результатов о робастной стабилизации, а также оптимизации рассматриваемых классов систем.

Рассмотрим нелинейный оператор

$$\mathbf{F}(K) = W + U^T\mathbf{D}(K)V + V^T\mathbf{D}^T(K)U + V^T\mathbf{D}^T(K)\,R\,\mathbf{D}(K)V, \tag{3.3.5}$$

где $W = W^T \leq 0$, $R = R^T \geq 0$, U, V и D — матрицы подходящих размеров, и сформулируем обобщенную *лемму о матричной неопределенности*.

Лемма 3.3.1 (обобщенная лемма о матричной неопределенности). *Пусть выполняются матричные неравенства*

$$R + D^TQD < P,\ \Omega = \begin{bmatrix} W & U^T & V^T \\ U & R-P & D^T \\ V & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0\ (<0). \tag{3.3.6}$$

Тогда $\mathbf{F}(K) \leq 0$ (<0) *для любой матрицы* $K \in \mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Так как

$$D^TK^TPKD \leq D^TQD \leq D^TQD + R < P,$$

то $\rho(KD) < 1$, $K \in \mathcal{K}_D$ и определено значение оператора $\mathbf{D}(K)$.

Используем формулу Фробениуса для обращения блочной матрицы

$$\begin{bmatrix} R-P & D^T \\ D & -Q^{-1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1}D^TQ \\ QD\Delta^{-1} & QD\Delta^{-1}D^TQ - Q \end{bmatrix},$$

где $\Delta = D^TQD + R - P$, и приведем матричное неравенство $\Omega \leq 0$ к виду

$$[U^T, V^T]\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \Delta^{-1}D^TQ \\ QD\Delta^{-1} & QD\Delta^{-1}D^TQ - Q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \geq W. \tag{3.3.7}$$

Здесь использована также лемма Шура 8.2.1. Учитывая (3.3.7), видим, что матричное неравенство $\mathbf{F}(K) \leq 0$, представимое в виде

$$[U^T, V^T] \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}(K) \\ -\mathbf{D}^T(K) & -\mathbf{D}^T(K)R\mathbf{D}(K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \geq W,$$

выполняется, если

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & \mathbf{D}(K) + \Delta^{-1}D^TQ \\ \mathbf{D}^T(K) + QD\Delta^{-1} & \mathbf{D}^T(K)R\mathbf{D}(K) + QD\Delta^{-1}D^TQ - Q \end{bmatrix} \leq 0.$$

Применяя к данному выражению лемму Шура в случае невырожденности первого диагонального блока, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^T(K)R\mathbf{D}(K) &+ QD\Delta^{-1}D^TQ - Q- \\ &- [\mathbf{D}^T(K) + QD\Delta^{-1}]\Delta[\mathbf{D}(K) + \Delta^{-1}D^TQ] = \\ &= \mathbf{D}^T(K)P\mathbf{D}(K) - Q - \mathbf{D}^T(K)D^TQD\mathbf{D}(K)- \\ &- QD\mathbf{D}(K) - \mathbf{D}^T(K)DQ = \\ &= \mathbf{D}^T(K)P\mathbf{D}(K) - [I_l + \mathbf{D}^T(K)D^T]Q[I_l + D\mathbf{D}(K)] \leq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство с учетом свойств (3.1.40) оператора $\mathbf{D}$ и закона инерции приводится к виду $K^TPK \leq Q$, т. е. к условию $K \in \mathcal{K}$.

Отметим, что более сильное предположение $\Omega < 0$ обеспечивает выполнение строгого неравенства $\mathbf{F}(K) < 0$ для любой матрицы $K \in \mathcal{K}$.

Лемма доказана.

Замечание 3.3.1 Матричное неравенство $\Omega \leq 0\,(< 0)$ в силу леммы Шура можно представить в эквивалентной форме

$$\begin{bmatrix} W + V^TQV & U^T + V^TQD \\ U + D^TQV & R + D^TQD - P \end{bmatrix} \leq 0\,(< 0).$$

При этом в случае строгого неравенства $\Omega < 0$ первое условие в (3.3.6) выполняется автоматически, т. е. является следствием данного неравенства.

Отметим, что лемма 3.3.1 является обобщением утверждения достаточности известного критерия, получившего название *леммы Питерсена* о матричной неопределенности [126] (см. также [89]). Согласно [126], для любой матрицы $K \in \mathbb{R}^{m\times l}$ с ограниченной нормой $\|K\| = (\lambda_{\max}(K^TK))^{1/2} \leq 1$ выполняется матричное неравенство $\mathbf{F}(K) = W + U^TKV + V^TK^TU < 0$ в том и только в том случае, когда существует $\varepsilon > 0$ такое, что $W + \varepsilon^{-1}U^TU + \varepsilon V^TV < 0$. Последнее соотношение можно представить в блочном виде

$$\Omega = \begin{bmatrix} W & U^T & V^T \\ U & -\varepsilon I_m & 0 \\ V & 0 & -\varepsilon^{-1} I_l \end{bmatrix} < 0,$$

а требование $\|K\| \leq 1$ выполняется, если $K^TK \leq I_l$. Полагая в лемме 3.3.1 $D = 0$, $R = 0$, $P = \varepsilon I_m$ и $Q = \varepsilon I_l$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число, имеем утверждение достаточности леммы Питерсена.

Теорема 3.3.1 *Пусть для некоторых матриц $X = X^T > 0$ и $K_* \in \mathcal{K}_D$ выполняется система соотношений*

$$D_*^TQD_* < P, \tag{3.3.8}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} M_*^TX + XM_* & XB_* & C_*^T \\ B_*^TX & -P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0\,(< 0), \tag{3.3.9}$$

где

$$M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \quad B_* = B(I_m - K_*D)^{-1},$$

$$C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C, \quad D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}.$$

Тогда любое управление (3.3.2) *обеспечивает устойчивость (асимптотическую устойчивость) системы* (3.1.1) *и общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^TXx$.*

Доказательство. По предположению $K_* \in \mathcal{K}_D$, поэтому определено значение оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$. Если $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то определены также значения операторов $\mathbf{D}(K)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, где $K = K_* + \widetilde{K}$. Действительно, при условиях (3.3.2) и (3.3.8) имеем

$$D_*^T \widetilde{K}^T P \widetilde{K} D_* \leq D_*^T Q D_* < P.$$

Так как $P > 0$, то отсюда следует, что $1 \notin \sigma(\widetilde{K} D_*)$, т. е. матрица $I_m - \widetilde{K} D_*$ невырождена, а вместе с ней невырождена матрица

$$I_m - KD = (I_m - \widetilde{K} D_*)(I_m - K_* D).$$

Итак, замкнутая система (3.1.1), (3.3.2) при ограничении (3.3.8) представляется в виде (3.1.39). Согласно теореме Ляпунова данная система устойчива (асимптотически устойчива) в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется матричное неравенство

$$M^T X + XM \leq 0 \, (< 0), \tag{3.3.10}$$

где $M = A + B\mathbf{D}(K)C$, $K = K_* + \widetilde{K}$. Учитывая свойство (3.1.41) оператора $\mathbf{D}$, данное неравенство можно представить в виде

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T \mathbf{D}_*(\widetilde{K}) V + V^T \mathbf{D}_*^T(\widetilde{K}) U \leq 0 \, (< 0), \tag{3.3.11}$$

где $W = M_*^T X + X M_*$, $U = B_*^T X$, $V = C_*$.

Выражение (3.3.11) представляет оператор вида (3.3.5) в частном случае $R = 0$. Применяя лемму 3.3.1 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, получаем условия вида (3.3.8) и (3.3.9), при которых выполняется матричное неравенство (3.3.11) и, следовательно, (3.3.10) для любой матрицы $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Теорема доказана.

Отметим, что в [12] на основе так называемого свойства неущербности S-процедуры получено аналогичное утверждение в случае $K_* = 0$, $P = I_m$ и $Q = \mu I_l$, где μ — радиус устойчивости матриц обратной связи K для системы (3.1.1). Заметим, что (3.3.8) является следствием строгого неравенства (3.3.9), а матрицы P и $Q_1 = Q^{-1}$ входят в выражение (3.3.9) линейно. Поэтому их наряду с X можно считать неизвестными и определять с помощью эффективной процедуры системы MATLAB. Это расширяет возможности известной методики квадратичной стабилизации для класса линейных систем (3.1.1).

Предположим, что система (3.1.1) имеет неопределенные коэффициенты:

$$A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\alpha\}, \ B \in \mathrm{Co}\{B_1, \dots, B_\beta\}, \ C \in \mathrm{Co}\{C_1, \dots, C_\gamma\}, \tag{3.3.12}$$

где заданные наборы постоянных матриц A_i, B_j и C_k являются вершинами некоторых политопов в соответствующих пространствах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ и $\mathbb{R}^{l\times n}$. При этом исходные (номинальные) значения матричных коэффициентов, при которых определена стабилизирующая матрица обратной связи K_*, могут принадлежать заданным политопам. Тогда матричное неравенство (3.3.9) в силу линейной зависимости блочного выражения Ω от данных коэффициентов вытекает из системы аналогичных неравенств

$$\begin{bmatrix} M_{ijk}^T X + X M_{ijk} & X B_{j*} & C_{k*}^T \\ B_{j*}^T X & -P & D_*^T \\ C_{k*} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0 \ (< 0), \tag{3.3.13}$$

где $\quad M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k, \quad B_{j*} = B_j (I_m - K_* D)^{-1},$

$$C_{k*} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k, \quad i = \overline{1, \alpha}, \quad j = \overline{1, \beta}, \quad k = \overline{1, \gamma}.$$

Действительно, учитывая (3.3.12), после умножения матричных неравенств (3.3.13) на неотрицательные параметры выпуклых линейных комбинаций вершин политопов A_i, B_j и C_k и их суммирования соответственно по i, j и k получим матричное неравенство (3.3.9). Следовательно, утверждение теоремы 3.3.1 выполняется для системы (3.1.1) с неопределенными коэффициентами (3.3.12), если вместо (3.3.9) использовать систему матричных неравенств (3.3.13).

Следствие 3.3.1 *Пусть для некоторых матриц* $X = X^T > 0$ *и* $K_* \in \mathcal{K}_D$ *выполняется система матричных неравенств* (3.3.8) *и* (3.3.13). *Тогда любое управление* (3.3.2) *обеспечивает устойчивость (асимптотическую устойчивость) семейства систем* (3.1.1), (3.3.12) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Пусть наряду с (3.3.12) выполняются условия

$$K_* = 0, \quad D \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}. \tag{3.3.14}$$

Тогда соотношения (3.3.8) и (3.3.13) имеют вид

$$D_s^T Q D_s < P, \left[\begin{array}{ccc} A_i^T X + X A_i & X B_j & C_k^T \\ B_j^T X & -P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{array} \right] \leq 0 (< 0), \tag{3.3.15}$$

где $i = \overline{1, \alpha}$, $j = \overline{1, \beta}$, $k = \overline{1, \gamma}$, $s = \overline{1, \delta}$.

Следствие 3.3.2 *Пусть для некоторой матрицы* $X = X^T > 0$ *выполняется система ЛМН* (3.3.15). *Тогда любое управление* (3.3.2) *обеспечивает устойчивость (асимптотическую устойчивость) семейства систем* (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Отметим, что в утверждениях теоремы 3.3.1 и ее следствий вместо (3.3.9), (3.3.13) и (3.3.15) могут быть использованы соответствующие эквивалентные матричные неравенства меньших размеров (см. замечание 3.3.1). Например, в следствии 3.3.2 разрешимость системы ЛМН

$$X = X^T > 0,$$

$$\left[\begin{array}{cc} A_i^T X + X A_i + C_k^T Q C_k & X B_j + C_k^T Q D_s \\ B_j^T X + D_s^T Q C_k & D_s^T Q D_s - P \end{array} \right] < 0,$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad s = \overline{1,\delta},$$

гарантирует асимптотическую устойчивость семейства систем управления (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14) с общей квадратичной функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$.

Системы соотношений (3.3.13) и (3.3.15) можно использовать при решении обратных задач робастной стабилизации. Например, для заданной матрицы $X > 0$ при условиях следствия 3.3.2 построить семейство систем стабилизации, описываемое некоторыми политопами матричных коэффициентов (3.3.12) и (3.3.14), а также эллипсоидом матриц обратной связи (3.3.3). В данной задаче неизвестными будут вершины политопов A_i, B_j, C_k и D_s, а также положительно определенные матрицы P и Q, описывающие искомый эллипсоид. Матричные неопределенности типа (3.3.12) и (3.3.14) могут быть использованы также при описании моделей в задачах идентификации параметров и оценивания состояний динамических систем (см., например, [23, 25, 26]).

3.4 Оптимизация в системах стабилизации

3.4.1 Матричное уравнение Риккати

Рассмотрим систему управления (3.1.6) с квадратичным функционалом качества

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x, u)\, dt, \tag{3.4.1}$$

где

$$\varphi(x, u) = \left[x^T, u^T\right] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix},$$

$x_0 = x(0)$ — вектор начального состояния, а блоки симметричной матрицы Φ удовлетворяют условиям

$$R > 0, \quad S \geq N R^{-1} N^T. \tag{3.4.2}$$

При некоторых условиях управление u, минимизирующее функционал (3.4.1), обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3.1.7). Оптимальное управление может быть найдено с помощью принципа максимума Понтрягина или метода динамического программирования Беллмана. В рассматриваемом случае *уравнение Беллмана*, выражающее принцип оптимальности, имеет вид

$$\min_u f(x,u) = 0,$$

где $f(x,u) = (Ax + Bu)^T \operatorname{grad}_x v(x) + \varphi(x,u)$, $v(x)$ — неизвестная функция. Используя необходимое условие минимума

$$\operatorname{grad}_u f(x,u) = B^T \operatorname{grad}_x v(x) + 2N^T x + 2Ru = 0$$

и полагая $v(x) = x^T X x$, где $X = X^T$ — неизвестная матрица, получаем

$$u = Kx, \quad K = -R^{-1}(B^T X + N^T). \tag{3.4.3}$$

При этом

$$f(x,u) = x^T \big[A^T X + XA - (XB + N)R^{-1}(B^T X + N^T) + S\big] x \equiv 0,$$

если

$$A^T X + XA - (XB + N)R^{-1}(B^T X + N^T) + S = 0. \tag{3.4.4}$$

Соотношение (3.4.4) — это матричное алгебраическое *уравнение Риккати*. Перепишем данное уравнение в виде

$$\widetilde{A}^T X + X\widetilde{A} - XBR^{-1}B^T X + \widetilde{S} = 0, \tag{3.4.5}$$

где $\widetilde{A} = A - BR^{-1}N^T$, $\widetilde{S} = S - NR^{-1}N^T = G^T G \geq 0$.

Теорема 3.4.1 *Пусть выполняются условия* (3.4.2), *пара матриц* (A, B) *стабилизируема, а пара матриц* $(\widetilde{A}, G)$ *детектируема. Тогда матричное уравнение Риккати* (3.4.5) *имеет единственное решение* $X = X^T \geq 0$. *При этом управление* (3.4.3) *обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы* (3.1.7) *и минимальное значение функционала* (3.4.1), *равное* $J(u, x_0) = x_0^T X x_0$.

Если в теореме 3.4.1 предположение детектируемости пары матриц $(\widetilde{A}, G)$ усилить требованием наблюдаемости, то решение X уравнения (3.4.5) должно быть положительно определенным. При этом $v(x) = x^T X x$ — функция Ляпунова оптимальной замкнутой системы.

Отметим, что систему (3.1.6) можно представить в виде

$$\dot{x} = \widetilde{A}x + B\widetilde{u}, \quad \widetilde{u} = \widetilde{K}x, \tag{3.4.6}$$

где $\widetilde{K} = K + R^{-1}N^T$, $\widetilde{u} = u + R^{-1}N^T x$ — новый вектор управления. При этом квадратичный функционал (3.4.1) с учетом ограничений (3.4.2) приводится к стандартному виду

$$J(\tilde{u}, x_0) = \int_0^\infty (x^T \widetilde{S} x + \widetilde{u}^T R \widetilde{u})\, dt. \tag{3.4.7}$$

Таким образом, задача квадратичной оптимизации системы (3.1.6) сводится к решению матричного уравнения Риккати (3.4.5). Один из способов построения матрицы-решения X представляет итерационный процесс

$$(\widetilde{A} + B\widetilde{K}_s)^T X_s + X_s(\widetilde{A} + B\widetilde{K}_s) + \widetilde{K}_s^T R \widetilde{K}_s + \widetilde{S} = 0,$$

$$\widetilde{K}_{s+1} = -R^{-1}B^T X_s, \quad s = 0, 1, \dots . \tag{3.4.8}$$

На s-м шаге данного процесса требуется решить матричное уравнение Ляпунова относительно X_s. Начальное значение $\widetilde{K}_0$ выбирается так, чтобы матрица $\widetilde{A} + B\widetilde{K}_0$ была гурвицевой. В принятых предположениях доказана сходимость матричной последовательности X_s, $s = 0, 1, 2, \dots$. Более того,

$$X_0 \geq X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X = \lim_{s\to\infty} X_s \geq 0.$$

Полное доказательство теоремы 3.4.1 на основе итерационного процесса (3.4.8) имеется, например, в [136].

3.4.2 Оптимизация и локализация спектра

Рассмотрим систему управления (3.1.19) и усредненный функционал качества

$$J(u) = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0) \int_0^\infty (x^T S x + u^T R u)\, dt\, dx_0, \tag{3.4.9}$$

где $S = S^T > 0$, $R = R^T > 0$, $\mu(x_0) \geq 0$ — весовая функция плотности распределения начального вектора x_0 на некотором допустимом множестве $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. В качестве $\mathcal{S}_0$ можно выбрать шар $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq h\}$.

Ставится задача нахождения матрицы K обратной связи по выходу, для которой функционал (3.4.9) принимает наименьшее значение, а спектр замкнутой системы

$$\dot{x} = Mx, \quad M = A + BKC, \tag{3.4.10}$$

расположен в заданной области

$$\Lambda_f^+ = \Big\{\lambda : f(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \overline{f(\lambda)} f(\lambda)\Big\}. \tag{3.4.11}$$

Задача минимизации функционала (3.4.9) без ограничения на спектр замкнутой системы сводится к задаче математического программирования

$$J(K) = \mathrm{tr}\big[\mathbf{W}(K)\Delta_0\big] \;\to\; \inf_{K \in \mathcal{K}} \tag{3.4.12}$$

с использованием решения $W = \mathbf{W}(K)$ уравнения Ляпунова

$$-M^T W - WM = S + C^T K^T R K C. \tag{3.4.13}$$

Здесь

$$\Delta_0 = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0) x_0 x_0^T\, dx_0, \quad \mathcal{K} = \{K : \mathbf{W}(K) > 0\}.$$

Построим решение уравнения (3.4.13) в виде

$$W = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M)^T H f_j(M), \tag{3.4.14}$$

Подставляя (3.4.14) в (3.4.13), имеем уравнение относительно H:

$$\sum_{i,j} \beta_{ij} \varphi_i(M)^T H \varphi_j(M) = S + C^T K^T RKC. \tag{3.4.15}$$

При этом область Λ_φ^+, отвечающая функции

$$\varphi(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \beta_{ij} \overline{\varphi_i(\lambda)}\, \varphi_j(\lambda) = -(\overline{\lambda} + \lambda) f(\overline{\lambda}, \lambda),$$

состоит из двух непересекающихся подобластей — области Λ_f^+ вида (3.4.11) и правой полуплоскости. Если H — решение уравнения (3.4.15), то согласно теореме 1.2.1 матричное неравенство

$$X = -M^T H - HM > 0 \tag{3.4.16}$$

обеспечивает расположение спектра замкнутой системы в области Λ_f^+. При этом матрица (3.4.16) является решением обобщенного уравнения Ляпунова для области Λ_f^+:

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M)^T X f_j(M) = S + C^T K^T RKC. \tag{3.4.17}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к задаче математического программирования. Требуется минимизировать функцию (3.4.12), вычисляемую с помощью соотношений (3.4.14) и (3.4.15), при ограничении (3.4.16). Поиск субоптимального решения задачи можно осуществлять градиентными методами, используя известное выражение для градиента функционала [94]

$$\frac{dJ(K)}{dK} = 2(RKC + B^T W) FC^T,$$

где W — решение уравнения (3.4.13), в частности, выражение (3.4.14), а F — решение уравнения

$$-MF - FM^T = \Delta_0. \tag{3.4.18}$$

Из необходимого условия минимума функции (3.4.12) вытекает соотношение

$$K = -R^{-1}B^T WFC^T(CFC^T)^{-1}. \tag{3.4.19}$$

Система матричных соотношений (3.4.14) – (3.4.16), (3.4.18) и (3.4.19) представляет необходимые условия минимума функционала и размещения спектра замкнутой системы в области (3.4.11).

Отметим, что если функция f, описывающая область (3.4.11), представима в виде

$$f(\overline{\lambda}, \lambda) = -(\overline{\lambda}+\lambda)\psi(\overline{\lambda}, \lambda), \quad \psi(\overline{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \delta_{ij}\overline{\psi_i(\lambda)}\psi_j(\lambda), \tag{3.4.20}$$

то для вычисления матрицы W можно использовать выражение

$$W = \sum_{i,j} \delta_{ij}\psi_i(M)^T X\psi_j(M), \tag{3.4.21}$$

где X — решение уравнения (3.4.17). В этом случае уравнение (3.4.15) не используется.

Построим итерационный процесс по следующим правилам:

1) выбрать $K_0 \in \mathcal{K}$ и положить $s = 0$;
2) вычислить матрицу $M_s = A + BK_sC$;
3) определить матрицы H_s и F_s из уравнений

$$\sum_{i,j} \beta_{ij}\varphi_i(M_s)^T H_s\varphi_j(M_s) = S + C^T {K_s}^T RK_sC,$$

$$-M_sF_s - F_s{M_s}^T = \Delta_0;$$

4) вычислить выражения $W_s = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(M_s)^T H_s f_j(M_s)$ и $K_{s+1} = -R^{-1}B^T W_s F_s C^T (CF_sC^T)^{-1}$;

5) увеличить s на единицу и возвратиться к п. 2).

Отличие данного итерационного процесса от известных алгоритмов квадратичной оптимизации состоит в способе вычисления матричной последовательности W_s. Поскольку на каждом шаге W_s является решением уравнения Ляпунова (3.4.13), то выполнены неравенства $J(K_0) \geq J(K_1) \geq \cdots \geq J(K_s) \geq \ldots$. При ограничении (3.4.20) матрицы W_s можно определить также с помощью формул (3.4.17) и (3.4.21). В случае алгебраических областей (3.4.11) ($f_i(\lambda) = \lambda^i$) использование матричных уравнений (3.4.15) или (3.4.17) вместо (3.4.13) практически не изменяет вычислительные трудности алгоритма. В то же время мы имеем возможность осуществлять контроль принадлежности спектра системы области (3.4.11) на каждом шаге оптимизации с помощью матричных неравенств $X_s = -M_s^T H_s - H_s M_s > 0, \quad s = 0, 1, \ldots$.

В отдельных случаях при условиях управляемости и наблюдаемости системы (3.1.19) установлена сходимость матричной последовательности K_s [93, 94]. Начальное приближение $K_0 \in \mathcal{K}$ можно определить методами построения стабилизирующих управлений (параграф 3.1.2) или известными методами модального управления (см., например, [9, 34, 128]).

Отметим, что в случае $C = I_n$, когда измерениям доступны все компоненты вектора состояния объекта, последовательность W_s сходится к положительно определенному решению *уравнения Риккати*

$$A^T W + WA - WBR^{-1}B^T W + S = 0.$$

При этом оптимальному управлению системы (3.1.19) соответствует предельное значение матрицы обратной связи

$$K = \lim_{s\to\infty} K_s = -R^{-1}B^* W.$$

3.4.3 Оптимизация при условиях неопределенности

Рассмотрим систему управления (3.1.1) и квадратичный функционал качества (3.4.1) с матрицей $\Phi = \Phi^T > 0$. Требуется описать множество управлений (3.3.2), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы и оценку функционала

$$J(u, x_0) \leq \omega, \tag{3.4.22}$$

где ω — некоторое максимально допустимое значение данного функционала.

При решении данной задачи ищем квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T X x$ с матрицей $X = X^T > 0$. Если выполняются условия (3.3.2) и (3.3.8) при $K_* \in \mathcal{K}_D$, то определены значения операторов $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, где $D_* = (I_l - D K_*)^{-1} D$ (см. доказательство теоремы 3.3.1). При этом замкнутая система представляется в виде (3.1.39), а производная функции $v(x)$ в силу данной системы и подынтегральное выражение в (3.4.1) имеют вид

$$\dot{v}(x) = x^T \big(M^T X + X M\big)\, x, \quad \varphi(x, u) = x^T L^T \Phi L\, x,$$

где $M = A + B\mathbf{D}(K)C$, $L^T = [I_n, C^T \mathbf{D}^T(K)]$, $K = K_* + \widetilde{K}$.

Потребуем, чтобы наряду с (3.3.8) выполнялись соотношения

$$\dot{v}(x) \leq -\varphi(x, u) < 0, \quad x \neq 0. \tag{3.4.23}$$

Тогда система (3.1.39) асимптотически устойчива и с учетом (3.4.23) получаем верхнюю оценку функционала (3.4.1):

$$J(u, x_0) \leq -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\, v(x)\, dt = x_0^T X\, x_0 = \omega. \tag{3.4.24}$$

Поскольку $\Phi > 0$, то для выполнения (3.4.23) достаточно, чтобы выполнялось матричное неравенство

$$M^T X + X M + L^T \Phi L \leq 0. \tag{3.4.25}$$

Используя свойство (3.1.41) оператора $\mathbf{D}$, перепишем неравенство (3.4.25) в виде $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \leq 0$, где

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})U + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})R_*\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$W = M_*^T X + XM_* + \Phi_*$, $\Phi_* = L_*^T\Phi L_*$, $L_*^T = [I_n, C^T\mathbf{D}^T(K_*)]$, $U = B_*^T X + N_*^T + R_*K_*C$, $V = C_*$, $N_* = N(I_m - K_*D)^{-1}$, $R_* = (I_m - K_*D)^{-1T}R(I_m - K_*D)^{-1}$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$.

Применяя лемму 3.3.1 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$ и эллипсоида $\mathcal{K}$, с учетом (3.4.24) получаем следующий результат.

Теорема 3.4.2 *Пусть для некоторых матриц $X = X^T > 0$ и $K_* \in \mathcal{K}_D$ выполняются соотношения*

$$R + D^TQD < (I_m - K_*D)^T P(I_m - K_*D), \tag{3.4.26}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^T X + XM_* + \Phi_* & XB_* + N_* + C^TK_*^TR_* & C_*^T \\ B_*^T X + N_*^T + R_*K_*C & R_* - P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{3.4.27}$$

Тогда любое управление (3.3.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость системы* (3.1.1)*, общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^TXx$ и оценку функционала качества $J(u, x_0) \leq v(x_0)$.*

Замечание 3.4.1 Утверждение теоремы 3.4.2 сохраняет силу, если вместо предположения $\Phi = \Phi^T > 0$ использовать более слабое ограничение (3.4.2), а в (3.4.27) потребовать выполнения строгого матричного неравенства. При этом соотношение (3.4.26) будет следствием данного неравенства.

Отметим также, что утверждение теоремы 3.4.2 выполняется для семейства систем (3.1.1), (3.3.12), если вместо (3.4.27) использовать систему матричных неравенств

$$
\begin{bmatrix} M_{ijk}^T X + X M_{ijk} + \Phi_k & X B_{*j} + N_* + C_k^T K_*^T R_* & C_{*k}^T \\ B_{*j}^T X + N_*^T + R_* K_* C_k & R_* - P & D_*^T \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \tag{3.4.28}
$$

где $M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k$, $\Phi_k = L_k^T \Phi L_k$, $L_k^T = [I_n, C_k^T \mathbf{D}^T(K_*)]$, $B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}$, $C_{*k} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$.

Следствие 3.4.1 *Пусть для некоторых матриц* $X = X^T > 0$ *и* $K_* \in \mathcal{K}_D$ *выполняется система матричных неравенств* (3.4.26) *и* (3.4.28)*. Тогда любое управление* (3.3.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость семейства систем* (3.1.1), (3.3.12)*, общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x) = x^T X x$ *и оценку функционала качества* $J(u, x_0) \leq v(x_0)$*.*

Для семейства систем (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14) выполняется аналогичное утверждение с использованием матричных неравенств

$$
R + D_s^T Q D_s < P, \tag{3.4.29}
$$

$$
\begin{bmatrix} A_i^T X + X A_i + S & X B_j + N & C_k^T \\ B_j^T X + N^T & R - P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{3.4.30}
$$

где $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$.

Следствие 3.4.2 *Пусть для некоторой матрицы* $X = X^T > 0$ *выполняется система матричных неравенств* (3.4.29) *и* (3.4.30)*. Тогда любое управление* (3.3.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость семейства систем* (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14)*, общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x) = x^T X x$ *и оценку функционала качества* $J(u, x_0) \leq v(x_0)$*.*

Отметим, что в утверждениях теоремы 3.4.2 и ее следствий вместо (3.4.27), (3.4.28) и (3.4.30) можно использовать соответствующие эквивалентные матричные неравенства (см. замечание 3.3.1). Например, в следствии 3.4.2 разрешимость системы ЛМН

$$\begin{bmatrix} A_i^T X + XA_i + S + C_k^T QC_k & XB_j + N + C_k^T QD_s \\ B_j^T X + N^T + D_s^T QC_k & R + D_s^T QD_s - P \end{bmatrix} \leq 0,$$

$R + D_s^T QD_s < P$, $X = X^T > 0$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$,

гарантирует асимптотическую устойчивость семейства систем управления (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14) с общей квадратичной функцией Ляпунова $v(x) = x^T Xx$ и оценку функционала качества $J(u, x_0) \leq v(x_0)$.

На основе теоремы 3.4.2 и ее следствий можно сформулировать следующие задачи оптимизации системы (3.1.1) и семейств систем (3.1.1), (3.3.12) и (3.1.1), (3.3.12), (3.3.14):

1) *минимизировать* $\omega = x_0^T Xx_0$ *при ограничениях* (3.4.26), (3.4.27) *и* $X = X^T > 0$;

2) *минимизировать* $\omega = x_0^T Xx_0$ *при ограничениях* (3.4.26), (3.4.28) *и* $X = X^T > 0$;

3) *минимизировать* $\omega = x_0^T Xx_0$ *при ограничениях* (3.4.29), (3.4.30) *и* $X = X^T > 0$.

Для решения данных задач можно использовать различные методы математического программирования. В качестве параметров оптимизации могут быть положительно определенные матрицы квадратичной функции Ляпунова (X), эллипсоида коэффициентов обратной связи (P и Q), а также функционала качества (Φ). При этом результаты расчетов зависят от начального вектора x_0.

Отметим, что вместо (3.4.1) можно использовать усредненный по начальным условиям квадратичный функционал

$$J_0(u) = \int_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0)\, J(u, x_0)\, dx_0, \tag{3.4.31}$$

где $\mu(x_0) \geq 0$ — заданная функция на множестве $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. При условии (3.4.23) имеем верхнюю оценку функционала (3.4.31):

$$J_0(u) = \mathrm{tr}\,(\Sigma\, X) \leq \mu_0\, \lambda_{\max}(X),$$

где $\Sigma = \int\limits_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0)\, x_0 x_0^T\, dx_0, \quad \mu_0 = \int\limits_{\mathcal{S}_0} \mu(x_0) \|x_0\|^2\, dx_0$. Поэтому в сформулированных задачах оптимизации 1) – 3) можно использовать целевые функции $\omega = \mathrm{tr}\,(\Sigma\, X)$ или $\omega = \mu_0\, \lambda_{\max}(X)$.

Пример 3.4.1 Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух упруго соединенных платформ с массами m_1 и m_2 (рис. 3.2). Уравнения движения без учета сил трения и внешних возмущений имеют вид [134]

$$\dot{x} = A(k)x + Bu, \tag{3.4.32}$$

где

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k/m_1 & k/m_1 & 0 & 0 \\ k/m_2 & -k/m_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

k — коэффициент жесткости, принимающий значения на интервале $[1, 2]$, u — управляющая сила, приложенная к первой платформе.

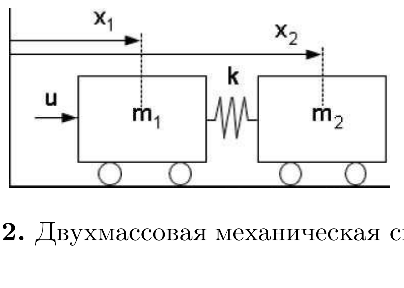


Рис. 3.2. Двухмассовая механическая система.

Предположим, что $m_1 = 1$ и $m_2 = 1,5$, а измерению доступен вектор выхода

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} x_2 + 3u \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью решения двух ЛМН (3.1.23) и (3.1.26) при $k = 1,5$ и $\alpha = -0,1$ найдено управление

$$u = K_* y, \quad K_* = -\mathbf{D}(-K_0) = \begin{bmatrix} 8,4783 & 44,7905 \end{bmatrix},$$

для которого замкнутая система (3.3.1) с матрицей M_* асимптотически устойчива. При этом $\mathrm{i}(X) = \{3,0,0\}$, $\mathrm{i}(H) = \{2,1,0\}$, $\sigma(M_*) = \{-0,2744; -0,8593; -0,3496 \pm 1,1615i\}$.

Определим матрицы функционала (3.4.1):

$$S = 0,5\, I_4, \quad R = 1, \quad N = [0\ 0\ 0\ \ -0,7]^T.$$

Система соотношений (3.4.28) состоит из двух матричных неравенств, отвечающих значениям $A(1)$ и $A(2)$. Используя систему MATLAB, найдены

$$P = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} 1,0004 & 0,0025 \\ 0,0025 & 1,0140 \end{bmatrix} > 0,$$

$$X = \begin{bmatrix} 157,7999 & -137,1035 & 49,6024 & 46,3083 \\ -137,1035 & 126,5452 & -46,9707 & -24,7272 \\ 49,6024 & -46,9707 & 40,1343 & -13,1232 \\ 46,3083 & -24,7272 & -13,1232 & 127,8442 \end{bmatrix} > 0,$$

удовлетворяющие данной системе строгих неравенств.

Таким образом, при любых значениях коэффициента жесткости $1 \le k \le 2$ и вектора обратной связи $K = K_* + \widetilde{K}$ из области, ограниченной эллипсом (см. рис. 3.3), замкнутая система асимптотически устойчива. При этом $v(x) = x^T X x$ — общая функция Ляпунова и значение функционала не превосходит $v(x_0)$.

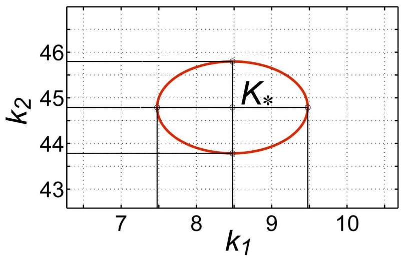


Рис. 3.3. Область коэффициентов усиления обратной связи $(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^T \le P^{-1}$.

3.5 Дескрипторные системы управления

Рассмотрим *дескрипторную систему* управления

$$E\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \tag{3.5.1}$$

не разрешенную относительно вектора производных $\dot{x}$. Если матрица E невырожденная, то данная система приводится к виду (3.1.1). В общем случае задачи стабилизации системы (3.5.1) с помощью статических и динамических регуляторов существенно усложняются. К примеру, исследуем возможность построения стабилизирующей динамической обратной связи

$$F\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{3.5.2}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния динамического регулятора, F, Z, V, U и K — неизвестные матрицы соответствующих размеров $r \times r$, $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ и $m \times l$.

Соотношения (3.5.1) и (3.5.2) можно представить в виде

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{A}\widehat{x} + \widehat{B}\widehat{u}, \quad \widehat{y} = \widehat{C}\widehat{x} + \widehat{D}\widehat{u}, \quad \widehat{u} = \widehat{K}\widehat{y}, \tag{3.5.3}$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{y} = \begin{bmatrix} y \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{u} = \begin{bmatrix} u \\ F\dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & F \end{bmatrix},\ \widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},\ \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},\quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},$$

При $K \in \mathcal{K}_D$ замкнутая система (3.5.3) имеет вид

$$\widehat{E}\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\,\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B}\widehat{\mathbf{D}}(\widehat{K})\widehat{C}. \tag{3.5.4}$$

Следующее утверждение, обобщающее теорему 3.2.2, дает условия существования стабилизирующей обратной связи по состоянию асимптотического наблюдателя системы (3.5.1) вида

$$E\dot{\xi} = A\xi + Bu + G(y - C\xi - Du). \tag{3.5.5}$$

Теорема 3.5.1 *Пусть система*

$$E\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.5.6}$$

стабилизируема с помощью статической обратной связи по состоянию, а система

$$E\dot{x} = Ax, \quad y = Cx, \tag{3.5.7}$$

детектируема. Тогда существует динамический регулятор (3.5.2) *на основе наблюдателя полного порядка* (3.5.5)*, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы* (3.5.4).

Доказательство. Положим в системе (3.5.2)

$$F = E,\ Z = A - GC + (B - GD)U,\ V = G + (B - GD)K, \tag{3.5.8}$$

где $K \in \mathcal{K}_D$, $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $G \in \mathbb{R}^{n\times l}$ — некоторые матрицы. Тогда первое уравнение данной системы описывает динамику наблюдателя (3.5.5), а замкнутую систему (3.5.4) можно представить в эквивалентной форме

$$\widetilde{E}\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x},\ \widetilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & E \end{bmatrix},\ \widetilde{M} = \begin{bmatrix} M_0 & B(I_m - KD)^{-1}U \\ 0_{n\times n} & M_1 \end{bmatrix}, \tag{3.5.9}$$

где $\widetilde{x}^T = \left[x^T, e^T\right]$, $M_0 = A + B(I_m - KD)^{-1}(U + KC)$, $M_1 = A - GC$, $e = \xi - x$. В частности, если $K = 0$, то $M_0 = A + BU$.

Стабилизируемость системы (3.5.6) означает, что существует матрица K_0 такая, что все собственные числа пучка матриц $L_0(\lambda) = A + BK_0 - \lambda E$ расположены в полуплоскости $\mathbb{C}^-$. Аналогично, детектируемость системы (3.5.7) обеспечивает существование матрицы K_1 такой, что все собственные числа пучка матриц $L_1(\lambda) = A + K_1 C - \lambda E$ принадлежат полуплоскости $\mathbb{C}^-$.

Положим $U = -KC + (I_m - KD)K_0$ и $G = -K_1$, где $K \in \mathcal{K}_D$ — любая матрица. Тогда спектр системы (3.5.9), состоящий из объединения спектров пучков матриц $L_0(\lambda)$ и $L_1(\lambda)$, расположен в $\mathbb{C}^-$ и данная система асимптотически устойчива.

Теорема доказана.

Таким образом, задача стабилизации дескрипторной системы (3.5.1) на основе наблюдателя полного порядка (3.5.5) разрешима при условиях стабилизируемости и детектируемости соответствующих систем (3.5.6) и (3.5.7).

Теорема 3.5.2 *Пусть для некоторого $\gamma > 0$ и некоторой матрицы $X = X^T$ выполняется система соотношений*

$$\begin{gathered} R^{+}A^T XL + L^T XAR^{+T} < \gamma L^T XBB^T XL, \\ L^T XAR^{\perp} = 0, \quad L^T XL \geq 0, \end{gathered} \tag{3.5.10}$$

где $L, R \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — компоненты скелетного разложения $E = LR^T$, $\operatorname{rank} L = \operatorname{rank} R = \operatorname{rank} E = r$. Тогда управление

$$u = Kx, \quad K = -\frac{\gamma}{2}B^T XE, \tag{3.5.11}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (3.5.6).

Доказательство. Система (3.5.6) с управлением (3.5.11) асимптотически устойчива, если совместна система ЛМН

$$M^T XE + E^T XM + E^T YE \leq 0, \quad E^T XE \geq 0, \quad Y > 0, \tag{3.5.12}$$

где $M = A + BK$. При условии регулярности пучка матриц $M - \lambda E$ система (3.5.12) совместна в том и только в том случае, когда его спектр расположен в полуплоскости $\mathbb{C}^-$, а характеристика (1.4.4) не превышает 2 (см. лемму 1.4.2).

Первое из матричных неравенств (3.5.12) приводится к виду

$$\left[\begin{array}{c|c} R^+M^TXL + L^TXMR^{+T} + L^TYL & L^TXMR^{\perp} \\ \hline R^{\perp T}M^TXL & 0 \end{array}\right] \le 0$$

путем конгруэнтного преобразования, т. е. умножения данного выражения слева и справа соответственно на S^T и S, где $S = \left[R^{+T}, R^{\perp}\right]$ — невырожденная матрица, $R^+ = (R^TR)^{-1}R^T$. Учитывая, что $L^TYL > 0$, имеем условия совместности системы неравенств (3.5.12) вида

$$R^+M^TXL + L^TXMR^{+T} < 0, \quad L^TXMR^{\perp} = 0, \quad L^TXL \ge 0.$$

Подставляя сюда выражение для матрицы обратной связи K из (3.5.11), получаем условия (3.5.10).

Теорема доказана.

Отметим, что при условии $\operatorname{rank}(B^TXL) = \operatorname{rank} L$ всегда можно подобрать $\gamma > 0$ так, чтобы выполнялось первое неравенство в (3.5.10). Полагая во втором соотношении (3.5.10) $R^{\perp} = W_E$, имеем достаточные условия стабилизируемости системы (3.5.6) в терминах ее исходных матриц.

Следствие 3.5.1 *Если для некоторой матрицы $X = X^T$ совместна система соотношений*

$$E^TXAW_E = 0, \quad \operatorname{rank}(B^TXE) = \operatorname{rank} E, \quad E^TXE \ge 0.$$

то управление (3.5.11) *при достаточно большом $\gamma > 0$ обеспечивает асимптотическую устойчивость системы* (3.5.6).

Для построения условий детектируемости системы (3.5.7) можно воспользоваться теоремой 3.5.2 и свойством двойственности понятий стабилизируемости и детектируемости.

Глава 4

Нелинейные системы управления в векторно-матричной форме

В данной главе рассматриваются нелинейные системы управления, которые в результате применения обратной связи представляются в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = M(x,t)\,x, \quad t \geq 0, \tag{4.0.1}$$

где M — матрица размеров $n \times n$, непрерывно зависящая от состояния $x \in \mathbb{R}^n$ и времени t. Предполагается, что состояние равновесия $x \equiv 0$ таких систем является изолированным, т. е. в некоторой окрестности точки $x = 0$ нет других состояний равновесия. При изучении устойчивости данного состояния используется метод квадратичных функций Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t) x$ с непрерывно дифференцируемой положительно определенной матрицей $X(t)$. Производная данной функции в силу системы (4.0.1) также представляется в виде квадратичной формы:

$$\dot{v}(x,t) = x^T Y(x,t)\,x, \quad Y(x,t) = \dot{X} + M^T X + XM.$$

Ниже изучаются возможности применения результатов главы 3 при построении статических и динамических регуляторов, обеспечивающих робастную устойчивость состояний равновесия и верхнюю оценку квадратичного функционала качества нелинейных систем управления в векторно-матричной форме.

4.1 Нелинейные статические и динамические регуляторы

Рассмотрим нелинейную *неавтономную* систему управления

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad y = g(x, u, t), \tag{4.1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и наблюдаемого выхода объекта, f и g — заданные векторные функции. Если f и g не зависят от времени t, то система является *автономной*. Данная система управления имеет *прямую связь*, если g явно зависит от u.

Одна из главных задач для класса систем (4.1.1) состоит в построении законов управления $u(t)$, обеспечивающих выполнение заданных требований, включая устойчивость решений. Как правило, задача устойчивости заданного решения $x(t)$ $(x(t_0) = x_0)$ сводится к анализу устойчивости нулевого состояния $x \equiv 0$. При этом должны выполняться тождества

$$f(0, 0, t) \equiv 0, \quad g(0, 0, t) \equiv 0, \quad t \geq t_0,$$

а также условия существования и единственности решений в некоторой окрестности данного состояния.

Практическое применение имеют законы управления, построенные в виде *статической* или *динамической* обратных связей. Статическая обратная связь системы (4.1.1) имеет вид

$$u = k(y, t), \tag{4.1.2}$$

где k — векторная функция, подлежащая определению. Более широкие возможности в задачах управления по сравнению со статической обратной связью имеют динамические регуляторы порядка $r \leq n$ вида

$$\dot{\xi} = d(\xi, y, u, t), \quad u = k(\xi, y, t), \tag{4.1.3}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния регулятора, d и k — неизвестные векторные функции. Соотношения (4.1.2) и (4.1.3) определяют соответственно статическую и динамическую обратные связи *по выходу*. В случае $y \equiv x$ данные соотношения определяют статическую и динамическую обратные связи *по состоянию*.

Задачи управляемости, наблюдаемости, стабилизируемости и детектируемости в линейной постановке хорошо изучены. Для класса нелинейных систем (4.1.1) указанные характеристики в общем случае имеют лишь локальный характер и определяются в некоторой ограниченной области пространства состояний или в окрестности исследуемых состояний (программных траекторий). При этом большое количество результатов исследования данных задач получено на основе универсального приема — метода линеаризации системы и обратной связи в окрестности программных траекторий.

Рассмотрим класс нелинейных систем управления, допускающих представление в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = A(x,t)\,x + B(x,t)\,u, \quad y = C(x,t)\,x + D(x,t)\,u, \tag{4.1.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, а матричные функции A, B, C и D подходящих размеров непрерывны при $(x,t) \in \mathcal{S}_0 \times [0,\infty)$, где $\mathcal{S}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq h\}$ — окрестность точки $x = 0$.

Система (4.1.4) при $u = 0$ имеет нулевое состояние равновесия $x \equiv 0$, $t \geq 0$. Будем предполагать, что данное состояние равновесия является изолированным и в окрестности $\mathcal{S}_0$ нет других состояний равновесия.

Уравнения статического регулятора определяем в виде

$$u = K(x,t)\,y, \tag{4.1.5}$$

где K — неизвестная матричная функция такая, что

$$\det[I_m - K(x,t)D(x,t)] \neq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0. \tag{4.1.6}$$

При условиях (4.1.6) замкнутая система (4.1.4), (4.1.5) представляется в виде

$$\dot{x} = M(x,t)\,x, \quad M(x,t) = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{4.1.7}$$

где $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. В дальнейшем нас интересует поведение решений системы (4.1.7) в окрестности $\mathcal{S}_0$ нулевого состояния при $t \geq 0$.

Нелинейную динамическую обратную связь порядка r для системы (4.1.4) определяем в виде

$$\dot{\xi} = Z(x,t)\xi + V(x,t)y, \quad u = U(x,t)\xi + K(x,t)y, \qquad (4.1.8)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$. Система управления (4.1.4) с динамической обратной связью (4.1.8) порядка $r \neq 0$ так же, как и в случае линейных систем (см. лемму 3.2.1), может быть сведена к аналогичной системе управления с нелинейной статической обратной связью.

Используя критерии стабилизируемости линейных систем (см. главу 3), можно сформулировать способы построения статических и динамических регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость состояния $x \equiv 0$ некоторых подклассов нелинейных систем вида (4.1.4). Например, для нелинейной автономной системы

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + D(x)u, \qquad (4.1.9)$$

выполняются следующие утверждения.

Теорема 4.1.1 *Пусть существует матрица* $X = X^T > 0$, *удовлетворяющая неравенству*

$$B_0^{\perp T}(A_0X + XA_0^T + 2\alpha X)B_0^{\perp} < 0 \qquad (4.1.10)$$

и одному из эквивалентных соотношений

$$\mathrm{i}(\Delta) = \{l, n, 0\} \ \text{ или } \ C_0^{\perp}(A_0^TY + YA_0 + 2\alpha Y)\,C_0^{\perp T} < 0, \quad (4.1.11)$$

где $\alpha \geq 0$, $A_0 = A(0)$, $B_0 = B(0)$, $C_0 = C(0)$, $Y = X^{-1}$,

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_0X + XA_0^T + 2\alpha X & XC_0^T \\ C_0X & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда статический регулятор

$$u = Ky, \quad K = (I_m + K_0 D_0)^{-1} K_0, \tag{4.1.12}$$

где $D_0 = D(0)$, $\det(I_m + K_0 D_0) \neq 0$, K_0 *— решение ЛМН*

$$A_0 X + X A_0^T + 2\alpha X + B_0 K_0 C_0 X + X C_0^T K_0^T B_0^T < 0, \tag{4.1.13}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x \equiv 0$ *системы* (4.1.9) *и квадратичную функцию Ляпунова* $v(x) = x^T Y x$.

При условиях теоремы 4.1.1 в силу непрерывности матричных коэффициентов в некоторой окрестности $x \in \mathcal{S}_0$ выполняются соотношения

$$M(x)X + XM^T(x) + 2\alpha X < 0, \quad M(x)^T Y + YM(x) + 2\alpha Y < 0,$$

где $M(x) = A(x) + B(x)\widetilde{K}(x)C(x)$, $\widetilde{K}(x) = (I_m - KD(x))^{-1}K$, $\widetilde{K}(0) = K_0$. При этом производная функции $v(x)$ в силу замкнутой системы (4.1.9), (4.1.12) $\dot{v}(x) < -2\alpha v(x) \leq 0$, а спектр матрицы $M(x)$ при $x \in \mathcal{S}_0$ расположен в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda < -\alpha$.

Аналогично, на основе теоремы 3.5.1 можно сформулировать достаточные условия существования и способ построения динамического регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость нулевого состояния системы (4.1.9). При этом построение динамического регулятора полного порядка сводится к решению системы ЛМН (см. параграф 3.2).

4.2 Робастная стабилизация нелинейных систем управления

Рассмотрим нелинейную систему управления (4.1.4) со статической обратной связью (4.1.5). Предположим, что для некоторой матричной функции $K_*(x,t)$, удовлетворяющей условию (4.1.6), состояние $x \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = M_*(x,t)\,x, \quad M_*(x,t) = A + B\mathbf{D}(K_*)C, \tag{4.2.1}$$

асимптотически устойчиво. Построим множество стабилизирующих матриц обратной связи (4.1.5) в виде

$$K(x,t) = K_*(x,t) + \widetilde{K}(x,t), \quad \widetilde{K}(x,t) \in \mathcal{K}, \tag{4.2.2}$$

где $\mathcal{K} = \{K : K^TPK \leq Q\}$ — эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^{m\times l}$, который определяют матрицы $P = P^T > 0$ и $Q = Q^T > 0$. Зависимость от x и t рассматриваемых матриц A, B, C, D, K_* и $\widetilde{K}$ будем считать непрерывной и для простоты не указывать. Матрицы P и Q считаем постоянными, хотя в дальнейших выкладках они также могут непрерывно зависеть от x и t.

Согласно (4.1.4), (4.1.5) и (4.2.2) выполняется неравенство

$$[x^T, u^T]\begin{bmatrix} C^TQC - C^TK_*^TPK_*C & C^TQD + C^TK_*^TPG \\ D^TQC + G^TPK_*C & D^TQD - G^TPG \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \geq 0,$$

где $G = I_m - K_*D$. Предположим, что

$$\Delta(x,t) = D^TQD - G^TPG < 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \ t \geq 0, \tag{4.2.3}$$

Тогда из $x = 0$ следует $u = 0$, причем $x \equiv 0$ является изолированным состоянием равновесия замкнутой системы, которая представляется в виде (4.1.7).

Теорема 4.2.1 *Пусть для некоторых матричных функций* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(x,t)$ *выполняются соотношения* (4.2.3) *и*

$$\varepsilon_1 I_n \leq X(t) \leq \varepsilon_2 I_n, \quad 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \quad t \geq 0, \tag{4.2.4}$$

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \dot{X} + M_*^TX + XM_* + \varepsilon_0 I_n & XB_* & C_*^T \\ B_*^TX & -P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.2.5}$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$, $x = 0$, $t \geq 0$. *Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x \equiv 0$ *системы* (4.1.4) *и общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x) = x^TX(t)x$.

Доказательство. При условии (4.2.3) матрица G должна быть невырожденной. Поэтому при любых $x \in \mathcal{S}_0$ и $t \geq 0$ определены значения оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$. Если $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то определены также значения операторов $\mathbf{D}(K)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K} D_*)^{-1} \widetilde{K}$, где $K = K_* + \widetilde{K}$ (см. доказательство теоремы 3.3.1).

Построим функцию Ляпунова для замкнутой системы (4.1.7) в виде $v(x,t) = x^T X(t) x$. При условиях (4.2.4) выполняется оценка $\varepsilon_1 \|x\|^2 \leq v(x,t) \leq \varepsilon_2 \|x\|^2$, $t \geq 0$. Для того, чтобы производная функции $v(x,t)$ в силу системы (4.1.7) в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$ удовлетворяла оценке $\dot{v}(x,t) \leq -\varepsilon \|x\|^2$, где $\varepsilon > 0$, достаточно выполнения матричного неравенства

$$\dot{X} + M^T X + XM + \varepsilon I_n \leq 0, \quad x \in \mathcal{S}_0, \quad t \geq 0. \tag{4.2.6}$$

При этом согласно второй теореме Ляпунова состояние $x \equiv 0$ данной системы равномерно асимптотически устойчиво. Условие (4.2.6) означает, что

$$\sup_{x \in \mathcal{S}_0, t \geq 0} \omega(x,t) \leq -\varepsilon, \quad \omega(x,t) = \lambda_{\max}(\dot{X} + M^T X + XM).$$

Наряду с (4.2.6) рассмотрим условие $\sup\limits_{t \geq 0} \omega(0,t) \leq -\varepsilon_0$, т. е.

$$\dot{X} + M_0^T(t) X + X M_0(t) + \varepsilon_0 I_n \leq 0, \quad t \geq 0, \tag{4.2.7}$$

где

$$M_0(t) = A(0,t) + B(0,t) \mathbf{D}_0\big(K(0,t)\big) C(0,t),$$

$$\mathbf{D}_0(K) = \big(I_m - KD(0,t)\big)^{-1} K, \quad \varepsilon_0 > \varepsilon.$$

Из соображений непрерывности ясно, что существует окрестность $\mathcal{S}_0$ точки $x = 0$, для которой (4.2.6) является следствием (4.2.7).

Используя свойство (3.1.41) оператора $\mathbf{D}_0$, перепишем неравенство (4.2.7) в виде

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T \mathbf{D}_*(\widetilde{K}) V + V^T \mathbf{D}_*^T(\widetilde{K}) U \leq 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

где $W = \dot{X} + M_*^T X + X M_* + \varepsilon_0 I_n$, $U = B_*^T X$, $V = C_*$. Данное выражение представляет оператор вида (3.3.5) в частном случае $R = 0$. Применяя лемму 3.3.1 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, получаем условия вида (4.2.3) и (4.2.5), при которых выполняется матричное неравенство (4.2.7) и, следовательно, (4.2.6) для любой матрицы $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Теорема доказана.

Замечание 4.2.1 Утверждение теоремы 4.2.1 гарантирует устойчивость по Ляпунову состояния $x \equiv 0$ системы (4.1.4) на множестве управлений (4.1.5), (4.2.2), а также общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T X(t) x$, если вместо (4.2.4) и (4.2.5) использовать более слабые условия $\varepsilon_1 I_n \leq X(t)$ и $\Omega(t) \leq 0$ при $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_0 = 0$, $x = 0$ и $t \geq 0$.

Так же, как и в случае линейных систем, сформулируем следствия теоремы 4.2.1 при наличии функциональных неопределенностей

$$\begin{aligned} &A(0,t) \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\alpha\}, \quad t \geq 0, \\ &B(0,t) \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_\beta\}, \quad t \geq 0, \\ &C(0,t) \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_\gamma\}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

где заданные наборы постоянных матриц A_i, B_j и C_k являются вершинами некоторых политопов в соответствующих пространствах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ и $\mathbb{R}^{l\times n}$. Построим систему линейных дифференциальных матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + M_{ijk}^T X + X M_{ijk} + \varepsilon_0 I_n & X B_{j*} & C_{k*}^T \\ B_{j*}^T X & -P & D_*^T \\ C_{k*} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.2.9}$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$$

где $M_{ijk} = A_i + B_j\mathbf{D}(K_*)C_k$, $B_{j*} = B_j(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_{k*} = (I_l - DK_*)^{-1}C_k$.

Следствие 4.2.1 *Пусть для некоторых матриц* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(x,t)$ *выполняется система матричных неравенств* (4.2.3), (4.2.4) *и* (4.2.9). *Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x \equiv 0$ *семейства систем* (4.1.4), (4.2.8) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X(t)x$.

Пусть наряду с (4.2.8) выполняются условия

$$K_* \equiv 0, \quad D(0,t) \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}, \quad t \geq 0. \tag{4.2.10}$$

Тогда соотношения (4.2.3) и (4.2.9) следуют из системы строгих неравенств

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^T X + XA_i + \varepsilon_0 I_n & XB_j & C_k^T \\ B_j^T X & -P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.2.11}$$

$$i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad s = \overline{1,\delta}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad t \geq 0.$$

Следствие 4.2.2 *Пусть для некоторой матрицы* $X(t) = X^T(t)$ *выполняется система матричных неравенств* (4.2.4) *и* (4.2.11). *Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *при* $K_* \equiv 0$ *обеспечивает асимптотическую устойчивость семейства систем* (4.1.4), (4.2.8), (4.2.10) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X(t)x$.

При использовании теоремы 4.2.1 и ее следствий 4.2.1 и 4.2.2 можно искать общую квадратичную функцию Ляпунова с постоянной матрицей $X = X^T > 0$. В этом случае линейные матричные неравенства (4.2.5), (4.2.9) и (4.2.11) являются алгебраическими ($\dot{X} = 0$). При этом можно положить $\varepsilon_0 = 0$ и потребовать выполнения соответствующих строгих матричных неравенств.

4.3 Оценка квадратичного критерия качества при условиях неопределенности

Рассмотрим систему управления (4.1.4) и квадратичный функционал качества

$$J(u, x_0) = \int_0^\infty \varphi(x, u, t)\, dt, \tag{4.3.1}$$

где

$$\varphi(x, u, t) = \left[x^T, u^T\right] \Phi \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} S(t) & N(t) \\ N^T(t) & R(t) \end{bmatrix},$$

$x_0 = x(0) \in \mathcal{S}_0$ — вектор начального состояния, а блоки симметричной матрицы Φ при некотором $\eta > 0$ удовлетворяют условиям

$$S \geq NR^{-1}N^T + \eta\, I_n, \quad R > 0, \quad t \geq 0. \tag{4.3.2}$$

Требуется описать множество управлений (4.1.5), (4.2.2), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы и оценку функционала

$$J(u, x_0) \leq \omega, \tag{4.3.3}$$

где ω — некоторое максимально допустимое значение данного функционала.

Данную задачу по-прежнему решаем с помощью квадратичной функции Ляпунова $v(x,t) = x^T X(t) x$ с непрерывно дифференцируемой матрицей $X(t)$, удовлетворяющей условиям (4.2.4). При условиях (4.2.2) и (4.2.3) определены значения операторов $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, где $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$ (см. доказательство теоремы 3.3.1). При этом замкнутая система представляется в виде (4.1.7), а производная функции v в силу данной системы и подынтегральное выражение в (4.3.1) имеют вид

$$\dot{v}(x,t) = x^T\left[M^T X + XM\right] x, \quad \varphi(x, u, t) = x^T L^T \Phi L\, x,$$

где

$$M(x,t) = A + B\mathbf{D}(K)C,\ L^T(x,t) = [I_n, C^T\mathbf{D}^T(K)],\ K = K_* + \widetilde{K}.$$

Потребуем, чтобы наряду с (4.2.3) и (4.2.4) выполнялись соотношения

$$\dot{v}(x,t) \le -\varphi(x,u,t) \le -\eta\,\|x\|^2, \quad x \in \mathcal{S}_0,\ t \ge 0, \tag{4.3.4}$$

где $\eta > 0$, $\mathcal{S}_0$ — окрестность точки $x = 0$, содержащая x_0. Для этого достаточно выполнения матричных неравенств (4.3.2) и

$$\dot{X} + M_0^T X + XM_0 + L_0^T \Phi L_0 + \varepsilon_0 I_n \le 0, \quad t \ge 0, \tag{4.3.5}$$

где $M_0 = M(0,t)$, $L_0 = L(0,t)$, $\varepsilon_0 > 0$.

При условиях (4.2.4) и (4.3.4) нулевое решение замкнутой системы (4.1.7) асимптотически устойчиво и выполняется верхняя оценка функционала (4.3.1):

$$J(u,x_0) \le -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\,v(x,t)\,dt = x_0^T X(0)\,x_0 = \omega. \tag{4.3.6}$$

Матрица M_0 в (4.3.5) содержит выражение оператора $\mathbf{D}_0(K) = \big(I_m - KD(0,t)\big)^{-1}K$. Используя свойство (3.1.41) данного оператора, перепишем соотношение (4.3.5) в виде $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \le 0$, где

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})U + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})R_*\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$$W = \dot{X} + M_*^T X + XM_* + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n,$$

$$U = B_*^T X + N_*^T + R_* K_* C, \quad V = C_*,$$

$$M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C,\ \Phi_* = L_*^T \Phi L_*,\ L_*^T = \big[I_n, C^T\mathbf{D}^T(K_*)\big],$$

$$B_* = B(I_m - K_*D)^{-1},\ C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C,\ D_* = D(I_m - K_*D)^{-1},$$

$$N_* = N(I_m - K_*D)^{-1}, \quad R_* = (I_m - K_*D)^{-1T}R(I_m - K_*D)^{-1}.$$

Данное выражение представляет оператор вида (3.3.5).

Применяя лемму 3.3.1 о матричной неопределенности для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, получаем следующий результат.

Теорема 4.3.1 *Пусть для некоторых матричных функций* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(x,t)$ *выполняются соотношения* (4.2.4) *и*

$$R_* + D_*^T Q D_* < P, \tag{4.3.7}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(X) + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & XB_* + N_* + C^T K_*^T R_* & C_*^T \\ B_*^T X + N_*^T + R_* K_* C & R_* - P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.3.8}$$

где $\mathbf{W}(X) = \dot{X} + M_*^T X + X M_*$, $\varepsilon_0 > 0$, $x = 0$, $t \geq 0$. *Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x \equiv 0$ *системы* (4.1.4), *общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x,t) = x^T X(t) x$ *и оценку функционала качества* $J(u, x_0) \leq v(x_0, 0) = x_0^T X(0) x_0$.

Очевидно, что условие (4.2.3) является следствием неравенства (4.3.7). Утверждение теоремы 4.3.1 выполняется для семейства систем (4.1.4), (4.2.8), если вместо (4.3.8) использовать соотношения

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ijk}(X) + \Phi_k + \varepsilon_0 I_n & XB_{*j} + N_* + C_k^T K_*^T R_* & C_{*k}^T \\ B_{*j}^T X + N_*^T + R_* K_* C_k & R_* - P & D_*^T \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{4.3.9}$$

где $i = \overline{1,\alpha}, \quad j = \overline{1,\beta}, \quad k = \overline{1,\gamma}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad x = 0, \quad t \geq 0,$

$$\mathbf{W}_{ijk}(X) = \dot{X} + M_{ijk}^T X + X M_{ijk}, \ \ M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k,$$

$$\Phi_k = L_k^T \Phi L_k, \ \ L_k^T = [I_n, C_k^T \mathbf{D}^T(K_*)],$$

$$B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}, \ \ C_{*k} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k.$$

Следствие 4.3.1 *Пусть для некоторых матриц* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(x,t)$ *выполняется система матричных неравенств* (4.2.4), (4.3.7) *и* (4.3.9). *Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x \equiv 0$ *семейства систем* (4.1.4), (4.2.8), *общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x,t) = x^T X(t) x$ *и оценку функционала качества* $J(u, x_0) \leq v(x_0, 0)$.

Для семейства систем (4.1.4), (4.2.8), (4.2.10) выполняется аналогичное утверждение с использованием строгих матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} \dot{X} + A_i^T X + XA_i + S + \varepsilon_0 I_n & XB_j + N & C_k^T \\ B_j^T X + N^T & R - P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.3.10}$$

где $i = \overline{1, \alpha}$, $j = \overline{1, \beta}$, $k = \overline{1, \gamma}$, $s = \overline{1, \delta}$, $\varepsilon_0 > 0$, $t \geq 0$.

Из (4.3.10) вытекают соотношения

$$D_s^T Q D_s < R + D_s^T Q D_s < P, \quad s = \overline{1, \delta}, \quad t \geq 0.$$

При этом согласно лемме 1.5.4 выполняется условие (4.2.3) при $K_* \equiv 0$.

Следствие 4.3.2 *Пусть для некоторой матрицы* $X(t) = X^T(t)$ *выполняется система матричных неравенств* (4.2.4) *и* (4.3.10)*. Тогда любое управление* (4.1.5), (4.2.2) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x \equiv 0$ *семейства систем* (4.1.4), (4.2.8), (4.2.10)*, общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x,t) = x^T X(t) x$ *и оценку функционала качества* $J(u, x_0) \leq v(x_0, 0)$.

На основе теоремы 4.3.1 и ее следствий можно сформулировать задачи оптимизации системы (4.1.4), а также семейств систем (4.1.4), (4.2.8) и (4.1.4), (4.2.8), (4.2.10), т. е. минимизации максимального значения функционала качества $\omega = x_0^T X(0) x_0$ при соответствующих ограничениях в виде матричных неравенств (см. параграф 3.4.3). При этом можно использовать также усредненный по начальному вектору x_0 функционал (3.4.31).

4.4 Системы управления механическими объектами

В задачах управления механическими объектами используются линейные и нелинейные системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$A_2\ddot{x} + A_1\dot{x} + A_0 x = B_0 u, \quad y = C_0 x + C_1\dot{x} + Du, \tag{4.4.1}$$

где x, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно обобщенных координат, обобщенных скоростей, управления и измеряемого выхода, а матричные коэффициенты A_0, A_1, A_2, B_0, C_0, C_1 и D соответствующих размеров $n \times n$, $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, $l \times n$ и $l \times m$ могут непрерывно зависеть от x, $\dot{x}$ и t в окрестности состояния равновесия $x = \dot{x} = 0$ при $t \geq 0$. В дальнейшем предполагаем, что матрица инерции A_2 явно не зависит от времени t, а все матрицы, зависящие от x и $\dot{x}$, рассматриваются в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0$ нулевого состояния равновесия.

Перепишем систему управления (4.4.1) в виде

$$E(z)\dot{z} = A(z,t)z + B(z,t)u, \quad y = C(z,t)z + D(z,t)u, \tag{4.4.2}$$

где $z = [x^T, \dot{x}^T]^T$ — вектор полного состояния системы,

$$E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \; C = [C_0, C_1].$$

Построим множество стабилизирующих управлений для системы (4.4.2) в виде статической обратной связи:

$$u = K(z,t)y, \quad K \in \mathcal{K}_* = \left\{K_* + \widetilde{K} : \; \widetilde{K} \in \mathcal{K}\right\}, \tag{4.4.3}$$

где $K_* \in \mathbb{R}^{m\times l}$ — матрица коэффициентов усиления обратной связи, обеспечивающая асимптотическую устойчивость состояния $z \equiv 0$, $\mathcal{K}$ – эллипсоидальное множество допустимых возмущений $\widetilde{K}$ матрицы K_* вида (3.3.3), которое определяют матрицы $P = P^T > 0$ и $Q = Q^T > 0$ размеров $m \times m$ и $l \times l$ соответственно. При этом потребуем, чтобы на множестве матриц обратной связи $\mathcal{K}_*$ был определен оператор $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$, т. е. $\mathcal{K}_* \subseteq \mathcal{K}_D$.

Замкнутая система (4.4.2), (4.4.3) при $K \in \mathcal{K}_D$ имеет вид

$$E(z)\dot{z} = M(z,t)z, \tag{4.4.4}$$

где $M(z,t) = A + B\mathbf{D}(K)C$. Поэтому утверждения теоремы 2.1.7 в случае $\varphi \equiv 0$ и леммы 3.3.1 позволяют сформулировать аналоги теорем 4.2.1, 4.3.1 и их следствий для класса систем управления (4.4.2).

Теорема 4.4.1 *Пусть для некоторых матричных функций* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(z,t)$ *выполняются соотношения* (4.2.4) *и*

$$\begin{bmatrix} E^T\dot{X}E + M_*^TXE + E^TXM_* + \varepsilon_0 I_n & E^TXB_* & C_*^T \\ B_*^TXE & -P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.4.5}$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$, $z = 0$, $t \geq 0$. *Тогда любое управление* (4.4.3) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $z \equiv 0$ *системы* (4.4.2) *и общую функцию Ляпунова* $v(z,t) = z^TE_0^TX(t)E_0z$, *где* $E_0 = E(0)$.

Используя блочное представление неизвестной матрицы

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_3 \\ X_3^T & X_2 \end{bmatrix} > 0, \tag{4.4.6}$$

где $X_1 = X_1^T$, $X_2 = X_2^T$ и X_3 — блоки размеров $n \times n$, соотношение (4.4.5) можно переписать в терминах матричных коэффициентов исходной системы (4.4.1):

$$\Omega(t) = \left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3B_{0*} & C_{0*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_2^TX_2B_{0*} & C_{1*}^T \\ \hline B_{0*}^TX_3^T & B_{0*}^TX_2A_2 & -P & D_*^T \\ C_{0*} & C_{1*} & D_* & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \tag{4.4.7}$$

где

$$\Omega_{11} = \dot{X}_1 + A_{0*}^TX_3^T + X_3A_{0*} + \varepsilon_0 I_n,$$

$$\Omega_{21} = \Omega_{12}^T = A_2^T \dot{X}_3^T + X_1 + A_{1*}^T X_3^T + A_2^T X_2 A_{0*},$$

$$\Omega_{22} = A_2^T \dot{X}_2 A_2 + A_2^T X_3^T + X_3 A_2 + A_2^T X_2 A_{1*} + A_{1*}^T X_2 A_2 + \varepsilon_0 I_n,$$

$$A_{0*} = B_0 K_{0*} C_0 - A_0, \quad A_{1*} = B_0 K_{0*} C_1 - A_1, \quad K_{0*} = \mathbf{D}(K_*),$$

$$B_{0*} = B_0(I_m - K_* D)^{-1}, C_{0*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_0, C_{1*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_1.$$

Предположим, что система (4.4.1) при $z = 0$ и $t \geq 0$ имеет неопределенные коэффициенты:

$$\begin{gathered} A_0 \in \mathrm{Co}\{A_{01}, \ldots, A_{0\alpha_0}\}, \quad A_1 \in \mathrm{Co}\{A_{11}, \ldots, A_{1\alpha_1}\}, \\ B_0 \in \mathrm{Co}\{B_{01}, \ldots, B_{0\beta}\}, \\ C_0 \in \mathrm{Co}\{C_{01}, \ldots, C_{0\gamma_0}\}, \quad C_1 \in \mathrm{Co}\{C_{11}, \ldots, C_{1\gamma_1}\}. \end{gathered} \tag{4.4.8}$$

При дополнительных ограничениях на матрицы X и K_* будем использовать аналогичные предположения относительно A_2 и D при $z = 0$ и $t \geq 0$:

$$A_2 \in \mathrm{Co}\{A_{21}, \ldots, A_{2\alpha_2}\}, \tag{4.4.9}$$

$$D \in \mathrm{Co}\{D_1, \ldots, D_\delta\}. \tag{4.4.10}$$

Заданные наборы постоянных матриц в (4.4.8) – (4.4.10) являются вершинами некоторых политопов в соответствующих пространствах матриц. Поскольку все матричные коэффициенты системы, кроме A_2 и D, входят в выражения блоков Ω линейно, то условие (4.4.5) теоремы 4.4.1 можно представить в виде системы матричных неравенств, построенных в терминах вершин политопов (4.4.8). При наличии в системе неопределенности типа (4.4.9) следует использовать дополнительное ограничение $\dot{X}_2 \geq 0$, так как блок Ω_{22} содержит слагаемое $A_2^T \dot{X}_2 A_2$ (см. лемму 1.5.4). Неопределенность типа (4.4.10) может быть использована, например, в случае $K_* \equiv 0$.

Приведем следствия теоремы 4.4.1 с использованием постоянной матрицы (4.4.6).

Следствие 4.4.1 *Пусть совместна система ЛМН с постоянными матрицами* (4.4.6) *и*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r*} & C_{0p*}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r*} & C_{1q*}^T \\ \hline B_{0r*}^T X_3^T & B_{0r*}^T X_2 A_{2k} & -P & D_*^T \\ C_{0p*} & C_{1q*} & D_* & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \qquad (4.4.11)$$

где

$$\Omega_{11} = A_{0irp}^T X_3^T + X_3 A_{0irp}, \quad \Omega_{21} = X_1 + A_{1jrq}^T X_3^T + A_{2k}^T X_2 A_{0irp},$$

$$\Omega_{22} = A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} + A_{2k}^T X_2 A_{1jrq} + A_{1jrq}^T X_2 A_{2k},$$

$$A_{0irp} = B_{0r} K_{0*} C_{0p} - A_{0i}, \quad A_{1jrq} = B_{r0} K_{0*} C_{1q} - A_{1j},$$

$$K_{0*} = \mathbf{D}(K_*), \quad B_{0r*} = B_{0r}(I_m - K_* D)^{-1},$$

$$C_{0p*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_{0p}, \quad C_{1q*} = (I_l - DK_*)^{-1} C_{1q},$$

$$i = \overline{1, \alpha_0},\ j = \overline{1, \alpha_1},\ k = \overline{1, \alpha_2},\ r = \overline{1, \beta},\ p = \overline{1, \gamma_0},\ q = \overline{1, \gamma_1}.$$

Тогда любое управление (4.4.3) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $z \equiv 0$ *семейства систем* (4.4.2), (4.4.8), (4.4.9).

Следствие 4.4.2 *Пусть совместна система ЛМН с постоянными матрицами* (4.4.6) *и*

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \Omega_{11} & \Omega_{12} & X_3 B_{0r} & C_{0p}^T \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & A_{2k}^T X_2 B_{0r} & C_{1q}^T \\ \hline B_{0r}^T X_3^T & B_{0r}^T X_2 A_{2k} & -P & D_s^T \\ C_{0p} & C_{1q} & D_s & -Q^{-1} \end{array}\right] < 0, \qquad (4.4.12)$$

где

$$\Omega_{11} = -A_{0i}^T X_3^T - X_3 A_{0i}, \quad \Omega_{21} = \Omega_{12}^T = X_1 - A_{1j}^T X_3^T - A_{2k}^T X_2 A_{0i},$$

$$\Omega_{22} = A_{2k}^T X_3^T + X_3 A_{2k} - A_{2k}^T X_2 A_{1j} - A_{1j}^T X_2 A_{2k},$$

$i = \overline{1, \alpha_0}$, $j = \overline{1, \alpha_1}$, $k = \overline{1, \alpha_2}$, $r = \overline{1, \beta}$, $p = \overline{1, \gamma_0}$, $q = \overline{1, \gamma_1}$, $s = \overline{1, \delta}$.

Тогда любое управление (4.4.3) *при* $K_* \equiv 0$ *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $z \equiv 0$ *семейства систем* (4.4.2), (4.4.8) – (4.4.10).

Рассмотрим систему управления (4.4.2) с квадратичным функционалом качества

$$J(u, z_0) = \int_0^\infty \varphi(z, u, t)\, dt, \tag{4.4.13}$$

где

$$z_0 = z(0), \quad \varphi(z, u, t) = \left[z^T, u^T\right] \Phi(t) \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_0 & S_2 \\ S_2^T & S_1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \end{bmatrix},$$

$$R > 0, \quad S \geq N R^{-1} N^T + \eta\, I_{2n}, \quad \eta > 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть требуется описать множество управлений (4.4.3), обеспечивающих асимптотическую устойчивость состояния $z \equiv 0$ системы (4.4.2) и верхнюю оценку функционала (4.4.13).

Теорема 4.4.2 *Пусть для некоторых матричных функций* $X(t) = X^T(t)$ *и* $K_*(z, t)$ *выполняются соотношения* (4.2.4) *и*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}(X) + \Phi_* + \varepsilon_0 I_{2n} & E^T X B_* + N_* + C^T K_*^T R_* & C_*^T \\ B_*^T X E + N_*^T + R_* K_* C & R_* - P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{4.4.14}$$

где $\mathbf{W}(X) = E^T \dot{X} E + M_*^T X E + E^T X M_*$, $\Phi_* = L_*^T \Phi L_*$, $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - D K_*)^{-1} C$, $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$, $R_* = (I_m - K_* D)^{-1T} R\,(I_m - K_* D)^{-1}$, $N_* = N(I_m - K_* D)^{-1}$, $L_*^T = \left[I_{2n}, C^T \mathbf{D}^T(K_*)\right]$, $z = 0$, $t \geq 0$.

Тогда любое управление (4.4.3) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $z \equiv 0$ *системы* (4.4.2), *общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(z, t) = z^T E_0^T X(t) E_0 z$, *где* $E_0 = E(0)$, *и оценку функционала качества* $J(u, z_0) \leq v(z_0, 0)$.

Соотношение (4.4.14) в терминах матричных коэффициентов исходной системы (4.4.1) имеет вид

$$\Omega(t)=\left[\begin{array}{cc|cc}\Omega_{11} & \Omega_{12} & U_0^T & C_{0*}^T\\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & U_1^T & C_{1*}^T\\ \hline U_0 & U_1 & R_*-P & D_*^T\\ C_{0*} & C_{1*} & D_* & -Q^{-1}\end{array}\right]<0, \qquad (4.4.15)$$

где

$$\Omega_{11}=\dot{X}_1+A_{0*}^TX_3^T+X_3A_{0*}+S_0+C_0^TK_0^TN_0^T+N_0K_0C_0+$$

$$+C_0^TK_0^TRK_0C_0+\varepsilon_0I_n,$$

$$\Omega_{21}=\Omega_{12}^T=A_2^T\dot{X}_3^T+X_1+A_{1*}^TX_3^T+A_2^TX_2A_{0*}+S_2^T+$$

$$+C_1^TK_0^TN_0^T+N_1K_0C_0+C_1^TK_0^TRK_0C_0,$$

$$\Omega_{22}=A_2^T\dot{X}_2A_2+A_2^TX_3^T+X_3A_2+A_2^TX_2A_{1*}+A_{1*}^TX_2A_2+S_1+$$

$$+C_1^TK_0^TN_1^T+N_1K_0C_1+C_1^TK_0^TRK_0C_1+\varepsilon_0I_n,$$

$$A_{0*}=B_0K_0C_0-A_0,\quad A_{1*}=B_0K_0C_1-A_1,\quad K_0=\mathbf{D}(K_*),$$

$$U_0=B_{0*}^TX_3^T+N_{0*}^T+R_*K_*C_0,\quad U_1=B_{0*}^TX_2A_2+N_{1*}^T+R_*K_*C_1,$$

$$B_{0*}=B_0(I_m-K_*D)^{-1}, C_{0*}=(I_l-DK_*)^{-1}C_0, C_{1*}=(I_l-DK_*)^{-1}C_1,$$

$$N_{0*}=N_0(I_m-K_*D)^{-1},\quad N_{1*}=N_1(I_m-K_*D)^{-1},$$

Следствие 4.4.3 *Пусть совместна система ЛМН с постоянными матрицами* (4.4.6) *и*

$$\left[\begin{array}{cc|cc}\Omega_{11} & \Omega_{12} & U_{0rp}^T & C_{0p*}^T\\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & U_{1krq}^T & C_{1q*}^T\\ \hline U_{0rp} & U_{1krq} & R_*-P & D_*^T\\ C_{0p*} & C_{1q*} & D_* & -Q^{-1}\end{array}\right]<0, \qquad (4.4.16)$$

где

$$\Omega_{11}=A_{0irp}^TX_3^T+X_3A_{0irp}+S_0+C_{0p}^TK_0^TN_0^T+$$

$$+N_0K_0C_{0p}+C_{0p}^TK_0^TRK_0C_{0p},$$

$$\Omega_{21}=\Omega_{12}^T=X_1+A_{1jrq}^TX_3^T+A_{2k}^TX_2A_{0irp}+S_2^T+C_{1q}^TK_0^TN_0^T+$$

$$+N_1K_0C_{0p}+C_{1q}^TK_0^TRK_0C_{0p},$$

$$\Omega_{22}=A_{2k}^TX_3^T+X_3A_{2k}+A_{2k}^TX_2A_{1jrq}+A_{1jrq}^TX_2A_{2k}+S_1+$$

$$+C_{1q}^TK_0^TN_1^T+N_1K_0C_{1q}+C_{1q}^TK_0^TRK_{0*}C_{1q},$$

$$A_{0irp}=B_{0r}K_0C_{0p}-A_{0i},\ A_{1jrq}=B_{r0}K_0C_{1q}-A_{1j},\ K_0=\mathbf{D}(K_*),$$

$$U_{0rp}=B_{0r*}^TX_3^T+N_{0*}^T+R_*K_*C_{0p},$$

$$U_{1krq}=B_{0r*}^TX_2A_{2k}+N_{1*}^T+R_*K_*C_{1q},$$

$$B_{0r*}=B_{0r}(I_m-K_*D)^{-1},$$

$$C_{0p*}=(I_l-DK_*)^{-1}C_{0p},\quad C_{1q*}=(I_l-DK_*)^{-1}C_{1q},$$

$$i=\overline{1,\alpha_0},\ j=\overline{1,\alpha_1},\ k=\overline{1,\alpha_2},\ r=\overline{1,\beta},\ p=\overline{1,\gamma_0},\ q=\overline{1,\gamma_1}.$$

Тогда любое управление (4.4.3) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $z\equiv 0$ *семейства систем* (4.4.2), (4.4.8), (4.4.9) *и оценку функционала качества* $J(u,z_0)\le\omega$, *где*

$$\omega=\max_{1\le k\le\alpha_2}\omega_k,\quad \omega_k=z_0^TZ_kz_0,\quad Z_k=\begin{bmatrix} X_1 & X_3A_{2k}\\ A_{2k}^TX_3^T & A_{2k}^TX_2A_{2k}\end{bmatrix}.$$

В данном утверждении верхняя оценка функционала $J(u,z_0)\le\omega$ устанавливается с использованием леммы 1.5.2.

Пример 4.4.1 Рассмотрим систему управления однозвенного робота-манипулятора, круговое движение звена которого вокруг одного из концов осуществляется с помощью гибкого соединения звена и исполняющего механизма (рис. 4.1). Между исполняющим механизмом и концом звена расположена линейная торсионная пружина. Данная система описывается в виде двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, вытекающих из механического баланса исполняющего механизма (вала электродвигателя) и звена манипулятора без учета

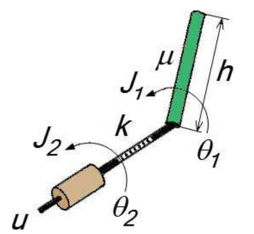


Рис. 4.1. Однозвенный робот-манипулятор.

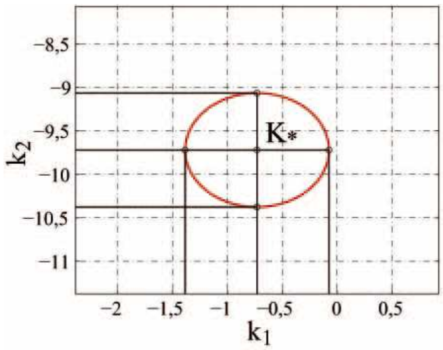


Рис. 4.2. Область коэффициентов усиления обратной связи $(K-K_*)Q^{-1}(K-K_*)^T \le P^{-1}$.

сил трения и внешних возмущений, или в векторно-матричной форме [104]:

$$\dot{x} = A(x)\,x + Bu, \tag{4.4.17}$$

где

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\mu g h\,\varphi(\theta_1)+k}{J_1} & 0 & \dfrac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J_2} & 0 & -\dfrac{k}{J_2} & -\dfrac{d}{J_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_2} \end{bmatrix},$$

$x = \left[\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2\right]^T$, θ_1 и θ_2 — угловые координаты соответственно звена манипулятора и вала электродвигателя, u — управляющий момент, производимый электродвигателем, J_1 и J_2 — моменты инерции соответственно звена манипулятора и электродвигателя, k — жёсткость передаточного механизма, d — коэффициент демпфирования, μ — масса звена манипулятора, h — длина звена манипулятора, g — ускорение свободного падения, $\varphi(\theta) = sin\,\theta\,/\theta$ — непрерывная функция.

Пусть $\mu gh = 5$, $d = 0,1$, $k = 100$, а J_1 и J_2 — неопределенные параметры, принимающие значения на интервалах

$$0,5 \leq J_1 \leq 1,5, \quad 0,1 \leq J_2 \leq 0,5. \qquad (4.4.18)$$

Предположим, что измерению доступен вектор выхода

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \theta_1 + 0,1\,u \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix},$$

где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решая два ЛМН (3.1.23) и (3.1.26) при $J_1 = 1$ и $J_2 = 0,3$, определяем матрицу $X = X^T > 0$, вектор $K_0 = \begin{bmatrix} -0,6799 & -9,0603 \end{bmatrix}$ и соответствующее управление (см. лемму 3.1.1)

$$u = K_* y, \quad K_* = -\mathbf{D}(-K_0) = \begin{bmatrix} -0,7295 & -9,7213 \end{bmatrix}, \quad (4.4.19)$$

при котором линейная система

$$\dot{x} = M_* x, \quad M_* = A(0) + BK_0 C, \quad K_0 = \mathbf{D}(K_*),$$

асимптотически устойчива. При этом $\mathrm{i}(H) = \{2, 1, 0\}$,

$$\sigma(M_*) = \big\{ -0,6449; -15,0004; -7,4445 \pm 11,8447i \big\}$$

и нулевое состояние исходной нелинейной системы (4.4.17) также асимптотически устойчиво.

Зададим матрицы функционала (4.3.1):

$$S = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad R = 0,2.$$

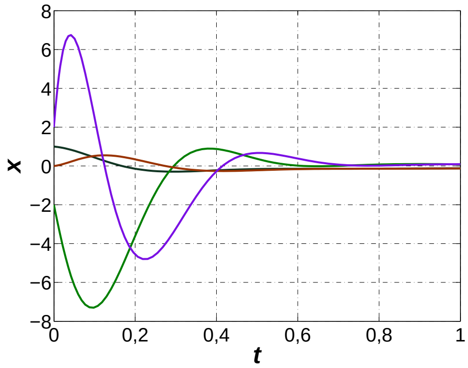


Рис. 4.3. Поведение системы с управлением $u = K_* y$.

Система соотношений (4.3.9) состоит из четырех матричных неравенств, отвечающих возможным значениям пары (J_1, J_2) на концах интервалов (4.4.18). Используя систему MATLAB, найдены значения

$$P = 2,33 > 0, \quad Q = \begin{bmatrix} 1,0013 & 0,0013 \\ 0,0013 & 1,0013 \end{bmatrix} > 0,$$

$$X = \begin{bmatrix} 955,4267 & -20,1682 & -936,1927 & -31,1040 \\ -20,1682 & 5,2221 & 21,7147 & -0,1949 \\ -936,1927 & 21,7147 & 926,8484 & 31,0357 \\ -31,1040 & -0,1949 & 31,0357 & 2,9214 \end{bmatrix} > 0,$$

удовлетворяющие упомянутой системе строгих неравенств при $\varepsilon_0 = 0$.

Таким образом, для всех значений моментов инерции (4.4.18) и вектора коэффициентов усиления обратной связи $K = K_* + \widetilde{K}$ из замкнутой области, ограниченной эллипсом (рис. 4.2)

$$(K - K_*)Q^{-1}(K - K_*)^T = P^{-1},$$

движение робота-манипулятора в окрестности нулевого состояния асимптотически устойчиво. При этом $v(x) = x^T X x$ является общей функцией Ляпунова, а значение заданного функционала качества не превышает $v(x_0) = 945,8169$.

Поведение решений системы (4.4.17) с управлением $u = K_* y$ и начальным вектором $x_0 = \left[1,\ -2,\ 0,\ 2\right]^T$ изображено на рис. 4.3.

Глава 5

Обобщенное H_∞-управление по выходу

В теории H_∞-управления критерием качества J замкнутой системы является H_∞-норма ее матричной передаточной функции, характеризующая уровень гашения ограниченных входных сигналов. Задача H_∞-оптимизации состоит в построении стабилизирующих законов управления, минимизирующих данный критерий качества.

Данная глава посвящена методам построения робастных стабилизирующих статических и динамических H_∞-регуляторов по выходу, обеспечивающих заданную оценку некоторого обобщенного критерия качества J_{P,Q,X_0} систем управления с внешними и начальными возмущениями. При этом рассматриваются случаи, когда внешние возмущения присутствуют в уравнениях регулятора (параграф 5.1), а также в уравнениях движения и выходов системы (параграф 5.2). В параграфе 5.3 изучается класс так называемых неэкспансивных систем управления, для которых выполняется оценка $J_{P,Q,X_0} \leq 1$.

5.1 Оценка уровня гашения входных сигналов

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = x_0, \tag{5.1.1}$$

где x_0 — произвольный начальный вектор. В случае $x_0 = 0$ определим критерий качества системы

$$J = \sup_{0<\|u\|_2<\infty} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}, \quad \|y\|_2^2 = \int_0^\infty y^T y\, dt, \;\; \|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^T u\, dt. \tag{5.1.2}$$

Выражения $\|y\|_2$ и $\|u\|_2$ представляют L_2-норму в соответствующих пространствах векторных функций, а значение J совпадает с H_∞-нормой матричной *передаточной функции* системы

$$\|H\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(H^T(-i\omega)H(i\omega))}, H(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B + D,$$

которая характеризует уровень гашения энергии входных сигналов при их прохождении через данную систему (см., например, [84, 131, 138]). При решении различных задач управления желательно, чтобы данная характеристика была минимальной.

Известно, что оценка $J < \gamma$, эквивалентная частотному неравенству $H^T(-i\omega)H(i\omega) < \gamma^2 I_m$ $(\omega \in \mathbb{R})$, выполняется в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется ЛМН (см., например, [98, 103, 127])

$$\Omega_\gamma = \begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I_m & D^T \\ C & D & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0. \tag{5.1.3}$$

При этом матрица A должна быть гурвицевой, а система (5.1.1) с неопределенностью $u = \Theta y$ при $\|\Theta\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\Theta^T\Theta)} \le \gamma$ робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$.

Характеристика (5.1.2) определяется в результате решения оптимизационной задачи:

$$J = \inf\left\{\gamma : \Omega_\gamma < 0, \;\; X = X^T > 0\right\}. \tag{5.1.4}$$

Если для системы (5.1.1) определить взвешенный уровень гашения входных сигналов и начальных возмущений, порождаемых ненулевым начальным вектором x_0,

$$J_\rho = \sup_{0<\|u\|_2^2+\rho x_0^T x_0<\infty} \frac{\|y\|_2}{\sqrt{\|u\|_2^2 + \rho x_0^T x_0}}, \tag{5.1.5}$$

то оценка $J_\rho < \gamma$ выполняется в том и только в том случае, когда система ЛМН (5.1.3) и $0 < X \leq \gamma\rho I_n$ совместна [14].

Рассмотрим для системы (5.1.1) класс управлений

$$u = K_* y + w, \quad K_* \in \mathcal{K}_D. \tag{5.1.6}$$

В качестве входа w может быть вектор внешних возмущений или новое управление. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad y = C_* x + D_* w, \quad x(0) = x_0, \tag{5.1.7}$$

где $A_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1} C$, $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$.

Обобщим критерий качества (5.1.2) системы (5.1.7) в виде

$$J_{P,Q} = \sup_{0<\|w\|_P<\infty} \frac{\|y\|_Q}{\|w\|_P}, \tag{5.1.8}$$

где

$$\|y\|_Q^2 = \int_0^\infty y^T Q y \, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^T P w \, dt,$$

$Q = Q^T > 0$ и $P = P^T > 0$ — некоторые матрицы, $\|y\|_Q$ и $\|w\|_P$ — взвешенные L_2-нормы соответствующих вектор-функций y и w. При этом выполняются соотношения

$$\gamma_1 J \leq J_{P,Q} \leq \gamma_2 J, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}.$$

В частности, если $\gamma_2 \leq 1$, то $J_{P,Q} \leq J$. Если же $J_{P,Q} < 1$, то $J < \gamma$, где $\gamma = 1/\gamma_1$. Величина $J_{P,Q}$ характеризует взвешенный уровень входных сигналов в системе (5.1.7) с нулевым начальным вектором x_0. Обобщим также критерий качества (5.1.5):

$$J_{P,Q,X_0} = \sup_{0<\|w\|_P^2+x_0^T X_0 x_0<\infty} \frac{\|y\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \qquad (5.1.9)$$

где $Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$ и $X_0 = X_0^T > 0$. Очевидно, что J_{P,Q,X_0} совпадает с $J_{P,Q}$ при $x_0 = 0$, поэтому $J_{P,Q,X_0} \geq J_{P,Q}$.

Используя разложения положительно определенных матриц $Q = \widetilde{Q}^T \widetilde{Q}$, $P = \widetilde{P}^T \widetilde{P}$ и $X_0 = \widetilde{X}_0^T \widetilde{X}_0$, преобразуем систему (5.1.7):

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{w}, \quad \widetilde{y} = \widetilde{C}\widetilde{x} + \widetilde{D}\widetilde{w}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \qquad (5.1.10)$$

где $\widetilde{x} = \widetilde{X}_0 x$, $\widetilde{y} = \widetilde{Q} y$, $\widetilde{w} = \widetilde{P} w$, $\widetilde{A} = \widetilde{X}_0 A_* \widetilde{X}_0^{-1}$, $\widetilde{B} = \widetilde{X}_0 B_* \widetilde{P}^{-1}$, $\widetilde{C} = \widetilde{Q} C_* \widetilde{X}_0^{-1}$ и $\widetilde{D} = \widetilde{Q} D_* \widetilde{P}^{-1}$. При этом $\widetilde{w}$ рассматривается как вход данной системы, а критерии качества (5.1.8) и (5.1.9) приводится к соответствующему виду (5.1.2) и (5.1.5) при $\rho = 1$:

$$J_{P,Q} = \sup_{0<\|\widetilde{w}\|_2<\infty} \frac{\|\widetilde{y}\|_2}{\|\widetilde{w}\|_2}, \quad J_{P,Q,X_0} = \sup_{0<\|\widetilde{w}\|_2^2+\widetilde{x}_0^T\widetilde{x}_0<\infty} \frac{\|\widetilde{y}\|_2}{\sqrt{\|\widetilde{w}\|_2^2 + \widetilde{x}_0^T \widetilde{x}_0}}.$$

Согласно (5.1.3) оценка $J_{P,Q} < \gamma$ выполняется в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $\widetilde{X} = \widetilde{X}^T > 0$ выполняется ЛМН

$$\widetilde{\Omega}_\gamma = \begin{bmatrix} \widetilde{A}^T \widetilde{X} + \widetilde{X}\widetilde{A} & \widetilde{X}\widetilde{B} & \widetilde{C}^T \\ \widetilde{B}^T \widetilde{X} & -\gamma I_m & \widetilde{D}^T \\ \widetilde{C} & \widetilde{D} & -\gamma I_l \end{bmatrix} < 0.$$

Полагая $X = \widetilde{X}_0^T \widetilde{X} \widetilde{X}_0$ и $S = \operatorname{diag}\left\{\widetilde{X}_0, \widetilde{P}, \widetilde{Q}^{-1T}\right\}$, имеем

$$\Omega_\gamma = S^T \widetilde{\Omega}_\gamma S = \begin{bmatrix} A_*^T X + X A_* & X B_* & C_*^T \\ B_*^T X & -\gamma P & D_*^T \\ C_* & D_* & -\gamma Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

Далее, после умножения Ω_γ на γ и замены γX на X с учетом леммы Шура, получаем

$$\Phi_\gamma = \begin{bmatrix} A_*^T X + XA_* + C_*^T QC_* & XB_* + C_*^T QD_* \\ B_*^T X + D_*^T QC_* & D_*^T QD_* - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0.$$

При этом матрица A_* должна быть гурвицевой, а дополнительное ограничение $0 < \widetilde{X} \le \gamma I_n$, обеспечивающее оценку $J_{P,Q,X_0} < \gamma$, сводится к виду $0 < X \le \gamma^2 X_0$. Полагая $\gamma = 1$ и учитывая теорему 3.3.1, имеем следующее утверждение.

Лемма 5.1.1 *Пусть для некоторой матрицы $K_* \in \mathcal{K}_D$ матрица $A_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$ гурвицева. Тогда $J_{P,Q} < 1$ в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется матричное неравенство*

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} A_*^T X + XA_* + C_*^T QC_* & XB_* + C_*^T QD_* \\ B_*^T X + D_*^T QC_* & D_*^T QD_* - P \end{bmatrix} < 0. \quad (5.1.11)$$

Для выполнения оценки $J_{P,Q,X_0} < 1$ необходимо и достаточно, чтобы матричное неравенство (5.1.11) *имело решение X такое, что*

$$0 < X \le X_0. \quad (5.1.12)$$

Если $J_{P,Q,X_0} < 1$, в частности, $J_{P,Q} < 1$, то система (5.1.7) *с неопределенностью*

$$w = \Theta y, \quad \Theta^T P \Theta \le Q, \quad (5.1.13)$$

робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$, где $X = X^T > 0$ — решение матричного неравенства (5.1.11).

Отметим, что характеристика (5.1.8) определяется в результате решения следующей оптимизационной задачи:

$$J_{P,Q} = \inf \{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\, X > 0,\, K_* \in \mathcal{K}_D\}.$$

Аналогично,

$$J_{P,Q,X_0} = \inf \left\{\gamma : \Phi_\gamma < 0,\, 0 < X \le \gamma^2 X_0,\, K_* \in \mathcal{K}_D\right\}.$$

В качестве параметров оптимизации наряду с X и K_* могут быть также положительно определенные матрицы P, Q и X_0. Если в утверждениях леммы 5.1.1 вместо (5.1.11) использовать нестрогое матричное неравенство $\Phi_1 \le 0$, то получим аналогичные критерии выполнения оценок $J_{P,Q} \le 1$ и $J_{P,Q,X_0} \le 1$.

Получим критерий существования матрицы K_*, удовлетворяющей условиям леммы 5.1.1.

Введем обозначение $K_0 = \mathbf{D}(K_*)$. Тогда $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B(I_m + K_0D)$, $C_* = (I_l + DK_0)C$, $D_* = (I_l + DK_0)D$ и соотношение $\Omega_\gamma < 0$ при $\gamma = 1$ представляется в виде ЛМН

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \tag{5.1.14}$$

где

$$R_0 = \big[R, 0_{l\times l}\big],\ R = \big[C, D\big],\ L_0 = \big[L, 0_{m\times m}\big]\,\widetilde{X},\ L = \big[B^T, D^T\big],$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} A^TX + XA & XB & C^T \\ B^TX & -P & D^T \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Данное неравенство разрешимо относительно K_0 в том и только в том случае, когда

$$W_{R_0}^T \Omega W_{R_0} < 0, \quad W_{L_0}^T \Omega W_{L_0} < 0, \tag{5.1.15}$$

где W_{R_0} и W_{L_0} — матрицы, столбцы которых образуют базисы соответствующих ядер $\mathrm{ker}R_0$ и $\mathrm{ker}L_0$ (см. лемму 8.3.1 в случае (d)). Так как

$$W_{R_0} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad W_{L_0} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

то условия (5.1.15) с учетом леммы Шура приводятся к виду

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TX + XA + C^TQC & XB + C^TQD \\ B^TX + D^TQC & D^TQD - P \end{bmatrix} W_R < 0,$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + BP^{-1}B^T & YC^T + BP^{-1}D^T \\ CY + DP^{-1}B^T & DP^{-1}D^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{5.1.16}$$

где $Y = X^{-1}$. Если матричное неравенство (5.1.14) разрешимо, то всегда можно выбрать такое его решение K_0, что матрица $I_l + DK_0$ будет невырожденной. При этом $I_l + DK_0 = (I_l - DK_*)^{-1}$ и

$$K_* = K_0(I_l + DK_0)^{-1}. \tag{5.1.17}$$

Теорема 5.1.1 *Существует регулятор* (5.1.6)*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ ($J_{P,Q,X_0} < 1$)*, в том и только в том случае, когда система ЛМН* (5.1.16) ((5.1.12) *и* (5.1.16)) *разрешима относительно взаимно обратных матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$. *При этом замкнутая система* (5.1.1), (5.1.6) *с неопределенностью* (5.1.13) *робастно устойчива с общей функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Алгоритм вычисления матрицы K_* регулятора (5.1.6), для которого $J_{P,Q} < 1$, состоит из следующих этапов:

1) вычисление матриц W_R и W_L ($R = \left[C, D\right]$, $L = \left[B^T, D^T\right]$);

2) нахождение матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющих условиям (5.1.16) и $XY = I_n$;

3) решение ЛМН (5.1.14) относительно K_0 при ограничении $\det(I_l + DK_0) \neq 0$;

4) вычисление матрицы K_* по формуле (5.1.17).

Дополнительное ограничение (5.1.12) в п. 2) данного алгоритма обеспечивает оценку $J_{P,Q,X_0} < 1$.

В теореме 5.1.1 матрицы P и Q являются заданными. Однако, в приведенном алгоритме робастной стабилизации их можно считать неизвестными и определять наряду с X и Y. Кроме того, можно учесть неопределенность $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\alpha\}$. При этом необходимо решить систему 2α матричных неравенств типа (5.1.16) для каждой вершины A_i заданного политопа. В утверждениях леммы 5.1.1 могут быть учтены также неопределенности $B \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_\beta\}$ и $C \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_\gamma\}$ с использованием соответствующих систем матричных неравенств.

Теперь для системы (5.1.1) рассмотрим критерии качества (5.1.8), (5.1.9) и класс динамических регуляторов

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky + w, \quad \xi(0) = \xi_0, \qquad (5.1.18)$$

где $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор входных сигналов. Объединенная система (5.1.1), (5.1.18) при условии $K \in \mathcal{K}_D$ приводится к виду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad y = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \qquad (5.1.19)$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \ \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix}, \ \widehat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix},$$

$$\widehat{F} = \begin{bmatrix} C + DK_0C, DU_0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{G} = D + DK_0D,$$

$$K_0 = \mathbf{D}(K), \quad U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - DK)^{-1}, \ \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$$

Если матрица $\widehat{M}$ гурвицева, то согласно лемме 5.1.1 $J_{P,Q,\widehat{X}_0} < 1$ в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $\widehat{X} = \widehat{X}^T$ выполняется система соотношений

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M} + \widehat{F}^TQ\widehat{F} & \widehat{X}\widehat{N} + \widehat{F}^TQ\widehat{G} \\ \widehat{N}^T\widehat{X} + \widehat{G}^TQ\widehat{F} & \widehat{G}^TQ\widehat{G} - P \end{bmatrix} < 0, \qquad (5.1.20)$$

$$0 < \widehat{X} = \begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} \leq \widehat{X}_0 = \begin{bmatrix} X_0 & X_{01}^T \\ X_{01} & X_{02} \end{bmatrix}. \qquad (5.1.21)$$

При этом система (5.1.19) с неопределенностью (5.1.13) робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T\widehat{X}\widehat{x}$. Представляя соотношение (5.1.20) с помощью леммы Шура в виде ЛМН относительно $\widehat{K}_0$, имеем

$$\widehat{L}^T\widehat{K}_0\widehat{R} + \widehat{R}^T\widehat{K}_0^T\widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \qquad (5.1.22)$$

где

$$\widehat{\Omega}=\begin{bmatrix} A^TX+XA & A^TX_1^T & XB & C^T \\ X_1A & 0 & X_1B & 0 \\ B^TX & B^TX_1^T & -P & D^T \\ C & 0 & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}, \ \widehat{L}^T=\begin{bmatrix} XB & X_1^T \\ X_1B & X_2 \\ 0 & 0 \\ D & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{R}=\begin{bmatrix} C & 0 & D & 0 \\ 0 & I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{K}_0=\begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}.$$

При этом матрицы регулятора (5.1.18) и блоки матрицы $\widehat{K}_0$ связаны соотношениями

$$K=(I_m+K_0D)^{-1}K_0,\ U=(I_m+K_0D)^{-1}U_0,$$
$$V=V_0(I_l+DK_0)^{-1},\ Z=Z_0-V_0D(I_m+K_0D)^{-1}U_0. \tag{5.1.23}$$

Условия разрешимости ЛМН (5.1.22) выражаются в терминах диагональных блоков X и Y взаимно обратных матриц

$$\widehat{X}=\begin{bmatrix} X & X_1^T \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}>0,\ \widehat{Y}=\begin{bmatrix} Y & Y_1^T \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}>0,\ \widehat{X}\widehat{Y}=I_{n+r}. \tag{5.1.24}$$

Действительно, согласно лемме 8.3.1 для существования решения $\widehat{K}_0$ матричного неравенства (5.1.22) необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$W_{\widehat{R}}^T\widehat{\Omega}W_{\widehat{R}}<0, \quad W_{\widehat{L}}^T\widehat{\Omega}W_{\widehat{L}}<0, \tag{5.1.25}$$

где

$$W_{\widehat{R}}=E_1\begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_l \end{bmatrix}, W_{\widehat{L}}=E_2\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_1=\begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_l \end{bmatrix}, \quad E_2=\begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & Y_1^T \\ Y_1 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & I_l & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$R = \bigl[C, D\bigr]$, $L = \bigl[B^T, D^T\bigr]$. Учитывая блочную структуру приведенных выражений, а также равенства

$$XY + X_1^T Y_1 = I_n,\ XY_1^T = -X_1^T Y_2,\ X_1 Y = -X_2 Y_1,\ X_1 Y_1^T + X_2 Y_2 = I_r,$$

соотношения (5.1.25) приобретают вид (5.1.16), где неизвестными являются лишь первые диагональные блоки $X > 0$ и $Y > 0$ соответствующих матриц $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$. При этом для заданных матриц $X > 0$ и $Y > 0$ условия

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r, \tag{5.1.26}$$

необходимы и достаточны для существования взаимообратных блочных матриц вида (5.1.24) (см., например, [14]).

Заметим, что при нулевом начальном векторе ξ_0 динамического регулятора (5.1.18) $J_{P,Q,\widehat{X}_0}$ совпадает с J_{P,Q,X_0} и вместо (5.1.21) можно использовать ограничение (5.1.12).

Таким образом, повторяя доказательство теоремы 5.1.1 для системы (5.1.19), получаем следующий результат.

Теорема 5.1.2 *Существует динамический регулятор* (5.1.18) *с начальным вектором* $\xi_0 = 0$*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ ($J_{P,Q,X_0} < 1$)*, в том и только в том случае, когда система соотношений* (5.1.16) *и* (5.1.26) ((5.1.12), (5.1.16) *и* (5.1.26)) *разрешима относительно матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$.

Так же, как и в случае статического регулятора, каждое из неравенств $J_{P,Q} < 1$ и $J_{P,Q,X_0} < 1$ обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы (5.1.19) с неопределенностью (5.1.13). При этом матрица общей квадратичной функции Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ определяется как решение ЛМН (5.1.20).

Приведем алгоритм построения динамического регулятора (5.1.18), обеспечивающего оценку $J_{P,Q} < 1$:

1) вычисление матриц W_R и W_L ($R = \bigl[C, D\bigr]$, $L = \bigl[B^T, D^T\bigr]$);

2) нахождение матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющих соотношениям (5.1.16) и (5.1.26);

3) формирование блочных взаимно обратных матриц (5.1.24);

4) решение ЛМН (5.1.22) относительно $\widehat{K}_0$ при ограничении $\det(I_l + DK_0) \neq 0$;

5) вычисление матриц регулятора (5.1.18) по формулам (5.1.23).

Дополнительное ограничение (5.1.12) в п. 2) данного алгоритма обеспечивает оценку $J_{P,Q,X_0} < 1$. Если $r = n$, то всегда выполняется ранговое ограничение в (5.1.26). В этом случае нахождение матриц X и Y основано на решении систем ЛМН. В п. 3) можно использовать формулу Фробениуса для обращения блочных матриц [21], согласно которой

$$X = Y^{-1} + Y^{-1}Y_1^T H^{-1} Y_1 Y^{-1}, \quad X_1 = -H^{-1}Y_1Y^{-1}, \quad X_2 = H^{-1},$$

где $H = Y_2 - Y_1 Y^{-1} Y_1^T$. Если для некоторых матриц X_1 и H выполняются соотношения

$$X - Y^{-1} = X_1^T H X_1 \geq 0, \quad H = H^T > 0, \quad \operatorname{rank} X_1 \leq r, \tag{5.1.27}$$

то можно положить

$$X_2 = H^{-1}, \quad Y_1 = -HX_1Y, \quad Y_2 = H + HX_1YX_1^TH. \tag{5.1.28}$$

В частности, при условиях $r = n$ и $X > Y^{-1}$ можно взять $X_1 = X_2 = X - Y^{-1}$, $Y_1 = -Y$, $Y_2 = Y + H$ и $H = (X - Y^{-1})^{-1}$.

5.2 Линейные системы с управляемыми и наблюдаемыми выходами

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

где векторы: $x \in \mathbb{R}^n$ — состояние, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $w \in \mathbb{R}^s$ — возмущение, $y \in \mathbb{R}^l$ — наблюдаемый выход, $z \in \mathbb{R}^k$ — управляемый выход; все матричные коэффициенты постоянные и имеют подходящие размеры.

Используем критерии качества типа (5.1.8) и (5.1.9) по отношению к управляемому выходу системы:

$$J_{P,Q} = \sup_{0<\|w\|_P<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\|w\|_P}, \tag{5.2.2}$$

$$J_{P,Q,X_0} = \sup_{0<\|w\|_P^2+x_0^T X_0 x_0<\infty} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^T X_0 x_0}}, \tag{5.2.3}$$

где $Q = Q^T > 0$, $P = P^T > 0$, $X_0 = X_0^T > 0$.

Закон управления для данной системы ищем в виде динамического регулятора порядка r с нулевым начальным вектором:

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \quad \xi(0) = 0, \tag{5.2.4}$$

где $\xi \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния регулятора, Z, V, U и K — неизвестные матрицы соответствующих размеров $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ и $m \times l$. Случаю $r = 0$ соответствует статический регулятор по выходу $u = Ky$.

Предположим, что

$$\det(I_m - KD_{22}) \neq 0. \tag{5.2.5}$$

Тогда замкнутая система (5.2.1), (5.2.4) приводится к виду

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x} + \widehat{N}w, \quad z = \widehat{F}\widehat{x} + \widehat{G}w, \quad \widehat{x}(0) = \widehat{x}_0, \tag{5.2.6}$$

где

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + B_2K_0C_2 & B_2U_0 \\ V_0C_2 & Z_0 \end{bmatrix} = \widehat{A} + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{N} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2K_0D_{21} \\ V_0D_{21} \end{bmatrix} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{F} = \left[C_1 + D_{12}K_0C_2, D_{12}U_0\right] = \widehat{C}_1 + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{G} = D_{11} + D_{12}K_0D_{21} = D_{11} + \widehat{D}_{12}\widehat{K}_0\widehat{D}_{21},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix}, \ \widehat{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{K}_0 = \begin{bmatrix} K_0 & U_0 \\ V_0 & Z_0 \end{bmatrix}, \ \widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix}, \ \widehat{D}_{21} = \begin{bmatrix} D_{21} \\ 0_{r\times s} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_1 = \left[C_1, 0_{k\times r}\right], \quad \widehat{D}_{12} = \left[D_{12}, 0_{k\times r}\right].$$

Здесь неизвестными являются блоки матрицы $\widehat{K}_0$

$$K_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}K, \quad U_0 = (I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

$$V_0 = V(I_l - D_{22}K)^{-1}, \quad Z_0 = Z + VD_{22}(I_m - KD_{22})^{-1}U,$$

которые однозначно определяют искомые матрицы динамического регулятора (5.2.4):

$$K = (I_m + K_0D_{22})^{-1}K_0, \quad U = (I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0,$$

$$V = V_0(I_l + D_{22}K_0)^{-1}, \quad Z = Z_0 - V_0D_{22}(I_m + K_0D_{22})^{-1}U_0. \tag{5.2.7}$$

Если в системе (5.2.6) матрица $\widehat{M}$ гурвицева, то $J_{P,Q} < 1$ в том и только в том случае, когда матричное неравенство

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{M} & \widehat{X}\widehat{N} & \widehat{F}^T \\ \widehat{N}^T\widehat{X} & -P & \widehat{G}^T \\ \widehat{F} & \widehat{G} & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{5.2.8}$$

разрешимо относительно $\widehat{X} = \widehat{X}^T > 0$. Существование решения данного неравенства при ограничении $X \le X_0$, где X — первый диагональный блок матрицы $\widehat{X}$, равносильно тому, что $J_{P,Q,X_0} < 1$ (см. параграф 5.1).

Учитывая блочную структуру матриц в (5.2.6), перепишем соотношение (5.2.8) как линейное матричное неравенство относительно $\widehat{K}_0$:

$$\widehat{L}^T\widehat{K}_0\widehat{R} + \widehat{R}^T\widehat{K}_0^T\widehat{L} + \widehat{\Omega} < 0, \tag{5.2.9}$$

где

$$\widehat{R} = \left[\widehat{R}_1, 0_{l+r\times k}\right], \quad \widehat{R}_1 = \left[\,\widehat{C}_2, \widehat{D}_{21}\,\right],$$

$$\widehat{L} = \left[\widehat{L}_1, 0_{m+r\times s}\right] \widetilde{X}, \quad \widehat{L}_1 = \left[\,\widehat{B}_2^T, \widehat{D}_{12}^T\,\right],$$

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} \widehat{X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Omega} = \begin{bmatrix} \widehat{A}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} & \widehat{X}\widehat{B}_1 & \widehat{C}_1^T \\ \widehat{B}_1^T\widehat{X} & -P & D_{11}^T \\ \widehat{C}_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Если данное неравенство разрешимо, то всегда можно выбрать такое его решение $\widehat{K}_0$, чтобы выполнялось условие (5.2.5).

Так как

$$W_{\widehat{R}} = \begin{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad W_{\widehat{L}} = \widetilde{X}^{-1} \begin{bmatrix} W_{\widehat{L}_1} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix},$$

то существование решения $\widehat{K}_0$ матричного неравенства (5.2.9) равносильно соотношениям (см. лемму 8.3.1)

$$W_{\widehat{R}_1}^T \begin{bmatrix} \widehat{A}^T\widehat{X} + \widehat{X}\widehat{A} + \widehat{C}_1^T Q\widehat{C}_1 & \widehat{X}\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1^T QD_{11} \\ \widehat{B}_1^T\widehat{X} + D_{11}^T Q\widehat{C}_1 & D_{11}^T QD_{11} - P \end{bmatrix} W_{\widehat{R}_1} < 0,$$

$$W_{\widehat{L}_1}^T \begin{bmatrix} \widehat{A}\widehat{Y} + \widehat{Y}\widehat{A}^T + \widehat{B}_1 P^{-1}\widehat{B}_1^T & \widehat{Y}\widehat{C}_1^T + \widehat{B}_1 P^{-1} D_{11}^T \\ \widehat{C}_1\widehat{Y} + D_{11}P^{-1}\widehat{B}_1^T & D_{11}P^{-1}D_{11}^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_{\widehat{L}_1} < 0,$$

где $\widehat{Y} = \widehat{X}^{-1}$. Далее, используя блочные выражения

$$W_{\widehat{R}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_R \\ 0_{r\,\times\, n+s-\mathrm{rank}R} \end{bmatrix}, \quad R = [C_2, D_{21}],$$

$$W_{\widehat{L}_1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_L \\ 0_{r\,\times\, n+k-\mathrm{rank}L} \end{bmatrix}, \quad L = [B_2^T, D_{12}^T],$$

полученные соотношения приводятся к виду

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TX + XA + C_1^TQC_1 & XB_1 + C_1^TQD_{11} \\ B_1^TX + D_{11}^TQC_1 & D_{11}^TQD_{11} - P \end{bmatrix} W_R < 0,$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_1P^{-1}B_1^T & YC_1^T + B_1P^{-1}D_{11}^T \\ C_1Y + D_{11}P^{-1}B_1^T & D_{11}P^{-1}D_{11}^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0. \tag{5.2.10}$$

Здесь X и Y — первые диагональные блоки взаимно обратных матриц (5.1.24). При этом для заданных матриц $X > 0$ и $Y > 0$ условия (5.1.26) равносильны существованию взаимообратных блочных матриц $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ вида (5.1.24).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5.2.1 *Существует динамический регулятор* (5.2.4)*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ $(J_{P,Q,X_0} < 1)$*, в том и только в том случае, когда система соотношений* (5.1.26) *и* (5.2.10) $\big($(5.1.12)*,* (5.1.26) *и* (5.2.10)$\big)$ *разрешима относительно матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$.

Отметим, что каждое из неравенств $J_{P,Q} < 1$ и $J_{P,Q,X_0} < 1$ обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы (5.2.1), (5.2.4) с неопределенностью

$$w = \Theta z, \quad \Theta^T P \Theta \le Q. \tag{5.2.11}$$

При этом матрица общей квадратичной функции Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ определяется как решение ЛМН (5.2.8).

Приведем алгоритм построения динамического регулятора (5.2.4), обеспечивающего оценку $J_{P,Q} < 1$:

1) вычисление матриц W_R и W_L, где $R = \big[C_2, D_{21}\big]$ и $L = \big[B_2^T, D_{12}^T\big]$;

2) нахождение матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющих системе соотношений (5.1.26) и (5.2.10);

3) формирование блочных взаимно обратных матриц (5.1.24);

4) решение линейного матричного неравенства (5.2.9) относительно $\widehat{K}_0$ при ограничении (5.2.5);

5) вычисление матриц регулятора (5.2.4) по формулам (5.2.7).

Дополнительное ограничение (5.1.12) в п. 2) данного алгоритма обеспечивает оценку $J_{P,Q,X_0} < 1$. При определении матриц X и Y в случае динамического регулятора полного порядка требуется решить систему ЛМН. Блоки матриц (5.1.24) могут быть определены с помощью соотношений (5.1.27) и (5.1.28).

Можно сформулировать аналоги теоремы 5.2.1 и соответствующие алгоритмы робастной стабилизации системы (5.2.1), в которых учитывается неопределенность $A \in \mathrm{Co}\{A_1, \dots, A_\alpha\}$, а матрицы P и Q наряду с X и Y определяются в результате решения системы 2α матричных неравенств типа (5.2.10) для каждой вершины A_i заданного политопа.

5.3 Неэкспансивные системы управления

Рассмотрим класс регуляторов (5.1.6) для нелинейной системы

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u, \quad y = C(x)x + Du, \quad x(0) = x_0, \tag{5.3.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^l$ — векторы состояния, управления и выхода системы, а $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и D — матрицы соответствующих размеров. Предполагаем, что зависимости $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ непрерывные, причем $\operatorname{rank} B(x) \equiv m$ и $\operatorname{rank} C(x) \equiv l$ в некоторой окрестности $\mathcal{S}_0 = \{x : \|x\| \le h\}$ точки $x = 0$, а D — постоянная матрица. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x} = A_*(x)x + B_*(x)w, \quad y = C_*(x)x + D_*w, \quad x(0) = x_0, \tag{5.3.2}$$

где $A_*(x) = A(x) + B(x)\mathbf{D}(K_*)C(x)$, $B_*(x) = B(x)(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_*(x) = (I_l - DK_*)^{-1}C(x)$, $D_* = (I_l - DK_*)^{-1}D$. Нелинейный оператор $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_*D)^{-1}K_*$ определен при $K_* \in \mathcal{K}_D$.

Определение 5.3.1 Система (5.3.2) называется *неэкспансивной*, если для любой ограниченной вектор-функции w ее вектор выхода y при любом $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T y^T Q y dt \le \int_0^T w^T P w dt + x_0^T X_0 x_0, \tag{5.3.3}$$

где Q, P и X_0 — положительно определенные матрицы.

Данное определение обобщает известное понятие неэкспансивности системы, введенное в случае $P = I_m$, $Q = I_l$ и $x_0 = 0$ (см., например, [95]). Очевидно, что критерий качества (5.1.9) неэкспансивной системы удовлетворяет условию $J_{P,Q,X_0} \leq 1$.

Лемма 5.3.1 *Пусть для некоторых матриц $K_* \in \mathcal{K}_D$ и $X = X^T$ выполняется система соотношений*

$$0 < X \leq X_0, \quad \Phi(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3.4}$$

где $\Phi(x)$ — матричная функция вида

$$\begin{bmatrix} A_*^T(x)X + XA_*(x) + C_*^T(x)QC_*(x) & XB_*(x) + C_*^T(x)QD_* \\ B_*^T(x)X + D_*^TQC_*(x) & D_*^TQD_* - P \end{bmatrix}.$$

Тогда нелинейная система (5.3.2) *является неэкспансивной. При этом, если $\Phi(0) < 0$, то состояние $x \equiv 0$ данной системы с неопределенностью* (5.1.13) *робастно устойчиво с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^TXx$.*

Доказательство. Вычислим выражение

$$\dot{v}(x) + y^TQy - w^TPw = z^T\Phi(x)z,$$

где $z^T = [x^T, w^T]$, $\dot{v}(x)$ — производная квадратичной функции $v(x) = x^TXx$ в силу системы (5.3.2). Интегрируя данное выражение и учитывая соотношения (5.3.4), имеем

$$0 \geq \int_0^T z^T\Phi(x)zdt = v(x(T)) - v(x_0) + \int_0^T (y^TQy - w^TPw)dt \geq$$

$$\geq -x_0^TX_0x_0 + \int_0^T (y^TQy - w^TPw)dt.$$

Отсюда следует неравенство (5.3.3). Асимптотическая устойчивость состояния $x \equiv 0$ замкнутой системы (5.3.2) с неопределенностью (5.1.13) (т. е. робастная устойчивость) является следствием теоремы 3.3.1.

Лемма доказана.

Наряду с (5.3.1) рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = x_0, \tag{5.3.5}$$

где $A = A(0)$, $B = B(0)$ $C = C(0)$. Замкнутая система (5.3.5), (5.1.6) имеет вид (5.1.7).

Лемма 5.3.2 *Линейная система* (5.1.7) *является неэкспансивной тогда и только тогда, когда для некоторой матрицы* $X = X^T$ *выполняется система соотношений* (5.3.4) *при* $x = 0$. *При этом, если* $\Phi(0) < 0$, *то данная система с неопределенностью* (5.1.13) *робастно устойчива с общей функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

Для общего класса нелинейных систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами

$$\dot{x} = f(x, u, w, t), \;\; z = h(x, u, w, t), \;\; y = g(x, u, w, t), \;\; x(0) = x_0, \tag{5.3.6}$$

свойство неэкспансивности определяется относительно вектора управляемого выхода z. Система (5.3.6) при заданном управлении u называется *неэкспансивной*, если для любой ограниченной вектор-функции внешних возмущений w вектор управляемого выхода z при любом $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T z^T Q z dt \le \int_0^T w^T P w dt + x_0^T X_0 x_0,$$

где Q, P и X_0 — положительно определенные матрицы.

При построении регуляторов, обеспечивающих свойство неэкспансивности и робастную устойчивость класса линейных систем, можно воспользоваться алгоритмами, изложенными в предыдущих параграфах данной главы.

Глава 6

Системы управления с дискретным временем

В данной главе рассматриваются нелинейные системы управления с дискретным временем, которые в результате применения обратной связи представляются в векторно-матричной форме

$$x_{t+1} = M(x_t, t)x_t, \quad t \in \mathcal{T} = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{6.0.1}$$

где M — матрица размеров $n \times n$, непрерывно зависящая от $x_t \in \mathbb{R}^n$ и t. Предполагается, что состояние равновесия $x_t \equiv 0$ таких систем является изолированным. При изучении устойчивости данного состояния будем использовать метод квадратичных функций Ляпунова $v(x,t) = x^T X_t x$ с положительно определенной матрицей X_t. Первая разность данной функции $\Delta v(x_t, t) = v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t)$ в силу системы (6.1.1) также представляется в виде квадратичной формы:

$$\Delta v(x_t, t) = x_t^T Y(x_t, t)x_t, \quad Y(x_t, t) = M^T(x_t, t)X_{t+1}M(x_t, t) - X_t.$$

В данной главе излагаются новые методы анализа робастной устойчивости и оптимизации дискретных систем управления с обратной связью. В параграфе 6.1 приводятся условия стабилизируемости линейных дискретных систем управления. Для семейства нелинейных систем с неопределенными матрицами коэффициентов и обратной связи по измеряемому выходу формулируются достаточные условия устойчивости нулевого состояния с общей квадратичной функцией Ляпунова (параграф 6.2). Предлагается решение общей задачи робастной стабилизации и оценки квадратичного критерия качества семейства нелинейных дискретных систем (параграф 6.3). В параграфе 6.4 приводится также ряд утверждений, обобщающих известные результаты теории H_∞-управления для дискретных систем. Применение основных результатов данной главы так же, как и предыдущих глав 2 – 5, сводится к решению систем ЛМН.

6.1 Условия стабилизируемости линейных дискретных систем управления

Рассмотрим линейную систему управления

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t + Du_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.1.1}$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ и $y_t \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и наблюдаемого выхода объекта, A, B, C и D — постоянные матрицы подходящих размеров. Предполагаем, что матрицы B и C имеют полный ранг соответственно по столбцам и по строкам. Управление u в системе (6.1.1) определяем в виде *динамической обратной связи* по выходу

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.1.2}$$

где $\xi_t \in \mathbb{R}^r$ — вектор состояния динамического регулятора, Z, V, U и K — неизвестные матрицы соответствующих размеров $r \times r$, $r \times l$, $m \times r$ и $m \times l$. Число r называется *порядком* динамической обратной связи. В частном случае $r = 0$ имеем статический регулятор

$$u_t = Ky_t, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.1.3}$$

Главными задачами для системы управления (3.2.1) являются построение статического или динамического регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Если такие регуляторы существуют, то данная система управления называется стабилизируемой.

Так же, как и в случае непрерывных систем, соотношения (6.1.1) и (6.1.2) при $r \neq 0$ можно записать в компактном виде:

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{A}\widehat{x}_t + \widehat{B}\widehat{u}_t, \quad \widehat{y}_t = \widehat{C}\widehat{x}_t + \widehat{D}\widehat{u}_t, \quad \widehat{u}_t = \widehat{K}\widehat{y}_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.1.4}$$

где

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{y}_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \quad \widehat{u}_t = \begin{bmatrix} u_t \\ \xi_{t+1} \end{bmatrix}, \quad \widehat{K} = \begin{bmatrix} K & U \\ V & Z \end{bmatrix},$$

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times n} & 0_{r\times r} \end{bmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{bmatrix} B & 0_{n\times r} \\ 0_{r\times m} & I_r \end{bmatrix},$$

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times n} & I_r \end{bmatrix}, \quad \widehat{D} = \begin{bmatrix} D & 0_{l\times r} \\ 0_{r\times m} & 0_{r\times r} \end{bmatrix},$$

Поэтому задачи стабилизации системы (6.1.1) с динамической обратной связью (6.1.2) сводятся к аналогичным задачам стабилизации для системы (6.1.4) со статической обратной связью. Следует отметить, что динамические регуляторы в задачах управления обладают гораздо большими возможностями, чем статические, особенно при условиях неполной информации о состоянии управляемого объекта.

Рассмотрим систему (6.1.1) со статическим регулятором (6.1.3). Для каждой матрицы обратной связи $K \in \mathcal{K}_D$ замкнутая система имеет вид

$$x_{t+1} = Mx_t, \quad M = A + B\mathbf{D}(K)C, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.1.5}$$

где $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$, $\mathcal{K}_D = \{K : \det(I_m - KD) \neq 0\}$. Согласно свойству (3.1.42) оператора $\mathbf{D}(K)$ для достижения желаемых свойств и, в частности, устойчивости системы (6.1.5) достаточно обеспечить эти свойства данной системы в случае нулевой матрицы D. В результате матрицу обратной связи можно определить в виде (см. обоснование теоремы 3.1.3)

$$K = -\mathbf{D}(-K_0) \in \mathcal{K}_D. \tag{6.1.6}$$

Теорема 6.1.1 *Пусть* $\operatorname{rank} B = m < n$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *система* (6.1.1) *стабилизируема с помощью статического регулятора* (6.1.3)*;*

2) *существует матрица* $X = X^T > 0$, *удовлетворяющая соотношениям*

$$B^{\perp T}(AXA^T - X)B^{\perp} < 0, \qquad (6.1.7)$$

$$\mathrm{i}(H) = \{l, m, 0\}, \quad H = \begin{bmatrix} H_0 & H_1^T \\ H_1 & H_2 \end{bmatrix}, \qquad (6.1.8)$$

где $H_0 = B^+(L - LRL)B^{+T}$, $H_1 = CXA^T(I_n - RL)B^{+T}$, $H_2 = C(X - XA^T RAX)C^T$, $L = AXA^T - X$, $R = B^{\perp}S^{-1}B^{\perp T}$, $S = B^{\perp T}LB^{\perp}$*;*

3) *существует матрица* $X = X^T > 0$, *удовлетворяющая системе матричных неравенств* (6.1.7) *и*

$$AXA^T - X < AXC^T(CXC^T)^{-1}CXA^T. \qquad (6.1.9)$$

При выполнении утверждений 2) *или* 3) *стабилизирующая матрица* K *может быть определена в виде* (6.1.6)*, где* K_0 *— решение одного из эквивалентных матричных неравенств*

$$H_0 + KH_1 + H_1^T K^T + KH_2K^T < 0, \qquad (6.1.10)$$

$$(A + BKC)X(A + BKC)^T < X. \qquad (6.1.11)$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если система (6.1.1) стабилизируема с помощью регулятора (6.1.3), то для некоторой матрицы K выполняется спектральное неравенство $\rho(A + BKC) < 1$, которое согласно дискретному аналогу теоремы Ляпунова равносильно разрешимости матричного неравенства (6.1.11) или, что то же, системы неравенств (6.1.7) и (6.1.10) относительно $X = X^* > 0$. При этом количества положительных и отрицательных собственных чисел блочной матрицы H, определенной в (6.1.8), должны совпадать соответственно с l и m (см. доказательство леммы 3.1.1).

2) $\Rightarrow$ 1). Если для некоторой матрицы $X = X^* > 0$ выполняются соотношения (6.1.7) и (6.1.8), то матричные неравенства (6.1.10) и (6.1.11) эквивалентны и разрешимы относительно матрицы обратной связи K. Этот факт устанавливается так же, как и в доказательстве аналогичного утверждения для матричных неравенств (3.1.25) и (3.1.26). Выберем решение K_0 матричного неравенства (6.1.11) так, чтобы $\det(I_m + K_0 D) \neq 0$. Тогда регулятор (6.1.3) с матрицей обратной связи (6.1.6) обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (6.1.5).

2) $\Leftrightarrow$ 3). Блочная матрица в (6.1.8) представляется в виде $H = \widehat{H}_0 - \widehat{H}_1^T \widehat{H}_2^{-1} \widehat{H}_1$, где

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} \widehat{H}_0 & \widehat{H}_1^T \\ \widehat{H}_1 & \widehat{H}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} B^+LB^{+T} & B^+AXC^T & B^+LB^\perp \\ CXA^TB^{+T} & CXC^T & CXA^TB^\perp \\ \hline B^{\perp T}LB^{+T} & B^{\perp T}AXC^T & S \end{array}\right] =$$

$$= V \begin{bmatrix} -X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} V^T = W \Delta W^T, \ \Delta = \begin{bmatrix} AXA^T - X & AXC^T \\ CXA^T & CXC^T \end{bmatrix},$$

$$V^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^\perp \\ A^TB^{+T} & C^T & A^TB^\perp \end{bmatrix}, \quad W^T = \begin{bmatrix} B^{+T} & 0 & B^\perp \\ 0 & I_l & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя формулу (1.1.12) для вычисления индексов инерции блочной матрицы $\widehat{H}$ и учитывая, что $V \in \mathbb{R}^{n+l \times 2n}$ — матрица полного ранга $n + l$, имеем

$$\mathrm{i}_+(\widehat{H}) = \mathrm{i}_+(H) \leq n, \quad \mathrm{i}_-(\widehat{H}) = \mathrm{i}_-(H) + n - m \leq n.$$

В то же время $W \in \mathbb{R}^{n+l \times n+l}$ — квадратная невырожденная матрица. Поэтому $\mathrm{i}(\widehat{H}) = \mathrm{i}(\Delta)$ и равенство (6.1.8) эквивалентно матричному неравенству (6.1.9).

Лемма доказана.

Замечание 6.1.1 Так как для матричного неравенства (6.1.11) справедлива теорема инерции, то можно утверждать, что выполнение соотношений (6.1.7) и (6.1.8) для некоторой матрицы $X = X^T$ с инерцией $\mathrm{i}(X) = \{p, q, 0\}$ гарантирует существование регулятора (6.1.3), для которого ровно p и q собственных чисел замкнутой системы (6.1.5) расположены соответственно внутри и вне единичного круга (см. следствие 1.2.1). При этом матрица регулятора может быть определена в виде (6.1.6) путем решения одного из эквивалентных матричных неравенств (6.1.10) или (6.1.11).

В случае $C = I_n$ неравенство (6.1.9) сводится к условию $X = X^T > 0$ и мы имеем критерий стабилизируемости системы (6.1.1) в терминах линейных матричных неравенств.

Следствие 6.1.1 Пусть $\operatorname{rank} B = m < n$, $C = I_n$ и $D = 0$. Тогда система (6.1.1) стабилизируема с помощью обратной связи по состоянию (6.1.3) в том и только в том случае, когда матричное неравенство (6.1.7) имеет решение $X = X^T > 0$. При этом стабилизирующая матрица K может быть найдена путем решения одного из эквивалентных матричных неравенств (6.1.10) или (6.1.11).

Перепишем соотношение (6.1.11) с учетом леммы Шура в виде ЛМН относительно K:

$$P^T K Q + Q^T K^T P < R, \tag{6.1.12}$$

где

$$P = \left[\, -B^T,\, 0_{m\times n}\right], \quad Q = \left[0_{l\times n},\, CX\right], \quad R = \begin{bmatrix} X & AX \\ XA^T & X \end{bmatrix}.$$

Согласно лемме 8.3.1 (случай (d)) критерием разрешимости данного неравенства относительно K являются соотношения

$$W_P^T R W_P > 0, \quad W_Q^T R W_Q > 0, \tag{6.1.13}$$

где столбцы матриц W_P и W_Q составляют базисы соответствующих ядер $\ker \mathrm{P}$ и $\ker \mathrm{Q}$. В данном случае можно положить

$$W_P = \begin{bmatrix} B^\perp & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n-m} & I_n \end{bmatrix}, \quad W_Q = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n-l} \\ 0_{n\times n} & X^{-1}C^{\perp T} \end{bmatrix}.$$

При этом соотношения (6.1.13) приводятся к виду

$$B^{\perp T}(AXA^T - X)B^\perp < 0, \quad C^\perp(A^T X^{-1} A - X^{-1})C^{\perp T} < 0. \tag{6.1.14}$$

Теорема 6.1.2 *Пусть* $\operatorname{rank} B = m < n$, $\operatorname{rank} C = l < n$. *Тогда система* (6.1.1) *стабилизируема с помощью регулятора* (6.1.3) *в том и только в том случае, когда разрешима относительно* $X = X^T > 0$ *система матричных неравенств* (6.1.14). *При этом стабилизирующая матрица* K *может быть определена в виде* (6.1.6), *где* K_0 — *решение линейного матричного неравенства* (6.1.12).

6.2 Робастная стабилизация нелинейных дискретных систем управления

Рассмотрим нелинейную систему управления с дискретным временем

$$x_{t+1} = A(x_t,t)x_t + B(x_t,t)u_t, \;\; y_t = C(x_t,t)x_t + D(x_t,t)u_t, \tag{6.2.1}$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^m$ и $y_t \in \mathbb{R}^l$ — векторы соответственно состояния, управления и наблюдаемого выхода объекта, A, B, C и D — матрицы подходящих размеров, непрерывно зависящие от x_t и t, $t \in \mathcal{T}$.

Нелинейную динамическую обратную связь порядка r для системы (6.2.1) можно определить в виде

$$\xi_{t+1} = Z(x_t,t)\xi_t + V(x_t,t)y_t, \quad u_t = U(x_t,t)\xi_t + K(x_t,t)y_t, \tag{6.2.2}$$

где $\xi_t \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathcal{T}$. Система управления (6.2.1) с динамической обратной связью (6.2.2) порядка $r \neq 0$ так же, как и в случае линейных систем, может быть сведена к аналогичной системе управления с нелинейной статической обратной связью.

Уравнения статического регулятора определяем в виде

$$u_t = K(x_t, t)\, y_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.2.3}$$

где K — неизвестная матричная функция такая, что

$$\det[I_m - K(x,t)D(x,t)] \neq 0, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \tag{6.2.4}$$

$$K(x_t,t) = K_*(x_t,t) + \widetilde{K}(x_t,t), \quad \widetilde{K} \in \mathcal{K}, \tag{6.2.5}$$

$\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^{m\times l}$ — эллипсоидальное множество матриц вида (3.3.3), которое определяют положительно определенные матрицы P и Q соответствующих размеров $m \times m$ и $l \times l$.

При условиях (6.2.4) замкнутая система (6.2.1), (6.2.3) представляется в виде

$$x_{t+1} = M(x_t,t)x, \quad M(x_t,t) = A + B\mathbf{D}(K)C, \tag{6.2.6}$$

где $\mathbf{D}(K) = (I_m - KD)^{-1}K$. В дальнейшем нас интересует поведение решений системы (6.2.6) в окрестности $\mathcal{S}_0$ нулевого состояния $x_t = 0$ при $t \in \mathcal{T}$. При этом будем предполагать, что при $K(x_t,t) = K_*(x_t,t)$ нулевое состояние равновесия данной системы является изолированным и асимптотически устойчивым.

Согласно (6.2.1), (6.2.3), (6.2.5) и (3.3.3) должно выполняться неравенство

$$[x_t^T, u_t^T] \begin{bmatrix} C^TQC - C^TK_*^TPK_*C & C^TQD + C^TK_*^TPG \\ D^TQC + G^TPK_*C & D^TQD - G^TPG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix} \geq 0,$$

где $G = I_m - K_*D$, $t \in \mathcal{T}$. Предположим, что

$$\Delta(x,t) = D^TQD - G^TPG < 0, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \tag{6.2.7}$$

Тогда $x_t = 0$ влечет $u_t = 0$ и $x_t \equiv 0$ является состоянием равновесия замкнутой системы (6.2.6).

Лемма 6.2.1 *Пусть для некоторой матрицы $X_t = X_t^T$ выполняются соотношения*

$$\varepsilon_1 I_n \le X_t, \quad M^T(x,t)X_{t+1}M(x,t) \le X_t, \quad (x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \tag{6.2.8}$$

где $\varepsilon_1 > 0$. Тогда состояние $x_t \equiv 0$ системы (6.2.6) *устойчиво по Ляпунову. Если же*

$$\varepsilon_1 I_n \le X_t \le \varepsilon_2 I_n, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.2.9}$$

$$M^T(0,t)X_{t+1}M(0,t) \le X_t - \varepsilon_0 I_n, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.2.10}$$

где $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_2$, $\varepsilon_0 > 0$, то состояние $x_t \equiv 0$ системы (6.2.6) *равномерно асимптотически устойчиво.*

При условиях (6.2.8) ((6.2.9) и (6.2.10)) квадратичная форма $v(x) = x^T X_t x$ является для системы (6.2.6) функцией Ляпунова первого (второго) рода.

Теорема 6.2.1 *Пусть для некоторых матриц $X_t = X_t^T$ и $K_*(x_t,t)$ выполняются соотношения* (6.2.9) *и*

$$B_*^T X_{t+1} B_* + D_*^T Q D_* < P, \tag{6.2.11}$$

$$\begin{bmatrix} M_*^T X_{t+1} M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n & M_*^T X_{t+1} B_* & C_*^T \\ B_*^T X_{t+1} M_* & B_*^T X_{t+1} B_* - P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \le 0, \tag{6.2.12}$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $B_* = B(I_m - K_*D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$. Тогда любое управление (6.2.3), (6.2.5) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x_t \equiv 0$ системы* (6.2.1) *и общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x) = x^T X_t x$.*

Доказательство. При условии (6.2.7), которое следует из (6.2.9) и (6.2.11), матрица G должна быть невырожденной. Поэтому при любых $(x,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}$ определены значения оператора $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_*D)^{-1}K_*$. Если $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$, то определены также значения операторов $\mathbf{D}(K)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, где $K = K_* + \widetilde{K}$ (см. доказательство теоремы 3.3.1).

Построим функцию Ляпунова для замкнутой системы (6.2.6) в виде $v(x,t) = x^T X_t x$. Согласно лемме 6.2.1 условия (6.2.9) и (6.2.10) обеспечивают асимптотическую устойчивость состояния $x_t \equiv 0$ данной системы. Используя свойство (3.1.41) оператора $\mathbf{D}$, приведем матричное неравенство (6.2.10) к виду $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \le 0$, где

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})U + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})R\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$W = M_*^T X_{t+1} M_* - X_t + \varepsilon_0 I_n$, $V = C_*$, $U = B_*^T X_{t+1} M_*$, $R = B_*^T X_{t+1} B_*$. Применяя лемму 3.3.1 для оператора $\mathcal{F}_*(\widetilde{K})$, получаем условия (6.2.11) и (6.2.12), при которых выполняется матричное неравенство (6.2.10) для любой матрицы $\widetilde{K} \in \mathcal{K}$.

Теорема доказана.

Отметим, что в [12] на основе свойства неущербности S-процедуры получено аналогичное утверждение с постоянной матрицей X в случае $P = I_m$ и $Q = \mu I_l$, где μ — радиус устойчивости матриц обратной связи K для линейных автономных систем. Матрицы P и $Q_1 = Q^{-1}$ входят в соотношение (6.2.12) линейно, причем, (6.2.11) является следствием строгого неравенства (6.2.12). Поэтому эти матрицы наряду с X можно считать неизвестными и определять с помощью эффективной процедуры системы MATLAB. Это расширяет возможности методики квадратичной стабилизации [12] как для линейных, так и для нелинейных дискретных систем.

Сформулируем следствия теоремы 6.2.1 при наличии функциональных неопределенностей

$$\begin{aligned} &A(0,t) \in \mathrm{Co}\{A_1, \ldots, A_\alpha\}, \quad t \in \mathcal{T}, \\ &B(0,t) \in \mathrm{Co}\{B_1, \ldots, B_\beta\}, \quad t \in \mathcal{T}, \\ &C(0,t) \in \mathrm{Co}\{C_1, \ldots, C_\gamma\}, \quad t \in \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

где заданные наборы постоянных матриц A_i, B_j и C_k являются вершинами некоторых политопов в соответствующих пространствах $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$ и $\mathbb{R}^{l\times n}$. Согласно лемме 1.5.5, для любой матрицы K матричное неравенство (6.2.10) вытекает из системы неравенств

$$M_{ijk}^T X_{t+1} M_{ijk} - X_t + \varepsilon_0 I_n \le 0, \quad i = \overline{1,\alpha},\ j = \overline{1,\beta},\ k = \overline{1,\gamma},$$

где $M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K) C_j$, $t \in \mathcal{T}$. Поэтому для выполнения условий (6.2.11) и (6.2.12) теоремы 6.2.1 достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{bmatrix} M_{*ijk}^T X_{t+1} M_{*ijk} - X_t + \varepsilon_0 I_n & M_{*ijk}^T X_{t+1} B_{*j} & C_{*k}^T \\ B_{*j}^T X_{t+1} M_{*ijk} & B_{*j}^T X_{t+1} B_{*j} - P & D_*^T \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.2.14}$$

где $M_{*ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_j$, $B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}$, $C_{*k} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k$, $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $x_t = 0$.

Следствие 6.2.1 *Пусть для некоторых матриц* $X_t = X_t^T$ *и* $K_*(x_t, t)$ *выполняется система матричных неравенств* (6.2.9) *и* (6.2.14)*. Тогда любое управление* (6.2.3), (6.2.5) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x_t \equiv 0$ *семейства систем* (6.2.1), (6.2.13) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X_t x$.

Приведем следствие теоремы 6.2.1 при условиях (6.2.13) и

$$K_* \equiv 0, \quad D(0,t) \in \mathrm{Co}\{D_1, \dots, D_\delta\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.2.15}$$

Следствие 6.2.2 *Пусть совместна система матричных неравенств с постоянными матрицами*

$$\begin{bmatrix} A_i^T X A_i - X & A_i^T X B_j & C_k^T \\ B_j^T X A_i & B_j^T X B_j - P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad X > 0, \tag{6.2.16}$$

где $i = \overline{1,\alpha}$, $j = \overline{1,\beta}$, $k = \overline{1,\gamma}$, $s = \overline{1,\delta}$. *Тогда любое управление* (6.2.3), (6.2.5) *при* $K_* \equiv 0$ *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x_t \equiv 0$ *семейства систем* (6.2.1), (6.2.13), (6.2.15) *с общей квадратичной функцией Ляпунова* $v(x) = x^T X x$.

6.3 Оценка квадратичного критерия качества при условиях неопределенности

Рассмотрим систему управления (6.2.1) и квадратичный функционал качества

$$J_u(x_0) = \sum_0^\infty \varphi_t, \quad \varphi_t = \left[x_t^T \ u_t^T\right] \Phi_t \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \end{bmatrix}, \quad \Phi_t = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & R \end{bmatrix}, \tag{6.3.1}$$

где $x_0 = x(0) \in \mathcal{S}_0$ — вектор начального состояния, а блоки симметричной матрицы Φ при некотором $\eta > 0$ удовлетворяют условиям

$$S \geq NR^{-1}N^T + \eta I_n, \quad R > 0, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.3.2}$$

Требуется описать множество управлений (6.2.3), (6.2.5), обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы и оценку функционала

$$J_u(x_0) \leq \omega, \tag{6.3.3}$$

где ω — некоторое максимально допустимое значение.

Данную задачу по-прежнему решаем с помощью квадратичной функции Ляпунова $v(x,t) = x^T X_t x$ с матрицей $X_t = X_t^T$, удовлетворяющей условиям (6.2.9). При условиях (6.2.5) и (6.2.7) определены значения операторов $\mathbf{D}(K)$, $\mathbf{D}(K_*)$ и $\mathbf{D}_*(\widetilde{K}) = (I_m - \widetilde{K}D_*)^{-1}\widetilde{K}$, где $D_* = D(I_m - K_*D)^{-1}$ (см. доказательство теоремы 3.3.1). При этом замкнутая система представляется в виде (6.2.6), а первая разность функции v в силу данной системы и суммируемое выражение в (6.3.1) имеют вид

$$v(x_{t+1}, t+1) - v(x_t, t) = x_t^T \left[M^T X_{t+1} M - X_t\right] x_t, \ \varphi_t = x_t^T L^T \Phi L\, x_t,$$

где $L^T(x_t,t) = \left[I_n, C^T\mathbf{D}^T(K)\right]$, $K = K_* + \widetilde{K}$. Потребуем, чтобы наряду с (6.2.7) и (6.2.9) выполнялись неравенства

$$v(x_{t+1},t+1) - v(x_t,t) \le -\varphi_t \le -\eta\,\|x_t\|^2, \quad (x_t,t) \in \mathcal{S}_0 \times \mathcal{T}, \quad (6.3.4)$$

где $\mathcal{S}_0$ — окрестность точки $x=0$, содержащая x_0. Для этого достаточно, чтобы выполнялись соотношения (6.3.2) и

$$M_0^T X_{t+1} M_0 - X_t + L_0^T \Phi L_0 + \varepsilon_0 I_n \le 0, \quad t \in \mathcal{T}, \qquad (6.3.5)$$

где $M_0 = M(0,t)$, $L_0 = L(0,t)$, $\varepsilon_0 > 0$.

При условиях (6.2.9) и (6.3.4) состояние $x_t \equiv 0$ замкнутой системы (6.2.6) асимптотически устойчиво и выполняется оценка функционала

$$J_u(x_0) \le \sum_{i=0}^{\infty} \left[v(x_t,t) - v(x_{t+1},t+1)\right] = x_0^T X_0 x_0 = \omega. \qquad (6.3.6)$$

Матрица M_0 в (6.3.5) содержит выражение оператора $\mathbf{D}_0(K) = (I_m - KD_0)^{-1}K$, где $D_0 = D(0,t)$. Используя свойство (3.1.41) данного оператора, перепишем матричное неравенство (6.3.5) в виде $\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) \le 0$, где

$$\mathbf{F}_*(\widetilde{K}) = W + U^T\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})U + V^T\mathbf{D}_*^T(\widetilde{K})\widehat{R}\mathbf{D}_*(\widetilde{K})V,$$

$W = M_*^T X_{t+1} M_* - X_t + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n$, $M_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $U = B_*^T X_{t+1} M_* + N_*^T + R_* K_* C$, $V = C_* = (I_l - DK_*)^{-1}C$, $\widehat{R} = R_* + B_*^T X_{t+1} B_*$, $\Phi_* = L_*^T \Phi L_*$, $L_*^T = \left[I_n, C^T\mathbf{D}^T(K_*)\right]$, $B_* = BG^{-1}$, $D_* = DG^{-1}$, $N_* = NG^{-1}$, $R_* = G^{-1T}RG^{-1}$, $G = I_m - K_*D$.

Данное выражение представляет оператор вида (3.3.5). Применяя лемму 3.3.1 для оператора $\mathbf{F}_*(\widetilde{K})$, получаем следующий результат.

Теорема 6.3.1 *Пусть для некоторых матриц* $X_t = X_t^T$ *и* $K_*(x_t,t)$ *выполняются соотношения* (6.2.9) *и*

$$B^T X_{t+1} B + D^T Q D + R < G^T P G, \qquad (6.3.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_X + \Phi_* + \varepsilon_0 I_n & \mathbf{U}_X^T + N_* + C^T K_*^T R_* & C_*^T \\ \mathbf{U}_X + N_*^T + R_* K_* C & \mathbf{R}_X + R_* - P & D_*^T \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \tag{6.3.8}$$

где $\varepsilon_0 > 0$, $\mathbf{W}_X = M_*^T X_{t+1} M_* - X_t$, $\mathbf{U}_X = B_*^T X_{t+1} M_*$, $\mathbf{R}_X = B_*^T X_{t+1} B_*$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$. *Тогда любое управление* (6.2.3), (6.2.5) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x_t \equiv 0$ *системы* (6.2.1), *общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x,t) = x^T X_t x$ *и оценку функционала качества* $J_u(x_0) \leq v(x_0, 0) = x_0^T X_0 x_0$.

Утверждение теоремы 6.3.1 выполняется для семейства систем (6.2.1), (6.2.13), если вместо (6.3.8) использовать систему матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{ijk} + \Phi_k + \varepsilon_0 I_n & \mathbf{U}_{ijk}^T + N_* + C_k^T K_*^T R_* & C_{*k}^T \\ \mathbf{U}_{ijk} + N_*^T + R_* K_* C_k & \mathbf{R}_j + R_* - P & D_*^T \\ C_{*k} & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{6.3.9}$$

где $\mathbf{W}_{ijk} = M_{ijk}^T X_{t+1} M_{ijk} - X_t$, $M_{ijk} = A_i + B_j \mathbf{D}(K_*) C_k$, $\mathbf{U}_{ijk} = B_{*j}^T X_{t+1} M_{ijk}$, $\mathbf{R}_j = B_{*j}^T X_{t+1} B_{*j}$, $B_{*j} = B_j (I_m - K_* D)^{-1}$, $\Phi_k = L_k^T \Phi L_k$, $L_k^T = \left[I_n, C_k^T \mathbf{D}^T(K_*) \right]$, $C_{*k} = (I_l - D K_*)^{-1} C_k$, $i = \overline{1, \alpha}$, $j = \overline{1, \beta}$, $k = \overline{1, \gamma}$, $\varepsilon_0 > 0$, $x_t = 0$, $t \in \mathcal{T}$.

Следствие 6.3.1 *Пусть для некоторых матриц* $X_t = X_t^T$ *и* $K_*(x_t, t)$ *выполняются соотношения* (6.2.9) *и* (6.3.9). *Тогда любое управление* (6.2.3), (6.2.5) *обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния* $x_t \equiv 0$ *семейства систем* (6.2.1), (6.2.13), *общую квадратичную функцию Ляпунова* $v(x,t) = x^T X_t x$ *и оценку функционала качества* $J_u(x_0) \leq v(x_0, 0) = x_0^T X_0 x_0$.

Приведем следствие теоремы 6.3.1 для семейства систем (6.2.1), (6.2.13), (6.2.15) с использованием системы матричных неравенств с постоянными матрицами

$$\begin{bmatrix} A_i^T X A_i - X + S & A_i^T X B_j + N & C_k^T \\ B_j^T X A_i + N^T & R + B_j^T X B_j - P & D_s^T \\ C_k & D_s & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (6.3.10)$$

где $i = \overline{1, \alpha}$, $j = \overline{1, \beta}$, $k = \overline{1, \gamma}$, $s = \overline{1, \delta}$.

Следствие 6.3.2 *Пусть для некоторой матрицы $X = X^T > 0$ выполняется система ЛМН* (6.3.10) *с постоянными матрицами. Тогда любое управление* (6.2.3), (6.2.5) *при $K_* \equiv 0$ обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x_t \equiv 0$ семейства систем* (6.2.1), (6.2.13), (6.2.15) *общую квадратичную функцию Ляпунова $v(x,t) = x^T X x$ и оценку функционала качества $J_u(x_0) \leq v(x_0) = x_0^T X x_0$.*

6.4 Обобщенное H_∞-управление для дискретных систем

Задачи синтеза обобщенного H_∞-управления по выходу и методы их решения для непрерывных систем, изложенные в предыдущей главе, аналогично формулируются для систем управления с дискретным временем.

Сначала рассмотрим класс линейных систем (6.1.1) с управлением

$$u_t = K_* y_t + w_t, \quad K_* \in \mathcal{K}_D, \quad (6.4.1)$$

где $w_t \in \mathbb{R}^m$ — вектор неопределенности (внешних возмущений). Замкнутая система представляется в виде

$$x_{t+1} = A_* x_t + B_* w_t, \quad y_t = C_* x_t + D_* w_t, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (6.4.2)$$

где $A_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$, $\mathbf{D}(K_*) = (I_m - K_* D)^{-1} K_*$, $B_* = B(I_m - K_* D)^{-1}$, $C_* = (I_l - DK_*)^{-1} C$, $D_* = D(I_m - K_* D)^{-1}$.

Определим критерии качества $J_{P,Q}$ и J_{P,Q,X_0} данной системы вида (5.1.8) и (5.1.9) соответственно, где

$$\|y\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} y_t^T Q y_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T P w_t.$$

Лемма 6.4.1 *Пусть для некоторой матрицы* $K_* \in \mathcal{K}_D$ $\rho(A_*) < 1$, *где* $A_* = A + B\mathbf{D}(K_*)C$. *Тогда* $J_{P,Q} < 1$ *в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы* $X = X^T > 0$ *выполняется матричное неравенство*

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} A_*^T X A_* - X + C_*^T Q C_* & A_*^T X B_* + C_*^T Q D_* \\ B_*^T X A_* + D_*^T Q C_* & B_*^T X B_* + D_*^T Q D_* - P \end{bmatrix} < 0. \tag{6.4.3}$$

Для выполнения оценки $J_{P,Q,X_0} < 1$ *необходимо и достаточно, чтобы матричное неравенство* (6.4.3) *имело решение* X *такое, что*

$$0 < X \leq X_0. \tag{6.4.4}$$

Если $J_{P,Q,X_0} < 1$, *в частности,* $J_{P,Q} < 1$, *то система* (6.4.2) *с неопределенностью*

$$w_t = \Theta y_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.4.5}$$

робастно устойчива с общей функцией Ляпунова $v(x) = x^T X x$, *где* $X = X^T > 0$ *— решение матричного неравенства* (6.4.3).

Если в утверждениях леммы 6.4.1 вместо (6.4.3) использовать нестрогое матричное неравенство $\Phi_1 \leq 0$, то получим аналогичные критерии выполнения оценок $J_{P,Q} \leq 1$ и $J_{P,Q,X_0} \leq 1$.

Сформулируем аналоги теорем 5.1.1 и 5.1.2 для системы (6.4.2). Их доказательство сводится к использованию аналогичных утверждений в случае единичных матриц P и Q [15] (см. параграф 5.1).

Используя выражения $A_* = A + BK_0C$, $B_* = B + BK_0D$, $C_* = C + DK_0C$, $D_* = D + DK_0D$ и лемму Шура, перепишем соотношение (6.4.3) в виде ЛМН относительно $K_0 = \mathbf{D}(K_*)$:

$$L_0^T K_0 R_0 + R_0^T K_0^T L_0 + \Omega < 0, \tag{6.4.6}$$

где

$$\Omega = \begin{bmatrix} -X^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -X & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -P & D^T \\ 0 & C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix}, R_0^T = \begin{bmatrix} 0 \\ C^T \\ D^T \\ 0 \end{bmatrix}, L_0^T = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \\ D \end{bmatrix}.$$

Вычисляя матрицы W_{R_0} и W_{L_0} и применяя леммы 8.2.1 и 8.3.1, получаем условия разрешимости данного неравенства вида

$$W_R^T \begin{bmatrix} A^TXA - X + C^TQC & A^TXB + C^TQD \\ B^TXA + D^TQC & B^TXB + D^TQD - P \end{bmatrix} W_R < 0,$$

$$W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + BP^{-1}B^T & AYC^T + BP^{-1}D^T \\ CYA^T + DP^{-1}B^T & CYC^T + DP^{-1}D^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0, \tag{6.4.7}$$

где $R = \big[C, D\big]$, $L = \big[B^T, D^T\big]$ и $Y = X^{-1}$.

Теорема 6.4.1 *Существует регулятор* (6.4.1)*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ ($J_{P,Q,X_0} < 1$)*, в том и только в том случае, когда система ЛМН* (6.4.7) $\big($(6.4.4) *и* (6.4.7)$\big)$ *разрешима относительно взаимно обратных матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$. *При этом замкнутая система* (6.1.1), (6.4.1) *с неопределенностью* (6.4.5) *робастно устойчива с общей функцией Ляпунова* $v(x) = x^TXx$.

Рассмотрим для системы (6.1.1) критерии качества $J_{P,Q}$ и $J_{P,Q,\widehat{X}_0}$ типа (5.1.8) и (5.1.9) соответственно и класс динамических регуляторов

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t + w_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.4.8}$$

где $w \in \mathbb{R}^m$ — вектор входных сигналов. Если начальный вектор регулятора (6.4.8) нулевой, то $J_{P,Q,\widehat{X}_0} = J_{P,Q,X_0}$. При условии $K \in \mathcal{K}_D$ объединенная система (6.1.1), (6.4.8) приводится к виду

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N}w_t, \quad y_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G}w_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.4.9}$$

где

$$\widehat{x}_t = \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix}, \ \widehat{M} = \begin{bmatrix} A + BK_0C & BU_0 \\ V_0C & Z_0 \end{bmatrix}, \ \widehat{N} = \begin{bmatrix} B + BK_0D \\ V_0D \end{bmatrix},$$

$\widehat{F} = \left[C + DK_0C, DU_0 \right], \quad K_0 = \mathbf{D}(K), \quad U_0 = (I_m - KD)^{-1}U,$
$\widehat{G} = D + DK_0D, \ V_0 = V(I_l - DK)^{-1}, \ Z_0 = Z + VD(I_m - KD)^{-1}U.$

Если $\rho(\widehat{M}) < 1$, то согласно лемме 6.4.1 $J_{P,Q} < 1$ в том и только в том случае, когда для некоторой матрицы $\widehat{X} = \widehat{X}^T > 0$ выполняется соотношение

$$\begin{bmatrix} \widehat{M}^T \widehat{X} \widehat{M} - \widehat{X} + \widehat{F}^T Q \widehat{F} & \widehat{M}^T \widehat{X} \widehat{N} + \widehat{F}^T Q \widehat{G} \\ \widehat{N}^T \widehat{X} \widehat{M} + \widehat{G}^T Q \widehat{F} & \widehat{N}^T \widehat{X} \widehat{N} + \widehat{G}^T Q \widehat{G} - P \end{bmatrix} < 0. \quad (6.4.10)$$

Неравенство $J_{P,Q,\widehat{X}_0} < 1$ равносильно совместности системы соотношений (5.1.21) и (6.4.10). Согласно теореме 6.4.1 условия совместности соотношения (6.4.10), представленного в виде ЛМН относительно $\widehat{K}_0$, выражаются в терминах диагональных блоков X и Y матриц (5.1.24). Существование взаимно обратных блочных матриц $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$ вида (5.1.24) для заданных матриц X и Y равносильно соотношениям

$$W = \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \operatorname{rank} W \leq n + r. \quad (6.4.11)$$

Теорема 6.4.2 *Существует динамический регулятор* (6.4.8) *с начальным вектором* $\xi_0 = 0$*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ ($J_{P,Q,X_0} < 1$)*, в том и только в том случае, когда система соотношений* (6.4.7) *и* (6.4.11) ((6.4.4), (6.4.7) *и* (6.4.11)) *разрешима относительно матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$.

Отметим, что каждое из неравенств $J_{P,Q} < 1$ и $J_{P,Q,X_0} < 1$ обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы (6.4.9) с неопределенностью (6.4.5). При этом матрицы искомого регулятора определяются в виде (5.1.23) в результате решения некоторого ЛМН вида (5.2.9).

Рассматривая класс дискретных систем с управляемыми и измеряемыми выходами

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= Ax_t + B_1 w_t + B_2 u_t,\\
z_t &= C_1 x_t + D_{11} w_t + D_{12} u_t,\\
y_t &= C_2 x_t + D_{21} w_t + D_{22} u_t, \quad t \in \mathcal{T},
\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

используем критерии качества $J_{P,Q}$ и J_{P,Q,X_0} вида (5.2.2) и (5.2.3) соответственно, где

$$\|z\|_Q^2 = \sum_{t=0}^{\infty} z_t^T Q z_t, \quad \|w\|_P^2 = \sum_{t=0}^{\infty} w_t^T P w_t.$$

Закон управления для данной системы ищем в виде динамического регулятора порядка r:

$$\xi_{t+1} = Z\xi_t + Vy_t, \quad u_t = U\xi_t + Ky_t, \quad \xi_0 = 0, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6.4.13}$$

где $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$. Случаю $r = 0$ соответствует статический регулятор по выходу $u_t = Ky_t$.

Замкнутая система (6.4.12), (6.4.13) представляется в виде

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{M}\widehat{x}_t + \widehat{N}w_t, \quad z_t = \widehat{F}\widehat{x}_t + \widehat{G}w_t, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{6.4.14}$$

где $\widehat{x}_t^T = \left[x_t^T, \xi_t^T\right]$, а матричные коэффициенты $\widehat{M}$, $\widehat{N}$, $\widehat{F}$ и $\widehat{G}$ совпадают с блочными выражениями, определеными в (5.2.6). Изучая условия разрешимости относительно $\widehat{K}_0$ матричного неравенства (6.4.10), преобразованного к виду (5.2.9) (см. вывод теоремы 6.4.2), приходим к соотношениям (6.4.11) и

$$\begin{aligned}
&W_R^T \begin{bmatrix} A^T XA - X + C_1^T QC_1 & A^T XB_1 + C_1^T QD_{11} \\ B_1^T XA + D_{11}^T QC_1 & B_1^T XB_1 + D_{11}^T QD_{11} - P \end{bmatrix} W_R < 0,\\
&W_L^T \begin{bmatrix} AYA^T - Y + B_1 P^{-1} B_1^T & AYC_1^T + B_1 P^{-1} D_{11}^T \\ C_1 YA^T + D_{11} P^{-1} B_1^T & C_1 YC_1^T + D_{11} P^{-1} D_{11}^T - Q^{-1} \end{bmatrix} W_L < 0,
\end{aligned} \tag{6.4.15}$$

где $R = \left[C_2, D_{21}\right]$, $L = \left[B_2^T, D_{12}^T\right]$. В результате имеем дискретный аналог теоремы 5.2.1.

Теорема 6.4.3 *Существует динамический регулятор* (6.4.13)*, для которого* $J_{P,Q} < 1$ ($J_{P,Q,X_0} < 1$)*, в том и только в том случае, когда система соотношений* (6.4.11) *и* (6.4.15) $\big($(6.4.4)*,* (6.4.11) *и* (6.4.15)$\big)$ *разрешима относительно матриц* $X = X^T > 0$ *и* $Y = Y^T > 0$.

Отметим, что каждое из неравенств $J_{P,Q} < 1$ и $J_{P,Q,X_0} < 1$ обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы (6.4.14) с неопределенностью

$$w_t = \Theta z_t, \quad \Theta^T P \Theta \leq Q. \tag{6.4.16}$$

Матрицы искомого регулятора определяются в виде (5.2.7) в результате решения некоторого ЛМН вида (5.2.9).

На основе теорем 6.4.1, 6.4.2 и 6.4.3 для системы (6.1.1) можно построить дискретные аналоги алгоритмов синтеза статических и динамических регуляторов, обеспечивающих робастную устойчивость замкнутой системы с общей квадратичной функции Ляпунова $v(\widehat{x}) = \widehat{x}^T \widehat{X} \widehat{x}$ и соответствующие оценки критериев качества $J_{P,Q} < 1$ и $J_{P,Q,X_0} < 1$ (см. главу 5).

Определение 6.4.1 Система (6.4.12) называется *неэкспансивной*, если для любого ограниченного вектора неопределенности w_t ее вектор выхода z_t при любом $\nu > 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{t=0}^{\nu} z_t^T Q z_t \leq \sum_{t=0}^{\nu} w_t^T P w_t + x_0^T X_0 x_0, \tag{6.4.17}$$

где $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$ и $X_0 = X_0^T > 0$ — некоторые матрицы.

Очевидно, что для неэкспансивной системы критерий качества $J_{P,Q,X_0} \leq 1$. Можно сформулировать аналоги лемм 5.3.1 и 5.3.2, представляющие условия неэкспансивности некоторых классов дискретных систем управления, а также алгоритмы построения регуляторов, обеспечивающих данным системам свойство неэкспансивности.

Глава 7

Динамические системы и конусные неравенства

В теории систем и приложениях используются непрерывные и дискретные модели динамических объектов, состояния которых имеют определенные свойства по отношению к некоторому конусу фазового пространства (позитивность, монотонность, кооперативность и т. п.). Эти свойства могут быть обусловлены самой природой изучаемого объекта или структурой проектируемой системы управления (см., например, [40, 101, 112]. Классы позитивных и монотонных систем возникают в теории устойчивости в качестве систем сравнения [2, 44, 56, 79]. Некоторые модели биологических и социальных систем имеют свойства типа кооперативности или конкуренции, которые определяются с помощью конуса неотрицательных векторов [112].

Данная глава посвящена изучению и использованию свойств динамических систем, обобщающих понятия позитивности и монотонности относительно конуса. В параграфе 7.1 даются основные определения и факты теории конусов и динамических систем в пространстве с конусом. Приводится обобщенная классификация непрерывных и дискретных систем относительно конуса с целью их использования в задачах устойчивости (параграф 7.2). Формулируются критерии экспоненциальной устойчивости линейных систем в терминах положительно обратимых операторов и конусных неравенств, а также аналог теоремы Ляпунова об устойчивости состояний равновесия нелинейных дифференциальных систем по первому приближению с использованием понятия производных по конусу от нелинейного оператора; устанавливаются условия позитивности и абсолютной устойчивости в конусе некоторого класса дифференциальных систем с запаздыванием (параграф 7.3). Предлагается описание инвариантных множеств нелинейных систем в терминах конусных неравенств (параграф 7.4) и вытекающая из него обобщенная методика сравнения семейства систем (параграф 7.5). В параграфе 7.6 приводятся методы исследования робастной устойчивости состояний равновесия классов позитивных линейных и нелинейных систем. Задача построения регуляторов, обеспечивающих позитивность и устойчивость состояний равновесия систем управления, и некоторые подходы к ее решению приводятся в параграфе 7.7.

7.1 Определения и вспомогательные факты

Выпуклое замкнутое множество $\mathcal{K}$ вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется *клином*, если $\alpha\mathcal{K}+\beta\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$ $\forall\alpha,\beta\ \geq\ 0$. Клин $\mathcal{K}$ является *конусом*, если его *лезвие* $\mathcal{K}\cap-\mathcal{K}=\{0\}$. Пространство с конусом *полуупорядочено*: $X\overset{\mathcal{K}}{\leq}Y\iff Y-X\in\mathcal{K}$. *Телесный* конус $\mathcal{K}$ состоит из множества внутренних точек $\operatorname{int}\mathcal{K}=\big\{X:X\overset{\mathcal{K}}{>}0\big\}\neq\emptyset$ и границы $\partial\mathcal{K}$. Ненулевые элементы $X\in\mathcal{K}$ обозначаются как $X\overset{\mathcal{K}}{\succ}0$.

Конус $\mathcal{K}$ называется *нормальным*, если $0\overset{\mathcal{K}}{\leq}X\overset{\mathcal{K}}{\leq}Y$ влечет оценку $\|X\|\ \leq\ \nu\|Y\|$, где ν – универсальная константа. Наименьшее из таких чисел ν называется *константой нормальности конуса* $\mathcal{K}$. Свойство нормальности конуса $\mathcal{K}$ равносильно выполнению неравенства $\|X\|\leq\nu\|V\|+(\nu+1)\|U\|$ с константой нормальности ν для любого конусного интервала $U\overset{\mathcal{K}}{\leq}X\overset{\mathcal{K}}{\leq}V$.

Если $\mathcal{E}=\mathcal{K}-\mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ *воспроизводящий*. Воспроизводящий конус $\mathcal{K}$ является *несплющенным*, т. е. из $X=X_{+}-X_{-}$ и $X_{\pm}\in\mathcal{K}$ следует $\|X_{\pm}\|\ \leq\ \mu\|X\|$, где μ — универсальная константа.

Типичными примерами нормальных воспроизводящих конусов в конечномерных пространствах являются множество векторов с неотрицательными элементами, круговой конус Минковского, множество симметричных неотрицательно определенных матриц и др. (см. параграф 8.7).

Множество $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ называется *$\mathcal{K}$–выпуклым*, если для любой пары точек $X, Y \in \mathcal{D}$ из $X \overset{\mathcal{K}}{\leq} Y$ следует $(1-\gamma)X + \gamma Y \in \mathcal{D}$ при $\gamma \in (0,1)$. Любой конус $\mathcal{K}$ и любое выпуклое множество являются $\mathcal{K}$–выпуклыми.

Сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ состоит из линейных функционалов $\varphi \in \mathcal{E}^*$, принимающих неотрицательные значения на $\mathcal{K}$, причем

$$\mathcal{K} = \big\{X \in \mathcal{E} : \varphi(X) \geq 0,\ \forall \varphi \in \mathcal{K}^*\big\},$$

$$\mathcal{K}^* = \big\{\varphi \in \mathcal{E}^* : \varphi(X) \geq 0,\ \forall X \in \mathcal{K}\big\},$$

$$\operatorname{int}\mathcal{K} = \big\{X \in \mathcal{K} : \varphi(X) > 0,\ \forall \varphi \neq 0 \in \mathcal{K}^*\big\},$$

$$\partial\mathcal{K} = \big\{X \in \mathcal{K} : \exists \varphi \neq 0 \in \mathcal{K}^*,\ \varphi(X) = 0\big\}.$$

Функционал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ называется *равномерно положительным*, если найдется такое $\gamma > 0$, что $\varphi(X) \geq \gamma\|X\|$ для всех $x \in \mathcal{K}$. Равномерно положительный функционал $\varphi \in \mathcal{E}^*$ является строго положительным: $\varphi(X) > 0$ при $X \overset{\mathcal{K}}{\succ} 0$. Конус $\mathcal{K}$ допускает *оштукатуривание* $\mathcal{K}_0$, если каждая точка $X_0 \in \mathcal{K}$ входит в конус $\mathcal{K}_0$ вместе с шаровой окрестностью $\|X - X_0\| \leq \delta\|X_0\|$, где $\delta > 0$ не зависит от X_0. Оштукатуриваемость конуса $\mathcal{K}$ равносильна телесности конуса $\mathcal{K}^*$, а также существованию равномерно положительного функционала $\varphi \in \mathcal{E}^*$. Каждый оштукатуриваемый конус нормален. В конечномерном пространстве каждый конус допускает оштукатуривание. Конус $\mathcal{K}$ нормальный (воспроизводящий) в том и только в том случае, когда сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ является воспроизводящим (нормальным).

Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ выделен конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $\mathbf{M} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ называется *монотонным*, если $X \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} Y \implies \mathbf{M}X \overset{\mathcal{K}_2}{\leq} \mathbf{M}Y$. Монотонность линейного оператора M равносильна его *положительности*: $\mathbf{M}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$. Неравенство между операторами $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M}_2$ означает, что оператор $\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1$ положительный. Если оператор $\mathbf{M}$ положительный, то *сопряженный оператор* $\mathbf{M}^* : \mathcal{E}_2^* \to \mathcal{E}_1^*$ также положительный ($\mathbf{M}^*\mathcal{K}_2^* \subseteq \mathcal{K}_1^*$). Если $\mathbf{M}\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, то оператор $\mathbf{M}$ *всюду положительный*. Положительный оператор $\mathbf{M}$ *равномерно положителен*, если $\|\mathbf{M}X\| \geq \gamma\|X\|$ для некоторого $\gamma > 0$ при всех $X \in \mathcal{K}$.

Линейный оператор $\mathbf{M}$ называется *положительно обратимым*, если $\mathcal{K}_2 \subseteq \mathbf{M}\mathcal{K}_1$, т. е. для любого $Y \in \mathcal{K}_2$ уравнение $\mathbf{M}X = Y$ имеет решение $X \in \mathcal{K}_1$. Поскольку $(\mathbf{M}^{-1})^* = (\mathbf{M}^*)^{-1}$, то из положительной обратимости оператора $\mathbf{M}$ следует положительная обратимость оператора $\mathbf{M}^*$. Если $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус и $\mathbf{M}_1 \trianglelefteq \mathbf{M} \trianglelefteq \mathbf{M}_2$, то из положительной обратимости операторов $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ вытекает положительная обратимость оператора $\mathbf{M}$, причем $\mathbf{M}_2^{-1} \trianglelefteq \mathbf{M}^{-1} \trianglelefteq \mathbf{M}_1^{-1}$ [40].

Критерием положительной обратимости класса операторов

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2 \subseteq \mathbf{L}\mathcal{K}_1, \tag{7.1.1}$$

где $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус, является неравенство $\rho(\mathbf{T}) < 1$, где $\rho(\mathbf{T})$ — спектральный радиус пучка операторов $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{P} - \lambda\mathbf{L}$ [51]. Если конус $\mathcal{K}_2$ телесный, то данное неравенство эквивалентно существованию элементов $X \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$ и $Y \overset{\mathcal{K}_2}{>} 0$, связанных уравнением $\mathbf{M}X = Y$.

Оператор $\mathbf{M} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называется *внедиагонально положительным*, если $\varphi(\mathbf{M}X) \geq 0$ для любых $X \in \mathcal{K}$ и $\varphi \in \mathcal{K}^*$ таких, что $\varphi(X) = 0$. Если $\mathbf{M} \trianglerighteq \alpha\mathbf{I}$ для некоторого α, где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор, то оператор $\mathbf{M}$ внедиагонально положителен. Обратное утверждение справедливо при дополнительных ограничениях в случае $\alpha \leq -\nu\mu\|\mathbf{M}\|$, где ν и μ — константы нормальности и несплющенности $\mathcal{K}$ соответственно [114].

Приведем примеры положительных операторов.

Линейный оператор $\mathbf{M}: \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{p\times q}$ представим в виде

$$\mathbf{M}X = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij} A_{ij}, \quad A_{ij} \in \mathcal{K}_{pq},$$

где $\mathcal{K}_{pq}$ — конус неотрицательных матриц размера $p \times q$, в том и только в том случае, когда $\mathbf{M}\mathcal{K}_{nm} \subseteq \mathcal{K}_{pq}$. В частности, любой линейный оператор, сохраняющий конус неотрицательных векторов $\mathcal{K}_n$, имеет вид $\mathbf{M}x = Ax$, где $A \in \mathcal{K}_{nn}$.

Произвольный линейный оператор, сохраняющий конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц, представим в виде [51]

$$\mathbf{M}X = \sum_k A_k X A_k^* + \sum_s B_s X^T B_s^*, \quad A_k, B_s \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Линейный интегральный оператор

$$\mathbf{M}x(t) = \int_\Delta H(t,\tau)x(\tau)d\tau$$

положителен относительно конуса неотрицательных функций $X(t)$ в некотором пространстве $\mathcal{E}$, если ядро $H(t,\tau)$ неотрицательно $(t,\tau \in \Delta)$.

Линейный ограниченный оператор $\mathbf{F}'(X_0)$ называется *производной Гато* от нелинейного оператора $\mathbf{F}: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ в точке X_0, если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{F}(X_0 + \varepsilon H) - \mathbf{F}X_0\right] = \mathbf{F}'(X_0)H$$

в смысле сильной сходимости (по норме). Если данное соотношение выполняется лишь при $H \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$, то $\mathbf{F}'(X_0)$ — *производная по конусу* $\mathcal{K}_1$ оператора $\mathbf{F}$ [39]. *Производная Фреше* $\mathbf{F}'(X_0)$ по конусу $\mathcal{K}_1$ определяется соотношениями

$$\mathbf{F}(X_0 + H) - \mathbf{F}X_0 = \mathbf{F}'(X_0)H + \mathbf{R}(X_0, H), \quad \mathbf{R}(X_0, H) = o(\|H\|),$$

где $H \overset{\mathcal{K}_1}{\geq} 0$. Производная Фреше является также производной Гато. Если производная Гато непрерывна в окрестности точки X_0, то она является производной Фреше. В дальнейшем через $\mathbf{F}'_+(X_0)$ ($\mathbf{F}'_-(X_0)$) будем обозначать производные Гато и Фреше по конусу $\mathcal{K}_1$ ($-\mathcal{K}_1$) в точке X_0.

7.2 Классификация динамических систем относительно конуса

Пусть в некоторой области $\mathcal{D}$ банахового пространства $\mathcal{X}$ функционирует непрерывная или дискретная динамическая система $\mathcal{S}$, состояния которой определяются в виде

$$X_t = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t) \in \mathcal{X}, \quad \tau \in \Upsilon,\ t \in \Upsilon_\tau, \tag{7.2.1}$$

где $\mathbf{E}$ — оператор, определяющий переход из начального состояния X_τ в состояние X_t и имеющий свойства

$$\mathbf{E}(X, \tau, \tau) = X,\ \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X, \tau, t), t, s\big) = \mathbf{E}(X, \tau, s),\ t \in \Upsilon_\tau,\ s \in \Upsilon_t,$$

$\Upsilon_\tau = \{t \in \Upsilon : t \geq \tau\}$, $\Upsilon \subseteq \mathbb{R}$ — упорядоченное множество индексов. Система $\mathcal{S}$ является *непрерывной*, *дискретной* или *гибридной* в зависимости от структуры множества Υ. В случае дискретного времени $\Upsilon = \{0, 1, \dots\}$. Линейному оператору $\mathbf{E}$ соответствует *линейная система* $\mathcal{S}$. Отметим, что $\mathbf{E}(\cdot, \tau, \tau) \equiv \mathbf{I}$ — тождественный оператор. Если $\mathbf{E}(\Theta, \tau, t) \equiv \Theta$, то $X_t \equiv \Theta$ — *состояние равновесия* (стационарное движение) системы $\mathcal{S}$. Будем рассматривать лишь изолированные состояния равновесия.

Пусть $\mathcal{K}_t$ постоянное или изменяющееся во времени множество в $\mathcal{X}$. В качестве $\mathcal{K}_t$ мы можем использовать линейное преобразование $\mathcal{K}_t = \mathbf{L}(t)\mathcal{K}$ заданного постоянного множества $\mathcal{K}$. При этом $\mathcal{K}_t$ является конусом, если $\ker \mathbf{L}(t) \equiv \{0\}$ и $\mathcal{K}$ — конус. Если $\mathbf{E}(\mathcal{K}_\tau, \tau, t) \subseteq \mathcal{K}_t$ при $t \in \Upsilon_\tau$, то $\mathcal{K}_t$ — *инвариантное множество* системы $\mathcal{S}$. Система является *позитивной* относительно инвариантного конуса $\mathcal{K}_t$. Система $\mathcal{S}$ является *монотонной* относительно конуса $\mathcal{K}_t$, если

$$X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} Y_\tau \quad \Rightarrow \quad X_t = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y_t = \mathbf{E}(Y_\tau, \tau, t) \qquad (7.2.2)$$

при любых $\tau \in \Upsilon$ и $t \in \Upsilon_\tau$. Позитивную (монотонную) динамическую систему $\mathcal{S}$ определяет положительный (монотонный) оператор $\mathbf{E}$. Обозначим классы монотонных и позитивных систем относительно $\pm\mathcal{K}_t$ соответственно через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}_0^{\pm}$.

Рассмотрим множества

$$\mathcal{K}_t^+(\Theta) = \bigl\{X \in \mathcal{X} : X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta\bigr\}, \quad \mathcal{K}_t^-(\Theta) = \bigl\{X \in \mathcal{X} : X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \Theta\bigr\},$$

где $\Theta \in \mathcal{X}$, $\mathcal{K}_t$ — конус. Для классов систем с инвариантными множествами $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$ используем обозначения $\mathcal{M}_0^{\pm}(\Theta)$. Обозначим классы систем, имеющих свойство (7.2.2) при $Y_\tau \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$, $X_\tau \in \mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$ и $Y_\tau \in \mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$, соответственно через $\mathcal{M}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_1^-(\Theta)$ и $\mathcal{M}_2^-(\Theta)$. Очевидно, что

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1^{\pm}(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_2^{\pm}(\Theta), \quad \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{M}_2(\Theta),$$

где $\mathcal{M}_1(\Theta) = \mathcal{M}_1^+(\Theta) \cap \mathcal{M}_1^-(\Theta)$, $\mathcal{M}_2(\Theta) = \mathcal{M}_2^+(\Theta) \cap \mathcal{M}_2^-(\Theta)$. Система класса $\mathcal{M}_2^{\pm}(\Theta)$ монотонна в $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$. Каждая система из $\mathcal{M}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_2^-(\Theta)$ или $\mathcal{M}_2(\Theta)$, обладающая состоянием равновесия $X_t \equiv \Theta$, принадлежит соответственно $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$, $\mathcal{M}_0^-(\Theta)$ или $\mathcal{M}_0(\Theta) = \mathcal{M}_0^+(\Theta) \cap \mathcal{M}_0^-(\Theta)$. Линейная система $\mathcal{S}$, позитивная относительно конуса $\mathcal{K}_t$, принадлежит каждому из введенных классов систем.

Опишем введенные классы систем $\mathcal{S}$ из состояниями (7.2.1) с помощью включений

$$\mathbf{E}'_{\pm}(X, \tau, t)\, \mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad X \in \mathcal{D}, \ \tau \in \Upsilon, \ t \in \Upsilon_\tau, \qquad (7.2.3)$$

где $\mathbf{E}'_{\pm}(X, \tau, t)$ — производные Гато оператора $\mathbf{E}(X, \tau, t)$ по конусу $\pm\mathcal{K}_\tau$. Принадлежность системы $\mathcal{S}$ определенным классам будем обозначать символом $\in$.

Лемма 7.2.1 *Пусть оператор* $\mathbf{E}(X,\tau,t)$ *дифференцируем по Гато относительно* $\pm\mathcal{K}_\tau$ *в* $\mathcal{K}_\tau$*-выпуклой области* $\mathcal{D}$ *при* $\tau\in\Upsilon$, $t\in\Upsilon_\tau$. *Тогда:*

(i) $\mathcal{S}\in\mathcal{M}$ *в том и только в том случае, когда выполняется одно из включений* (7.2.3)*;*

(ii) $\mathcal{S}\in\mathcal{M}_0^{\pm}(\Theta)$, *если* $\mathbf{E}(\Theta,\tau,t)-\Theta\in\pm\mathcal{K}_t$ *и включение* (7.2.3) *выполняется при* $X\in\mathcal{K}_\tau^{\pm}(\Theta)$*;*

(iii) $\mathcal{S}\in\mathcal{M}_2^{\pm}(\Theta)$ *в том и только в том случае, когда включение* (7.2.3) *выполняется при* $X\in\mathcal{K}_\tau^{\pm}(\Theta)$.

Утверждения необходимости (i) и (iii) в лемме 7.2.1 устанавливаются на основе определений соответствующих классов систем $\mathcal{S}$ и производных Гато

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\big[\mathbf{E}(X+\varepsilon H,\tau,t)-\mathbf{E}(X,\tau,t)\big]=\mathbf{E}'_{\pm}(X,\tau,t)H,\, X\in\mathcal{D},\, H\in\mathcal{K}_\tau^{\pm}.$$

Достаточность утверждений (i) – (iii) следует из соотношения типа Лагранжа [39]:

$$\varphi\big(\mathbf{E}(X+H,\tau,t)-\mathbf{E}(X,\tau,t)\big)=\varphi\big(\mathbf{E}'_{\pm}(Z,\tau,t)H\big),$$

где $\varphi\in\mathcal{X}^*$, $Z=X+\mu H\in\mathrm{Co}\{X,X+H\}$, $0<\mu<1$, X и $X+H$ — произвольные точки некоторого выпуклого множества. С этой целью мы используем лишь функционалы $\varphi\in\pm\mathcal{K}_t^*$ и свойство $\mathcal{K}_\tau$–выпуклости $\mathcal{D}$. Кроме того, $Z=(1-\mu)X+\mu(X+H)\in\mathcal{D}$ при $X\in\mathcal{D}$ и $H\in\pm\mathcal{K}_\tau$.

7.2.1 Дифференциальные системы

Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{X}=\mathbf{F}(X,t),\quad t\geq\tau\geq 0, \tag{7.2.4}$$

где $\mathbf{F}$ — непрерывная оператор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения $X(t)=\mathbf{E}(X_\tau,\tau,t)$ для любых $\tau\geq 0$ и

$X_\tau \in \mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{K}_t$ — конус в фазовом пространстве $\mathcal{X}$. Например, преобразование Ляпунова $\mathcal{K}_t = \mathbf{L}(t)\mathcal{K}$ постоянного конуса $\mathcal{K}$, заданного в фазовом пространстве системы

$$\dot{Z} = \mathbf{G}(Z,t), \quad \mathbf{G}(Z,t) = \mathbf{L}^{-1}(t)\mathbf{F}\big(\mathbf{L}(t)Z,t\big) - \mathbf{L}^{-1}(t)\dot{\mathbf{L}}(t)Z,$$

также является конусом. В этом случае связь между решениями $X(t) = \mathbf{L}(t)Z(t)$ может быть использована при изучении их свойств относительно выделенных конусов.

С помощью сопряженного конуса $\mathcal{K}_t^*$ при $t \geq 0$ определим следующие условия:

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X-\Theta) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{F}(X,t)\big) \geq 0, \tag{7.2.5}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X-Y) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{F}(X,t) - \mathbf{F}(Y,t)\big) \leq 0. \tag{7.2.6}$$

Пусть $\mathcal{F}_0^{\pm}(\Theta)$ — классы оператор-функций $\mathbf{F}$, удовлетворяющих условию (7.2.5) относительно $\pm\mathcal{K}_t$. Класс оператор-функций $\mathbf{F}$, обладающих свойством (7.2.6), обозначим через $\mathcal{F}$. Определим также классы оператор-функций $\mathcal{F}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{F}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{F}_1^-(\Theta)$ and $\mathcal{F}_2^-(\Theta)$, обладающих свойством (7.2.6) соответственно при $Y \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ и $Y \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Обозначим пересечения $\mathcal{F}_k(\Theta) = \mathcal{F}_k^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_k^-(\Theta)$, $k = 0,1,2$. Очевидно, что

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1^{\pm}(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2^{\pm}(\Theta), \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{F}_2(\Theta).$$

Лемма 7.2.2 *Пусть $\mathcal{K}_t$ — телесный конус, обладающий свойством вложения*

$$0 \leq \tau < t \implies \mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t. \tag{7.2.7}$$

Тогда:

(i) *система* (7.2.4) *монотонна относительно $\mathcal{K}_t$, если $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$;*

(ii) *система* (7.2.4) *принадлежит классу $\mathcal{M}_0^{\pm}(\Theta)$, если $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^{\pm}(\Theta)$;*

(iii) *система* (7.2.4) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_0^{\pm}(\Theta) \cap \mathcal{M}_k^{\pm}(\Theta)$, *если* $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_k^{\pm}(\Theta)$, $k = 1, 2$;

(iv) *система* (7.2.4) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_k^{\pm}(\Theta)$, *если* $\mathbf{F}(\Theta, t) \in \pm\mathcal{K}_t$ *и* $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_k^{\pm}(\Theta)$, $k = 1, 2$.

Отметим, что в случае постоянного конуса $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ можно сформулировать обратные утверждения леммы 7.2.2 [55].

Для того, чтобы $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^{+}(\Theta)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^{-}(\Theta)$, достаточно выполнения соответствующих условий

$$\mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \alpha_+(X,t)\,(X - \Theta), \quad X - \Theta \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0;$$

$$\mathbf{F}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \alpha_-(X,t)\,(X - \Theta), \quad \Theta - X \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0,$$

где $\alpha_{\pm}(X,t)$ — скалярные функции. Аналогично, если

$$\mathbf{F}(X,t) - \mathbf{F}(Y,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \beta(X,Y,t)\,(X - Y), \quad Y - X \in \partial\mathcal{K}_t, \quad t \geq 0,$$

где $\beta(X,Y,t)$ — скалярная функция, то $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$. Если последнее условие выполняется при $Y \in \mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$ и $Y \in \mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$, то соответственно $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1^{+}(\Theta)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^{+}(\Theta)$, $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1^{-}(\Theta)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^{-}(\Theta)$.

Можно описать классы оператор-функций $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0^{\pm}(\Theta)$ и $\mathcal{F}_2^{\pm}(\Theta)$ в терминах следующих операторных неравенств:

$$\mathbf{F}'_{\pm}(X,t) \trianglerighteq \beta_{\pm}(X,t)\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{D}, \quad t \geq 0, \tag{7.2.8}$$

где $\beta_{\pm}(X,t)$ — скалярные функции. Эти неравенства означают, что операторы $\mathbf{F}'_{\pm}(X,t)$ являются внедиагонально положительными относительно $\mathcal{K}_t$ при $X \in \mathcal{D}$ и $t \geq 0$.

Лемма 7.2.3 *Пусть оператор-функция* $\mathbf{F}(X,t)$ *дифференцируема по Гато относительно* $\pm\mathcal{K}_t$ *в* $\mathcal{K}_t$*-выпуклой области* $\mathcal{D}$ *при* $t \geq 0$. *Тогда:*

(i) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$, *если выполняется одно из операторных неравенств* (7.2.8);

(ii) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^{\pm}(\Theta)$, *если* $\mathbf{F}(\Theta, t) \in \pm\mathcal{K}_t$ *и* (7.2.8) *выполняется при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$;

(iii) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_2^{\pm}(\Theta)$, *если* (7.2.8) *выполняется при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$.

Утверждения (i) – (iii) леммы 7.2.3 устанавливаются с помощью соотношения типа Лагранжа для оператор-функции $\mathbf{F}(X, t)$:

$$\varphi\big(\mathbf{F}(X+H, t) - \mathbf{F}(X, t)\big) = \varphi\big(\mathbf{F}'_{\pm}(Z, t)H\big), \quad H \in \pm\mathcal{K}_t, \ \varphi \in \pm\mathcal{K}_t^*,$$

где $Z = X + \mu H \in \mathrm{Co}\{X, X+H\}$, $0 < \mu < 1$. Если производная Гато $\mathbf{F}'_{\pm}(Z, t)$ как оператор-функция непрерывна, то

$$\mathbf{F}(X+H, t) - \mathbf{F}(X, t) = \int_0^1 \mathbf{F}'_{\pm}(X + \mu H, t) H \, d\mu, \quad H \in \pm\mathcal{K}_t.$$

Таким образом, введенные классы дифференциальных систем (7.2.4) при условиях лемм 7.2.2 и 7.2.3 можно описать в терминах внедиагонально положительных операторов.

Введем классы оператор-функций, которые мы будем использовать в теории сравнения систем (параграф 7.5) и, в частности, в задачах робастной устойчивости состояний позитивных систем (параграф 7.6). Будем писать $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}$, если можно установить такое соответствие между решениями системы (7.2.4) и дифференциального неравенства $\dot{Z} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(Z, t)$, что

$$Z(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \implies Z(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t), \quad t > \tau \geq 0.$$

Если при этом $X(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$ $(Z(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta))$, то $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ $(F \in \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta))$. Аналогично определяются классы оператор-функций $\underline{\mathcal{F}}$, $\underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ и $\underline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$, используя $-\mathcal{K}_t$ вместо $\mathcal{K}_t$. Очевидно, что

$$\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta), \quad \underline{\mathcal{F}} \subseteq \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_2(\Theta).$$

Если $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}} \cup \underline{\mathcal{F}}$, то система (7.2.4) является монотонной относительно $\mathcal{K}_t$. Если $\mathbf{F} \in \overline{\mathcal{F}}$ и $F(\Theta, t) \in \mathcal{K}_t$ $(\mathbf{F} \in \underline{\mathcal{F}}$ и $\mathbf{F}(\Theta, t) \in -\mathcal{K}_t)$, то система (7.2.4) принадлежит $\mathcal{M}_0^+(\Theta)$ $(\mathcal{M}_0^-(\Theta))$.

Лемма 7.2.4 *Если выполняются условия леммы* 7.2.2, *то:*
(i) $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}} \cap \underline{\mathcal{F}}$;
(ii) $\mathcal{F}_1^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^+(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$, $\mathcal{F}_1^-(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^-(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$;
(iii) $\mathcal{F}_2^+(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^+(\Theta) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$, $\mathcal{F}_2^-(\Theta) \cap \mathcal{F}_0^-(\Theta) \subseteq \underline{\mathcal{F}}_2(\Theta)$.

7.2.2 Разностные системы

Рассмотрим нелинейную разностную систему

$$X_{t+1} = \mathbf{G}(X_t, t), \quad \tau \in \Upsilon, \ t \in \Upsilon_\tau, \tag{7.2.9}$$

где $\mathbf{G}$ — непрерывная оператор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения $X_t = \mathbf{E}(X_\tau, \tau, t)$, $t \in \Upsilon_\tau = \{\tau, \tau+1, \dots\}$, для любого $\tau \in \Upsilon = \{0, 1, \dots\}$, $X_\tau \in \mathcal{D}$.

Введем следующие условия:

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta \implies \mathbf{G}(X, t) \overset{\mathcal{K}_{t+1}}{\geq} \Theta, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.2.10}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y \implies \mathbf{G}(X, t) \overset{\mathcal{K}_{t+1}}{\leq} \mathbf{G}(Y, t), \quad t \in \Upsilon. \tag{7.2.11}$$

Если конус $\mathcal{K}_t$ имеет свойство вложения (7.2.7), то положительна и монотонна относительно $\mathcal{K}_t$ оператор-функция $\mathbf{G}$ удовлетворяет условиям (7.2.10) при $\Theta = 0$ и (7.2.11) соответственно.

Пусть $\mathcal{G}_0^\pm(\Theta)$ обозначает класс оператор-функций $\mathbf{G}$, удовлетворяющих условию (7.2.10) относительно $\pm\mathcal{K}_t$. Пусть $\mathcal{G}$ — класс оператор-функций $\mathbf{G}$, удовлетворяющих условию (7.2.11). Аналогично определяем классы оператор-функций $\mathcal{G}_1^+(\Theta)$, $\mathcal{G}_2^+(\Theta)$, $\mathcal{G}_1^-(\Theta)$ и $\mathcal{G}_2^-(\Theta)$, имеющих свойство (7.2.11) соответственно при $Y \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta)$, $X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$ и $Y \in \mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Обозначим пересечения $\mathcal{G}_k(\Theta) = \mathcal{G}_k^+(\Theta) \cap \mathcal{G}_k^-(\Theta)$, $k = 0, 1, 2$. Очевидно, что

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1^\pm(\Theta) \subseteq \mathcal{G}_2^\pm(\Theta), \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_1(\Theta) \subseteq \mathcal{G}_2(\Theta).$$

Лемма 7.2.5 *Выполняются следующие утверждения:*

(i) $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$ *является инвариантным множеством системы* (7.2.9) *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$*;*

(ii) *система* (7.2.9) *монотонна относительно* $\mathcal{K}_t$ *в том и только в том случае, когда* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$*;*

(iii) *если система* (7.2.9) *принадлежит* $\mathcal{M}_k^{\pm}(\Theta)$, *то* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_k^{\pm}(\Theta)$, $k = 1, 2$*; обратное утверждение выполняется, если* $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$ *или* $\mathbf{G}(\Theta, t) - \Theta \in \pm\mathcal{K}_{t+1}$, $t \in \Upsilon$.

Если система (7.2.9) имеет состояние равновесия $X_t \equiv \Theta$ или инвариантные множества $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$, то согласно утверждению (iii) она принадлежит классу $\mathcal{M}_k(\Theta)$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_k^{+}(\Theta) \cap \mathcal{G}_k^{-}(\Theta)$, $k = 1, 2$.

Можно описать классы оператор-функций $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$ и $\mathcal{G}_2^{\pm}(\Theta)$ с помощью следующих включений:

$$\mathbf{G}'_{\pm}(X, t)\mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_{t+1}, \quad X \in \mathcal{D}, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.2.12}$$

где $\mathbf{G}'_{\pm}(X, t)$ — производные Гато $G(X, t)$ относительно $\pm\mathcal{K}_t$.

Лемма 7.2.6 *Пусть оператор-функция* $\mathbf{G}(X, t)$ *дифференцируема по Гато относительно* $\pm\mathcal{K}_t$ *в* $\mathcal{K}_t$*-выпуклой области* $\mathcal{D}$ *при* $t \in \Upsilon$. *Тогда:*

(i) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}$, *если выполняется одно из включений* (7.2.12)*;*

(ii) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^{\pm}(\Theta)$, *если* $\mathbf{G}(\Theta, t) \in \pm\mathcal{K}_{t+1}$ *и включение* (7.2.12) *выполняется при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$*;*

(iii) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_2^{\pm}(\Theta)$, *если включение* (7.2.12) *выполняется при* $X \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$.

7.3 Позитивность и устойчивость автономных систем

Рассмотрим непрерывную или дискретную динамическую систему $\mathcal{S}$ из состояниями (7.2.1), полагая соответственно $\Upsilon = [0, \infty)$ или $\Upsilon = \{0, 1, \dots\}$.

Определение 7.3.1 Состояние равновесия $X_t \equiv \Theta$ динамической системы $\mathcal{S}$ называется *устойчивым в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \Upsilon$ существует $\delta > 0$ такое, что $X_t \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t \in \Upsilon_\tau$ и $X_\tau \in \mathcal{S}_\delta(\tau)$, где $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta) : \|X - \Theta\| \le \varepsilon\}$. Если при этом для некоторого $\delta > 0$ из $X_\tau \in \mathcal{S}_\delta(\tau)$ следует $\|X_t - \Theta\| \to 0$ при $t \to \infty$, то состояние $X_t \equiv \Theta$ *асимптотически устойчиво в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Данное определение в случае $\Theta = 0$ дает понятия *устойчивости* и *асимптотической устойчивости в конусе* $\mathcal{K}_t$ нулевого состояния системы $\mathcal{S}$.

Лемма 7.3.1 *Пусть $\mathcal{K}_t$ — нормальный воспроизводящий конус с ограниченной константой нормальности $\nu_t \le \nu < \infty$. Тогда состояние $X \equiv \Theta$ системы* (7.2.1) *класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову в том и только в том случае, когда оно устойчиво (асимптотически устойчиво) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.*

Доказательство. Для системы класса $\mathcal{M}_1(\Theta)$ оба множества $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ являются инвариантными. Поэтому из устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову состояния $X \equiv \Theta$ следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$.

Пусть состояние $X \equiv \Theta$ системы (7.2.1) устойчиво в $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ и $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$. Рассмотрим произвольное ее состояние X_t с начальным значением X_τ. Так как конус $\mathcal{K}_\tau$ воспроизводящий и несплющенный, то для некоторых $X_\tau^\pm \in \mathcal{K}_\tau^\pm(\Theta)$ выполняются соотношения

$$X_\tau^- \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} X_\tau^+, \quad \|X_\tau^\pm - \Theta\| \le \gamma_\tau \|X_\tau - \Theta\|,$$

где $\gamma_\tau > 0$ — константа несплющенности конуса $\mathcal{K}_\tau$. Из определения классов $\mathcal{M}_1^\pm(\Theta)$ имеем неравенства

$$X_t^- \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_t \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_t^+, \quad t \in \Upsilon_\tau,$$

где $X_t^{\pm} \in \mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$ — состояния системы с соответствующими начальными значениями $X_\tau^{\pm}$.

В силу устойчивости состояния $X_t \equiv \Theta$ системы в $\mathcal{K}_t^{\pm}(\Theta)$ для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta_{\pm} > 0$ так, чтобы из неравенства $\|X_\tau^{\pm} - \Theta\| \le \delta_{\pm}$ следовало $\|X_t^{\pm} - \Theta\| \le \varepsilon(2\nu + 1)^{-1}$ при $t \in \Upsilon_\tau$. Тогда, учитывая нормальность конуса $\mathcal{K}_t$, имеем

$$\|X_t - \Theta\| \le (\nu_t + 1)\|X_t^{-} - \Theta\| + \nu_t\|X_t^{+} - \Theta\| \le \varepsilon,$$

лишь только $\|X_\tau\| \le \delta = \gamma_\tau^{-1}\min\{\delta_+, \delta_-\}$. Здесь $\nu_t > 0$ — константа нормальности конуса $\mathcal{K}_t$, причем $\nu_t \le \nu < \infty$. При этом $\|X_t - \Theta\| \to 0$, если $\|X_t^{\pm} - \Theta\| \to 0$, $t \to \infty$, т. е. состояние $X_t \equiv \Theta$ системы (7.2.1) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Лемма доказана.

Замечание 7.3.1 Для класса линейных систем $\mathcal{S}$ с инвариантным конусом $\mathcal{K}_t$, удовлетворяющим требованиям леммы 7.3.1, свойства устойчивости (асимптотической устойчивости) состояния $X \equiv 0$ в конусе $\mathcal{K}_t$ и устойчивости (асимптотической устойчивости) данного состояния по Ляпунову эквивалентны.

7.3.1 Дифференциальные системы

Сначала рассмотрим линейную автономную систему

$$\dot{X} = \mathbf{M}X, \quad t \ge 0, \tag{7.3.1}$$

где $\mathbf{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный ограниченный оператор. Свойство позитивности системы (7.3.1) относительно конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ равносильно включению $e^{t\mathbf{M}}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ для любого $t \ge 0$.

Необходимые и достаточные условия существования телесного инвариантного конуса $\mathcal{K}$ системы (7.3.1) в конечномерном случае описываются в терминах спектра $\sigma(\mathbf{M})$ в виде [100, 133]

$$\alpha(\mathbf{M}) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} \operatorname{Re}\lambda \in \sigma(\mathbf{M}),$$

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{M}),\ \operatorname{Re}\lambda = \alpha(\mathbf{M}) \implies d(\lambda) \le d(\alpha(\mathbf{M})),$$

где $d(\cdot)$ обозначает кратность собственного значения матрицы как корня ее минимального полинома.

Имеют место следующие утверждения [52, 55].

Теорема 7.3.1 *Позитивная относительно нормального воспроизводящего конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ система* (7.3.1) *экспоненциально устойчива в том и только в том случае, когда оператор $-\mathbf{M}$ положительно обратим, т. е. $\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{M}\mathcal{K}$. Если $\mathcal{K} \subseteq (\gamma\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}$ для любого $\gamma \ge 0$, то система* (7.3.1) *является экспоненциально устойчивой и позитивной относительно конуса $\mathcal{K}$.*

Следующее утверждение дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости системы (7.3.1) в терминах двух положительно обратимых операторов.

Теорема 7.3.2 *Если для некоторого $\gamma_0 \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{M}\mathcal{K} \cap (\gamma_0\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}, \quad \gamma_0 > \frac{\rho^2(\mathbf{M}) - r^2(\mathbf{M})}{2r(\mathbf{M})}, \tag{7.3.2}$$

где $\rho(\mathbf{M}) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(\mathbf{M})} |\lambda|$, $r(\mathbf{M}) = \inf\limits_{\lambda\in\sigma(\mathbf{M})} |\lambda|$, то система (7.3.1) *экспоненциально устойчива.*

Доказательство. Из (7.3.2) следует, что операторы $-\mathbf{M}^{-1}$ и $(\gamma_0\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}$ имеют инвариантный конус $\mathcal{K}$. Их спектры состоят из соответствующих чисел $-1/\lambda$ и $1/(\gamma_0 - \lambda)$ при $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$. Согласно теореме о спектральном радиусе положительного оператора имеем неравенства

$$|\lambda| \ge -\alpha, \quad |\gamma_0 - \lambda| \ge \gamma_0 - \beta, \quad \lambda \in \sigma(\mathbf{M}),$$

где $\alpha, \beta \in \sigma(\mathbf{M})$ — некоторые вещественные точки спектра. Если $0 \le \gamma \le \gamma_0$, то $-\mathbf{M} \trianglelefteq \gamma\mathbf{I} - \mathbf{M} \trianglelefteq \gamma_0\mathbf{I} - \mathbf{M}$ и каждый оператор $\gamma\mathbf{I} - \mathbf{M}$ должен быть положительно обратимым (теорема о

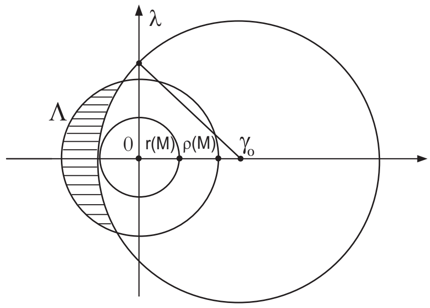


Рис. 7.1. Λ — область размещения спектра $\sigma(\mathbf{M})$.

двусторонней оценке положительно обратимого оператора [40]). Следовательно, в рассматриваемом случае $\alpha = \beta = -r(\mathbf{M})$ и область размещения спектра $\sigma(\mathbf{M})$ описывается в виде

$$(\gamma_0 - x)^2 + y^2 \geq (\gamma_0 + r(\mathbf{M}))^2, \quad r^2(\mathbf{M}) \leq x^2 + y^2 \leq \rho^2(\mathbf{M}),$$

где $x = \mathrm{Re}\lambda$, $y = \mathrm{Im}\lambda$. Если γ_0 удовлетворяет неравенству в (7.3.2), то данная область расположена строго слева от мнимой оси (рис. 7.1), что эквивалентно экспоненциальной устойчивости системы (7.3.1).

Теорема доказана.

Пример 7.3.1 Рассмотрим линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.3.3}$$

Критерием позитивности данной системы относительно конуса неотрицательных векторов $\mathbb{R}^n_+$ является *внедиагональная неотрицательность* элементов матрицы A:

$$a_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7.3.4}$$

При условиях (7.3.4) следующие утверждения эквивалентны [102]: 1) система (7.3.3) экспоненциально устойчива; 2) все элементы матрицы A^{-1} неположительны; 3) все последовательные главные миноры матрицы $-A$ положительны (условие Севастьянова-Котелянского [21]); 4) существует вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, для которого $-Ax \in \mathbb{R}^n_+$; 5) существует диагональная матрица $X > 0$, для которой $AX + XA^T < 0$.

Согласно теореме 7.3.2 достаточными условиями экспоненциальной устойчивости системы (7.3.3) является неположительность всех элементов матриц A^{-1} и $(\gamma_0 I_n - A)^{-1}$ для достаточно большого $\gamma_0 > 0$. Нижняя оценка для γ_0 приведена в (7.3.2).

Приведем условия экспоненциальной устойчивости системы (7.3.3) с использованием эллипсоидального конуса $\mathcal{K}(Q)$, где $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденная симметричная матрица, имеющая лишь одно положительное собственное значение (см. параграф 8.6). Критерием позитивности системы (7.3.3) относительно конуса $\mathcal{K}(Q)$ является выполнение матричного неравенства

$$A^T Q + QA + \alpha Q \geq 0 \tag{7.3.5}$$

для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Матрица $-A^{-1}$ сохраняет конус $\mathcal{K}(Q)$ в том и только в том случае, когда для некоторого $\beta > 0$

$$A^T QA \leq \beta Q, \quad h^T A^{-1} h \leq 0, \quad h^T (A^T QA)^{-1} h \geq 0, \tag{7.3.6}$$

где h — собственный вектор матрицы Q, отвечающий ее положительному собственному значению [7]. Поэтому согласно теореме 7.3.1 система (7.3.3) является экспоненциально устойчивой и позитивной относительно конуса $\mathcal{K}(Q)$, если совместна система неравенств (7.3.5) и (7.3.6).

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X), \quad \mathbf{F}(\Theta) = 0, \quad t \geq 0, \tag{7.3.7}$$

где $X \equiv \Theta \in \mathcal{X}$ — изолированное состояние равновесия.

Теорема 7.3.3 *Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ — нормальный воспроизводящий конус. Состояние $X \equiv \Theta$ системы* (7.3.7) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если выполняется одно из условий:*

(a) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, *существует производная Фреше* $\mathbf{F}'(\Theta)$ *и оператор* $-\mathbf{F}'(\Theta)$ *положительно обратим:*

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{F}'(\Theta)\mathcal{K}. \tag{7.3.8}$$

(b) $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\Theta)$, *существуют производные Фреше* $\mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)$ *относительно* $\pm\mathcal{K}$ *и операторы* $-\mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)$ *положительно обратимы:*

$$\mathcal{K} \subseteq -\mathbf{F}'_{+}(\Theta)\mathcal{K} \cap \mathbf{F}'_{-}(\Theta)\mathcal{K}. \tag{7.3.9}$$

Доказательство. (a) Система (7.3.7) при $X = \Theta + H$ представима в виде

$$\dot{H} = \mathbf{F}'(\Theta)H + \mathbf{R}(\Theta, H), \quad \mathbf{R}(\Theta, H) = o(\|H\|), \quad H \in \mathcal{X}.$$

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению, установим асимптотическую устойчивость линейной системы

$$\dot{H} = \mathbf{F}'(\Theta)H. \tag{7.3.10}$$

Система (7.3.10) позитивна относительно $\mathcal{K}$ и $-\mathcal{K}$. Действительно, учитывая соотношения

$$\mathbf{F}(\Theta + \varepsilon H) = \varepsilon\mathbf{F}'(\Theta)H + \mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H), \quad \frac{\mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H)}{\varepsilon\|H\|} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

и предположение $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, имеем

$$H \in \pm\mathcal{K}, \varphi \in \pm\mathcal{K}^*, \varphi(H) = 0 \Longrightarrow \frac{\varphi\big(\mathbf{F}'(\Theta)H\big)}{\|H\|} + \frac{\varphi\big(\mathbf{R}(\Theta, \varepsilon H)\big)}{\varepsilon\|H\|} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\varphi\big(\mathbf{F}'(\Theta)H\big) \geq 0$, т. е. выполняются условия позитивности системы (7.3.10) (см. утверждение (ii) леммы 7.2.2 в случае $\Theta = 0$). В силу теоремы 7.3.1 линейная система (7.3.10) при условии (7.3.8) экспоненциально устойчива. При этом состояние $X \equiv \Theta$ исходной системы (7.3.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

(b) Если $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_1(\Theta)$, то согласно утверждению (iv) леммы 7.2.2 система (7.3.7) принадлежит классу $\mathcal{M}_1(\Theta)$ и имеет инвариантные множества $\mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$. Согласно лемме 7.3.1 из асимптотической устойчивости в $\mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$ состояния $X \equiv \Theta$ системы (7.3.7) следует его асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

Система (7.3.7) при $X = \Theta + H \in \mathcal{K}^{\pm}(\Theta)$ представима в виде

$$\dot{H} = \mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)H + \mathbf{R}_{\pm}(\Theta, H), \quad \mathbf{R}_{\pm}(\Theta, H) = o(\|H\|), \quad H \in \pm\mathcal{K}.$$

Поэтому из асимптотической устойчивости в конусах $\mathcal{K}$ и $-\mathcal{K}$ нулевого состояния $H \equiv 0$ данных систем следует асимптотическая устойчивость по Ляпунову состояния $X \equiv \Theta$ исходной системы (7.3.7). Так как линейные системы $\dot{H} = \mathbf{F}'_{\pm}(\Theta)H$ позитивны относительно $\mathcal{K}$ и $-\mathcal{K}$ и экспоненциально устойчивы при условии (7.3.9) (см. доказательство в случае (a)), то состояние $X \equiv \Theta$ системы (7.3.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Теорема доказана.

Отметим, что свойство телесности конуса $\mathcal{K}$ позволяет в теореме 7.3.3 вместо условия (7.3.8) использовать систему конусных неравенств

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{F}'(\Theta)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0.$$

Разрешимость данной системы относительно H равносильна положительной обратимости оператора $-\mathbf{F}'(\Theta)$. Аналогично, условие (7.3.9) эквивалентно совместности системы соотношений

$$H_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} H_+, \quad \mathbf{F}'_+(\Theta)H_+ \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} \mathbf{F}'_-(\Theta)H_-.$$

Гипотеза 7.3.1 *Пусть система* (7.3.7) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *относительно нормального телесного конуса* $\mathcal{K}$ *и выполняются конусные неравенства*

$$X_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_+, \quad \mathbf{F}(X_+) \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} \mathbf{F}(X_-).$$

Тогда состояние $X \equiv \Theta$ данной системы асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 7.3.2 Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = Ax + b \odot \sin|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3.11}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\odot$ и $|\cdot|$ — поэлементные операции произведения и модуля соответственно. Пусть A — внедиагонально неотрицательная матрица (условия (7.3.4)). Тогда (7.3.11) является системой класса $\mathcal{M}$ относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$.

Вычислим производные Фреше по конусам $\pm\mathcal{K}$ вектор-функции $f(x) = Ax + b \odot \sin|x|$ в точке $\theta = 0$:

$$f'_+(0) = A + \mathrm{diag}\{b\}, \quad f'_-(0) = A - \mathrm{diag}\{b\}.$$

Здесь $\mathrm{diag}\{b\}$ обозначает диагональную матрицу, образованную из элементов вектора b. Согласно теореме 7.3.3 решение $x \equiv 0$ системы (7.3.11) асимптотически устойчиво, если все элементы матриц $-\big(f'_\pm(0)\big)^{-1}$ неотрицательны. Данное условие в случае $n = 2$ имеет вид

$$a_{11}+|b_1| < 0,\ a_{22}+|b_2| < 0,\ |b_1a_{22}+b_2a_{11}| < a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}+b_1b_2.$$

В общем случае для положительной обратимости матриц $-\big(f'_\pm(0)\big)^{-1}$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$a_{ii} + |b_i| + \rho(M) < 0, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\rho(M)$ — спектральный радиус неотрицательной матрицы $M = A - A \odot I$. Данное утверждение является следствием теоремы о двусторонней оценке положительно обратимого оператора и следующего факта: $(\gamma I - M)^{-1} \geq 0 \iff \gamma > \rho(M)$ [40].

Пример 7.3.3 Рассмотрим систему

$$\dot{x} = (Ax + b) \odot c(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{7.3.12}$$

где $c(x) = [c_1(x_1), \ldots, c_n(x_n)]^T$ — непрерывная вектор-функция с неотрицательными компонентами и дифференцируемая в окрестности изолированного состояния равновесия $\theta = -A^{-1}b$. В окрестности точки $x = \theta$ имеем

$$f'(x) = \operatorname{diag}\{c(x)\}\, A + \operatorname{diag}\{Ax + b\}\, c'(x), \quad f'(\theta) = \operatorname{diag}\{c(\theta)\}\, A,$$

где $f(x) = (Ax+b) \odot c(x)$. Можно показать, что система (7.3.12) при условиях (7.3.4) является монотонной относительно конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$. При этом, согласно теореме 7.3.3, состояние $x \equiv \theta$ данной системы асимптотически устойчиво, если $c(\theta) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$ и все элементы матрицы A^{-1} неположительны.

Рассмотрим нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X)X, \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{7.3.13}$$

где $\mathbf{A}$ — непрерывная оператор-функция, значения $\mathbf{A}(X)$ которой являются линейными ограниченными операторами в $\mathcal{X}$. Производные Гато и производные Гато по конусу $\pm\mathcal{K}$ оператор-функции $\mathbf{F}(X) = \mathbf{A}(X)X$ имеют вид

$$\mathbf{F}'(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X), \quad \mathbf{B}(X)H = \big[\mathbf{A}'(X)H\big]X,$$

$$\mathbf{F}'_\pm(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_\pm(X), \quad \mathbf{B}_\pm(X)H = \big[\mathbf{A}'_\pm(X)H\big]X,$$

где $\mathbf{A}'(X)$ и $\mathbf{A}'_\pm(X)$ — производные Гато $\mathbf{A}(X)$, а значения $\mathbf{B}(X)$ и $\mathbf{B}_\pm(X)$ являются линейными операторами в $\mathcal{X}$. Поскольку $\mathbf{F}'(0) = \mathbf{F}'_\pm(0) = \mathbf{A}(0)$, то с учетом леммы 7.2.3 имеем следствие теоремы 7.3.3.

Следствие 7.3.1 *Пусть выполняется одно из ограничений типа внедиагональной положительности:*

$$\mathbf{A}(X) \trianglerighteq \alpha_\pm(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\partial\mathcal{K},$$

$$\mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X) \trianglerighteq \beta(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\mathcal{K},$$

$$\mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_{\pm}(X) \trianglerighteq \beta_{\pm}(X)\mathbf{I}, \quad X \in \pm\mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ *— телесный конус,* $\alpha_{\pm}(X)$*,* $\beta(X)$ *и* $\beta_{\pm}(X)$ *— скалярные функции. Тогда состояние* $X \equiv 0$ *системы* (7.3.13) *асимптотически устойчиво, если совместна система конусных неравенств*

$$\mathbf{A}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0. \tag{7.3.14}$$

При условиях следствия 7.3.1 система (7.3.13) является позитивной относительно $\pm\mathcal{K}$.

Пример 7.3.4 Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(x)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{7.3.15}$$

где $A(x) = \mathrm{diag}\{d - Cx\}$, $d \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденная матрица. Данная система является моделью типа Колмогорова динамики роста и взаимодействия n популяций. Она имеет два состояния равновесия $\theta_0 = 0$ и $\theta_1 = C^{-1}d$.

Диагональная матрица $A(x)$ является внедиагонально неотрицательной. Поэтому система (7.3.15) позитивна относительно конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ и в следствии 7.3.1 условия асимптотической устойчивости (7.3.14) состояния $x \equiv \theta_0$ сводятся к неравенству $d \overset{\mathcal{K}}{<} 0$. Производная Фреше вектор-функции $f(x) = A(x)x$ имеет вид $f'(x) = A(x) + B(x)$, где $B(x) = -\mathrm{diag}\{x\}\,C$. При этом $f'(\theta_1) = -C_1$, где $C_1 = \mathrm{diag}\{\theta_1\}\,C$. Матрица $f'(x)$ является внедиагонально неотрицательной при $x - \theta_1 \in \mathcal{K}$, если $\theta_1 \in \mathcal{K}$ и матрица C внедиагонально неположительна. При этом $f \in \mathcal{F}_0^+(\theta_1)$ и система (7.3.15) принадлежит классу $\mathcal{M}_0^+(\theta_1)$ (см. утверждения (ii) лемм 7.2.2 и 7.2.3). Если к тому же матрица C_1 положительно обратима, то согласно теореме 7.3.3 состояние $x \equiv \theta_1$ данной системы асимптотически устойчиво. В приведенных условиях асимптотической устойчивости состояния $x \equiv \theta_1$ системы (7.3.15) C_1 является M-*матрицей*, т. е. $C_1^{-1} \trianglerighteq 0$ и C_1 — внедиагонально неположительна.

7.3.2 Разностные системы

Рассмотрим линейную разностную систему

$$X_{t+1} = \mathbf{M}X_t, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.3.16}$$

где $\mathbf{M} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный ограниченный оператор. Свойство позитивности системы (7.3.16) относительно конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ равносильно положительности оператора $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$). Существование инвариантного телесного конуса $\mathcal{K}$ системы (7.3.16) в конечномерном пространстве $\mathcal{X}$ равносильно условиям [100,133]

$$\rho(\mathbf{M}) \triangleq \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{M})} |\lambda| \in \sigma(\mathbf{M}),$$

$$\lambda \in \sigma(\mathbf{M}),\ |\lambda| = \rho(\mathbf{M}) \implies d(\lambda) \leq d(\rho(\mathbf{M})),$$

где $d(\cdot)$ — кратность собственного значения матрицы как корня ее минимального полинома. В частности, при дополнительных ограничениях на точки спектра $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$, для которых $|\lambda| = \rho(\mathbf{M})$, данная система имеет инвариантный эллипсоидальный конус $\mathcal{K}$ [129].

Условия устойчивости линейных позитивных разностных систем описываются в терминах положительно обратимых операторов и положительных решений алгебраических уравнений (см., например, [39]).

Теорема 7.3.4 *Пусть система* (7.3.16) *позитивна относительно нормального воспроизводящего конуса* $\mathcal{K}$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *система* (7.3.16) *асимптотически устойчива;* 2) $\rho(\mathbf{M}) < 1$; 3) $\mathcal{K} \subseteq (\mathbf{I} - \mathbf{M})\mathcal{K}$.

Пример 7.3.5 Рассмотрим линейную систему

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \Upsilon. \tag{7.3.17}$$

Позитивность данной системы относительно конуса неотрицательных векторов $\mathbb{R}^n_+$ равносильна неотрицательности всех элементов матрицы A. Критерием асимптотической устойчивости системы (7.3.1), позитивной относительно $\mathbb{R}^n_+$, является неотрицательность всех элементов обратной матрицы $(I_n - A)^{-1}$.

Система (7.3.17) имеет инвариантный эллипсоидальный конус $\mathcal{K}(Q)$ в том и только в том случае, когда для некоторого $\alpha \geq 0$ выполняется система матричных неравенств [7]

$$A^T Q A \geq \alpha Q, \quad h^T A h \geq 0, \quad h^T A Q^{-1} A^T h \geq 0. \tag{7.3.18}$$

Если наряду с (7.3.18) выполняются матричные неравенства

$$B^T Q B \leq \beta Q, \quad h^T B^{-1} h \geq 0, \quad h^T (B^T Q B)^{-1} h \geq 0, \tag{7.3.19}$$

где $B = I_n - A$ и $\beta > 0$, то система (7.3.17) асимптотически устойчива.

Можно получить ряд других критериев асимптотической устойчивости системы (7.3.17), используя условия инвариантности конусов типа $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$, полученные в [5] (см. параграф 8.7).

Сформулируем условия асимптотической устойчивости изолированного состояния равновесия $X_t \equiv \Theta$ нелинейной разностной системы

$$X_{t+1} = \mathbf{G}(X_t), \quad \mathbf{G}(\Theta) = \Theta, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.3.20}$$

в фазовом пространстве которой выделен конус $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$.

Теорема 7.3.5 *Пусть $\mathcal{K}$ — нормальный воспроизводящий конус. Состояние $X \equiv \Theta$ системы* (7.3.20) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если выполняется одно из условий:*

(a) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_0^+(\Theta) \cup \mathcal{G}_0^-(\Theta)$, *существует производная Фреше $\mathbf{G}'(\Theta)$ и оператор $\mathbf{I} - \mathbf{G}'(\Theta)$ положительно обратим:*

$$\mathcal{K} \subseteq \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'(\Theta)\big]\mathcal{K}. \tag{7.3.21}$$

(b) $\mathbf{G} \in \mathcal{G}_1(\Theta)$, *существуют производные Фреше $\mathbf{G}'_\pm(\Theta)$ относительно $\pm\mathcal{K}$ и операторы $\mathbf{I} - \mathbf{G}'_\pm(\Theta)$ положительно обратимы:*

$$\mathcal{K} \subseteq \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'_+(\Theta)\big]\mathcal{K} \cap \big[\mathbf{I} - \mathbf{G}'_-(\Theta)\big]\mathcal{K}. \tag{7.3.22}$$

Отметим, что для телесного конуса $\mathcal{K}$ условия (7.3.21) и (7.3.22) эквивалентны совместности соответствующих систем конусных неравенств

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{G}'(\Theta)H \overset{\mathcal{K}}{<} H,$$

$$H_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} H_+, \quad H_- - \mathbf{G}'_-(\Theta)H_- \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} H_+ - \mathbf{G}'_+(\Theta)H_+.$$

Гипотеза 7.3.2 *Пусть система* (7.3.20) *принадлежит классу* $\mathcal{M}_1(\Theta)$ *относительно нормального телесного конуса* $\mathcal{K}$ *и совместна система конусных неравенств*

$$X_- \overset{\mathcal{K}}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_+, \quad X_- - \mathbf{G}(X_-) \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} X_+ - \mathbf{G}(X_+).$$

Тогда состояние $X_t \equiv \Theta$ *системы* (7.3.20) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Рассмотрим нелинейную разностную систему

$$X_{t+1} = \mathbf{A}(X_t)X_t, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.3.23}$$

где $\mathbf{A}$ — непрерывная оператор-функция, значения $\mathbf{A}(X)$ которой являются линейными ограниченными операторами в $\mathcal{X}$. Учитывая лемму 7.2.6, имеем следствие теоремы 7.3.5.

Следствие 7.3.2 *Пусть выполняется одно из операторных неравенств*

$$\mathbf{A}(X) \trianglerighteq 0, \quad \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X) \trianglerighteq 0, \quad \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}_\pm(X) \trianglerighteq 0,$$

где $\mathbf{B}(X)H = \big[\mathbf{A}'(X)H\big]X$, $\mathbf{B}_\pm(X)H = \big[\mathbf{A}'_\pm(X)H\big]X$, $X \in \pm\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ *— нормальный телесный конус. Тогда состояние* $X \equiv 0$ *системы* (7.3.23) *асимптотически устойчиво по Ляпунову, если совместна система конусных неравенств*

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{A}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} H. \tag{7.3.24}$$

Пример 7.3.6 Рассмотрим нелинейную разностную систему

$$x_{t+1} = Ax_t + b(x_t), \quad x_t \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \Upsilon, \tag{7.3.25}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, b — непрерывная векторная функция с компонентами $b_k(c_k^T x)$, $k = 1, \dots, n$. Пусть элементы матриц A и $C^T = [c_1, \dots, c_n]$ неотрицательны, а функции b_k — неубывающие и имеют левые и правые производные $b'_{k\pm}(z)$ в точке $z = 0$. Тогда (7.3.25) является системой класса $\mathcal{M}$ относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$.

Вычислим производные Фреше по конусам $\pm\mathcal{K}$ векторной функции $f(x) = Ax + b(x)$ в точке $\theta = 0$:

$$f'_\pm(0) = A + B_\pm C, \quad B_\pm = \mathrm{diag}\{b'_{1\pm}(0), \dots, b'_{n\pm}(0)\}.$$

Согласно теореме 7.3.5, решение $x_t \equiv 0$ системы (7.3.25) асимптотически устойчиво, если все элементы матриц $(I - f'_\pm(0))^{-1}$ неотрицательны. В частности, полагая

$$n = 2, \quad C = I_2, \quad b(z) = v(z)d, \quad v(z) = \begin{cases} z\,a^z, & z \geq 0, \\ \frac{z^3}{1+z^2} & z < 0, \end{cases}$$

где $d \in \mathcal{K}$, $a \geq 1$, имеем $B_+ = \ln a\, \mathrm{diag}\{d\}$, $B_- = 0$. В данном случае условия асимптотической устойчивости решения $x_t \equiv 0$ системы (7.3.25) имеют вид

$$(I_2 - A - B_+)^{-1} \trianglerighteq 0, \quad (I_2 - A)^{-1} \trianglerighteq 0,$$

где второе неравенство является следствием первого, сводящегося к системе скалярных неравенств

$$a_{11} + d_1 \ln a \geq 1, \quad a_{22} + d_2 \ln a \geq 1,$$

$$a_{11}+a_{22}-a_{11}a_{22}+a_{12}a_{21}+(d_1+d_2-a_{11}d_2-a_{22}d_1)\ln a-d_1d_2\ln^2 a \geq 1.$$

Данная система неравенств выполняется, например, при таких значениях параметров:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \quad a = 3.$$

7.3.3 Системы с запаздыванием

Рассмотрим класс нелинейных дифференциальных *систем с запаздыванием*

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = \mathbf{G}\big(X(t-s), t\big), \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{7.3.26}$$

где $s > 0$ — постоянное запаздывание, $\mathbf{L}(t) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ — линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{E}$, $\mathbf{G}(X, t)$ — непрерывная оператор-функция, удовлетворяющая тождеству $\mathbf{G}(0, t) \equiv 0$ и условиям существования единственного решения $X(t) \in \mathcal{X}$ при начальных условиях

$$X(\xi) = \Psi(\xi), \quad \tau - s \leq \xi \leq \tau. \tag{7.3.27}$$

При условиях $\mathbf{G}(0, t) \equiv 0$ и $\Psi(\xi) \equiv 0$, система (7.3.26) имеет тривиальное решение $X \equiv 0$.

Состояние $X \equiv 0$ системы (7.3.26) *устойчиво по Ляпунову*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \geq 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, что из $\|X(\tau)\|_s < \delta$ следует $\|X(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > \tau$, где $\|X(\tau)\|_s = \max\limits_{\tau - s \leq \xi \leq \tau} \|X(\xi)\|$. Состояние $X \equiv 0$ системы (7.3.26) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и для любого $\tau \geq 0$ существует $\delta = \delta(\tau) > 0$ такое, что для каждого решения $X(t)$ из $\|X(\tau)\|_s < \delta$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t)\| = 0$. Состояние $X \equiv 0$ *абсолютно устойчиво*, если оно асимптотически устойчиво при любом $s \geq 0$.

Система (7.3.26) называется *позитивной* относительно конуса $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}$, если для любого $\tau \geq 0$ из $\Psi(\xi) \overset{\mathcal{K}_\xi}{\geq} 0$ при всех $\xi \in [\tau - s, \tau]$ следует $X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $t > \tau$.

Состояние $X \equiv 0$ системы (7.3.26) называется *устойчивым в конусе* $\mathcal{K}_t$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\tau \geq 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, что из $\Psi(\xi) \in \mathcal{S}_\delta(\xi)$ при всех $\xi \in [\tau - s, \tau]$ следует $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t \geq \tau$, где $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t : \|X\| \leq \varepsilon\}$. Если при этом $\|X(t)\| \to 0$ для некоторого $\delta > 0$, то состояние $X \equiv 0$ системы (7.3.26) *асимптотически устойчиво в конусе* $\mathcal{K}_t$.

Если система (7.3.26) позитивна относительно конуса $\mathcal{K}_t$, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову состояния $X \equiv 0$ следует его устойчивость (асимптотическая устойчивость) в $\mathcal{K}_t$.

Лемма 7.3.2 *Система* (7.3.26) *позитивна относительно постоянного конуса* $\mathcal{K}$ *в том и только в том случае, когда для любых* $\tau \geq 0$ *и* $t \geq \tau$ *выполняются включения*

$$\mathbf{W}(t,\tau)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathbf{G}(\mathcal{K},t) \subseteq \mathcal{K}, \tag{7.3.28}$$

где $\mathbf{W}(t,\tau)$ *— эволюционный оператор линейной системы*

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{7.3.29}$$

Доказательство. Решение системы (7.3.26) при условиях (7.3.27) на каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$ удовлетворяет интегральным соотношениям

$$X(t) = \mathbf{W}(t,t_k)X(t_k) + \int_{t_k}^{t} \mathbf{W}(t,\xi)\mathbf{G}\big(X(\xi - s),\xi\big)d\xi, \tag{7.3.30}$$

где $t_k = \tau + k\,s$, $k = 0, 1, \ldots$. Справедливость данных соотношений можно непосредственно установить путем дифференцирования, используя определение эволюционного оператора как решения задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t,\xi) + \mathbf{L}(t)\mathbf{W}(t,\xi) = 0, \quad \mathbf{W}(\xi,\xi) = \mathbf{I}, \quad t \geq \xi, \tag{7.3.31}$$

где $\mathbf{I}$ — тождественный оператор. Следовательно, если в (7.3.27) $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то $X(t) \in \mathcal{K}$ при $t_k \leq t \leq t_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Покажем, что включения (7.3.28) необходимы для позитивности системы (7.3.26). Если

$$X(\xi) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \leq \xi \leq t_k - \varepsilon, \\ \Psi(\xi), & t_k - \varepsilon \leq \xi \leq t_k, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$, $\Psi(\xi) \in \mathcal{K}$, то согласно (7.3.30)

$$X(t) = \mathbf{W}(t, t_k) X(t_k) \in \mathcal{K}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} - \varepsilon.$$

В силу замкнутости конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$ имеем первое включение (7.3.28) на интервале $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Его выполнение при любом $t \geq \tau$ является следствием мультипликативного представления эволюционного оператора [27]

$$\mathbf{W}(t, t_0) = \mathbf{W}(t, t_k)\mathbf{W}(t_k, t_{k-1}) \cdots \mathbf{W}(t_1, t_0), \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}.$$

Если $X(\tau) = 0$, то для некоторого $\xi \in (\tau, t)$ имеем

$$X(t) = (t - \tau)\mathbf{W}(t, \xi)\mathbf{G}(X(\xi - s), \xi), \quad t > s,$$

$$X(\xi - s) \in \mathcal{K} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}(t, \xi)\mathbf{G}(X(\xi - s), \xi) \in \mathcal{K}.$$

При этом, если $t \to \tau$, то $\xi \to \tau$ и $\mathbf{W}(t, \xi) \to \mathbf{I}$. В силу замкнутости конуса и непрерывной зависимости $\mathbf{W}$ и $\mathbf{G}$ от своих аргументов $\mathbf{G}(X, \tau) \in \mathcal{K}$, лишь только $X = X(\tau - s) \in \mathcal{K}$. Поэтому второе включение (7.3.28) также необходимо для позитивности системы (7.3.26).

Лемма доказана.

Лемма 7.3.2 является обобщением известного критерия позитивности класса систем (7.3.26) относительно конуса неотрицательных векторов $\mathbb{R}^n_+$ [107].

Рассмотрим подкласс автономных дифференциальных систем с запаздыванием

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}X(t) = \mathbf{G}\big(X(t - s)\big), \quad \mathbf{G}(0) = 0, \quad t \geq \tau \geq 0, \quad (7.3.32)$$

Лемма 7.3.3 *Пусть выполняются условия*

$$e^{-\mathbf{L}\,t} X \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad 0 \overset{\mathcal{K}}{\leq} \mathbf{G}(X) \overset{\mathcal{K}}{\leq} \mathbf{P}X, \quad X \in \mathcal{K}, \ t \geq 0, \qquad (7.3.33)$$

где $\mathbf{P}$ *— линейный положительный оператор, и существуют линейные равномерно положительные функционалы* $\varphi, \psi \in \mathcal{K}^*$, *удовлетворяющие уравнению*

$$\mathbf{M}^*\varphi = \psi, \tag{7.3.34}$$

где $\mathbf{M} \triangleq \mathbf{L} - \mathbf{P}$. *Тогда состояние* $X \equiv 0$ *системы* (7.3.32) *абсолютно устойчиво в конусе* $\mathcal{K}$.

Доказательство. Согласно лемме 7.3.2 система (7.3.32) при условиях (7.3.33) является позитивной. Построим *функционал Ляпунова-Красовского*

$$V(X_t) = \varphi(X(t)) + \int_{-s}^{0} \varphi\left(\mathbf{G}\big(X(t+\xi)\big)\right) d\xi, \tag{7.3.35}$$

где $X_t(\xi) = X(t+\xi)$, $\varphi \in \mathcal{K}^*$. Выражение (7.3.35) является обобщением функционала, использованного в работе [107] в случае конуса $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть $X(t)$ — решение системы (7.3.32) с начальной функцией (7.3.27). Для любого равномерно положительного функционала $\varphi \in \mathcal{K}^*$ выполняется оценка

$$\gamma_-\|X\| \le \varphi(X) \le \gamma_+\|X\|, \quad X \in \mathcal{K},$$

где $\gamma_\pm > 0$ — некоторые константы, не зависящие от X [40]. Поэтому имеет место неравенство $V(X_\tau) \ge \varphi\big(\Psi(\tau)\big) \ge \gamma_-\|\Psi(\tau)\|$.

Производная функционала (7.3.35) на решениях системы (7.3.32) с учетом условий (7.3.33) и (7.3.34) удовлетворяет соотношениям

$$\dot V(X_t) = \varphi\left(-\mathbf{L}X(t) + \mathbf{G}\big(X(t)\big)\right) \le$$
$$\le -\varphi\big(\mathbf{M}X(t)\big) = -\mathbf{M}^*\varphi\big(X(t)\big) = -\psi\big(X(t)\big) \le -\gamma\|X(t)\|,$$

где $\gamma > 0$. Следовательно, состояние $X \equiv 0$ позитивной системы (7.3.32) асимптотически устойчиво в конусе $\mathcal{K}$ при любом запаздывании $s \ge 0$ [108].

Лемма доказана.

Теорема 7.3.6 *Пусть операторы системы* (7.3.32) *удовлетворяют условиям* (7.3.33) *для конуса* $\mathcal{K}$, *допускающего оштукатуривание, причем оператор* $\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}$ *положительно обратим, а его обратный* $\mathbf{M}^{-1}$ *равномерно положительный относительно* $\mathcal{K}$. *Тогда состояние* $X \equiv 0$ *системы* (7.3.32) *абсолютно устойчиво в конусе* $\mathcal{K}$.

Доказательство. Конус $\mathcal{K}$ допускает оштукатуривание в том и только в том случае, когда в $\mathcal{K}^*$ существует равномерно положительный функционал [40, теорема 1.5]. Пусть $\psi \in \mathcal{K}^*$ — один из таких функционалов. Так как оператор $\mathbf{M}$ положительно обратим, то в силу равенства $(\mathbf{M}^{-1})^* = (\mathbf{M}^*)^{-1}$ можно определить функционал $\varphi = (\mathbf{M}^*)^{-1}\psi \in \mathcal{K}^*$, удовлетворяющий уравнению (7.3.34). При этом с учетом равномерной положительности функционала ψ и оператора $\mathbf{M}^{-1}$ для любого $X \in \mathcal{K}$ имеем

$$\|\varphi(X)\| = \|(\mathbf{M}^*)^{-1}\psi(X)\| = \|\psi(\mathbf{M}^{-1}X)\| \geq \gamma_1\|\mathbf{M}^{-1}X\| \geq \gamma_2\|X\|,$$

где $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$ — константы, не зависящие от X. Это означает, что φ также является равномерно положительным функционалом. В силу леммы 7.3.3 состояние $X \equiv 0$ системы (7.3.32) абсолютно устойчиво в конусе $\mathcal{K}$.

Теорема доказана.

Замечание 7.3.2 Если в условиях теоремы 7.3.6 оператор $\mathbf{L}$ положительно обратим, то $\mathbf{M}$ принадлежит классу операторов (7.1.1). В этом случае в утверждении данной теоремы требование положительной обратимости оператора $\mathbf{M}$ можно заменить эквивалентными спектральными условиями:

1) $\rho(\mathbf{T}) < 1$, где $\rho(\mathbf{T})$ — спектральный радиус пучка операторов $\mathbf{T}(\lambda) = \mathbf{P} - \lambda\mathbf{L}$;

2) $\operatorname{Re}\lambda \leq \alpha < 0,\ \forall\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$.

Данные условия в случае телесного конуса $\mathcal{K}$ равносильны совместности системы конусных неравенств

3) $\mathbf{M}X \overset{\mathcal{K}}{>} 0,\ X \overset{\mathcal{K}}{>} 0$.

Рассмотрим линейную автономную систему

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}X(t) = \mathbf{P}X(t-s), \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{7.3.36}$$

Согласно лемме 7.3.2 система (7.3.36) имеет инвариантный конус $\mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда операторы $e^{-\mathbf{L}\,t}$ и $\mathbf{P}$ положительны:

$$e^{-\mathbf{L}\,t}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad \mathbf{P}\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \quad t \geq 0. \tag{7.3.37}$$

Пусть конус $\mathcal{K}$ нормальный и воспроизводящий. Тогда из соотношения

$$X(t) = e^{-\mathbf{L}(t-\tau)}X(\tau) + \int_\tau^t e^{-\mathbf{L}(t-\xi)}\mathbf{P}X(\xi - s)d\xi$$

следует представление решения позитивной системы (7.3.36):

$$X(t) = \mathbf{S}_t X_\tau = \mathbf{S}_t(X_\tau^+ - X_\tau^-) = X_+(t) - X_-(t), \quad t \geq \tau,$$

где $\mathbf{S}_t$ — некоторый линейный оператор, $X_\pm(t) = \mathbf{S}_t X_\tau^\pm \in \mathcal{K}$ — решения данной системы с начальными функциями $X_\tau^\pm(\tau + \xi) \in \mathcal{K}$, $-s \leq \xi \leq 0$. Поэтому при условиях (7.3.37) с нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K}$ свойства асимптотической устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости в конусе $\mathcal{K}$ линейной системы (7.3.36) эквивалентны (см. доказательство леммы 7.3.1). Причем, асимптотическая устойчивость данной системы при отсутствии запаздывания ($s = 0$) равносильна положительной обратимости оператора $\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{P}$. Следовательно, теорема 7.3.6 в случае $\mathbf{G}(X) \equiv \mathbf{P}X$ дает условия абсолютной устойчивости по Ляпунову линейной системы (7.3.36).

Пример 7.3.7 Линейная дифференциальная система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-s), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3.38}$$

позитивна относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^n$ в том и только в том случае, когда внедиагональные элементы матрицы $A(t)$ и все элементы матрицы $B(t)$ неотрицательны при $t \geq 0$. Если при этом матрицы A и B постоянные, то абсолютная устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (7.3.38) эквивалентна совместности системы конусных неравенств

$$(A+B)\,x \overset{\mathcal{K}}{<} 0 \overset{\mathcal{K}}{<} x.$$

Пример 7.3.8 Нелинейная матричная система

$$\dot{X}(t) + \mathbf{L}(t)X(t) = B(t)X(t-s)B^*(t) + X(t-s)C(t)X(t-s), \tag{7.3.39}$$

где $\mathbf{L}(t)X = A(t)X + XA^*(t)$ — оператор Ляпунова, позитивна относительно конуса эрмитовых неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}$, если $C(t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $t \geq 0$. В данном случае систему (7.3.29) описывает оператор $L(t)$, а операторы

$$\mathbf{W}(t,\tau)X = \Delta(t,\tau)X\Delta^*(t,\tau), \quad \mathbf{G}(X,t) = B(t)XB^*(t) + XC(t)X,$$

где $\Delta(t,\tau)$ — матрицант системы $\dot{x} + A(t)x = 0$, являются положительными относительно конуса $\mathcal{K}$ при $t \geq \tau \geq 0$. В случае постоянных матриц A, B и $C = 0$ нулевое решение позитивной системы (7.3.39) абсолютно устойчиво, если для некоторой положительно определенной матрицы $Y = Y^* > 0$ матричное алгебраическое уравнение

$$AX + XA^* - BXB^* = Y$$

имеет положительно определенное решение $X = X^* > 0$.

7.4 Инвариантные множества в терминах конусных неравенств

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X,t), \quad X(\tau) = X_\tau \in \Omega, \quad t \geq \tau \geq 0, \tag{7.4.1}$$

где $\mathbf{F} : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, удовлетворяющий условиям существования и единственности решения $X(t)$ в некоторой области $\Omega \subset \mathcal{X}$. Система (7.4.1) имеет инвариантное множество $\mathcal{I}_t \subseteq \mathcal{X}$, если из $X(\tau) \in \mathcal{I}_\tau$ следует $X(t) \in \mathcal{I}_t$ при $t > \tau \geq 0$.

Построим инвариантные множества системы (7.4.1) в виде

$$\mathcal{I}_t = \Big\{ X \in \Omega : \mathbf{V}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0 \Big\}, \tag{7.4.2}$$

где $\mathbf{V} : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$ — некоторый оператор, $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$ — заданный клин, в частности, конус. Для этого определим оператор дифференцирования $\mathbf{D}_t$ в силу системы (7.4.1) как (сильную) производную сложной функции:

$$\mathbf{D}_t \mathbf{V}(X, t) = \frac{d}{d\tau}\, \mathbf{V}(\Psi(\tau, t, X), \tau)|_{\tau = t}\,, \tag{7.4.3}$$

где $X(\tau) = \Psi(\tau, t, X)$ — решение данной системы с начальными условиями $X(t) = X$. Будем предполагать, что $\mathbf{V}(X, t)$ — непрерывная функция вместе с частными производными в области $\Omega \times [0, \infty)$.

Для оператора (7.4.3) можно использовать выражения в терминах правой части системы (7.4.1). Например, если $\mathcal{X} = R^n$ и $\mathcal{E} = R^m$, то

$$\mathbf{D}_t V(x, t) = V'_x(x, t)\, \mathbf{F}(x, t) + V'_t(x, t),$$

где $V'_X(x, t)$ — матрица Якоби размеров $m \times n$, составленная из частных производных функции V по x. Аналогично можно рассматривать обобщение данного соотношения с использованием производных нелинейного оператора Гато и Фреше. Например, можно предполагать, что $\mathbf{V}'_t(X, t)$ является сильной производной по t, а $\mathbf{V}'_X(X, t)$ — производная Гато по X, т. е. линейный ограниченный оператор вида $\mathbf{V}'_X(X, t)H = \dfrac{d}{dh}\, \mathbf{V}(X + hH, t)|_{h=0}$. Если $\mathbf{V}(X, t)$ не является дифференцируемой по X функцией, а лишь непрерывной и локально липшицевой, то можно использовать правые и левые *производные Дини* в силу системы (см., например, [44, 79])

$$\mathbf{D}_t^{\pm}\mathbf{V}(X,t) = \limsup_{h\to 0\pm} \frac{1}{h}\left[\mathbf{V}\big(X + h\mathbf{F}(X,t),\, t+h\big) - \mathbf{V}(X,t)\right].$$

Теорема 7.4.1 *Пусть $\mathcal{K}_t$ — телесный конус, удовлетворяющий свойству вложения* (7.2.7). *Тогда $\mathcal{I}_t$ является инвариантным множеством системы* (7.4.1) *в том и только в том случае, когда при любом $t \geq 0$ выполняется условие*

$$X \in \mathcal{I}_t,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi\big(\mathbf{V}(X,t)\big) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t)\big) \geq 0. \quad (7.4.4)$$

Доказательство. Пусть $X(t)$ — решение системы (7.4.1) при начальных условиях $X(t_0) = X_0 \in \mathcal{I}_{t_0}$. Тогда из определения оператора $\mathbf{D}_t$ вытекает соотношение

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{D}_\tau\mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\,d\tau = \mathbf{V}\big(X(t),t\big) - \mathbf{V}(X_0,t_0).$$

Отсюда, в частности, следует $\mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \mathbf{V}(X_0,t_0)$, если $\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $X \in \mathcal{I}_t$ и $t \geq t_0$. При этом $\mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{>} 0$, если $\mathbf{V}(X_0,t_0) \overset{\mathcal{K}_{t_0}}{>} 0$.

Предположим, что в некоторый момент времени $\tau \geq t_0$ значение функции $\mathbf{V}(X_\tau,\tau)$, где $X_\tau = X(\tau)$, достигает границы конуса $\mathcal{K}_\tau$. Тогда существует ненулевой функционал $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$, для которого $\varphi\big(\mathbf{V}(X_\tau,\tau)\big) = 0$.

Определим окрестность множества (7.4.2) вида

$$\mathcal{I}_t^\varepsilon = \Big\{X \in \Omega :\ \mathbf{V}_\varepsilon(X,t) = \mathbf{V}(X,t) + \varepsilon\omega(t)Y \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$, $Y \in \operatorname{int}\mathcal{K}_\tau$, $\omega(t)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\omega(\tau) = 0$ и $\dot\omega(\tau) > 0$.

Положим, например, $\omega(t) = \arctan(t - \tau)$. Тогда очевидно $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{I}_t^\varepsilon$, причем, $\mathcal{I}_t^\varepsilon \to \mathcal{I}_t$ при $\varepsilon \to 0$ и $t \geq \tau$. Поскольку $V_\varepsilon(X_\tau, \tau) = V(X_\tau, \tau)$ и $\varphi(Y) > 0$, то согласно (7.4.4) для некоторого $\delta > 0$ при $\tau \leq t \leq \tau + \delta$ имеем

$$\varphi\big(\mathbf{D}_t \mathbf{V}_\varepsilon(X,t)\big) = \varphi\big(\mathbf{D}_t \mathbf{V}(X,t)\big) + \frac{\varepsilon}{1 + (t-\tau)^2}\,\varphi(Y) \geq 0,$$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\left(\mathbf{D}_t \mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big)\right) dt = \varphi\big(\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) \geq 0.$$

Это означает, что траектория $X(t)$ в момент τ не может покидать множество $\mathcal{I}_\tau^\varepsilon$, т. е. $\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $\tau \leq t \leq \tau + \delta$. В противном случае для некоторого $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ выполнялись бы соотношения $\varphi\big(\mathbf{V}(X_\tau, \tau)\big) = 0$ и $\varphi\big(\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) < 0$.

В силу замкнутости конуса $\mathcal{K}_t$ при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\mathbf{V}_\varepsilon\big(X(t),t\big) \to \mathbf{V}\big(X(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \quad \tau \leq t \leq \tau + \delta.$$

Следовательно, $\mathcal{I}_t$ является инвариантным множеством системы (7.4.1).

Обратное утверждение теоремы следует из теоремы Лагранжа:

$$\varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau+\delta), \tau+\delta\big)\big) - \varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau), \tau\big)\big) = \delta\, \varphi\big(\mathbf{D}_\xi \mathbf{V}\big(X(\xi), \xi\big)\big),$$

где $\xi \in (\tau, \tau+\delta)$. Если $\varphi\big(\mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\big) = 0$ и $X(\tau+\delta) \in \mathcal{I}_{\tau+\delta}$, то при достаточно малом $\delta > 0$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\varphi\big(D_\tau \mathbf{V}\big(X(\tau),\tau\big)\big) \geq 0$.

Теорема доказана.

Замечание 7.4.1 Для выполнения условия (7.4.4) достаточно, чтобы для некоторой непрерывной скалярной функции $\alpha(X,t)$ выполнялось конусное неравенство

$$\mathbf{D}_t \mathbf{V}(X,t) + \alpha(X,t)\mathbf{V}(X,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \quad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0. \tag{7.4.5}$$

Пример 7.4.1 Рассмотрим нелинейную систему

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0. \tag{7.4.6}$$

Множество (7.4.2) определим с помощью конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ и вектор-функции $V(x,t) = R(t)\,x$, где $R(t)$ — невырожденная непрерывно дифференцируемая матричная функция. Тогда выполняется условие (7.4.5), если для некоторой функции $\alpha(x,t)$ все элементы матрицы

$$B_\alpha(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) + R(t)\big[A(x,t) + \alpha(x,t)I\big]R^{-1}(t)$$

являются неотрицательными функциями. Последнее ограничение сводится к виду

$$b_{ij}(x,t) \geq 0, \quad i \neq j, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{7.4.7}$$

где $b_{ij}(x,t)$ — элементы матрицы $B_\alpha(t)$ при $\alpha = 0$. В частном случае $R(t) \equiv I$ множество $\mathcal{I}_t$ является конусом $\mathcal{K}$, а неравенства (7.4.7) обобщают известные условия позитивности линейных систем относительно $\mathcal{K}$ [40].

Определим для системы (7.4.6) множество (7.4.2) с помощью скалярной функции $V(x,t) = x^T P(t)x + q^T(t)x + r(t)$, где симметричная матрица $P(t)$, вектор-функция $q(t)$ и скалярная функция $r(t)$ непрерывны и дифференцируемы при $t \geq 0$. Тогда условие (7.4.5), обеспечивающее инвариантность данного множества для системы (7.4.6), имеет вид

$$x^T P_\alpha x + q_\alpha^T x + r_\alpha \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t,\ t \geq 0, \tag{7.4.8}$$

где $P_\alpha = \dot{P}(t) + \alpha(x,t)P(t) + A^T(x,t)P(t) + P(t)A(x,t)$, $q_\alpha = \dot{q}(t) + \alpha(x,t)q(t) + A^T(x,t)q(t)$, $r_\alpha = \dot{r}(t) + \alpha(x,t)r(t)$. В частности, условие (7.4.8) является следствием соотношений

$$P_\alpha \geq 0,\ \ q_\alpha \equiv 0,\ \ r_\alpha \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t,\ t \geq 0.$$

Пример 7.4.2 Для нелинейной системы

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{7.4.9}$$

построим условия инвариантности переменного эллипсоидального конуса $\mathcal{I}_t$, описываемого в виде (7.4.2) при условиях

$$V(x,t) = \begin{bmatrix} x^T Q(t) x \\ h^T(t) x \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = \mathbb{R}^2_+,$$

где $h(t)$ — собственный вектор симметричной матрицы $Q(t)$ с инерцией $\mathrm{i}\big(Q(t)\big) \equiv \{1, n, 0\}$, отвечающий ее положительному собственному значению. В условии (7.4.4), где

$$\mathbf{D}_t V(x,t) = \begin{bmatrix} x^T \dot{Q}(t) x + f^T(x,t) Q(t) x + x^T Q(t) f(x,t) \\ \dot{h}^T x + h^T(t) f(x,t) \end{bmatrix},$$

достаточно использовать лишь два функционала из $\mathcal{K}^*$. Если $\varphi(y) = y_1$, то согласно (7.4.4) получим ограничение

$$x^T \dot{Q}(t) x + f^T(x,t) Q(t) x + x^T Q(t) f(x,t) \geq 0, \tag{7.4.10}$$

где $x \in \partial\mathcal{I}_t$ и $t \geq 0$, причем $\partial\mathcal{I}_t = \{x \in \mathcal{I}_t : x^T Q(t) x = 0\}$. Если взять $\varphi(y) = y_2$, то в условии (7.4.4) $x = 0$ и

$$h^T(t) f(0,t) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{7.4.11}$$

Здесь использован тот факт, что из $x^T Q(t) x \geq 0$ и $h^T(t) x = 0$ следует $x = 0$. Это свойство имеют симметричные матрицы с указанной инерцией.

Условия (7.4.10) и (7.4.11) обеспечивают инвариантность множества $\mathcal{I}_t$ в системе (7.4.9). Условие (7.4.11) всегда выполняется для систем с нулевым состоянием равновесия, т. е. $f(0,t) \equiv 0$. Таковой является, например, дифференциальная система (7.4.6), для которой условие (7.4.5) равносильно матричному неравенству

$$\dot{Q}(t) + A^T(x,t) Q(t) + Q(t) A(x,t) + \alpha(x,t) Q(t) \geq 0, \tag{7.4.12}$$

где $\alpha(x,t)$ — заданная непрерывная функция, $x \in \partial\mathcal{I}_t$, $t \geq 0$. Матричное неравенство (7.4.12) обеспечивает инвариантность множества $\mathcal{I}_t$ для системы (7.4.6) и является обобщением известных условий инвариантности эллипсоидального конуса для линейных автономных систем [7, 129].

Пример 7.4.3 Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u, \\ \dot{u} = C(t)x + D(t)u, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \geq 0, \tag{7.4.13}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $D(t)$ — матричные функции соответствующих размеров $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ и $m \times m$ с элементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и d_{ij}. Получим условия инвариантности множества

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} :\ \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s u_s \right\}, \tag{7.4.14}$$

где $\alpha(t) > 0$ — заданная дифференцируемая функция. Данное множество является нормальным телесным конусом и представляется в виде (7.4.2) с оператором $V(x,u,t) = \left[\alpha^2 u_1^2 e - z, \ldots, \alpha^2 u_m^2 e - z, u^T\right]^T$, где $e = [1, \ldots, 1]$, $z = [x_1^2, \ldots, x_n^2]$. Роль конуса $\mathcal{K}_t$ в теореме 7.4.1 выполняет конус неотрицательных векторов $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^{nm+m}$.

Перепишем условие (7.4.4) в виде

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad u_s = 0 \implies c_s^T x + d_s^T u \geq 0, \tag{7.4.15}$$

$$\begin{gathered} V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \alpha^2 u_s^2 = x_k^2 \quad \implies \\ \alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^T x + d_s^T u) - x_k (a_k^T x + b_k^T u) \geq 0, \end{gathered} \tag{7.4.16}$$

где a_k^T, b_k^T, c_s^T и d_s^T — строки соответствующих матриц, $k = \overline{1,n}$, $s = \overline{1,m}$. В условии (7.4.15) $x = 0$ и оно приводится к виду $d_{sj} \geq 0$, $j \neq s$. В условии (7.4.16) $|x_i| \leq |x_k| = \alpha u_s \leq \alpha u_j$ $\forall i, j$.

Если $x_k > 0$, то (7.4.16) следует из соотношений

$$\alpha d_{sj} - b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot\alpha + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) \ge \alpha \sum_{i\ne k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|.$$

Действительно,

$$\alpha\dot\alpha u_s^2 + \alpha^2 u_s (c_s^T x + d_s^T u) - x_k (a_k^T x + b_k^T u) = \alpha u_s w_{sk},$$

$$w_{sk} = [\dot\alpha + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks}]\, u_s +$$
$$+ \sum_{i\ne k} (\alpha c_{si} - a_{ki}) x_i + \sum_{j\ne s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \ge$$
$$\ge \Big[\dot\alpha + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks} - \alpha \sum_{i\ne k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\Big] u_s +$$
$$+ \sum_{j\ne s} (\alpha d_{sj} - b_{kj}) u_j \ge$$
$$\ge \Big[\dot\alpha + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) - \alpha \sum_{i\ne k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\Big] u_s \ge 0.$$

Если $x_k < 0$, то из (7.4.16) аналогично получим ограничения на коэффициенты

$$\alpha d_{sj} + b_{kj} \ge 0, \quad j \ne s,$$
$$\dot\alpha - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} + b_{kj}) \ge \alpha \sum_{i\ne k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|.$$

В результате необходимые и достаточные условия позитивности системы (7.4.13) относительно конуса (7.4.14) приводятся к виду

$$\alpha d_{sj} \ge |b_{kj}|, \quad j \ne s,$$
$$\dot\alpha \pm \alpha(\alpha c_{sk} \mp a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} \mp b_{kj}) \ge \alpha \sum_{i\ne k} |\alpha c_{si} \mp a_{ki}|. \quad (7.4.17)$$

где $t \ge 0$, $k, i = \overline{1,n}$, $s, j = \overline{1,m}$. Для установления необходимости данных условий следует положить $x_k = \pm\alpha\, u_s$, $x_i = -\mathrm{sign}(\alpha c_{si} \mp a_{ki})\alpha u_s$, $i \ne k$, и рассмотреть случаи: 1) все компоненты вектора u совпадают, 2) одна из компонент u намного больше всех других компонент.

Каждой функции $\alpha(t) > 0$, удовлетворяющей системе неравенств (7.4.17), отвечает инвариантный конус (7.4.14) системы (7.4.13).

Отметим, что систему неравенств (7.4.17) можно использовать при построении управления в виде динамического компенсатора, обеспечивающего позитивную стабилизацию системы (7.4.13).

Пример 7.4.4 Рассмотрим дифференциальную систему второго порядка

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + A(t)x = 0, \quad t \geq 0, \tag{7.4.18}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — ограниченные матрицы. Если для некоторой функции $\alpha(t)$ выполняется система неравенств

$$b_{sj}(t) \leq -\frac{1}{\alpha(t)} < 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha}(t) - \alpha(t)\sum_j b_{sj}(t) \geq |\alpha^2(t)a_{sk}(t) + 1| + \alpha^2(t)\sum_{i \neq k} |a_{si}(t)|,$$

$$t \geq 0, \quad i, j, k, s = \overline{1, n},$$

то система (7.4.18) имеет инвариантное множество

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} : \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s \dot{x}_s \right\}.$$

Данное утверждение устанавливается путем приведения системы (7.4.18) к форме Коши

$$\dot{z} = M(t)z, \quad M(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -A(t) & -B(t) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \tag{7.4.19}$$

и использования соотношений (7.4.17).

Исходя из соотношений (7.4.5) и (7.4.19), можно построить инвариантные множества системы (7.4.18) в виде (7.4.2) с квадратичной функцией $V(z) = z^T Qz$. Например, в случае постоянных матриц, полагая

$$Q = \begin{bmatrix} S + B^T RB & B^T R \\ RB & R \end{bmatrix},$$

и используя лемму Шура, получим условия

$$\alpha^2 S - \alpha(B^T S + SB) - (S - A^T R)R^{-1}(S - RA) \leq 0, \quad R = R^T < 0,$$

выполнение которых при некотором $\alpha < 0$ обеспечивают системе (7.4.18) инвариантное множество вида

$$\mathcal{I} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} : \; x^T(S + B^T RB)x + 2\dot{x}^T RBx + \dot{x}^T R\dot{x} \geq 0 \right\}.$$

Если при этом $S = A^T R + RA > 0$, то матрицы A и B должны быть гурвицевыми. В случае $\mathrm{i}(S) = \{1, n-1, 0\}$ данное множество состоит из двух противоположных эллипсоидальных конусов в фазовом пространстве системы (7.4.19).

7.5 Обобщенный метод сравнения систем

В теории устойчивости движения применяются методы сравнения, основанные на отображении пространства состояний сложной системы в пространство состояний вспомогательной системы (см., например, [2,44,73,79,80,86]). Системы сравнения ищутся в классах позитивных и монотонных систем относительно заданных конусов. Приведем обобщенную методику сравнения систем, вытекающую из метода построения инвариантных множеств (см. параграф 7.4). Эта методика позволяет сравнивать динамические свойства конечного семейства динамических систем, функционирующих в разных пространствах.

Рассмотрим семейство независимых систем

$$\mathcal{S}_i: \quad \dot{X}_i = \mathbf{F}_i(X_i, t), \quad X_i \in \mathcal{X}_i, \ \ t \ge 0, \ \ i = \overline{1, s}. \tag{7.5.1}$$

Для упрощения выкладок введем обозначения

$$X = \big[X_1, \ldots, X_s\big], \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_s,$$

$$\mathbf{F}(X, t) = \big[\mathbf{F}_1(X_1, t), \ldots, \mathbf{F}_s(X_s, t)\big],$$

при этом семейство систем (7.5.1) представляется в виде

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \ \ t \ge 0. \tag{7.5.2}$$

Будем предполагать, что каждому начальному условию $X(t_0) = X_0 \in \Omega$ соответствует единственное решение $X(t)$ системы (7.5.2) в некоторой области $\Omega \subseteq \mathcal{X}$ при $t \ge t_0 \ge 0$.

Пусть $\mathcal{E}$ — пространство с клином $\mathcal{V}_t$ и задано отображение $\mathbf{W} : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$, являющееся непрерывно дифференцируемой в области $\Omega \times [0, \infty)$ оператор-функцией и не являющееся всюду положительным относительно $\mathcal{V}_t$.

Определение 7.5.1 Семейство систем (7.5.1) называется *сравнимым*, если для любого $\tau \ge 0$ выполняется условие

$$\mathbf{W}\big(X(\tau), \tau\big) \in \mathcal{V}_\tau \implies \mathbf{W}\big(X(t), t\big) \in \mathcal{V}_t, \quad t \ge \tau. \tag{7.5.3}$$

При этом $\mathbf{W}$ является оператором сравнения данного семейства.

Непосредственно из теоремы 7.4.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.5.1 *Пусть $\mathcal{V}_t$ — телесный конус, удовлетворяющий свойству вложения* (7.2.7). *Тогда семейство систем* (7.5.1) *сравнимо в том и только в том случае, когда для любого $t \ge 0$ выполняется условие*

$$\mathbf{W}(X, t) \in \mathcal{V}_t, \ \ \varphi \in \mathcal{V}_t^*, \ \ \varphi\big(\mathbf{W}(X, t)\big) = 0 \implies \varphi\big(\mathbf{D}_t \mathbf{W}(X, t)\big) \ge 0, \tag{7.5.4}$$

где $\mathbf{D}_t$ — оператор дифференцирования в силу системы (7.5.2).

Отметим, что условие (7.5.4) является следствием конусного неравенства

$$\mathbf{D}_t\mathbf{W}(X,t)+\alpha(X,t)\mathbf{W}(X,t)\overset{\mathcal{V}_t}{\geq} 0,\quad X\in\partial\mathcal{I}_t,\quad t\geq 0,$$

где $\mathcal{I}_t=\{X\in\mathcal{X}:\ \mathbf{W}(X,t)\in\mathcal{V}_t\}$, $\alpha(X,t)$ — скалярная непрерывная функция.

Сформулируем основные утверждения принципа сравнения для двух и трех систем с нулевыми положениями равновесия, которые при определенных условиях являются следствиями теоремы 7.5.1. При этом в фазовых пространствах систем сравнения будем использовать лишь нормальные воспроизводящие конусы $\mathcal{K}_t$ с ограниченной константой нормальности.

Случай 1. Пусть $s=2$, $\mathbf{F}_1(\Theta,t)\equiv 0$, $\mathbf{F}_2(\Phi,t)\equiv 0$ и $\mathbf{W}(X,t)=X_2-\mathbf{V}(X_1,t)$, где $\mathbf{V}:\mathcal{X}_1\times[0,\infty)\to\mathcal{X}_2$ — непрерывная всюду положительная относительно нормального воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_t\subset\mathcal{X}_2$ оператор-функция. Если $\mathbf{F}_2\in\overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$ и

$$\mathbf{D}_t\mathbf{V}(X_1,t)\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}\mathbf{F}_2\big(\mathbf{V}(X_1,t),t\big),\quad t\geq 0,\tag{7.5.5}$$

то из определения класса оператор-функций $\overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$ (см. параграф 7.2) следует, что $\mathcal{S}_2$ является *верхней системой сравнения* для системы $\mathcal{S}_1$, т. е.

$$\Phi\overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq}\mathbf{V}\big(X_1(\tau),\tau\big)\overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq}X_2(\tau)\Longrightarrow\Phi\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}\mathbf{V}\big(X_1(t),t\big)\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}X_2(t),\quad t>\tau.$$

Это означает, что системы $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ сравнимы в смысле определения 7.5.1 с оператором сравнения $\mathbf{W}$.

Предположим, что оператор $\mathbf{V}$ обладает дополнительными свойствами:

$$\mathbf{V}(\Theta,t)\equiv\Phi,\ \|\mathbf{V}(X,t)-\Phi\|\geq v(X)>0,\quad X\neq\Theta,\ t\geq 0,\tag{7.5.6}$$

где v — непрерывная функция такая, что $v(\Theta)=0$ и

$$v(X)\leq v(Y)\implies\|X-\Theta\|\leq\|Y-\Theta\|.$$

Теорема 7.5.2 *Пусть* $\mathbf{F}_2 \in \overline{\mathcal{F}}_2(\Phi)$*, а всюду положительный оператор* $\mathbf{V}$ *удовлетворяет условиям* (7.5.5) *и* (7.5.6)*. Тогда состояние* $X_1 \equiv \Theta$ *системы* $\mathcal{S}_1$ *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, если состояние* $X_2 \equiv \Phi$ *системы* $\mathcal{S}_2$ *устойчиво (асимптотически устойчиво) в* $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$*.*

Случай 2. Пусть $s = 3$, $\mathbf{F}_1(\Phi,t) \equiv \mathbf{F}_3(\Phi,t) \equiv 0$, $\mathbf{F}_2(\Theta,t) \equiv 0$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_3$ и $\mathbf{W}(X,t) = \big[\mathbf{V}(X_2,t) - X_1,\, X_3 - \mathbf{V}(X_2,t)\big]$, где $\mathbf{V} : \mathcal{X}_2 \times [0,\infty) \to \mathcal{X}_1$ — непрерывное отображение и $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}_1$ — нормальный воспроизводящий конус.

Если $\mathbf{F}_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$, $\mathbf{F}_3 \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ и

$$\mathbf{F}_1\big(\mathbf{V}(X_2,t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{D}_t\mathbf{V}(X_2,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}_3\big(\mathbf{V}(X_2,t),t\big), \quad t \geq 0, \tag{7.5.7}$$

то из определения классов оператор-функций $\underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ и $\overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$ при $X_1(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^-(\Phi)$, $X_3(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Phi)$ и $t > \tau \geq 0$ имеем

$$X_1(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}\big(X_2(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_3(\tau) \Longrightarrow X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}\big(X_2(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_3(t). \tag{7.5.8}$$

Это означает, что три системы $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ и $\mathcal{S}_3$ сравнимы в смысле определения 7.5.1 с оператором сравнения $\mathbf{W}$ относительно конуса $\mathcal{V}_t = \mathcal{K}_t \times \mathcal{K}_t$. При этом $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_3$ являются соответственно *нижней* и *(верхней) системами сравнения* для системы $\mathcal{S}_2$.

Теорема 7.5.3 *Пусть* $\mathbf{F}_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$*,* $\mathbf{F}_3 \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Phi)$*, а оператор* $\mathbf{V}$ *удовлетворяет условиям* (7.5.6) *и* (7.5.7)*. Тогда состояние* $X_2 \equiv \Theta$ *системы* $\mathcal{S}_2$ *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, если состояния* $X_1 \equiv \Phi$ *системы* $\mathcal{S}_1$ *и* $X_3 \equiv \Phi$ *системы* $\mathcal{S}_3$ *устойчивы (асимптотически устойчивы) соответственно в* $\mathcal{K}_t^-(\Phi)$ *и* $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$*.*

Доказательство. Поскольку конус $\mathcal{K}_t$ воспроизводящий и несплющенный, то

$$\mathbf{V}(X_2(\tau),\tau) - \Phi = U_+ - U_-,\ \|U_\pm\| \leq \gamma\,\|\mathbf{V}(X_2(\tau),\tau) - \Phi\|,\ U_\pm \in \mathcal{K}_\tau,$$

где $\gamma > 0$ — универсальная константа. Пусть $X_1(t)$ и $X_3(t)$ — решения систем $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_3$ с начальными условиями $X_1(\tau) = \Phi - U_- \in \mathcal{K}_\tau^-(\Phi)$ и $X_3(\tau) = \Phi + U_+ \in \mathcal{K}_\tau^+(\Phi)$. Тогда $X_1(t) \in \mathcal{K}_t^-(\Phi)$ и $X_3(t) \in \mathcal{K}_t^+(\Phi)$ при $t \geq \tau$, если

$$\|X_1(\tau) - \Phi\| \leq \gamma \,\|\mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) - \Phi\|,$$

$$\|X_3(\tau) - \Phi\| \leq \gamma \,\|\mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) - \Phi\|.$$

Учитывая (7.5.8) и нормальность конуса $\mathcal{K}_t$, имеем

$$\|\mathbf{V}\big(X_2(t), t\big) - \Phi\| \leq \alpha\|X_1(t) - \Phi\| + \beta\|X_3(t) - \Phi\|, \quad t \geq \tau.$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ зависят от константы нормальности $\mathcal{K}_t$.

Из условий (7.5.6) и непрерывности $\mathbf{V}(X, t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\|X_2(t) - \Theta\| \leq \varepsilon$ лишь только $\|\mathbf{V}\big(X_2(t), t\big) - \Phi\| \leq \delta_0$ при $t \geq \tau$.

Используя предположения относительно устойчивости состояния $X_1 \equiv \Phi$ системы $\mathcal{S}_1$ и состояния $X_3 \equiv \Phi$ системы $\mathcal{S}_3$ соответственно в $\mathcal{K}_t^-(\Phi)$ и $\mathcal{K}_t^+(\Phi)$, выберем $\delta_\pm > 0$ так, чтобы из $\|X_1(\tau) - \Phi\| \leq \delta_-$ и $\|X_3(\tau) - \Phi\| \leq \delta_+$ вытекали соответствующие неравенства $\|X_1(t) - \Phi\| \leq \delta_0/(2\alpha)$ и $\|X_3(t) - \Phi\| \leq \delta_0/(2\beta)$ при $t \geq \tau$. Далее, выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\|X_2(\tau) - \Theta\| \leq \delta \implies \|\mathbf{V}\big(X_2(\tau), \tau\big) - \Phi\| \leq \min\{\delta_-, \delta_+\}/\gamma.$$

Тогда с учетом приведенных соотношений имеем $\|X_2(t) - \Theta\| \leq \varepsilon$ при $t > \tau$, т. е., состояние $X_2 \equiv \Theta$ системы $\mathcal{S}_2$ устойчиво по Ляпунову. При этом $X_2(t) \to \Theta$, если $X_1(t) \to \Phi$ и $X_3(t) \to \Phi$ при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

Доказательства теорем 7.5.2 и 7.5.3 аналогичны. Отметим, что при использовании данных теорем принадлежность оператор-функций классам типа $\underline{\mathcal{F}}_k(\Phi)$ и $\overline{\mathcal{F}}_k(\Phi)$ может быть установлена с помощью лемм 7.2.3 и 7.2.4.

Случай 3. Пусть $s \geq 2$. Задачи *упорядочения* и нахождения в определенном смысле *доминирующей* системы семейства (7.5.1) можно сформулировать в виде обобщенной задачи сравнения данного семейства, используя оператор сравнения вида

$$\mathbf{W}(X,t) = \big[\mathbf{V}_2(X_2,t) - \mathbf{V}_1(X_1,t), \dots, \mathbf{V}_s(X_s,t) - \mathbf{V}_{s-1}(X_{s-1},t)\big],$$

где $\mathbf{V}_i : \mathcal{X}_i \times [0,\infty) \to \mathcal{E}_1$ — непрерывные отображения, $\mathcal{E}_1$ — пространство с клином $\mathcal{K}_t$. В данном случае условие сравнения (7.5.3) относительно клина $\mathcal{V}_t = \mathcal{K}_t \times \cdots \times \mathcal{K}_t$ означает, что

$$\mathbf{V}_1\big(X_1(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}_2\big(X_2(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \cdots \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{V}_s\big(X_s(t),t\big), \quad t > \tau \geq 0,$$

как только $\mathbf{V}_1\big(X_1(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}_2\big(X_2(\tau),\tau\big) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \cdots \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \mathbf{V}_s\big(X_s(\tau),\tau\big)$. Например, если $\mathbf{V}_i(X_i,t) = \|X_i\|_{\mathcal{E}_i}$, то нормы решений систем (7.5.1) упорядочены:

$$\|X_1(t)\|_{\mathcal{E}_1} \leq \|X_2(t)\|_{\mathcal{E}_2} \leq \cdots \leq \|X_s(t)\|_{\mathcal{E}_s}, \quad t > \tau \geq 0,$$

как только $\|X_1(\tau)\|_{\mathcal{E}_1} \leq \|X_2(\tau)\|_{\mathcal{E}_2} \leq \cdots \leq \|X_s(\tau)\|_{\mathcal{E}_s}$.

Пример 7.5.1 Рассмотрим семейство нелинейных систем

$$\dot{x}_i = A_i(x_i,t)x_i, \quad x_i \in \mathbb{C}^{n_i}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,s}, \tag{7.5.9}$$

где $A_i(x_i,t)$ — непрерывные матричные функции размеров $n_i \times n_i$. Определим оператор сравнения данного семейства с помощью конуса $\mathcal{V} = \mathbb{R}_+^{s-1}$:

$$\mathbf{W}(X,t) = \big[x_2^* Q_2 x_2 - x_1^* Q_1 x_1, \dots, x_s^* Q_s x_s - x_{s-1}^* Q_{s-1} x_{s-1}\big],$$

где $Q_i(t) \equiv Q_i^*(t) > 0$ — заданные матрицы. Тогда

$$\mathbf{D}_t\mathbf{W}(X,t) = \big[x_2^* H_2 x_2 - x_1^* H_1 x_1, \dots, x_s^* H_s x_s - x_{s-1}^* H_{s-1} x_{s-1}\big],$$

где $H_i(x_i,t) = \dot{Q}_i(t) + A_i^*(x_i,t)Q_i(t) + Q_i(t)A_i(x_i,t)$, $i = \overline{1,s}$.

Используя теорему 7.5.1 и двусторонние оценки

$$\lambda_{\min}(H_i - \lambda Q_i)\, x_i^* Q_i x_i \le x_i^* H_i x_i \le \lambda_{\max}(H_i - \lambda Q_i)\, x_i^* Q_i x_i,$$

можно установить, что решения систем (7.5.9) упорядочены:

$$x_1^*(t) Q_1(t) x_1(t) \le x_2^*(t) Q_2(t) x_2(t) \le \cdots \le x_s^*(t) Q_s(t) x_s(t),$$

если

$$\lambda_{\max}(H_i - \lambda Q_i) \le \lambda_{\min}(H_{i+1} - \lambda Q_{i+1}), \quad i = \overline{1, s-1},\ t \ge \tau \ge 0,$$

$$x_1^*(\tau) Q_1(\tau) x_1(\tau) \le x_2^*(\tau) Q_2(\tau) x_2(\tau) \le \cdots \le x_s^*(\tau) Q_s(\tau) x_s(\tau).$$

В частном случае $Q_i \equiv I_{n_i}$ имеем неравенства

$$\lambda_{\max}(A_i^* + A_i) \le \lambda_{\min}(A_{i+1}^* + A_{i+1}), \quad i = \overline{1, s-1}, \tag{7.5.10}$$

обеспечивающие упорядочение решений систем (7.5.9) по евклидовой норме. Здесь для эрмитовых матриц и пучков матриц через $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\lambda_{\min}(\cdot)$ обозначены их максимальные и минимальные собственные значения. Если все системы (7.5.9) являются линейными и стационарными, то при условиях (7.5.10) можно упорядочить также области расположения спектров данных систем, ограниченных вертикальными прямыми [120].

7.6 Робастная устойчивость позитивных систем

Рассмотрим семейство дифференциальных систем типа (7.4.1):

$$\dot X = \mathbf{F}(X, t), \quad \mathbf{F}(\Theta, t) \equiv 0, \quad t \ge 0, \tag{7.6.1}$$

$$\underline{\mathbf{F}}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \mathbf{F}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} \overline{\mathbf{F}}(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \ge 0, \tag{7.6.2}$$

где $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}$ — нормальный воспроизводящий конус с ограниченной константой нормальности. Выделим в данном семействе две предельные системы

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathbf{F}}(\underline{X}, t), \quad \underline{\mathbf{F}}(\Theta, t) \equiv 0, \quad t \ge 0, \tag{7.6.3}$$

$$\dot{\overline{X}} = \overline{\mathbf{F}}(\overline{X}, t), \quad \overline{\mathbf{F}}(\Theta, t) \equiv 0, \quad t \geq 0. \tag{7.6.4}$$

Если $\underline{\mathbf{F}} \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ и $\overline{\mathbf{F}} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$, то при $\underline{X}(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^-(\Theta)$ и $\overline{X}(\tau) \in \mathcal{K}_\tau^+(\Theta)$ имеем

$$\underline{X}(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}(\tau) \implies \underline{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t), \quad t > \tau \geq 0.$$

В этом случае (7.6.3) $\big((7.6.4)\big)$ является нижней (верхней) системой сравнения для каждой системы (7.6.1), (7.6.2). Полагая в теореме 7.5.3 $\mathbf{V}(X, t) \equiv X$, $\Theta = \Phi$, имеем следующий результат.

Теорема 7.6.1 *Пусть* $\underline{\mathbf{F}} \in \underline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$ *и* $\overline{\mathbf{F}} \in \overline{\mathcal{F}}_1(\Theta)$. *Тогда состояние* $X \equiv \Theta$ *каждой системы* (7.6.1), (7.6.2) *устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, если состояние* $\underline{X} \equiv \Theta$ *системы* (7.6.3) *и состояние* $\overline{X} \equiv \Theta$ *системы* (7.6.4) *устойчивы (асимптотически устойчивы) соответственно в* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *и* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$.

Для семейств систем вида (7.6.1), описываемых условиями

$$\underline{\mathbf{F}}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{\mathbf{F}}(X, t), \quad X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.6.5}$$

$$\underline{\mathbf{F}}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \mathbf{F}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{\mathbf{F}}(X, t), \quad X \in \mathcal{K}_t^-(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.6.6}$$

выполняются следующие утверждения.

Теорема 7.6.2 *Пусть* $\mathcal{K}_t$ *— нормальный телесный конус, удовлетворяющий свойству вложения* (7.2.7). *Если выполняется условие* (7.6.5) *при* $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$ *и* $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_2^+(\Theta)$, *то из устойчивости (асимптотической устойчивости) в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ *состояния* $\overline{X} \equiv \Theta$ *системы* (7.6.4) *следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в* $\mathcal{K}_t^+(\Theta)$ *состояния* $X \equiv \Theta$ *каждой системы* (7.6.1), (7.6.5). *Аналогично, если выполняется условие* (7.6.6) *при* $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_2^-(\Theta)$ *и* $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$, *то из устойчивости (асимптотической устойчивости) в* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *состояния*

$\underline{X} \equiv \Theta$ *системы* (7.6.3) *следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в* $\mathcal{K}_t^-(\Theta)$ *состояния* $X \equiv \Theta$ *каждой системы* (7.6.1), (7.6.6).

При условиях теоремы 7.6.2 для решений системы (7.6.2) выполняются соответствующие оценки

$$\Theta \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}(\tau) \implies \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t), \quad t > \tau \geq 0,$$

$$\underline{X}(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \Theta \implies \underline{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \Theta, \quad t > \tau \geq 0.$$

При этом из (7.6.5) и $\underline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$ следует $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^+(\Theta)$. Аналогично, при условии (7.6.6) $\overline{\mathbf{F}} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$ влечет $\mathbf{F} \in \mathcal{F}_0^-(\Theta)$.

Рассмотрим семейства нелинейных систем

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X,t)X, \quad t \geq 0, \tag{7.6.7}$$

описываемые операторными неравенствами:

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglelefteq \mathbf{A}(X,t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(X,t), \quad X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \ \ t \geq 0, \tag{7.6.8}$$

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) \trianglelefteq \mathbf{A}(X,t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(X,t), \quad X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \Theta \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0, \ \ t \geq 0. \tag{7.6.9}$$

Предполагаем, что значения оператор-функций $\mathbf{A}(X,t)$, $\underline{\mathbf{A}}(X,t)$ и $\overline{\mathbf{A}}(X,t)$ являются линейными ограниченными операторами в $\mathcal{X}$. Пусть $X \equiv \Theta$ — общее состояние равновесия каждой системы данных семейств, включая предельные

$$\dot{\underline{X}} = \underline{\mathbf{A}}(\underline{X},t)\underline{X}, \quad t \geq 0, \tag{7.6.10}$$

$$\dot{\overline{X}} = \overline{\mathbf{A}}(\overline{X},t)\overline{X}, \quad t \geq 0. \tag{7.6.11}$$

Тогда либо $\Theta = 0$, либо $\Theta \neq 0$ и $\Theta \in \ker \mathbf{A}(\Theta,t)$ при $t \geq 0$.

Сформулируем следствия теоремы 7.6.2 и леммы 7.2.3, используя ограничения

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t) + \underline{\mathbf{B}}_+(X,t) \trianglerighteq \underline{\beta}_+(X,t)\,\mathbf{I}, \quad X \in \mathcal{K}_t^+(\Theta), \quad t \geq 0, \tag{7.6.12}$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t)+\overline{\mathbf{B}}_{+}(X,t)\trianglerighteq\overline{\beta}_{+}(X,t)\,\mathbf{I},\quad X\in\mathcal{K}_t^{+}(\Theta),\quad t\geq 0,\ (7.6.13)$$

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t)+\underline{\mathbf{B}}_{-}(X,t)\trianglerighteq\underline{\beta}_{-}(X,t)\,\mathbf{I},\quad X\in\mathcal{K}_t^{-}(\Theta),\quad t\geq 0,\ (7.6.14)$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t)+\overline{\mathbf{B}}_{-}(X,t)\trianglerighteq\overline{\beta}_{-}(X,t)\,\mathbf{I},\quad X\in\mathcal{K}_t^{-}(\Theta),\quad t\geq 0,\ (7.6.15)$$

где $\underline{\mathbf{B}}_{\pm}(X,t)H=[\underline{\mathbf{A}}'_{\pm}(X,t)H]X$, $\overline{\mathbf{B}}_{\pm}(X,t)H=[\overline{\mathbf{A}}'_{\pm}(X,t)H]X$, $\underline{\mathbf{A}}'_{\pm}(X,t)$ и $\overline{\mathbf{A}}'_{\pm}(X,t)$ — производные Гато по конусу $\pm\mathcal{K}_t$, $\underline{\beta}_{\pm}(X,t)$ и $\overline{\beta}_{\pm}(X,t)$ — скалярные функции.

Следствие 7.6.1 *Пусть $\mathcal{K}_t$ — нормальный телесный конус, удовлетворяющий свойству вложения* (7.2.7). *Если выполняются условия* (7.6.12) *и* (7.6.13)*, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$ состояния $\overline{X}\equiv\Theta$ системы* (7.6.11) *следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в $\mathcal{K}_t^{+}(\Theta)$ состояния $X\equiv\Theta$ каждой системы* (7.6.7)*,* (7.6.8)*. Аналогично, при выполнении условий* (7.6.14) *и* (7.6.15) *из устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$ состояния $\underline{X}\equiv\Theta$ системы* (7.6.10) *следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) в $\mathcal{K}_t^{-}(\Theta)$ состояния $X\equiv\Theta$ каждой системы* (7.6.7)*,* (7.6.9)*.*

Отметим, что в следствии 7.6.1 вместо (7.6.12) и (7.6.15) можно использовать соответствующие ограничения

$$\underline{\mathbf{A}}(X,t)\trianglerighteq\underline{\alpha}_{+}(X,t)\,\mathbf{I},\ \underline{\mathbf{A}}(X,t)\Theta\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}0,\ X-\Theta\in\partial\mathcal{K}_t,\ t\geq 0,\tag{7.6.16}$$

$$\overline{\mathbf{A}}(X,t)\trianglerighteq\overline{\alpha}_{-}(X,t)\,\mathbf{I},\ \overline{\mathbf{A}}(X,t)\Theta\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}0,\ \Theta-X\in\partial\mathcal{K}_t,\ t\geq 0.\tag{7.6.17}$$

Пример 7.6.1 Рассмотрим семейство систем

$$\dot{x}=A(x,t)x,\quad \underline{A}(x,t)\trianglelefteq A(x,t)\trianglelefteq\overline{A}(x),\quad x\in\mathcal{K},\quad t\geq 0,\ (7.6.18)$$

где $\underline{A}(x,t)=\underline{A}_0(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\underline{A}_j(t)$, $\overline{A}(x)=\overline{A}_0+\sum\limits_{j=1}^{n}x_j\overline{A}_j$, $\underline{A}_i(t)\trianglelefteq\overline{A}_i$, $\underline{A}_i(t)=\|\underline{a}_{ks}^{(i)}(t)\|_{k,s=1}^{n}$ и $\overline{A}_i=\|\overline{a}_{ks}^{(i)}\|_{k,s=1}^{n}$ — матрицы размеров

$n \times n$, $i = \overline{0,n}$, $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$ — конус неотрицательных векторов, $\trianglelefteq$ обозначает поэлементное матричное неравенство.

Производные Гато (Фреше) векторных функций $F(x,t) = A(x,t)x$, $\underline{F}(x,t) = \underline{A}(x,t)x$ и $\overline{F}(x) = \overline{A}(x)x$ определяются соотношениями

$$F'(x,t) = A(x,t) + B(x,t), \quad B(x,t) = \left[\frac{\partial A}{\partial x_1}\,x, \ldots, \frac{\partial A}{\partial x_n}\,x\right],$$

$$\underline{F}'(x,t) = \underline{A}_0(t) + \sum_{j=1}^{n} x_j \underline{B}_j(t), \quad \overline{F}'(x) = \overline{A}_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{B}_j,$$

где $\underline{B}_j(t) = \|\underline{a}^{(j)}_{ks}(t) + \underline{a}^{(s)}_{kj}(t)\|^n_{k,s=1}$, $\overline{B}_j = \|\overline{a}^{(j)}_{ks} + \overline{a}^{(s)}_{kj}\|^n_{k,s=1}$. Условия (7.6.12) и (7.6.16) при $\Theta = 0$ приводятся к соответствующему виду

$$\underline{a}^{(0)}_{ks}(t) \geq 0, \quad \underline{a}^{(j)}_{ks}(t) + \underline{a}^{(s)}_{kj}(t) \geq 0, \quad k \neq s, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1,n},$$

и

$$\underline{a}^{(i)}_{ks}(t) \geq 0, \quad k \neq s, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{0,n}.$$

Если выполняется одно из этих условий и, кроме того,

$$\overline{A}_0^{-1} \trianglelefteq 0, \quad \overline{a}^{(0)}_{ks} \geq 0, \quad \overline{a}^{(j)}_{ks} + \overline{a}^{(s)}_{kj} \geq 0, \quad k \neq s, \quad j = \overline{1,n},$$

то согласно следствию 7.6.1 нулевое состояние каждой системы (7.6.18) асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}$ (см. также теорему 7.3.3 и следствие 7.3.1).

Рассмотрим параметрическое семейство нелинейных систем

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X,p)X, \quad \mathbf{A}(X,p) = \sum_{i=1}^{s} p_i \mathbf{A}_i(X), \; X \in \mathcal{X}, \; t \geq 0, \quad (7.6.19)$$

где $p = [p_1, \ldots, p_s]^T \in \mathbb{R}^s_+$ — вектор неотрицательных параметров, а значения оператор-функций $\mathbf{A}_i(X)$ являются линейными ограниченными операторами в $\mathcal{X}$.

Следствие 7.6.2 *Пусть все операторы* $\mathbf{A}_i(X)$ *удовлетворяют одному из условий следствия* 7.3.1 *типа внедиагональной положительности относительно нормального телесного конуса* $\mathcal{K}$ *и совместна система конусных неравенств*

$$H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \mathbf{A}_i(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

Тогда состояние $X \equiv 0$ *каждой системы* (7.6.19) *при* $p \in \mathbb{R}^s_+$ *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{X} = \mathbf{A}(t)X, \quad \underline{\mathbf{A}}(t) \trianglelefteq \mathbf{A}(t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{A}}(t), \quad t \geq 0, \tag{7.6.20}$$

где операторное неравенство $\trianglelefteq$ порождается нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K}_t$. Выделим в (7.6.20) две системы

$$\dot{X} = \underline{\mathbf{A}}(t)X, \tag{7.6.21}$$

$$\dot{X} = \overline{\mathbf{A}}(t)X. \tag{7.6.22}$$

Теорема 7.6.3 *Каждая система* (7.6.20) *позитивна относительно* $\mathcal{K}_t$*, если*

$$e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad t \geq \vartheta \geq \tau \geq 0, \quad t - \tau \geq h \geq 0. \tag{7.6.23}$$

Если система (7.6.22) *асимптотически устойчива, то каждая позитивная система* (7.6.20) *асимптотически устойчива.*

Доказательство. При условии (7.6.23) конус $\mathcal{K}_t$ должен иметь свойство вложения (7.2.7). Каждое решение системы (7.6.20) имеет вид $X(t) = \mathbf{E}_A(t,\tau)X_\tau$, где $\mathbf{E}_A(t,\tau)$ — эволюционный оператор, $X(\tau) = X_\tau$ — начальный вектор. Эволюционный и экспоненциальный операторы системы (7.6.20) связаны соотношениями [27]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A(t,\tau) &= \lim_{n\to\infty} \left[e^{\mathbf{A}(\vartheta_n)\,h_n} \,\ldots\, e^{\mathbf{A}(\vartheta_1)\,h_n}\right], \\ e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h} &= \lim_{n\to\infty} \left[\mathbf{E}_A(\vartheta, \vartheta - h/n)\right]^n, \end{aligned} \tag{7.6.24}$$

где $\vartheta_k \in \big[t_k, t_{k+1}\big]$, $t_k = \tau + kh_n$, $h_n = (t-\tau)/n$, $k = \overline{0,n}$, $t \geq \tau$, $\vartheta \geq 0$, $h \geq 0$. Если $\mathbf{A}(t)\mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_t$, то при условии (7.2.7) имеем

$$e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}\mathbf{A}^k(\vartheta)\,\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t, \quad \tau \leq \vartheta \leq t, \quad 0 \leq h \leq t-\tau.$$

Если $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_1(t) + \mathbf{A}_2(t)$, $e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$ и $e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$, то $e^{\mathbf{A}(\vartheta)\,h}\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$, где [27]

$$e^{\mathbf{A}(\vartheta)h} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\left[e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,\frac{h}{n}}e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,\frac{h}{n}} + e^{\mathbf{A}_2(\vartheta)\,\frac{h}{n}}e^{\mathbf{A}_1(\vartheta)\,\frac{h}{n}}\right]^n,$$

и согласно (7.6.24) $\mathbf{E}_A(t,\tau)\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_t$. В частности, полагая $\mathbf{A}_1(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)$ и $\mathbf{A}_2(t) = \mathbf{A}(t) - \underline{\mathbf{A}}(t)$, при условии (7.6.23) имеем свойство позитивности каждой системы (7.6.20) относительно $\mathcal{K}_t$. Причем, в случае постоянного конуса условие (7.6.23) необходимо для позитивности системы (7.6.21).

Пусть $X(t)$ и $\overline{X}(t)$ — решения систем (7.6.20) и (7.6.22) с соответствующими начальными условиями $X(\tau) = X_\tau$ и $\overline{X}(\tau) = \overline{X}_\tau$. Тогда $0 \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{X}(t)$ при $t \geq \tau \geq 0$, лишь только $0 \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} X_\tau \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} \overline{X}_\tau$. В силу нормальности конуса $\mathcal{K}_t$ из асимптотической устойчивости системы (7.6.22) следует асимптотическая устойчивость в $\mathcal{K}_t$ каждой позитивной системы (7.6.20). Данное утверждение выполняется также для конуса $-\mathcal{K}_t$. Если при этом конус $\mathcal{K}_t$ воспроизводящий, то каждая система (7.6.20) асимптотически устойчива по Ляпунову (см. доказательство теоремы 7.5.3).

Теорема доказана.

Замечание 7.6.1 Каждая система (7.6.20) является позитивной относительно $\mathcal{K}_t$, если для некоторой скалярной функции $\alpha(t)$ выполняется операторное неравенство $\underline{\mathbf{A}}(t) \trianglerighteq \alpha(t)\,\mathbf{I}$. Из данного неравенства вытекает условие (7.6.23) при ограничении (7.2.7). Действительно, $e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,\delta} = e^{\alpha(\vartheta)\,\delta}\,e^{[\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)-\alpha(\vartheta)\,\mathbf{I}]\,\delta}$ и

$$e^{\underline{\mathbf{A}}(\vartheta)\,\delta}\mathcal{K}_\tau = e^{\alpha(\vartheta)\,\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!}\big[\underline{\mathbf{A}}(\vartheta) - \alpha(\vartheta)\mathbf{I}\big]^k\mathcal{K}_\tau \subseteq \mathcal{K}_\vartheta \subseteq \mathcal{K}_t.$$

Пример 7.6.2 Рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \ \ \underline{A}(t) \trianglelefteq A(t) \trianglelefteq \overline{A}, \ \ \overline{A}^{-1} \trianglelefteq 0, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0, \quad (7.6.25)$$

где $\underline{A}(t)$ — матричная функция с неотрицательными внедиагональными элементами, $-\overline{A}$ — M-матрица, $\trianglelefteq$ обозначает поэлементное матричное неравенство. Система $\dot{x} = \underline{A}(t)x$ позитивна относительно конуса $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n_+$, а система $\dot{x} = \overline{A}x$ асимптотически устойчива. Поэтому каждая система (7.6.25) является асимптотически устойчивой и позитивной относительно $\mathbb{R}^n_+$.

Пример 7.6.3 Рассмотрим семейство матричных систем

$$\dot{X} = \mathbf{M}(t)X, \ \ \underline{\mathbf{M}}(t) \trianglelefteq \mathbf{M}(t) \trianglelefteq \overline{\mathbf{M}}(t), \ \ X \in \mathbb{C}^{n\times n}, \ \ t \geq 0, \quad (7.6.26)$$

$$\underline{\mathbf{M}}(t)X = A^*(t)X + XA(t), \ \overline{\mathbf{M}}(t)X = \underline{\mathbf{M}}(t)X + \sum_{i=1}^{s} B^*(t)XB(t),$$

где $\trianglelefteq$ обозначает неравенство, порождаемое конусом эрмитовых неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K}_n$. Поскольку $e^{\underline{\mathbf{M}}(\vartheta)\,\delta}X = e^{A^*(\vartheta)\,\delta}Xe^{A(\vartheta)\,\delta}$, то матричное дифференциальное уравнение Ляпунова $\dot{\underline{X}} = A^*(t)\underline{X} + \underline{X}A(t)$ и каждая система (7.6.26) являются позитивными относительно $\mathcal{K}_n$. Если система

$$\dot{\overline{X}} = A^*(t)\overline{X} + \overline{X}A(t) + \sum_{i=1}^{s} B^*(t)\overline{X}B(t) \quad (7.6.27)$$

асимптотически устойчива, то каждая система (7.6.26) является позитивной и асимптотически устойчивой. Автономная система вида (7.6.27) асимптотически устойчива, если совместна система матричных неравенств

$$A^*X + XA + \sum_{i=1}^{s} B^*XB < 0, \quad X = X^* > 0.$$

Отметим, что матричное дифференциальное уравнение (7.6.27) известно как уравнение вторых моментов стохастической системы Ито (см. параграф 2.5). Данное уравнение позитивно и монотонно относительно конуса $\mathcal{K}_n$.

7.7 Позитивная стабилизация динамических систем

При установлении условий устойчивости состояний динамических систем, обладающих свойствами типа позитивности и монотонности, целесообразно использовать специальные методы исследования (см. параграф 7.3). Данные свойства изучаемых систем можно обеспечить с помощью статических или динамических регуляторов.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{X} = \mathbf{F}(X, U, t), \quad Y = \mathbf{G}(X, U, t), \quad Z = \mathbf{H}(X, U, t), \tag{7.7.1}$$

где $X \in \mathcal{X}$ — состояние системы, $Y \in \mathcal{Y}$ — наблюдаемый выход, $Z \in \mathcal{Z}$ — управляемый выход, $U \in \mathcal{U}$ — управление, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ — непрерывные оператор-функции, $t \geq 0$. Пусть $\mathbf{F}(0, 0, t) \equiv 0$, $\mathbf{H}(0, 0, t) \equiv 0$ и в пространстве $\mathcal{Z}$ выделен конус $\mathcal{K}_t$.

Система (7.7.1) называется *позитивно достижимой* относительно конуса $\mathcal{K}$, если существует регулятор

$$U = \mathbf{K}(Y, t), \tag{7.7.2}$$

для которого $Z(t) \in \mathcal{K}_t$, как только $Z(\tau) \in \mathcal{K}_\tau$ и $t > \tau \geq 0$. Если к тому же $Z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то данная система называется *позитивно стабилизируемой* относительно конуса $\mathcal{K}$.

Аналогично определяются свойства позитивной достижимости и позитивной стабилизируемости системы (7.7.1) с помощью динамического регулятора

$$\dot{R} = \mathbf{D}(R, Y, U, t), \quad U = \mathbf{K}(R, Y, t), \tag{7.7.3}$$

где $R \in \mathcal{R}$ — состояние регулятора, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{K}$ — оператор-функции, подлежащие определению. При этом управляемый выход Z может явно содержать компоненты как состояния системы X, так и регулятора R. Например, если положить $Z = \big[X, R\big]$, то конус $\mathcal{K}_t$ определяется в пространстве $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{R}$.

При изучении условий позитивной достижимости и позитивной стабилизируемости класса систем

$$\dot{X} = \mathbf{A}(X)X + \mathbf{B}(X)U, \quad Y = \mathbf{C}(X)X, \quad U = \mathbf{K}(X)Y, \quad (7.7.4)$$

можно воспользоваться следствием 7.3.1 теоремы 7.3.3. В данном случае пространством управляемых выходов системы $\mathcal{Z}$ является все пространство состояний $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ — телесный конус и операторное неравенство

$$\mathbf{M}(X) = \mathbf{A}(X) + \mathbf{B}(X)\mathbf{K}(X)\mathbf{C}(X) \trianglerighteq \alpha(X)\mathbf{I}, \quad X \in \partial\mathcal{K}, \quad (7.7.5)$$

разрешимо относительно $\mathbf{K}(X)$ для некоторой функции $\alpha(X)$, то система (7.7.4) позитивно достижима. Если при этом система линейных конусных неравенств

$$\mathbf{M}(0)H \overset{\mathcal{K}}{<} 0, \quad H \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad (7.7.6)$$

совместна, то состояние $X \equiv 0$ замкнутой системы (7.7.4) асимптотически устойчиво.

Пример 7.7.1 Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (7.7.7)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$ и $u \in \mathbb{R}^m$. Данная система позитивно достижима относительно конуса $\mathbb{R}^n_+$ с помощью регулятора

$$u = Ky \quad (7.7.8)$$

в том и только в том случае, когда совместна система неравенств (см. пример 7.3.1)

$$a_{ij} + b_{i*}Kc_{*j} \geq 0, \quad i \neq j, \quad (7.7.9)$$

где b_{i*} и c_{*j} — строки и столбцы соответствующих матриц B и C, $i, j = \overline{1, n}$. При выполнении условий (7.7.9) замкнутая система

(7.7.7), (7.7.8) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существует диагональная матрица-решение $X > 0$ матричного неравенства

$$(A + BKC)X + X(A + BKC)^T < 0. \tag{7.7.10}$$

При вычислении матрицы K можно воспользоваться одним из утверждений теоремы 3.1.2. Так, если для некоторой диагональной матрицы $X > 0$ выполняются соотношения (3.1.34), то регулятор с матрицей K, удовлетворяющей системе линейных неравенств (7.7.9) и (7.7.10), обеспечивает позитивную стабилизацию системы (7.7.7).

Условия позитивной стабилизации системы (7.7.7) относительно эллипсоидального конуса $\mathcal{K}(Q)$ представляет система соотношений

$$M^TQ + QM + \alpha Q \geq 0,$$

$$M^TQM \leq \beta Q, \quad h^TM^{-1}h \leq 0, \quad h^T(M^TQM)^{-1}h \geq 0,$$

где $M = A+BKC$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, h — собственный вектор матрицы Q, отвечающий ее положительному собственному значению.

В задаче позитивной стабилизации системы (7.7.7) с помощью динамического регулятора порядка r

$$\dot{\xi} = Z\xi + Vy, \quad u = U\xi + Ky, \tag{7.7.11}$$

могут быть использованы конусы типа $\mathcal{K}_\mu(\alpha, p)$ и $\mathcal{K}_\sigma(\beta, q)$ (см. параграф 8.7), определенные в пространстве замкнутой системы

$$\dot{\widehat{x}} = \widehat{M}\widehat{x}, \quad \widehat{M} = \begin{bmatrix} M & BU \\ VC & Z \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}, \tag{7.7.12}$$

где $M = A + BKC$. В частности, при $r = 1$ замкнутая система (7.7.12) в пространстве $\mathbb{R}_+^{n+1}$ имеет инвариантный круговой конус Минковского $\mathcal{K}_c = \{[x^T, \xi]^T : \|x\|_2 \leq \xi\}$, если [55, 56]

$$\begin{bmatrix} \gamma I_n - M - M^T & C^TV^T - BU \\ VC - U^TB^T & 2Z - \gamma \end{bmatrix} \geq 0 \tag{7.7.13}$$

для некоторо $\gamma \in \mathbb{R}$. Система (7.7.12) позитивна относительно конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty) = \{[x^T,\xi]^T : \max\limits_i |x_i| \leq \min\limits_j \xi_j\}$ в том и только в том случае, когда выполняются соотношения (см. пример 7.4.3)

$$\begin{gathered} \sum_{i\neq k} |v_{s*}c_{*i} \mp m_{ki}| \leq \sum_j (z_{sj} \mp b_{k*}u_{*j}) \pm v_{s*}c_{*k} \mp m_{kk}, \\ z_{sj} \geq |b_{k*}u_{*j}|, \quad j \neq s, \quad k,i = \overline{1,n}, \quad s,j = \overline{1,r}. \end{gathered} \tag{7.7.14}$$

Условиями позитивной стабилизации системы (7.7.7) относительно конуса $\mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$ с помощью регулятора (7.7.11) являются объединение условий позитивности системы (7.7.12) и условий положительной обратимости блочной матрицы $-\widehat{M}$, эквивалентных позитивности линейной дискретной системы

$$\widehat{x}_{t+1} = \widehat{N}\widehat{x}_t, \quad \widehat{N} = -\widehat{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} \\ \widehat{C} & \widehat{D} \end{bmatrix}. \tag{7.7.15}$$

Блоки $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ и $\widehat{D}$ могут быть определены с помощью формулы Фробениуса для обращения блочных матриц.

В [5] получены алгебраические критерии и достаточные условия позитивности системы (7.7.15) относительно конусов $\mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$. Так, критерий позитивности системы (7.7.15) относительно конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty)$ представляют соотношения

$$\widehat{d}_{kj} \geq |\widehat{b}_{sj}|, \quad \sum_{i=1}^n |\widehat{c}_{ki} \pm \widehat{a}_{si}| \leq \sum_{i=1}^r (\widehat{d}_{kj} \pm \widehat{b}_{sj}), \quad s = \overline{1,n},\ j,k = \overline{1,r}. \tag{7.7.16}$$

Следовательно, динамический регулятор (7.7.11) обеспечивает позитивную стабилизацию системы (7.7.7) относительно конуса $\mathcal{K}_\mu(1,\infty)$ в том и только в том случае, когда выполняется система соотношений (7.7.14) и (7.7.16).

Отметим, что условия позитивной стабилизации системы (7.7.7) относительно конуса $\mathbb{R}_+^{n+r}$ с помощью динамического регулятора (7.7.11) полного порядка $r = n$ можно представить в виде системы ЛМН (см. параграф 3.2).

Глава 8

Приложение

8.1 Эрмитовы матрицы и закон инерции

Любая *эрмитова матрица* $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ имеет вещественный спектр $\sigma(X) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ и представляется в виде

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^* = PP^* - QQ^*, \tag{8.1.1}$$

где x_i — ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_i \in \sigma(X)$, $P \in \mathbb{C}^{n \times p}$ и $Q \in \mathbb{C}^{n \times q}$ — матрицы полного ранга по столбцам.

Инерцию матрицы $\mathrm{i}(X) = \{\mathrm{i}_+(X), \mathrm{i}_-(X), \mathrm{i}_0(X)\}$ составляют количества ее положительных ($\mathrm{i}_+(X)$), отрицательных ($\mathrm{i}_-(X)$) и нулевых собственных значений с учетом кратностей. В разложении (8.1.1) $P^*Q = 0$ и $\mathrm{i}(X) = \{p, q, n - p - q\}$. Невырожденное *конгруэнтное преобразование* матрицы сохраняет ее инерцию (*закон инерции Сильвестра*):

$$\mathrm{i}(X) = \mathrm{i}(T^*XT), \quad \det T \neq 0. \tag{8.1.2}$$

Эрмитова матрица X называется *положительно* (*неотрицательно*) *определенной*, если *квадратичная форма* $x^*Xx > 0$ ($x^*Xx \geq 0$) для любого вектора $x \neq 0 \in \mathbb{C}^n$. В данном определении для вещественной *симметричной матрицы* $X = X^T$ используются лишь векторы $x \in \mathbb{R}^n$. Матрица X неотрицательно определена в том и только в том случае, когда в ее разложении (8.1.1) $Q = 0$. При этом она положительно определена, если $p = n$.

Лемма 8.1.1 *Пусть* $X = PP^* - QQ^* \geq 0$, *где* $P \in \mathbb{C}^{n\times p}$ *и* $Q \in \mathbb{C}^{n\times q}$. *Тогда* $\operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} P$ *и* $Q = PC$ *для некоторой матрицы* $C \in \mathbb{C}^{p\times q}$. *При этом* $CC^* \leq I_p$ $(CC^* < I_p)$, *если* $\operatorname{rank} P = p$ $(\operatorname{rank} X = p)$. *Обратно, если* $Q = PC$ *и* $CC^* \leq I_p$ $(CC^* < I_p)$, *то* $X \geq 0$ $(\mathrm{i}(X) = \{\operatorname{rank} P, 0, 0\})$.

Доказательство. Используем *скелетное разложение*

$$P = LR^*, \quad L \in \mathbb{C}^{n\times r}, \ \ R \in \mathbb{C}^{r\times p}, \ \ \operatorname{rank} P = \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} R = r.$$

Очевидно, что в случае $r = n$ все утверждения леммы выполняются. В случае $r < n$ имеем представление

$$Q = LQ_1 + L^{\perp}Q_2, \quad Q_1 \in \mathbb{C}^{r\times q}, \ Q_2 \in \mathbb{C}^{n-r\times q},$$

где $L^{\perp} \in \mathbb{C}^{n\times n-r}$ — *ортогональное дополнение* множителя L, $\det T \neq 0$, $T = \left[L, L^{\perp}\right]$, $L^*L^{\perp} = 0$.

Так как

$$T^*XT = \begin{bmatrix} L^*L & 0 \\ 0 & L^{\perp *}L^{\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^*R - Q_1Q_1^* & -Q_1Q_2* \\ -Q_2Q_1^* & -Q_2Q_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^*L & 0 \\ 0 & L^{\perp *}L^{\perp} \end{bmatrix},$$

то матричное неравенство $X \geq 0$ сводится к соотношениям $R^*R - Q_1Q_1^* \geq 0$ и $Q_2 = 0$. Следовательно,

$$Q = LR^*R(R^*R)^{-1}Q_1 = PC, \quad X = P(I_p - CC^*)P^* \geq 0,$$

где $C = R^{+*}Q_1$, $R^+ = (R^*R)^{-1}R^*$.

Обратное утверждение леммы является простым следствием закона инерции.

Лемма доказана.

Утверждения леммы 8.1.1 частично сформулированы без доказательства в [119, лемма 6.1.1].

8.2 Блочные матрицы и лемма Шура

Приведем важные свойства блочных матриц вида

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \det D \neq 0, \tag{8.2.1}$$

где A, B, C и D — блоки соответствующих размеров $n \times m$, $n \times k$, $k \times m$ и $k \times k$. Прежде всего, имеем представление

$$M = \begin{bmatrix} I_n & BD^{-1} \\ 0_{k\times n} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0_{n\times k} \\ 0_{k\times m} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0_{m\times k} \\ D^{-1}C & I_k \end{bmatrix},$$

из которого в случае $m = n$ следует $\det M = \det D \det E$, где $E = A - BD^{-1}C$. При этом, если $\det E \neq 0$, то обратная матрица вычисляется по *формуле Фробениуса*:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -E^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CE^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CE^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}. \tag{8.2.2}$$

Для блочных эрмитовых и, в частности, вещественных симметричных матриц (8.2.1) выполняется следующее утверждение.

Лемма 8.2.1 (лемма Шура). *Пусть блочная матрица M вида* (8.2.1) *является эрмитовой, т. е. $A = A^*$, $C = B^*$ и $D = D^*$, причем* $\det D \neq 0$. *Тогда она положительно (неотрицательно) определена в том и только в том случае, когда $D > 0$ и $E > 0$ ($D > 0$ и $E \geq 0$), где $E = A - BD^{-1}C$.*

Аналогичными свойствами обладают блочные матрицы вида (8.2.1) с квадратным невырожденным диагональным блоком A.

8.3 Двучленное матричное неравенство

Ядро $\ker \mathrm{A}$ матрицы $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$ составляет подпространство решений однородной системы $Ax = 0$. Матрицу размеров $n \times (n - \operatorname{rank} A)$, столбцы которой составляют базис ядра $\ker \mathrm{A}$, обозначаем через W_A. Если $\operatorname{rank} A = p < n$, то W_A совпадает с сопряженной матрицей ортогонального дополнения $A^{\perp *}$.

Лемма 8.3.1 *Для заданных матриц $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{q\times n}$ и $C = C^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матричное неравенство*

$$A^*XB + B^*X^*A < C \tag{8.3.1}$$

разрешимо относительно $X \in \mathbb{C}^{p\times q}$ *в том и только в том случае, когда выполняется одно из условий:*

(a) $\operatorname{rank} A = n$, $\operatorname{rank} B = n$;

(b) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B = n$, $W_A^* C W_A > 0$;

(c) $\operatorname{rank} B < n$, $\operatorname{rank} A = n$, $W_B^* C W_B > 0$;

(d) $\operatorname{rank} A < n$, $\operatorname{rank} B < n$, $W_A^* C W_A > 0$, $W_B^* C W_B > 0$;

где W_A *и* W_B *— матрицы, столбцы которых составляют базисы соответствующих ядер* $\ker \mathrm{A}$ *и* $\ker \mathrm{B}$.

В [13] при условиях леммы 8.3.1 приведено общее решение матричного неравенства (8.3.1) в параметрической форме.

Лемма 8.3.2 (лемма Финслера) *Пусть* $C = C^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{C}^{p\times n}$ *и* $\operatorname{rank} A < n$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) $x^* C x > 0 \ \forall x \neq 0 \in \ker \mathrm{A}$;

(b) $C > \alpha A^* A$ *для некоторого* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $W_A^* C W_A > 0$;

(d) $A^* X + X^* A < C$ *для некоторой матрицы* $X \in \mathbb{C}^{p\times n}$.

Из леммы 8.3.2, в частности, следует, что условие (d) разрешимости матричного неравенства (8.3.1) эквивалентно выполнению при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$ соотношений $C > \alpha A^* A$ и $C > \alpha B^* B$.

8.4 Каноническая форма линейного пучка матриц

Произвольный линейный пучок матриц $L(\lambda) = A - \lambda B$ размеров $n \times m$ с помощью эквивалентных преобразований может быть приведен к *канонической форме* Кронекера [21]:

$$PL(\lambda)Q = \left[\begin{array}{cc|ccc} J-\lambda I_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_r - \lambda N & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & U(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{h\times g} \end{array}\right], \quad (8.4.1)$$

где P и Q — квадратные невырожденные матрицы соответствующих размеров $n \times n$ и $m \times m$. Можно считать, что матрица J, отвечающая *конечным элементарным делителям* $L(\lambda)$, имеет нормальную жорданову форму. При наличии *бесконечных элементарных делителей* $L(\lambda)$, степени которых $\nu_1, \ldots, \nu_\tau$, в (8.4.1) присутствует второй диагональный блок порядка $r = \nu_1 + \cdots + \nu_\tau$. При этом квазидиагональная матрица N является *нильпотентной* с индексом нильпотентности $\nu = \max\limits_i \nu_i$ и ее диагональные блоки имеют следующую структуру:

$$N_i = \begin{cases} 0, & \nu_i = 1, \\ \left[\begin{array}{c|c} 0_{\nu_i - 1\times 1} & I_{\nu_i - 1} \\ \hline 0 & 0_{1\times\nu_i - 1} \end{array}\right] & \nu_i \geq 2, \end{cases} \quad (i = \overline{1, \tau}),$$

Если пучок $L(\lambda)$ является *сингулярным* ($\det L(\lambda) \equiv 0$ или $n \neq m$), то в (8.4.1) присутствуют диагональные блоки $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ или $0_{h\times g}$. Диагональные блоки квазидиагональных матриц $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ имеют вид

$$U_i(\lambda) = \big[0_{k_i\times 1}, I_{k_i}\big] - \lambda\big[I_{k_i}, 0_{k_i\times 1}\big], \quad i = \overline{1, \xi},$$

$$V_j(\lambda) = \big[0_{s_j\times 1}, I_{s_j}\big]^T - \lambda\big[I_{s_j}, 0_{s_j\times 1}\big]^T, \quad j = \overline{1, \eta},$$

где k_i и s_j — ненулевые *минимальные индексы* соответственно для столбцов и строк $L(\lambda)$. Размеры нулевого диагонального блока $0_{h\times g}$ определяются количествами нулевых минимальных индексов соответственно для строк (h) и столбцов (g) пучка $L(\lambda)$. Размеры нулевых внедиагональных блоков в (8.4.1) должны соответствовать размерам диагональных блоков.

8.5 Функции от матрицы

Пусть $f(\lambda)$ — аналитическая функция на замкнутом множестве, ограниченном замкнутым контуром ω. Определим $f(A)$ как матричный интеграл

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} f(\lambda)(\lambda I_n - A)^{-1} d\lambda. \tag{8.5.1}$$

Используя разложение *резольвенты*

$$(\lambda I_n - A)^{-1} = \sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda-\lambda_t)^i}\, A_{ti}$$

и интегральные формулы Коши для производных функции $f(\lambda)$, имеем представление

$$f(A) = \sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} f^{(i-1)}(\lambda_t) A_{ti}, \tag{8.5.2}$$

где A_{ti} — *компоненты матрицы* A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — все попарно различные точки спектра $\sigma(A)$, являющиеся корнями соответствующих кратностей $m_1, \ldots, m_\alpha$ *минимального полинома*

$$\theta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda-\lambda_\alpha)^{m_\alpha}$$

матрицы A степени $m = \sum\limits_{t=1}^{\alpha} m_t \leq n$. Если функция $f(\lambda)$ в круге $\mathcal{S}(z,r) = \{\lambda : |\lambda - z| < r\}$ разлагается в сходящийся степенной ряд

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda - z)^k,$$

то для любой матрицы A со спектром $\sigma(A) \subset \mathcal{S}(z,r)$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - zI_n)^k.$$

Часто используются следующие функции от матрицы:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,\ \sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1},\ \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k},$$

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \ln(I_n + A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k, \sigma(A) \subset \mathcal{S}(0,1).$$

Отметим важные свойства функций от матрицы:

- Если $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, то $\sigma\big(f(A)\big) = \{f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\}$.
- Если $B = T^{-1}AT$, то $f(B) = T^{-1}f(A)T$.
- Если $A = \operatorname{diag}\{A_1, \ldots, A_p\}$ — квазидиагональная матрица, то $f(A) = \operatorname{diag}\{f(A_1), \ldots, f(A_p)\}$ — также квазидиагональная матрица.

Любая квадратная матрица A может быть приведена к *жордановой канонической форме* с помощью *преобразования подобия* $T^{-1}AT = \operatorname{diag}\{J_1, \ldots, J_p\}$, где

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \ \lambda_i \in \sigma(A), J_i \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}, i = \overline{1,p}.$$

Здесь среди собственных значений λ_i могут быть равные, причем $J_i = \lambda_i$, если λ_i — простое собственное значение, алгебраическая и геометрическая кратности которого совпадают ($n_i = \xi_i$). Для матрицы A простой структуры каноническая форма является диагональной, а минимальный полином не имеет кратных корней.

Вычисляя компоненты матриц J_i, согласно (8.5.2) имеем

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \dfrac{f^{(1)}(\lambda_i)}{1!} & \ldots & \dfrac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ldots & \dfrac{f^{(p_i-2)}(\lambda_i)}{(p_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,p},$$

$$f(A) = T \operatorname{diag}\{f(J_1), \ldots, f(J_p)\}\, T^{-1}.$$

8.6 Векторные, матричные и операторные нормы

Норму элементов в пространстве $\mathcal{X}$ определяет функционал $f(X) = \|X\| \geq 0$, обладающий следующими свойствами:

1) $\|X\| = 0 \iff X = 0$;
2) $\|X_1 + X_2\| \leq \|X_1\| + \|X_2\| \quad \forall X_1, X_2 \in \mathcal{X}$;
3) $\|cX\| = |c|\|X\| \quad \forall c \in \mathbb{C}, \forall X \in \mathcal{X}$.

Для матричных норм наряду с 1) – 3) выполняется свойство:

4) $\|X_1 X_2\| \leq \|X_1\|\|X_2\| \quad \forall X_1 \in \mathbb{C}^{p\times n}, \forall X_2 \in \mathbb{C}^{n\times q}$.

Матричная норма в $\mathbb{C}^{m\times n}$ *согласована* с векторными нормами в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^m$, если

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \forall x \in \mathbb{C}^n.$$

Норма линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего из нормированного пространства $\mathcal{X}_1$ в нормированное пространство $\mathcal{X}_2$, определяется в виде

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|.$$

Для операторных норм выполняются приведенные выше свойства 1) – 4) векторных и матричных норм. Норма и спектральный радиус оператора удовлетворяют соотношениям (И. М. Гельфанд)

$$\rho(\mathbf{A}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathbf{A}^n\|}, \quad \rho(\mathbf{A}) \leq \sqrt[n]{\|\mathbf{A}^n\|}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Для нормы матрицы как линейного оператора используются термины *операторная*, *подчиненная* или *индуцированная* матричная норма. Среди всех матричных норм, согласованных с заданными векторными нормами, подчиненная норма является минимальной.

В пространстве $\mathbb{C}^n$ используются векторные l_p-нормы ($p = 1, 2, \dots, \infty$):

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|,$$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1 \quad \text{(норма Гёльдера)}.$$

Наиболее распространенными матричными нормами являются:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{(столбцовая норма)},$$

$$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} \sqrt{\lambda_i(A^*A)} \quad \text{(спектральная норма)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \quad \text{(строчная норма)},$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)} \quad \text{(евклидова норма)}.$$

Столбцовая, спектральная и строчная нормы матриц являются подчиненными по отношению, соответственно, к l_1-, l_2- и l_∞- нормам векторов.

Аналогами векторных l_p-норм в пространстве непрерывных функций $\mathbb{C}[a,b]$ служат L_p-нормы ($p = 1, 2, \ldots, \infty$):

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \quad \|f\|_2 = \Big(\int_a^b |f(x)|^2 dx\Big)^{1/2},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad \|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(x)|^p\Big)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{X}$ скалярное произведение порождает *естественную* норму

$$\|X\| = \sqrt{(X,X)}, \quad X \in \mathcal{X}.$$

Например, в пространстве матриц $\mathbb{C}^{n\times n}$ скалярное произведение $(A,B) = \operatorname{tr}(A^*B)$ порождает евклидову норму матрицы.

8.7 Конусы в векторных и матричных пространствах

Замкнутое выпуклое множество $\mathcal{K}$ вещественного пространства называется конусом, если выполняются следующие условия

- $\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \;\; \forall \alpha \geq 0$,
- $\mathcal{K} + \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$,
- $\mathcal{K} \cap -\mathcal{K} = \{0\}$.

Приведем примеры конусов в пространствах векторов и матриц, обладающих свойствами нормальности и телесности.

1. Простейшим и наиболее используемым конусом в пространстве $\mathbb{R}^n$ является множество неотрицательных векторов

$$\mathbb{R}^n_+ = \big\{x : x = [x_1, \dots, x_n]^T,\, x_i \geq 0,\, i = \overline{1,n}\big\}.$$

Данный конус является нормальным, воспроизводящим и телесным. Сопряженный конус составляют линейные функционалы $\varphi(x) = y^T x$ при $y \in \mathbb{R}^n_+$.

2. Конусом в пространстве $\mathbb{R}^{n\times m}$ является множество неотрицательных матриц

$$\mathbb{R}^{n\times m}_+ = \big\{X :\, X = \|x_{ij}\|^{n,m}_{i,j=1},\, x_{ij} \geq 0,\, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\big\}.$$

Сопряженным конусом является множество линейных функционалов $\varphi(X) = \mathrm{tr}(Y^T X)$ при $Y \in \mathbb{R}^{n\times m}_+$.

3. Конусом в вещественном пространстве эрмитовых матриц $\mathcal{H}_n$ является множество неотрицательно определенных матриц

$$\mathcal{K}_n = \big\{X :\, X = X^* \geq 0\big\}.$$

Сопряженный конус $\mathcal{K}_n^*$ образуют линейные функционалы $\varphi(X) = \mathrm{tr}(YX)$ при $Y \in \mathcal{K}_n$.

Подмножество вещественных симметричных матриц в $\mathcal{K}_n$ также является конусом, а его сопряженный конус состоит из вещественных функционалов $\varphi(X) = \mathrm{tr}(YX)$ при $Y = Y^T \geq 0$.

4. *Эллипсоидальный конус* в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ определяется в виде [7, 129]

$$\mathcal{K}(Q) = \left\{ z : \, z^T Q z \geq 0, \; z^T h \geq 0 \right\},$$

где h — собственный вектор матрицы $Q = Q^T$ с инерцией $\mathrm{i}(Q) = \{1, n, 0\}$, отвечающий ее положительному собственному значению. Сопряженный конус $\mathcal{K}^*(Q)$ состоит из линейных функционалов $\varphi(z) = w^T Q z$ при $w \in \mathcal{K}(Q)$.

В частном случае

$$Q = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

конус $\mathcal{K}(Q)$ является *круговым конусом Минковского* [24]

$$\mathcal{K}_c = \left\{ z : \, z = [x^T, u]^T, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \leq u \right\}.$$

Если $Q = hh^T - I_{n+1}$, где $\|h\|_2 > 1$, то $\mathcal{K}(Q)$ совпадает со *световым конусом*

$$\mathcal{K}_h = \left\{ z : \, \|z\|_2 \leq h^T z \right\}.$$

5. Конусами в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$ являются множества [7]

$$\mathcal{K}_\mu(\alpha, p) = \left\{ z : \, z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \; u \in \mathbb{R}^m_+, \; \|x\|_p \leq \mu_\alpha(u) \right\},$$

$$\mathcal{K}_\sigma(\beta, q) = \left\{ w : \, w = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \; v \in \mathbb{R}^m_+, \; \|y\|_q \leq \sigma_\beta(v) \right\},$$

где $\mu_\alpha(u) = \alpha \, \min\limits_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum\limits_k v_k$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ — любые гёльдеровские нормы.

Множества $\mathcal{K}_\mu(1,2)$ и $\mathcal{K}_\sigma(1,2)$ при $m=1$ совпадают с круговым конусом Минковского.

При условиях

$$\alpha\beta = 1, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p \geq 1, \quad q \geq 1,$$

сопряженные конусы $\mathcal{K}_\mu^*(\alpha,p)$ и $\mathcal{K}_\sigma^*(\beta,q)$ образуют соответствующие множества линейных функционалов $\varphi(z) = w^T z$ при $w \in \mathcal{K}_\sigma(\beta,q)$ и $\varphi(w) = z^T w$ при $z \in \mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$. Это означает, что $\mathcal{K}_\mu^*(\alpha,p) = \mathcal{K}_\sigma(\beta,q)$ и $\mathcal{K}_\sigma^*(\beta,q) = \mathcal{K}_\mu(\alpha,p)$.

Комментарии и библиографические указания

Глава 1. Общая теория матричных уравнений и неравенств, включающая методы построения аналогов уравнения Ляпунова, изложена в параграфах 1.1 – 1.4 на основе предыдущих книг автора [51, 119], содержащих обоснование всех утверждений и необходимые библиографические источники. Методы исследования матричных неравенств с неопределенными коэффициентами и их сведения к конечным системам матричных неравенств (параграф 1.5) получены в [65,70,72]. Методы локализации собственных значений матричных полиномов и функций (параграф 1.6) получены в [60, 61, 121]. Результаты параграфа 1.7, связанные с описанием матричных неравенств в терминах некоторых скалярных функций, получены в [63, 68]. Применение введенных функций следа матрицы позволяет уменьшить объем вычислений, необходимых для реализации разработанных методов матричных неравенств.

Глава 2. При изложении основных понятий и утверждений об устойчивости решений линейных и нелинейных систем (см. параграфы 2.1 и 2.2) использованы работы [11, 16, 30, 41, 48, 74, 105,117]. В параграфе 2.1 приведены следствия общих теорем об устойчивости состояний для классов нелинейных дифференциальных систем, представленных в векторно-матричной форме, а также систем, неразрешенных относительно производных. В настоящее время методы функций Ляпунова интенсивно развиваются и широко применяются в различных задачах анализа и синтеза (см., например, [2, 19, 23, 32, 37, 44, 75, 77, 82, 83, 91, 115, 123]). Коэффициентные критерии и достаточные условия асимптотической устойчивости линейных дифференциальных систем второго порядка, изложенные в параграфе 2.3, получены в [4,8];

в случае неопределенных коэффициентов использованы результаты работы [72]. Теорема 2.3.1 является следствием более общих результатов работы [50]. Метод структурных преобразований [38] позволяет упростить применение известных теорем об устойчивости состояний дифференциальных систем второго порядка. Системы такого класса возникают, в частности, при моделировании динамических объектов на основе вариационных принципов механики (см., например, [22, 47]). Теорема 2.4.3 о робастной абсолютной устойчивости линейных систем из запаздыванием и теорема 2.5.2 о робастной устойчивости в среднеквадратическом стохастических систем типа Ито сформулированы в [72] на основе леммы 1.5.3 и соответствующих утверждений для рассматриваемых классов систем с определенными коэффициентами [35, 36]. Условия асимптотической устойчивости (теорема 2.6.1) и стабилизируемости (теорема 2.6.2) линейных систем, вытекающие из результатов параграфа 1.7, сформулированы в [63, 68].

Глава 3. В теореме 3.1.1 приведены наиболее распространенные критерии стабилизируемости по состоянию линейных систем управления (см., например, [3, 12, 45, 84]). Проблемы численной реализации известных методов стабилизации по выходу линейных систем, вытекающих из теоремы 3.1.2, в общем случае изучены не достаточно [85]. Утверждения леммы 3.1.1, критерии стабилизируемости 2) и 3) в теореме 3.1.2, а также алгоритмы стабилизации по выходу, вытекающие из теоремы 3.1.3, являются новыми [64,66,69]. Доказательства критериев 4) – 6) в теореме 3.1.2 имеются в соответствующих работах [96, 99, 116]. В параграфе 3.1 сформулирован также критерий стабилизируемости по выходу на основе общей канонической декомпозиции Калмана [33, 135, 138]. Алгоритм построения стабилизирующего динамического регулятора на основе теоремы 3.2.1 предложен в [66]. Теорема 3.2.2 дает условия стабилизации по выходу с помощью наблюдателя полного порядка (см. также [13, 25, 84]). Обобщенная лемма о матричной неопределенности (лемма 3.3.1), лежащая в основе предлагаемых методов робастной стабилизации и оптимизации линейных и нелинейных систем, установлена в [62] (см. также [67]). Теоремы 3.3.1 и 3.4.2 являются следствиями леммы 3.3.1 и теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теорема 3.4.1 представляет один из основных результатов теории квадратичной оптимизации линейных систем на основе уравнения Риккати (см., например, [136]). В параграфе 3.4 приведен алгоритм квадратичной оптимизации по выходу с учетом локализации спектра замкнутой системы (см. [49, 51]). Теоремы 3.5.1 и 3.5.2 о стабилизации линейных дескрипторных систем сформулированы впервые.

Глава 4. Условия стабилизируемости состояния равновесия класса нелинейных систем (4.1.9) (теорема 4.1.1) сформулированы в [66, 71]. Результаты о применении метода квадратичных функций Ляпунова в задачах робастной стабилизации и оптимизации состояний равновесия класса нелинейных систем (4.1.4) (теоремы 4.2.1, 4.3.1 и их следствия) опубликованы в [64, 69]. Данные результаты были использованы при решении аналогичных задач для класса нелинейных систем управления, представленных в форме Лагранжа (4.4.1) [70].

Глава 5. В данной главе изложены результаты работ [66, 71], относящиеся к теории H_∞-управления. Задача оптимального H_∞-управления впервые сформулирована в работе [137]. С обзором основных известных результатов в данном направлении можно ознакомиться, например, в [95,131,138]. Результаты параграфа 5.2 для систем с управляемыми и наблюдаемыми выходами сформулированы в виде обобщения соответствующих утверждений работы [14].

Глава 6. Методы робастной стабилизации и оптимизации по выходу дискретных систем управления, изложенные в параграфе 6.2, опубликованы в [65]. Результаты параграфа 6.3, относящиеся к теории H_∞-управления, являются дискретными аналогами соответствующих утверждений главы 5 (см. также [15]).

Глава 7. Основные определения и вспомогательные факты теории динамических систем в полуупорядоченном пространстве заимствованы из работ [24, 27, 39, 40, 112]. Обобщенная классификация динамических систем в пространстве с конусом, критерии и достаточные условия принадлежности непрерывных и дискретных систем выделенным классам приведены в [58, 59, 120, 122, 123]. Критерий и достаточные условия экспоненциальной устойчивости линейных позитивных систем (теорема 7.3.1) установлены в [52,55] (см. также [81]). Свойства внедиагонально неотрицательных матриц (пример 7.3.1) установлены в [102]. Условия экспоненциальной устойчивости в терминах двух положительно обратимых операторов (теорема 7.3.2) предложены в [5]. Лемма 7.3.1 и теорема 7.3.3 установлены в [57]. Дискретные аналоги утверждений об устойчивости состояний линейных и нелинейных позитивных систем приведены в [59,122,123]. Условия позитивности и абсолютной устойчивости некоторого класса систем с запаздыванием предложены в [58]. Теорема 7.3.6 сформулирована впервые. Метод построения инвариантных множеств динамических систем в терминах конусных неравенств и вытекающий из него обобщенный принцип сравнения предложены в [6,120]. Переменные по времени конусы в задачах сравнения предложены в [56]. Методы решения некоторых задач о робастной устойчивости систем в полуупорядоченном пространстве, основанные на применении конусных неравенств (параграф 7.6), опубликованы в [56, 120, 122, 123].

Глава 8. Определения и факты, связанные со спектральными свойствами эрмитовых матриц, жордановой формой матрицы, канонической формой линейного пучка матриц и функциями от матрицы, взяты из книги [21]. Доказательство критериев разрешимости ЛМН (8.3.1) приведено в [13, 103]. Приведенные понятия векторных, матричных и операторных норм имеются в [20, 24, 90]. С различными типами конусов в конечномерных пространствах можно ознакомиться, например, в [5, 24, 129].

Список литературы

[1] *Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А. и др.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. Воронова А. А., Матросова В. М. — М.: Наука, 1987. — 312 с.

[2] *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Метод сравнения и устойчивость движений нелинейных систем. — СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2012. — 263 с.

[3] *Алиев Ф. А., Ларин В. Б.* Задачи стабилизации системы с обратной связью по выходной переменной (обзор) // Прикладная механика. — 2011. — **47**, 3. — С. 3–49.

[4] *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Стійкість та стабілізація диференціальних систем другого порядку // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — **3**, 1. — С. 7–24.

[5] *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні конуси та стійкість лінійних динамічних систем // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, 11. — С. 1446—1461.

[6] *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні множини та порівняння динамічних систем // Нелінійні коливання. — 2007. — **10**, 2. — С. 163–176.

[7] *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2005. — **2**, 1. — С. 28–45.

[8] *Алілуйко А. М.* Алгебраїчні умови стійкості диференціальних систем другого порядку // Динамические системы. — 2007. — **22**. — С. 96–108.

[9] *Андреев Ю. Н.* Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами // Автоматика и телемеханика. — 1977.— №3.— С. 5–50.

[10] *Андриевский Б. Р.* Глобальная стабилизация неустойчивого маятника с маховичным управлением // Управление большими системами.— М.: ИПУ РАН, 2009. — Вып. 24. — С. 258–280.

[11] *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высш. шк., 1989. — 447 с.

[12] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.

[13] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. — Нижний Новгород: ННГУ, 2010. — 93 с.

[14] *Баландин Д. В., Коган М. М.* Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями // Автоматика и телемеханика. — 2010. — № 6. — С. 20–38.

[15] *Баландин Д. В., Коган М. М., Кривдина Л. Н., Федюков А. А.* Синтез обобщенного H_∞-оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3–22.

[16] *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

[17] *Барбашин Е. А., Красовский Н. Н.* Об устойчивости движения в целом // ДАН СССР. — 1952.— **86**, 3. — С. 435–456.

[18] *Бояринцев Ю. Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1980. — 222 с.

[19] *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1981. — 412 с.

[20] *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.

[21] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[22] *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.

[23] *Гаращенко Ф. Г., Волошин О. Ф., Кириченко М. Ф., Крак Ю. В., Пічкур, В. В. Стоян, В. А.* Розвиток методів і технологій моделювання та оптимізації складних систем: Монографія. — К.: Сталь, 2009. — 668 с.

[24] *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 478 с.

[25] *Голубев А. Е., Крищенко А. П., Ткачев С. Б.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотическим наблюдателем (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 7. — С. 3–42.

[26] *Губарев В. Ф., Гуммель, А. В., Жуков А. О.* Особенности и взаимосвязь задач идентификации и управления в условиях неопределенности // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 1. — С. 50–62.

[27] *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с.

[28] Двирный А. И., Слынько В. И. Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Математический сборник. — 2014. — **205**, 6. — С. 109–138.

[29] *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Учебное пособие. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009. — 203 с.

[30] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

[31] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М.: Наука, 1979. — 304 с.

[32] *Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. — К.: Наук. думка, 2013. — 431 с.

[33] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. 2-е издание — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 400 с.

[34] *Кириченко Н. Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. — К.: Выща шк., 1978. — 184 с.

[35] *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (Алгебраические критерии). — К.: Наук. думка, 1992. — 148 с.

[36] *Кореневский Д. Г., Мазко А. Г.* Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, 2. С. 278–282.

[37] *Коробов В. И.* Метод функций управляемости. — М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. — 576 с.

[38] *Кошляков В. Н., Макаров В. Л.* Структурный анализ некоторого класа динамических систем // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, 8. — С. 1089–1096.

[39] *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. — 233 с.

[40] *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 256 с.

[41] *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 212 с.

[42] *Кублановская В. Н.* К спектральной задаче для полиномиальных пучков матриц // Зап. научн. семин. ЛОМИ. — 1978. — **80**. — С. 83—97.

[43] *Кунцевич В. М.* Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — К.: Наук. думка, 2006. — 264 с.

[44] *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. — К.: Наук. думка, 1991. — 248 с.

[45] *Леонов Г. А., Шумафов М. М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб: Издательство С.-Петербургского университета, 2002. — 308 с.

[46] *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 576 с.

[47] *Луковський І. О.* Математичні моделі нелінійної динаміки твердих тіл з рідиною. — К.: Наук. думка, 2010. — 407 с.

[48] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.–Л.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1980. — 472 с.

[49] *Мазко А. Г.* Матричный алгоритм синтеза оптимальных линейных систем с заданными спектральными свойствами // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 5. — С. 33–41.

[50] *Мазко А. Г.* Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, 10. — С. 1341–1351.

[51] *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 1999. — **28**. — 216 с.

[52] *Мазко А. Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, 3. — С. 323–330.

[53] *Мазко А. Г.* Позитивные и монотонные системы в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, 2. — С. 164–173.

[54] *Мазко А. Г.* Позитивная стабилизация многосвязных систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України.— 2004. — **1**, 2. — С. 130–142.

[55] *Мазко А. Г.* Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, 4. — С. 462–475.

[56] *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, 2. — С. 198–213.

[57] *Мазко А. Г.* Производные по конусу и конусные неравенства в задачах устойчивости // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, 2. — С. 165–180.

[58] *Мазко А. Г.* Конусные неравенства и устойчивость дифференциальных систем // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, 8. — С. 1058–1074.

[59] *Мазко А. Г.* Об устойчивости состояний равновесия обобщенного класса монотонных разностных систем // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, 2. — С. 245–259.

[60] *Мазко А. Г.* Локализация собственных значений регулярных матричных функций // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, 3. — С. 130–148.

[61] *Мазко А. Г.* Локализация собственных значений полиномиальных матриц // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, 8. — С. 1063–1077.

[62] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка качества семейства нелинейных систем управления // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, 2. — С. 174–186.

[63] *Мазко А. Г.* Критерии устойчивости и локализация спектра матрицы в терминах функций следа // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, 10. — С. 1379–1386.

[64] *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и оценка функционала качества нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. — 2015. — № 2. — С. 73–88.

[65] *Мазко А. Г., Богданович Л. В.* Робастная стабилизация и оценка функционала качества нелинейных дискретных систем управления // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 3. — С. 92–101.

[66] *Мазко А. Г., Кусий С. Н.* Стабилизация по измеряемому выходу и оценка уровня гашения возмущений в системах управления // Нелінійні коливання.— 2015. — **18**, 3. — С. 373–387.

[67] *Мазко А. Г., Шрам В. В.* Устойчивость и стабилизация семейства псевдолинейных дифференциальных систем // Нелинейные колебания. — 2011. — **14**, 2. — С. 227–237.

[68] *Мазко О. Г.* Нові критерії стійкості і локалізації спектра лінійних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, 3. — С. 113–122.

[69] *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Робастна стійкість і оптимізація нелінійних систем керування // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **9**, 1. — С. 213–230.

[70] *Мазко О. Г., Богданович Л. В.* Стабілізація механічних систем з невизначеними параметрами // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — **10**, 3. — С. 123–144.

[71] *Мазко О. Г., Кусій С. М.* Задачі стабілізації і гасіння зовнішніх збурень в системах керування // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, 5. — С. 90–108.

[72] *Мазко О. Г., Шрам В. В.* Умови стійкості та локалізації спектра сім'ї лінійних динамічних систем // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, 3. — С. 149–168.

[73] *Маликов А. И.* Матричные системы сравнения в анализе динамики и оценивании состояния систем управления с неопределенностями и структурными изменениями // Нелинейная теория управления и ее приложения: динамика, управление, оптимизация. — М.: Физматлит, 2003. — С. 66–100.

[74] *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. – 530 с.

[75] *Мартынюк А. А.* Теория устойчивости решений динамических уравнений на временной шкале. — К.: Феникс, 2012. — 292 с.

[76] *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16**, 8. — С. 1392–1407.

[77] *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Неточные динамические системы: устойчивость и управление движением. — К.: Феникс, 2009. — 320 с.

[78] *Массера Х. Л.* К теории устойчивости // Математика. — 1957. — **1**, 4. — С. 81–104.

[79] *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.

[80] *Матросов В. М., Козлов Р. И., Матросова Н. И.* Теория устойчивости многокомпонентных нелинейных систем. — М.: Физматлит, 2007. — 184 с.

[81] *Мильштейн Г. Н.* Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. — 1975. — 9. — С. 35–42.

[82] *Новицький В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах // Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **77**. — 252 с.

[83] *Оболенский А. Ю.* Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем. — К.: Феникс, 2010. — 228 с.

[84] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

[85] *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 7–46.

[86] *Постников Н. С., Сабаев Е. Ф.* Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 4. — С. 24–34.

[87] *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.

[88] *Слюсарчук В. Ю.* Диференціальні рівняння в банаховому просторі. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2006. — 314 с.

[89] *Хлебников М. В., Щербаков П. С.* Лемма Питерсена о матричной неопределенности и ее обобщения // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 11. — С. 125–139.

[90] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. — Москва: Мир, 1989. — 655 с.

[91] *Хусаинов Д., Диблик Й., Ружичкова М.* Линейные динамические системы с последействием. Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация. — К.: ГП Информ.-аналит. агенство, 2015. — 252 с.

[92] *Ackermann J.* Robust control. Systems with uncertain physical parameters. — Berlin: Springer Verlag, 1993. — xvi+406 p.

[93] *Anderson B. D. O., Moore J. B.* Linear optimal control. — New York: Prentice-Hall, 1971.— 413 p.

[94] *Athans M., Levine W. S.* On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems // IEEE Trans. Autom. Control. — 1970. — **AC-15**, 1. — P. 44–50.

[95] *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM Studies in Applied Mathematics, **15**. — Philadelphia: PA, 1994. — 193 p.

[96] *Yong-Yan Cao, James Lam, You-Xiam Sun.* Static output feedback stabilization: An LMI approach // Automatica. — 1998. — **34**, 12. — P. 1641–1645.

[97] *Carlson D., Hill R. D.* Controllability and inertia theory for functions of a matrix // J. Math. Anal. Appl. — 1977. — **59**. — P. 260–266.

[98] *Dullerud G., Paganini F.* A course in robust control theory. A convex approach. — New York: Springer, 2000. — xx+419 p.

[99] *El-Ghaoui L., Gahinet P.* Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems // Proc. Eur. Control Conf. Groningen, The Netherlands, 1993. — P. 1176–1179.

[100] *Elsner L.* Monotonie und randspektrum bei vollstetigen operatoren // Arch. Rational Mech. Anal. — 1970. — **36**. — P. 356–365.

[101] *Farina L., Rinaldi S.* Positive linear systems. Theory and applications. — New York: John Wiley & Sons Inc., 2000. — x+305 p.

[102] *Fiedler M., Pták V.* On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors // Czech. Math. J. — 1962. — **12**(87). — P. 382–400.

[103] *Gahinet P., Apkarian P.* A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. — 1994. — **4**. — P. 421–448.

[104] *Ghorbel F., Hung J. Y., Spong M. W.* Adaptive control of flexible-joint manipulators // IEEE Control Systems Mag. — 1989. — No. 9. — P. 9—13.

[105] *Godunov S. K.* Ordinary differential equations with constant coefficient / Translations of Mathematical Monographs, **169**. — Providence: American Mathematical Society, 1997. — ix+282 p.

[106] *Gu D.-W., Petkov P. Hr. and Konstantinov M. M.* Robust control design with MATLAB. — Springer-Verlag London Limited, 2005. — 389 p.

[107] *Haddad W. M., Chellaboina V.* Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay // Systems & Control Letters. — 2004. — **51**. — P. 355–361.

[108] *Hale J. K., Lunel S. M. V.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993. — 447 p.

[109] *Henrion D., Arzelier D., Peaucelle D.* Positive polynomial matrices and improved LMI robustness conditions // Automatica. — 2003. — **39**, 8. — P. 1479–1485.

[110] *Henrion D., Bachelier O., Sebek M.* $\mathcal{D}$-stability of polynomial matrices // Intern. J. Control. — 2001. — **74**, 8. — P. 355–361.

[111] *Hill R. D.* Inertia theory for simultaneously triangulable complex matrices // Linear Algebra & Appl. — 1969. — **2**. — P. 131–142.

[112] *Hirsch M. W., Smith H. L.* Competitive and cooperative systems: mini-review // Lecture Notes in Control and Inform. Sci. — 2003. — **294**. — P. 183–190.

[113] *Iwasaki T., Sketlon R.* Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions // J. Optim. Theory Appl. — 1995. — **77**. — P. 291–307.

[114] *Kalauch A.* On positive-off-diagonal operators on ordered normed spaces // J. of Analysis and its Appl. — 2003. — **22**. — P. 229–238.

[115] *Kovalev A. M., Martynyuk A. A., Boichuk O. A., Mazko A. G. et al.* Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability and control problems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2009. — **9**, 2. — P. 117–145.

[116] *Kučera V., De Souza C. E.* A necessary and sufficient condition for output feedback stabilizability // Automatica. — 1995. — **31**, 9. — P. 1357–1359.

[117] *Liao X., Wang L., Yu P.* Stability of dynamical systems. — Amsterdam: Elsevier, 2007. — 706 p.

[118] *Mazko A. G.* Stability and comparison of systems in partially ordered space // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. — 2002. — **8**, 1(15). — P. 37–48.

[119] *Mazko A. G.* Matrix equations, spectral problems and stability of dynamic systems / Stability, Oscillations and Optimization of Systems, **2**. — Cambridge: Cambridge Sci. Publish. Ltd, 2008. — xx+270 p.

[120] *Mazko A. G.* Comparison and ordering problems for dynamic systems set // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. — 2010. — **16**, 1(33). — P. 1–8.

[121] *Mazko A. G.* Spectrum localization of regular matrix polynomials and functions // Electronic J. of Linear Algebra (ELA). — 2010. — **20**. — P. 333–350.

[122] *Mazko A. G.* Cone inequalities and stability of dynamical systems // Nonlinear Dynamics and Systems Theory. — 2011. — **11**, 3. — P. 303–318.

[123] *Mazko A. G.* Positivity, robust stability and comparison of dynamic systems // Discrete and Continuous Dynamical Systems. DCDS Supplements. — **2011**. — P. 1042–1051.

[124] *Mitropolskii Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. — London – New York: Taylor & Francis. — 2003. — 400 p.

[125] *Ostrowsky O., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. Appl. — 1962. — **4**. — P. 72–84.

[126] *Petersen I.* A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems // Syst. Control Lett. — 1987. — **8**, 4. — P. 351–357.

[127] *Scherer C.* The Riccati inequality and state-space H_∞–optimal control / Ph. D. Dissertation. — Universitat Wurzburg, Germany, 1990. — 267 p.

[128] *Simon I. D., Mitter S. K.* A theory of modal control // Inf. & Control. — 1968. — **13**. — P. 316–353.

[129] *Stern R. J., Wolkowicz H.* Invariant ellipsoidal cones // Linear Algebra & Appl. — 1991.— **150**. — P. 81–106.

[130] *Stern R. J., Wolkowicz H.* Exponential nonnegativity on the ice cream cone // SIAM J. Matrix Anal. Appl. — 1991. — **12**, 1. — P. 160–165.

[131] *Stoorvogel A. A.* The H_∞ control problem: A state space approach. — New York: Prentice-Hall, 1992. — 468 p.

[132] *Syrmos V. L., Abdallah C. T., Dorato P., Grigoriadis K.* Static output feedback: a survey // Automatica. — 1997. — **33**, 2. — P. 125–137.

[133] *Vandergraft J. S.* Spectral properties of matrices which have invariant cones // SIAM. J. Appl. Math. — 1968. — **16**. — P. 1208–1222.

[134] *Wie B., Bernstein D. S.* A benchmark problem for robust control design // Proc. of the 1990 American Control Conference. — San Diego, CA, May 1990. — P. 961–962.

[135] *Willems J. C., Polderman J. W.* Introduction to mathematical systems theory. A behavioral approach. — New York: Springer-Verlag, 1998. — xxx+424 p.

[136] *Wonham W. M.* Linear multivariable control: A geometric approach. — New York: Springer-Verlag, 1979. — xv+326 p.

[137] *Zames G.* Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Autom. Control. — 1981. — **26**, 2. — P. 301–320.

[138] *Zhou K., Doyle J. C., Glover K.* Robust and optimal control. — Englewood: Prentice-Hall, Inc., 1996. — 586 p.

Предметный указатель

A. G. Mazko. Robust stability and stabilization of dynamic systems. Methods of matrix and cone inequalities // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Mathematics and its Applications. — Vol. 102. — Kyiv, 2016. — 332 p. [Russian]

ISBN 978-966-02-7839-4

The book describes the modern methods of analysis and synthesis of dynamic systems based on the application of matrix equations and inequalities. Much attention is paid to the matrix interpretations of the Lyapunov functions method for different classes of dynamic systems including those with uncertainties. The generalizations of Lyapunov equation are presented providing a basis for the methods of the spectrum localization of linear systems. New criteria for stabilizability of linear systems are given as well as the methods for constructing regulators which provide a robust stability of equilibrium state, common quadratic Lyapunov function and evaluation of the performance index of a family of nonlinear systems. New approaches to solving the generalised H_∞-optimization problems of linear and nonlinear systems with controllable and observable outputs are proposed. The stability theory is developed for continuous and discrete-time systems in a partially ordered space. Robust stability conditions for equilibrium states of generalized positive and monotone systems are described in terms of cone inequalities and positive invertible operators. New method for construction of invariant sets and a consequent comparison principle for a family of dynamic systems are worked out.

The book is intended for scientists, engineers and graduate students interested in stability theory and stabilization of dynamic systems, matrix analysis and its applications.

Наукове видання

Праці

Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 102

Мазко Олексій Григорович

РОБАСТНА СТІЙКІСТЬ І СТАБІЛІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Методи матричних і конусних нерівностей

(російською мовою)

Комп'ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
Н. М. Кузъменко

Редактор *Н. М. Пазяк*

Підп. до друку 21.01.2016. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 20,7. Ум. друк. арк. 19,3. Зам. №19. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3