# ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Математика
та її застосування



**Праці Інституту математики Національної академії наук України** **Том 28**

*С Е К Ц І Я:*

Математичні проблеми механіки

**А.Г. Мазко**

# *ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

**Інститут математики НАН України**

**Київ 1999**

УДК 512.643:517.926

**Локализация спектра и устойчивость динамических систем** / А.Г. Мазко // Труды Института математики НАН Украины. Т. 28 — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. — 216 с.
ISBN 966-02-1465-0

В книге изложены методы локализации собственных значений матриц и матричных функций, основанные на построении и изучении обобщенного уравнения Ляпунова. Развита теория линейных уравнений и операторов в пространстве матриц. Обобщены известные теоремы об инерции эрмитовых решений матричных уравнений. Теоретические результаты использованы в задачах анализа и синтеза динамических систем. Разработаны новые алгебраические методы исследования устойчивости, оценки спектра и представления решений линейных дифференциальных и разностных систем произвольного порядка.

Монография рассчитана на научных работников,инженеров и аспирантов, интересующихся теорией устойчивости и стабилизации динамических систем, матричным анализом и его приложениями.

Библиогр.: 132 назв.

In this book, the methods for localization of eigenvalues of matrices and matrix functions based on constructing and studying the generalized Lyapunov equation are presented. The theory of linear equations and operators in matrix space is developed. The known theorems on the inertia of Hermitian solutions of matrix equations are generalized. The theoretical results are used in analysis and synthesis problems for dynamic systems. New algebraic methods for stability analysis, an evaluation of spectrum and representation of solutions of linear arbitrary order differential and difference systems are worked out.

The monograph is intended for scientists, engineers and post-graduate students interested in stability and stabilization theory for dynamic systems, matrix analysis and its applications.

*Утверждено к печати ученым советом*
*Института математики НАН Украины*

**ISBN 966-02-1465-0** 

# Введение

При исследовании и создании управляемых физических объектов (транспортных, космических, электро-механических и др.) возникают проблемы устойчивости и качества систем, описывающих их движение. Современные методы исследования этих проблем основаны на применении аппарата пространства состояний и матричного анализа, хорошо приспособленного к использованию возможностей компьютерной техники.

Динамика многих реальных объектов достаточно адекватно моделируется дифференциальными или разностными системами вида

$$F(D)x(t) = g(t), \qquad t \geq t_0, \tag{1}$$

где $F(\lambda)$ — аналитическая матрица-функция, $x$ — вектор состояния системы, $D$ — оператор дифференцирования по $t$ или смещения, $g$ — вектор внешних сил (управляющих органов, случайных возмущений и т.п.). Основные подклассы систем (1) определяются структурой и свойствами матрицы-функции $F(\lambda)$:

$F(\lambda) = \lambda I - A$ — системы уравнений типа Коши;

$F(\lambda) = A - \lambda B$ — системы уравнений, не разрешенные относительно производных или итераций;

$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C$ — системы дифференциальных или разностных уравнений второго порядка;

$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$ — системы дифференциальных или разностных уравнений $s$-го порядка;

$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \sum\limits_{k>1} e^{-\lambda \tau_{k-1}} A_k$ — системы с запаздыванием.

К системам типа (1) приводят многочисленные задачи механики, математической физики и анализа (см., например, [5, 6, 22, 25, 29, 38, 47, 90, 93, 95, 96]). При исследовании механических систем особую роль выполняют линейные и квадратичные пучки, коэффициенты которых формируются на основе выражений для кинетической и потенциальной энергий и диссипативных функций [25, 34, 37]. Матричные полиномы более высоких степеней возникают, например, в задачах синтеза систем с динамической обратной связью [2, 46, 89].

Условия устойчивости и показатели качества систем (1) описываются расположением в комплексной плоскости корней некоторых алгебраических или трансцендентных уравнений, т.е. собственных значений матрицы-функции $F(\lambda)$, составляющих ее спектр $\sigma(F)$. Например, число $\alpha = \min\{-\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(F)\}$ определяет запас устойчивости и оценку для времени переходного процесса $t \leq 1/\alpha$. Размещение спектра внутри вертикальной полосы используется при построении мажорант и минорант переходного процесса. Локализация спектра устойчивой системы между двумя лучами, проходящими через начало координат, обеспечивает колебательность системы, не превосходящую заданную. Требование апериодичности системы в терминах спектра означает, что все собственные значения расположены на вещественной оси. Существуют системы с более сложными ограничениями на область возможного размещения спектра [17, 28, 104].

Устойчивость движения некоторых классов нестационарных систем также связана с проблемой локализации спектра. Так, условием асимптотической устойчивости линейных систем типа Коши с периодическими коэффициентами является расположение спектра матрицы монодромии внутри единичного круга с центром в начале координат [16]. Спектральные методы анализа и синтеза систем вида (1) успешно применяются при исследовании более сложных классов нелинейных нестационарных систем.

Возрастающие требования к качеству проектируемых систем приводят к необходимости исследования общих задач о локализации собственных значений матричных полиномов и функций. Данные задачи представляют естественное обобщение проблемы Рауса–Гурвица, поставленной для корней характеристического полинома в теории устойчивости автономных систем [11, 88, 103].

Основы классических методов решения проблемы Рауса–Гурвица для простейших областей заложены в работах Коши, Штурма, Эрмита, Рауса, Гурвица, Льенара, Шипара, Шура, Кона и др. (см., например, [11, 17, 39, 88]). Одним из основных методов решения данной проблемы является знаменитая теорема Ляпунова [48], согласно которой спектр матрицы $A$ находится в открытой левой полуплоскости в том и только в том случае, когда для любой заданной положительно определенной эрмитовой матрицы $Y = Y^* > 0$ линейное алгебраическое матричное уравнение

$$-AX - XA^* = Y \tag{2}$$

имеет единственное положительно определенное решение $X = X^* > 0$.

Критерий Ляпунова, в отличие от детерминантных условий Рауса–Гурвица, формулируется в терминах коэффициентов системы без непосредственного вычисления ее характеристического полинома. Этим, прежде всего, объясняется его широкое применение не только при исследовании практических задач устойчивости, но и в задачах синтеза управляемых систем с заданным качеством, а также в других разделах прикладной математики и механики [1–3, 18, 20, 26, 28, 42, 45, 46, 84, 86, 109].

В работах Островского и Шнайдера [123] и Таусски [128] установлена теорема инерции для уравнения (2), описывающая расположение спектра матрицы $A$ относительно мнимой оси в терминах индексов инерции решения $X$. В данной теореме определены условия дихотомии спектра относительно мнимой оси (см. также [8, 21, 85]). Теорема Ляпунова и теорема инерции распространены на некоторые классы алгебраических областей, используемых при изучении спектра матрицы [8, 17, 49, 50, 54, 56, 99, 107, 116, 117, 120, 129]. При этом построены соответствующие аналоги матричного уравнения Ляпунова.

В настоящее время большой интерес проявляется к обобщениям теоремы Ляпунова и построению аналогов матричного уравнения (2) для различных классов динамических систем типа (1).

Такие уравнения представляются в виде

$$\sum_{i,j} c_{ij} A_i X A_j^* = Y, \tag{3}$$

где $c_{ij}$ — скалярные коэффициенты, $A_i$ — набор заданных матриц, $X$ и $Y$ — эрмитовы матрицы, подлежащие определению.

Для класса уравнений типа (3) с одновременно приводимыми к треугольной форме матричными коэффициентами разработана теория инерции, определяющая спектральные условия разрешимости и инерциальные свойства эрмитовых решений в виде обобщений теорем Ляпунова, Островского–Шнайдера и Тауссски [70, 118, 124]. В частности, в данной теории могут быть использованы семейства функций от матрицы, а также коммутирующие и квазикоммутирующие наборы матриц (см., например, [95, 101, 114, 118]).

Матричные коэффициенты известных аналогов уравнения Ляпунова для широких классов дифференциально-разностных и стохастических систем не связаны какими-либо ограничениями и не удовлетворяют условиям одновременной приводимости к треугольной форме [18, 30–32, 108, 126]. Поэтому для таких уравнений нужна более общая теория инерции, не использующая подобные ограничения на матричные коэффициенты.

В этой монографии излагаются общие методы построения, изучения и применения матричных уравнений, выполняющих роль аналогов уравнения Ляпунова в задачах устойчивости и локализации спектра для динамических систем класса (1). Данные методы могут быть использованы при решении практических задач анализа устойчивости и синтеза управляемых объектов. Их эффективность подтверждается новыми возможностями, связанными с применением матричных уравнений. Основное достоинство метода обобщенного уравнения Ляпунова состоит в том, что анализ качества изучаемого обьекта сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений и не связан с расчетом спектра матричной функции $F(\lambda)$.

Первая глава посвящена задаче о распределении спектра матрицы $A$ относительно множеств $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$, описываемых в комплексной плоскости эрмитовой функцией $f$ и состоящих из тех точек $\lambda$, для которых значения $f(\lambda, \bar{\lambda})$ соответственно положительны, отрицательны и нулевые. Требуется оценить числа $i_f^+$, $i_f^-$ и $i_f^0$, равные количествам точек спектра $\sigma(A)$ с учетом кратностей, принадлежащих соответственно $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$. В частности, нас интересуют критерии полной принадлежности спектра каждому из указанных множеств. Исследование задачи проводится методом матричного уравнения $L_f X = Y$ с оператором Крейна–Далецкого $L_f$ [14]. Изучаются спектральные и алгебраические свойства операторов типа $L_f$; исходя из собственных значений, компонент и собственных векторов матрицы $A$, предлагаются способы определения собственных элементов оператора $L_f$. Одним из основных результатов первой главы является обобщенная теорема Ляпунова, вывод которой осуществляется на основе вспомогательных утверждений о монотонности и монотонной обратимости оператора $L_f$ относительно конуса неотрицательно определенных матриц. Класс областей, для которых получен критерий включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ является максимально допустимым (в рамках метода матричных уравнений). Данный класс описывается функциями $f \in \mathcal{F}_0^m$ и содержит все известные классы, для которых обобщена теорема Ляпунова [17, 49–51, 99, 107, 116, 117, 120, 129]. В обобщенной теореме инерции числа $i_f^\pm$ определяются в терминах индексов инерции эрмитовых решений неравенства $L_f X > 0$, где $f \in \mathcal{F}_2^m$ — некоторый максимально допустимый класс функций (§ 5). При оценке числа $i_f^0$ используются решения однородного уравнения $L_f X = 0$ (§§ 6, 7). В § 7 предлагается также модификация известного метода локализации спектра [115], сводящегося к определению знаков коэффициентов характеристического полинома некоторой $\lambda$–матрицы. Результаты § 8 связаны с расширением множеств матриц $X$ и $Y$, удовлетворяющих обобщенному уравнению Ляпунова и используемых при решении задач о локализации спектра. При этом используются понятие управляемости пары матриц и его обобщения.

Во второй главе разрабатываются методы обобщенного уравнения Ляпунова при изучении спектральных свойств матричных функций $F(\lambda)$. Рассматриваются линейные, квадратичные и полиномиальные пучки матриц, а также аналитические матрицы-функции, допускающие правильную факторизацию. В общем случае выделяется некоторое подмножество спектра $\sigma_0(F)$, состоящее из $r$ собственных значений с учетом кратностей, и определяются количества его точек, принадлежащих заданным множествам $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$. Изучаются возможности решения задачи о локализации собственных значений с помощью матричного уравнения $M_f X = Y$, где $M_f$ — обобщение оператора $L_f$. Предлагаются различные способы построения оператора $M_f$, связанные с аналитическими и алгебраическими методами расщепления спектра. Наиболее общие теоремы о локализации собственных значений сформулированы на основе введенных понятий правых и левых пар матричной функции $F(\lambda)$ (§ 6). Предлагаются также достаточные условия локализации спектра $\sigma(F)$ в некоторых областях, основанные на решении систем матричных уравнений и неравенств (§ 7).

Глава 3 посвящена применению результатов первых двух глав к анализу линейных динамических систем, наиболее часто возникающих в приложениях. В § 1 для линейного управляемого обьекта предлагается метод построения регулятора, обеспечивающего оптимальное значение усредненного функционала качества и размещение спектра системы в заданной области. Данный метод обобщает известные алгоритмы субоптимальной стабилизации [105, 106] и позволяет не только проводить минимизацию функционала, но и одновременно осуществлять эффективный контроль за показателями качества управляемой системы путем решения обобщенного уравнения Ляпунова. Для линейных дескрипторных систем, а также для дифференциальных и разностных систем второго порядка формулируются новые критерии асимптотической устойчивости и методы построения функций Ляпунова, основанные на решении матричных уравнений (§§ 2–3). В § 4 приводится методика анализа устойчивости дифференциально-разностных и стохастических систем, основанная на решении уравнений Сильвестра-Ляпунова. Для анализа и численного построения решений динамических систем типа (1) предлагается общая методика, использующая свойства правых пар матричных функций (§ 5).

В четвертой главе излагается теория линейных матричных уравнений общего вида. Изучаются инерциальные свойства решений уравнений вида (3), допускающих преобразования (трансформации) к специальному виду. Основные результаты данной главы формулируются в виде обобщений теорем Хилла и Шнайдера [118, 124]. В результате исследования матричных уравнений устанавливается также ряд новых фактов, связанных с определением инвариантов (ранга и сигнатуры) матриц. В § 6 излагаются методы численного и аналитического построения решений линейных матричных уравнений, вытекающие из общей теории. При этом формулируются критерии разрешимости уравнения Сильвестра с произвольными матричными коэффициентами, а также критерий устойчивости класса линейных позитивных систем, вытекающий из интегрального представления решений операторных уравнений.

Результаты исследований, изложенные в главах 1–4, показывают, что для каждой динамической системы вида (1) можно построить матричные уравнения (3), инерциальные свойства которых связаны с условиями устойчивости и расположением спектра данной системы. Обратно, каждому матричному уравнению (3) соответствует некоторый класс линейных систем вида (1), динамические свойства которых описываются в виде теорем инерции для данного уравнения. Этим, прежде всего, обьясняется столь большое внимание, уделяемое в данной работе теории линейных уравнений и операторов в пространстве матриц.

В дополнении 1 приводятся способы представления линейных операторов в пространстве матриц и их основные свойства. При этом главное внимание уделяется классам монотонных и монотонно обратимых операторов относительно конуса неотрицательно определенных матриц.

В дополнении 2 приводятся результаты исследований класса линейных уравнений

$$LX - PX = Y, \tag{4}$$

где $X$ и $Y$ — элементы некоторого полуупорядоченного пространства $\mathcal{E}$ с конусом $\mathcal{K}$, $L$ и $P$ — заданные операторы, удовлетворяющие условию $P\mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$. В частности, предполагается, что оператор $P$ положителен, а оператор $L$ положительно обратим ($P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$). В широких предположениях уравнения с линейными операторами, возникающие в приложениях, представимы в виде (4) (см., например, [9, 12, 23, 35, 40]). В частности, классы обобщенных матричных уравнений Ляпунова и Сильвестра, изученные в главах 1–4, могут быть представлены в виде (4). При этом в качестве $\mathcal{K}$ выступает конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц. Свойства операторов $L$ и $P$ используются при изучении итерационного процесса

$$X_0 = G, \qquad LX_{t+1} = PX_t + Y, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

как метода монотонного приближения к решениям уравнения (4).

Основной материал книги составляют результаты, опубликованные в работах автора [49–81]. Известные результаты используются в логических построениях либо для сравнения. Приведенный список литературы не претендует на полноту и содержит лишь те работы, которые были наиболее доступны автору.

# *Глава 1*

# Распределение спектра матрицы относительно плоских кривых

Теорема Гершгорина и ее обобщения дают описания областей в комплексной плоскости, содержащих собственные значения заданной матрицы [11, 87]. В данной главе излагается альтернативный подход к изучению спектральных свойств матрицы. Мы предполагаем, что область возможной локализации спектра задана, и ищем условия желаемого расположения собственных значений относительно ее границы. В частности, нас интересуют критерии полной принадлежности спектра заданной области. Основные результаты в данном направлении связаны с вычислением индексов инерции эрмитовых решений линейных матричных уравнений (обобщенного уравнения Ляпунова) [54–57, 59, 60].

Напомним, что инерцию эрмитовой матрицы $X = X^*$ представляет упорядоченная тройка чисел

$$i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\},$$

которая определяется количествами ее положительных ($i_+$), отрицательных ($i_-$) и нулевых ($i_0$) собственных значений с учетом кратностей [101].

## § 1. Описание областей комплексной плоскости

Пусть $f(\lambda, \mu)$ — комплексная функция двух переменных, однозначно определенная в некоторой области и удовлетворяющая тождеству

$$f(\lambda, \mu) \equiv \overline{f(\bar{\mu}, \bar{\lambda})}, \qquad \lambda \in C^1, \quad \mu \in C^1. \tag{1}$$

Все значения данной функции при $\mu = \bar{\lambda}$ вещественны. Определим в плоскости $C^1$ множества точек

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) > 0\right\}, \tag{2}$$

$$\Lambda_f^- = \left\{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) < 0\right\}, \tag{3}$$

$$\Lambda_f^0 = \left\{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0\right\}. \tag{4}$$

Эти множества описывает вещественная функция $g(x, y) = f(\lambda, \bar{\lambda})$, где $x = \operatorname{Re}\lambda$, $y = \operatorname{Im}\lambda$. Обратно, если задана некоторая вещественная функция $g(x, y)$, то множества точек, на которых она принимает положительные, отрицательные и нулевые значения, можно описать в виде (2)–(4), полагая

$$f(\lambda, \bar{\lambda}) = g\left(\frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}, \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i}\right), \qquad \lambda = x + iy.$$

При этом функция $f$ является эрмитовой, т.е. удовлетворяет тождеству (1).

Выделим класс эрмитовых функций с разделяющимися переменными

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{p,q} \gamma_{pq} f_p(\lambda)\overline{f_q(\mu)} \equiv z_\lambda \Gamma z_\mu^*, \tag{5}$$

где $\gamma_{pq}$ — элементы матрицы $\Gamma$, $f_p(\lambda)$ — компоненты векторной функции $z_\lambda = [f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)]$. Если матрица $\Gamma$ эрмитова, то функция (5) удовлетворяет тождеству (1). Обратное утверждение справедливо в том случае, когда функции $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$ являются линейно независимыми.

Геометрическое место точек вида (4) можно рассматривать как некоторую кривую, отделяющую в комплексной плоскости области $\Lambda_f^\pm$. При этом граница $\partial\Lambda_f^+$ ($\partial\Lambda_f^-$) области $\Lambda_f^+$ ($\Lambda_f^-$) может не совпадать с $\Lambda_f^0$. В частности, если $z_\lambda = \left[1, \lambda, \dots, \lambda^{k-1}\right]$, то функция (5) описывает алгебраическую кривую $\Lambda_f^0$ порядка $r \leq 2k - 2$, для которой выполняются включения $\partial\Lambda_f^+ \subset \Lambda_f^0$ и $\partial\Lambda_f^- \subset \Lambda_f^0$.

Если мы имеем несколько кривых вида (4), то для описания всевозможных областей, отделяемых в комплексной плоскости этими кривыми, можно использовать свойства так называемых $R$-функций [91]. Например, для пересечения и объединения областей вида (2), отвечающих функциям $f$ и $\varphi$, выполнены соотношения

$$\Lambda_f^+ \cap \Lambda_\varphi^+ = \Lambda_u^+, \qquad \Lambda_f^+ \cup \Lambda_\varphi^+ = \Lambda_v^+, \tag{6}$$

где

$$u(\lambda,\bar\lambda) = f(\lambda,\bar\lambda) + \varphi(\lambda,\bar\lambda) - \sqrt{f^2(\lambda,\bar\lambda) + \varphi^2(\lambda,\bar\lambda)} = z_\lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z_\lambda^*,$$

$$v(\lambda,\bar\lambda) = f(\lambda,\bar\lambda) + \varphi(\lambda,\bar\lambda) + \sqrt{f^2(\lambda,\bar\lambda) + \varphi^2(\lambda,\bar\lambda)} = z_\lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} z_\lambda^*,$$

$$z_\lambda = \left[(1+i)/2, \psi_\lambda, \sqrt{\psi_\lambda}\right], \qquad \psi_\lambda = f(\lambda,\bar\lambda) + i\varphi(\lambda,\bar\lambda).$$

Если вещественные функции $g(x,y) = f(\lambda,\bar\lambda)$ и $h(x,y) = \varphi(\lambda,\bar\lambda)$ при $\lambda = x + iy \in \Lambda_v^+$ непрерывны и удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial h(x,y)}{\partial x},$$

то $\psi_\lambda$ является аналитической функцией от $\lambda$, а функции $u$ и $v$, описывающие множества (6), представимы в виде (5).

Пусть задана произвольная матрица $A \in C^{n\times n}$ . Ее спектр $\sigma(A) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ составляют $n$ собственных значений с учетом кратностей. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ — все попарно различные точки $\sigma(A)$, то характеристический и минимальный полиномы матрицы $A$ имеют вид

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_\alpha)^{n_\alpha},$$

$$\Theta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_\alpha)^{m_\alpha},$$

где

$$m_t \le n_t, \quad m \le n, \qquad m = \sum_t m_t, \quad n = \sum_t n_t, \qquad t = \overline{1, \alpha}.$$

Определим количества точек спектра $\sigma(A)$, принадлежащих каждому из множеств (2)–(4):

$$i_f^+(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^+} n_t, \qquad i_f^-(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^-} n_t, \qquad i_f^0(A) = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} n_t. \quad (7)$$

Ставится задача построения классов функций $f$ и матриц $A$, на которых функционалы (7) обладают наперед заданными свойствами. В частности, нас интересуют условия, при которых выполнено равенство $i_f^+(A) = n$, эквивалентное расположению всех собственных значений матрицы $A$ в области (2).

Поставленная задача имеет смысл, если, по крайней мере, определены значения функции $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t)$. Обозначим через $\mathcal{F}$ совокупность функций $f$, для которых определены все частные производные

$$f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \bar{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau),$$

составляющие блочную эрмитову матрицу размера $m \times m$ вида

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} F_{11} & \cdots & F_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{\alpha 1} & \cdots & F_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где

$$F_{t\tau} = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) & \cdots & f_{1m_\tau}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m_t 1}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) & \cdots & f_{m_t m_\tau}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \end{bmatrix}, \qquad t, \tau = \overline{1, \alpha}.$$

Если $m_t = m_\tau = 1$, то соответствующий блок $F_{t\tau}$ представляет значение функции $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$ Для функций (5) матрица (8) представима в виде

$$\Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} = Z \Gamma Z^*, \quad (9)$$

где $Z$ — прямоугольная матрица, строками которой служат производные $z_\lambda^{(i-1)}$ при $\lambda = \lambda_t$, $i = \overline{1, m_t}$, $t = \overline{1, \alpha}$.

Эрмитовы матрицы типа (8), в частности, (9), мы будем использовать в дальнейших исследованиях, связанных с нахождением допустимых подклассов функций класса $\mathcal{F}$ при решении поставленной задачи.

## § 2. Оператор $L_f$

Рассмотрим в пространстве матриц линейный оператор, определяемый выражением [14]

$$L_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\omega_1} \oint_{\omega_2} f(\lambda, \mu)(A - \lambda I)^{-1} X (B - \mu I)^{-1} d\lambda d\mu, \qquad (10)$$

где $A \in C^{n \times n}$ и $B \in C^{s \times s}$ — заданные квадратные матрицы, $I$ — единичная матрица подходящих размеров, $\omega_1$ ($\omega_2$) — простой замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(A)$ ($\sigma(B)$) и отделяющий в комплексной плоскости замкнутую область $\Omega_1$ ($\Omega_2$), $f$ — однозначная функция, не имеющая особенностей в области $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Выделим семейство операторов вида (10), сохраняющих множество эрмитовых матриц:

$$L_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\omega_1} \oint_{\omega_2} f(\lambda, \bar{\mu})(A - \lambda I)^{-1} X (A - \mu I)^{-1^*} d\lambda d\bar{\mu}. \qquad (11)$$

В этом случае $B = A^*$, а функция $f \in \mathcal{F}$ удовлетворяет тождеству (1). В частности, для функции (5) оператор (11) приводится к виду

$$L_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} f_p(A) X f_q(A)^*, \qquad (12)$$

где матричные коэффициенты представляют аналитические функции от матрицы $A$:

$$f_p(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\omega_1} f_p(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda.$$

Операторы (11) и (12) лежат в основе наших исследований, связанных с решением задачи о распределении спектра матрицы $A$.

Операторы вида (10), в частности, (11) и (12), обладают интересными алгебраическими свойствами [14, 15]. Если выполнены условия

$$f(\lambda,\mu)\neq 0,\qquad \lambda\in\sigma(A),\quad \mu\in\sigma(B), \tag{13}$$

то оператор (10) обратим и обратный оператор имеет такой же вид:

$$L_f^{-1}=L_\varphi,\qquad \varphi=1/f(\lambda,\mu). \tag{14}$$

Спектр $\sigma(L_f)$ оператора (10) образуют $ns$ значений функции $f$, определенных в условиях (13). Любые операторы $L_{f_1}$ и $L_{f_2}$ вида (10) коммутируют и удовлетворяют соотношениям

$$L_{f_1}L_{f_2}=L_{f_1f_2},\qquad c_1L_{f_1}+c_2L_{f_2}=L_{c_1f_1+c_2f_2}, \tag{15}$$

где $c_1$ и $c_2$ — произвольные константы. Более того, если заданы набор операторов $L_{f_1},\dots,L_{f_k}$ и функция $g(z_1,\dots,z_k)$, однозначная и аналитическая в окрестности множества $\sigma(L_{f_1})\times\cdots\times\sigma(L_{f_k})$, то

$$g(L_{f_1},\dots,L_{f_k})=L_{g(f_1,\dots,f_k)}. \tag{16}$$

Здесь функция от семейства коммутирующих операторов имеет вид

$$g(L_{f_1},\dots,L_{f_k})=$$

$$=\frac{1}{(-2\pi i)^k}\oint\limits_{\sigma_1}\cdots\oint\limits_{\sigma_k}g(z_1,\dots,z_k)\prod_{j=1}^{k}(L_{f_j}-z_jE)^{-1}dz_1\dots dz_k,$$

где $E$ — тождественный оператор, $\sigma_j$ — замкнутый контур, охватывающий спектр оператора $L_{f_j}$, $j=\overline{1,k}$. Формула (16) устанавливается на основе соотношений (14) и (15).

Покажем, что каждый оператор вида (10) представим в виде

$$L_fX=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{r-1}\gamma_{pq}A^pXB^q, \tag{17}$$

где $\gamma_{pq}$ — некоторые коэффициенты, $m(r)$ — степень минимального полинома матрицы $A(B)$. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ $(\mu_1, \ldots, \mu_\beta)$ все попарно различные точки спектра $\sigma(A)$ $(\sigma(B))$ с соответствующими индексами $m_1, \ldots, m_\alpha$ $(r_1, \ldots, r_\beta)$. Используем разложения [11]

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti},$$

$$(\mu I - B)^{-1} = \sum_{\tau=1}^{\beta} \sum_{j=1}^{r_\tau} \frac{(j-1)!}{(\mu - \mu_\tau)^j} B_{\tau j}.$$

Матрицы $A_{ti}$ $(B_{\tau j})$ являются линейно независимыми и называются компонентами матрицы $A(B)$. Подставляя эти соотношения в (10) и вычисляя производные интегралов типа Коши, получаем представление

$$L_f X = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{\tau=1}^{\beta} \sum_{i=1}^{m_t} \sum_{j=1}^{r_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \mu_\tau) A_{ti} X B_{\tau j}, \qquad (18)$$

где

$$f_{ij}(\lambda_t, \mu_\tau) = -\frac{(i-1)!(j-1)!}{4\pi^2} \oint_{\omega_1} \oint_{\omega_2} \frac{f(\lambda, \mu) d\lambda d\mu}{(\lambda - \lambda_t)^i (\mu - \mu_\tau)^j} =$$

$$= \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \mu_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \mu_\tau).$$

Компоненты $A_{ti} = \alpha_{ti}(A)$ $(B_{\tau_j} = \beta_{\tau j}(B))$ являются скалярными полиномами от $A$ $(B)$, степени которых не превосходят $m-1$ $(r-1)$. Поэтому выражение (18) для оператора (10) приводится к виду (17).

Отметим, что свойства (14)–(16) класса операторов (10) можно установить, исходя из представления (18), путем вычисления частных производных высших порядков для сумм и произведений соответствующих функций, а также использования свойств компонент матрицы. В частности, компоненты матрицы $A$ обладают следующими свойствами [44]:

$$A_{t1}^2 = A_{t1}, \qquad \sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1} = I, \qquad A_{ti} = \frac{1}{(i-1)!}\left(A - \lambda_t I\right)^{i-1} A_{t1},$$

$$A_{ti}A_{\tau j} = A_{\tau j}A_{ti} =$$
$$= \begin{cases} 0, & t \neq \tau \quad \text{или} \quad k > m_t, \\ \begin{pmatrix} i-1 \\ k-1 \end{pmatrix} A_{tk}, & t = \tau \quad \text{и} \quad k \leq m_t, \end{cases} \tag{19}$$
$$k = i + j - 1, \qquad i = \overline{1, m_t}, \qquad j = \overline{1, m_\tau}, \qquad t, \tau = \overline{1, \alpha}.$$

Аналогичными свойствами обладают компоненты матрицы $B$.

Выделим в разложении (18) слагаемые, левые (правые) матричные коэффициенты которых образуют спектральные проекторы $A_{t1}$ $(B_{\tau 1})$ матрицы $A(B)$:

$$L_f X = \sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{\tau=1}^{\beta}\left[f(\lambda_t, \mu_t)A_{t1}XB_{\tau 1} + N_{t\tau}X\right], \tag{20}$$

где

$$N_{t\tau}X = \sum_{i+j>2} f_{ij}(\lambda_t, \lambda_\tau)A_{ti}XB_{\tau j}, \qquad t = \overline{1, \alpha}, \quad \tau = \overline{1, \beta}.$$

Используя свойства компонент матрицы, можно установить, что все операторы $N_{t\tau}$ в (20) являются нильпотентными.

Изучим спектральные свойства оператора (10), исходя из его представления (20). В частности, нас интересует структура собственных элементов (векторов) оператора (10) и условия существования неотрицательно определенных матриц, выступающих в качестве собственных элементов данного оператора.

Рассмотрим однородное матричное уравнение

$$L_f W = wW. \tag{21}$$

Каждое ненулевое решение $W = W(w)$ данного уравнения является собственным элементом оператора (10), отвечающим собственному значению

$$w \in \left\{ f(\lambda_t, \mu_\tau) \,|\, t = \overline{1,\alpha}, \tau = \overline{1,\beta} \right\}.$$

**Лемма 1.** *Матрица $W$ является собственным элементом оператора (10), отвечающим собственному значению $w$, в том и только в том случае, когда она представима в виде*

$$W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w} A_{t1} H_{t\tau} B_{\tau 1} \neq 0, \tag{22}$$

*где $\Theta_w \neq \varnothing$ — множество пар $(t,\tau)$, для которых $f(\lambda_t,\mu_\tau) = w$, $H_{t\tau}$ — некоторые матрицы, удовлетворяющие условиям*

$$N_{t\tau} H_{t\tau} = 0, \qquad (t,\tau) \in \Theta_w. \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $\Theta_w \neq \varnothing$. Тогда любая матрица вида (22) при условиях (23) удовлетворяет уравнению (21). Это устанавливается непосредственно путем подстановки (22) в (21), используя свойства матричных коэффициентов разложения (20). Так, полагая $H_{t\tau} = A_{tm_t} C_{t\tau} B_{\tau r_\tau}$, $C_{t\tau} \in C^{n\times s}$, можно обнаружить, что выполнены условия (23). В этом случае имеем собственные элементы оператора (10) вида

$$W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w} A_{tm_t} C_{t\tau} B_{\tau r_\tau} \neq 0.$$

Покажем, что если $W \neq 0$ является решением уравнения (21), то $\Theta_w \neq \varnothing$ и для некоторой блочной матрицы

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{\alpha 1} & \cdots & H_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

выполнены соотношения (22)–(23). Пусть $H_{t\tau} = A_{t1} W B_{\tau 1}$. Тогда, умножая (21) слева (справа) на $A_{t1}$ ($B_{\tau 1}$) с учетом (19) и (20), получаем систему

$$(w - f(\lambda_t, \mu_\tau))\, H_{t\tau} = N_{t\tau} H_{t\tau}, \qquad t = \overline{1,\alpha}, \quad \tau = \overline{1,\beta}, \tag{24}$$

которая эквивалентна исходному уравнению (21). Если $w = f(\lambda_t, \mu_\tau)$, то выполнены условия (23). Если же $w \neq f(\lambda_t, \mu_\tau)$, то из нильпотентности оператора $N_{t\tau}$ следует $H_{t\tau} = 0$. Учитывая свойства проекторов $A_{t1}$ и $B_{\tau 1}$, имеем связь между матрицами $W$ и $H$ вида

$$
\begin{gathered}
H = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{\alpha 1} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{\beta 1} \end{bmatrix}, \\
W = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{\alpha 1} \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} B_{11} \\ \vdots \\ B_{\beta 1} \end{bmatrix}.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Следовательно, выполнены соотношения (22) и (23). При этом $\Theta_w \neq \varnothing$. В противном случае все блоки $H_{t\tau}$ нулевые и, согласно (25), $W = 0$, что противоречит предположениям.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Неотрицательно определенная матрица $W = W^* \geq 0$ является собственным элементом оператора (11), отвечающим собственному значению $w$, в том и только в том случае, когда она представима в виде*

$$
W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w^*} A_{t1} H_{t\tau} A_{\tau 1}^* \neq 0, \tag{26}
$$

*где $\Theta_w^* \neq \varnothing$ — множество пар $(t, \tau)$, для которых $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) = f(\lambda_\tau, \bar{\lambda}_\tau) = w$, $H_{t\tau}$ — блоки эрмитовой неотрицательно определенной матрицы, удовлетворяющие условиям*

$$
N_{t\tau} H_{t\tau} = 0, \qquad (t,\tau) \in \Theta_w^*. \tag{27}
$$

Доказательство. Используем доказательство леммы 1 в случае $A = B$. Если $\Theta_w \neq \varnothing$, то при условиях (27) матрица (26) удовлетворяет уравнению (21). В частности, можно положить

$$
W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w^*} A_{tm_t} C_{t\tau} A_{\tau m_\tau}^* \geq 0,
$$

где $C_{t\tau}$ — блоки произвольной матрицы $C = C^* > 0$.

Если ненулевая матрица $W = W^* \geq 0$ удовлетворяет уравнению (21), то, согласно (25), $H = H^* \geq 0$ и $H \neq 0$. Все столбцы и строки неотрицательно определенной матрицы, пересекающиеся на нулевых диагональных елементах, равны нулю. Поэтому, если $w \neq f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t)$, то, согласно (24), $H_{tt} = 0$ и при любом $\tau$ внедиагональные блоки $H_{t\tau}$ и $H_{\tau t}$ нулевые. Следовательно, формулы (22) и (23) приводятся к виду (26) и (27), где $\Theta_w^* \neq \varnothing$.

Лемма доказана.

Отметим, что если матрицы $A$ и $B$ имеют простую структуру, то операторы $N_{t\tau}$ в (20) нулевые, а в выражениях для собственных элементов (22) и (26) отсутствуют ограничения на блоки $H_{t\tau}$ вида (23) и (27).

Установим связь между решениями уравнения (21) и собственными векторами матриц $A$ и $B$. Построим из правых (левых) собственных векторов матрицы $A(B)$, отвечающих собственному значению $\lambda_t$ $(\mu_\tau)$, матрицы $U_t \in C^{n\times u_t}$ $(V_\tau \in C^{v_\tau \times s})$. Эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$AU_t = \lambda_t U_t, \qquad V_\tau B = \mu_\tau V_\tau.$$

Пусть $U_t$ $(V_\tau)$ — матрица полного ранга $u_t$ $(v_\tau)$, равного геометрической кратности собственного значения $\lambda_t$ $(\mu_\tau)$. Исходя из базисных интерполяционных свойств полиномов $\alpha_{ti}$ и $\beta_{\tau j}$ [44], получаем соотношения

$$A_{ti}U_p = \begin{cases} U_t, & t = p \quad \text{и} \quad i = 1, \\ 0, & t \neq p \quad \text{или} \quad i > 1, \end{cases}$$
$$V_q B_{\tau j} = \begin{cases} V_\tau, & \tau = q \quad \text{и} \quad j = 1, \\ 0, & \tau \neq q \quad \text{или} \quad j > 1. \end{cases} \tag{28}$$

Из (28) следует, что любые матрицы вида $H_{t\tau} = U_t S_{t\tau} V_\tau$ удовлетворяют условиям (23).

Таким образом, если $\Theta_w \neq \varnothing$, то, согласно лемме 1, выражение

$$W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w} U_t S_{t\tau} V_\tau \neq 0 \tag{29}$$

является собственным элементом оператора (10), отвечающим собственному значению $w$. В частности, при $\Theta_w^* \neq \varnothing$ матрица

$$W = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w^*} U_t S_{t\tau} U_\tau^* \geq 0 \quad (\neq 0) \tag{30}$$

служит собственным элементом оператора (11), отвечающем собственному значению $w$. При этом всегда можно подобрать блоки $S_{t\tau}$ так, чтобы ранг матрицы (30) принимал любое значение из интервала

$$1 \leq \operatorname{rang} W \leq \sum_{(t,t)\in\Theta_w^*} u_t,$$

где $u_t$ — геометрическая кратность собственного значения $\lambda_t \in$ $\in \sigma(A)$.

Изложенные способы решения уравнения (21) можно использовать при изучении более сложной задачи о построении жордановых последовательностей элементов для оператора (10). Количество таких элементов для каждого собственного значения $w$ оператора (10) равно алгебраической кратности, вычисляемой по формуле

$$k(w) = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_w} n_t s_\tau,$$

где $n_t$ ($s_\tau$) — алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_t$ ($\mu_\tau$) матрицы $A(B)$.

## § 3. Обобщенная теорема Ляпунова

Рассмотрим линейное матричное уравнение

$$L_f X = Y, \tag{31}$$

где $L_f$ — оператор вида (11), построенный для заданных матрицы $A \in C^{n\times n}$ и функции $f \in \mathcal{F}$. Для любой матрицы $Y \in C^{n\times n}$ уравнение (31) имеет единственное решение $X \in C^{n\times n}$ в том и только в том случае, когда выполнены неравенства [14]

$$f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \neq 0, \qquad t = \overline{1,\alpha}, \quad \tau = \overline{1,\alpha}, \tag{32}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — попарно различные точки спектра $\sigma(A)$. Если $Y$ — эрмитова матрица, то при условиях (1) решение $X$ также эрмитово.

Обозначим через $\mathcal{K}_0$ ($\mathcal{K}$) множество эрмитовых положительно (неотрицательно) определенных матриц порядка $n$. Множество $\mathcal{K}$ является воспроизводящим конусом пространства $C^{n\times n}$. Изучим связь между спектральными свойствами матрицы $A$ и условиями разрешимости уравнения (31) на $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}$. Из леммы 2, в частности, следует, что при условии $\sigma(A) \cap \Lambda_f^+ \neq \varnothing$ существуют матрицы $X \geq 0$ и $Y \geq 0$, удовлетворяющие уравнению (31).

**Лемма 3.** *Если для некоторой матрицы $Y > 0$ уравнение (31) имеет решение $X \geq 0$, то все собственные значения матрицы $A$ расположены в области (2), т.е*

$$f(\lambda_1, \bar{\lambda}_1) > 0, \ldots, f(\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) > 0. \tag{33}$$

*Обратно, если выполнены неравенства (33), то существуют матрицы $X > 0$ и $Y > 0$, удовлетворяющие уравнению (31).*

Доказательство. Умножая (31) слева (справа) на $A_{tm_t}$ ($A^*_{\tau m_\tau}$) с учетом формул (19) и (20), имеем соотношения

$$f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) A_{tm_t} X A^*_{\tau m_\tau} = A_{tm_t} Y A^*_{\tau m_\tau}, \qquad t = \overline{1, \alpha}, \quad \tau = \overline{1, \alpha}. \tag{34}$$

Если $Y > 0$, то в правой части (34) при $t = \tau$ ненулевые неотрицательно определенные матрицы. Если к тому же $X \geq 0$, то выполнены неравенства (33). Из (34) также следует, что при $X > 0$ и $Y \geq 0$ все значения функции $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t)$ неотрицательны.

Покажем, что при условиях (33) можно построить матрицы $X > 0$ и $Y > 0$, удовлетворяющие уравнению (31). Пусть $J = TAT^{-1}$ — левая жорданова форма матрицы $A$. Преобразуем уравнение (31) к виду

$$\sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{\tau=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \sum_{j=1}^{m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \alpha_{ti}(J) H \alpha^*_{\tau j}(J) = G, \tag{35}$$

где $H = TXT^*$, $G = TYT^*$. Описание структуры матриц $\alpha_{ti}(J)$ имеется в [44]. Мы используем лишь некоторые их свойства, вытекающие из (19). Все элементы матриц $\alpha_{t1}(J)$ нулевые, за исключением $n_t$ диагональных элементов $\alpha_{t1}(\lambda_t) = 1$. Все ненулевые элементы матриц $\alpha_{ti}(J)$ при $i > 1$ расположены ниже главной диагонали.

Пусть $H_k$ и $G_k$ — последовательные главные подматрицы порядка $k$ соответствующих матриц $H$ и $G$, $k = \overline{1, n}$. Тогда, согласно (35)

$$H_k = \left[ \begin{array}{cc} H_{k-1} & u_k \\ u_k^* & h_{kk} \end{array} \right], \quad G_k = \left[ \begin{array}{cc} G_{k-1} & v_k \\ v_k^* & f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k)h_{kk} + w_k \end{array} \right], \tag{36}$$

где $G_{k-1}$, $v_k$ и $w_k$ не зависят от элемента $h_{kk}$ матрицы $H$, $k = \overline{2, n}$. При условиях (33) имеем рекуррентный алгоритм выбора матрицы $H$, для которой $G > 0$. Очевидно, $G_1 = f(\sigma_1, \bar{\sigma}_1)H_1 > 0$ при $H_1 = h_{11} > 0$. Если $H_{k-1} > 0$ и $G_{k-1} > 0$, то неравенства $H_k > 0$ и $G_k > 0$ достигаются путем увеличения диагонального элемента $h_{kk}$. Так, если

$$f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k)h_{kk} + w_k > v_k^* G_{k-1}^{-1} v_k, \tag{37}$$

то $G_k > 0$. Внедиагональным элементам $H$ можно присвоить произвольные значения $h_{ks} = \bar{h}_{sk}$. Таким способом можно построить диагональную матрицу $H > 0$, удовлетворяющую неравенствам (37). Искомые матрицы $X > 0$ и $Y > 0$ для исходного уравнения (31) определены в (35).

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Оператор (11) оставляет инвариантным конус неотрицательно определенных матриц ($L_f\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$) в том и только в том случае, когда выполнено неравенство*

$$\Gamma_f \left( \begin{array}{ccc} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{array} \right) \geq 0. \tag{38}$$

*Оператор (11) оставляет инвариантным множество положительно определенных матриц ($L_f\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0$) в том и только в том случае, когда выполнена система неравенств (33) и (38).*

Доказательство. Включение $L_f\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ означает, что в соотношении (31) из $X \geq 0$ следует $Y \geq 0$. Для каждого вектора $c \in C^n$ введем множество пар индексов $\Delta_c = \{(t,i) \mid g_{ti} \neq 0\}$, где $g_{ti} = A_{ti}^* c$, $t = \overline{1,\alpha}$, $i = \overline{1,m_t}$. Используя (18) и (31), вычислим эрмитову форму

$$c^* Y c = \sum_{(t,i)\in\Delta_c} \sum_{(\tau,j)\in\Delta_c} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) g_{ti}^* X g_{\tau j} = \operatorname{tr}(Q_c X), \qquad (39)$$

где $Q_c = G_c F_c^T G_c^*$, $F_c$ — главная подматрица в (8) с элементами $f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$ при $(t,i) \in \Delta_c$, $(\tau, j) \in \Delta_c$, а матрицу $G_c$ образуют вектор-столбцы $g_{ti}$ при $(t,i) \in \Delta_c$.

Если $c \neq 0$, то $\Delta_c \neq \varnothing$ и все ненулевые столбцы $g_{ti}$ линейно независимы. Действительно, полагая $l_t = \max\{i \mid (t,i) \in \Delta_c\}$ и умножая линейную комбинацию

$$\sum_{(t,i)\in\Delta_c} d_{ti} g_{ti} = 0$$

слева последовательно на $A_{\tau j}^*$ $(j = l_\tau - 1, l_\tau - 2, \ldots)$, с учетом (19) получаем $d_{\tau j} = 0$ при $(t,j) \in \Delta_c$. Здесь учтено также, что из $(\tau, j) \notin \Delta_c$ следует $(\tau, q) \notin \Delta_c$ при $q > j$.

Так как матрица $G_c$ имеет полный ранг по столбцам при $c \neq 0$, то неравенства $F_c \geq 0$ и $Q_c \geq 0$ эквивалентны. При этом, если выполнены неравенства (33), то $Q_c \neq 0$. Покажем, что существует вектор $c$, для которого $G_c$ имеет максимальный ранг $m$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} d_{ti} g_{ti} = \sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t} d_{ti} \alpha_{ti}(A)^* c = z(A)^* c = 0, \qquad (40)$$

где $z(\lambda) = \sum\limits_{t,i} \bar{d}_{ti} \alpha_{ti}(\lambda)$ — полином степени $p < m$. Пусть $c_0$ — вектор, минимальный аннулирующий полином которого относительно матрицы $A^*$ совпадает с минимальным полиномом степени $m$ для данной матрицы [11]. Тогда, полагая в (40) $c = c_0$, имеем $z(\lambda) \equiv 0$ и, в силу независимости полиномов $\alpha_{ti}$, все коэффициенты $d_{ti} = 0$. Это означает, что $G_c$ — матрица ранга $m$. Для указанного вектора $c$ главная подматрица $F_c$ совпадает со всей матрицей (8).

Согласно теореме Фейера [101], неравенство $\mathrm{tr}(Q_c X) \geq 0$ выполнено для любой матрицы $X \geq 0$ в том и только в том случае, когда $Q_c \geq 0$. Для любой мотрицы $X > 0$ выполнено строгое неравенство $\mathrm{tr}(Q_c X) > 0$ в том и только в том случае, когда $Q_c \geq 0$ и $Q_c \neq 0$. Используя эти критерии и установленные свойства матриц $Q_c$, $F_c$ и $G_c$ в соотношении (39) для вектора $c$, пробегающего все пространство, приходим к утверждениям леммы 4.

Отметим, что если существует матрица $X > 0$, для которой $L_f X > 0$, то включения $L_f \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_0$ и $L_f \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ эквивалентны.

Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Для любой положительно определенной матрицы $Y$ уравнение (31) имеет положительно определенное решение $X$ ($\mathcal{K}_0 \subset L_f \mathcal{K}_0$) в том и только в том случае, когда выполнены неравенства (32) и матричное неравенство*

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \tag{41}$$

*где* $\varphi(\lambda, \bar{\mu}) \stackrel{\triangle}{=} 1/f(\lambda, \bar{\mu})$.

Доказательство. Если уравнение (31) разрешимо для любой матрицы $Y > 0$, то выполнены неравенства (32) и оператор (11) обратим. Действительно, любая матрица $Y$ представима в виде линейной комбинации положительно определенных матриц $Y_k$ и ей соответствует решение $X$. В частности, можно положить

$$Y = Y_1 - Y_2 + i(Y_3 - Y_4), \qquad X = X_1 - X_2 + i(X_3 - X_4),$$

где $X_k > 0$ — решение (31), отвечающее $Y_k > 0$ . Неравенства (32) следуют из (34), поскольку правые части этих соотношений при надлежащем выборе матрицы $Y$ могут быть ненулевыми.

Согласно (14) и (18), единственное решение уравнения (31) при условиях (32) имеет вид

$$X = L_\varphi Y = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{\tau=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \sum_{j=1}^{m_\tau} \varphi_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) A_{ti} Y A^*_{\tau j}. \tag{42}$$

Матрица (41) составлена из коэфициентов данного выражения

$$\varphi_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \bar{\lambda}_\tau^{j-1}} \varphi(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau).$$

Применяя лемму 4 к оператору (42), приходим к утверждению леммы 5.

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Пусть матрица (8) имеет лишь одно положительное собственное значение:*

$$i_+ \left( \Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \right) = 1. \tag{43}$$

*Тогда система неравенств (32) и (41) эквивалентна неравенствам (33).*

Доказательство. Значения функции $\varphi(\lambda_t, \bar{\lambda}_t)$ расположены на главной диагонали матрицы (41). Поэтому неравенства (33) следуют из (41). Докажем обратное утверждение. Прежде всего, при условиях (33) и (43) выполнены неравенства (32). В противном случае в (8) имеется главная подматрица вида

$$\begin{bmatrix} f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) & f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \\ f(\lambda_\tau, \bar{\lambda}_t) & f(\lambda_\tau, \bar{\lambda}_\tau) \end{bmatrix} > 0,$$

что противоречит условию (43).

Рассмотрим алгебраическую функцию

$$\begin{aligned} g(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \sum_{j=1}^{m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \alpha_{ti}(\lambda) \overline{\alpha_{\tau j}(\mu)} \equiv \\ \equiv a_\lambda \Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} a^*_\mu. \end{aligned} \tag{44}$$

Здесь элементами вектор-строки $a_\lambda \in C^m$ являются полиномы $\alpha_{ti}(\lambda)$, которые определяют компоненты $A_{ti} = \alpha_{ti}(A)$ матрицы $A$ и удовлетворяют следующим интерполяционным условиям [44]:

$$\frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}}\alpha_{ti}(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_\tau} = \begin{cases} 1, & t=\tau \quad \text{и} \quad k=i, \\ 0, & t\neq\tau \quad \text{или} \quad k\neq i. \end{cases}$$

Используя данные условия, получаем соотношения

$$f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial\lambda_t^{i-1}\partial\bar{\lambda}_\tau^{j-1}} g(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau),$$

$$\varphi_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial\lambda_t^{i-1}\partial\bar{\lambda}_\tau^{j-1}} \psi(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau),$$

где $\psi(\lambda, \bar{\mu}) = 1/g(\lambda, \bar{\mu})$. Это означает, что матрица $\Gamma_f$ $(\Gamma_\varphi)$ не изменяется, если вместо $f(\varphi)$ использовать $g(\psi)$.

Преобразуя матрицу (8) к диагональному виду при условии (43) и используя неравенство Коши, приходим к следующим соотношениям, выполняемым в окрестности точек $(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$:

$$g(\lambda, \bar{\mu}) = u(\lambda)\overline{u(\mu)}\left(1 - v(\lambda, \bar{\mu})\right), \qquad v(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_s v_s(\lambda)\overline{v_s(\mu)},$$

$$|v(\lambda, \bar{\mu})|^2 \leq v(\lambda, \bar{\lambda})v(\mu, \bar{\mu}) < 1, \qquad v(\lambda, \bar{\lambda}) < 1, \qquad v(\mu, \bar{\mu}) < 1,$$

$$g(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0, \qquad \psi(\lambda, \bar{\mu}) = \frac{1}{u(\lambda)\overline{u(\mu)}} \sum_{k=0}^{\infty} v^k(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\lambda)\overline{w_k(\mu)},$$

где $u$, $v_s$ и $w_k$ — некоторые рациональные функции, построенные из полиномов $\alpha_{ti}$. В результате получаем матричное неравенство

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k d_k^* \geq 0,$$

где

$$d_k = \left[\delta_{k1}(\lambda_1), \dots, \delta_{km_1}(\lambda_1), \dots, \delta_{k1}(\lambda_\alpha), \dots, \delta_{km_\alpha}(\lambda_\alpha)\right]^T,$$

$$\delta_{ki}(\lambda) = \frac{d^{i-1}}{d\lambda^{i-1}} w_k(\lambda).$$

Лемма доказана.

Для заданной функции $f$ условия (41) и (43) можно проверить, если известны собственные значения $\lambda_t$ матрицы $A$ и их индексы $m_t$ . Для матрицы простой структуры условие (41) представляется в виде

$$\Gamma_\varphi \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1/f(\lambda_1, \bar{\lambda}_1) & \cdots & 1/f(\lambda_1, \bar{\lambda}_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/f(\lambda_m, \bar{\lambda}_1) & \cdots & 1/f(\lambda_m, \bar{\lambda}_m) \end{bmatrix} \geq 0. \tag{45}$$

Пусть $\mathcal{F}_0^m$ — класс функций $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих условию (45) для любого набора точек $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ из области (2).

Рассмотрим случай $m = 2$. Класс $\mathcal{F}_0^2$ определяется неравенством

$$\Delta(\lambda, \bar{\mu}) = |f(\lambda, \bar{\mu})|^2 - f(\lambda, \bar{\lambda}) f(\mu, \bar{\mu}) \geq 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda_f^+).$$

Матричное неравенство (41) при $m_1 = m$ и $\lambda_1 = \lambda$ приводится к виду

$$\delta(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{\partial f(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \lambda} \frac{\partial f(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} - f(\lambda, \bar{\lambda}) \frac{\partial^2 f(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} \geq 0 \qquad (\lambda \in \Lambda_f^+). \tag{46}$$

Переходя к пределу при $\mu \to \lambda$, имеем

$$\psi(\mu, \lambda, \bar{\lambda}) = \frac{f(\mu, \bar{\lambda}) - f(\lambda, \bar{\lambda})}{\mu - \lambda} \to \frac{\partial f(\lambda, \bar{\lambda})}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\Delta(\lambda, \bar{\mu})}{|\mu - \lambda|^2} = |\psi(\mu, \lambda, \bar{\lambda})|^2 - f(\lambda, \bar{\lambda}) \frac{\psi(\mu, \lambda, \bar{\mu}) - \psi(\mu, \lambda, \bar{\lambda})}{\bar{\mu} - \bar{\lambda}} \to \delta(\lambda, \bar{\lambda}).$$

Следовательно, для функций $f \in \mathcal{F}_0^2$ выполнено неравенство (46). Имеет место более общее утверждение.

**Лемма 7.** *Если $f \in \mathcal{F}_0^m$, то неравенство (41) выполнено для любых наборов точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ из области $\Lambda_f^+$ и натуральных чисел $m_1, \ldots, m_\alpha$, сумма которых не превосходит $m$.*

Доказательство. Пусть $\max\{m_1, \ldots, m_\alpha\} \geq 2$. Определим в окрестности каждой точки $\lambda_t \in \Lambda_f^+$ при $m_t \geq 2$ множество попарно различных точек $\lambda_{t1}, \ldots, \lambda_{tm_t} \in \Lambda_f^+$ и построим матрицу

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1\alpha} \\ \Phi_{\alpha 1} & \cdots & \Phi_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} = \\ = \Gamma_\varphi \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1m_1} & \cdots & \lambda_{\alpha 1} & \cdots & \lambda_{\alpha m_\alpha} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\Phi_{t\tau} = \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_{t1}, \bar{\lambda}_{\tau 1}) & \cdots & \varphi(\lambda_{t1}, \bar{\lambda}_{\tau m_\tau}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi(\lambda_{tm_t}, \bar{\lambda}_{\tau 1}) & \cdots & \varphi(\lambda_{tm_t}, \bar{\lambda}_{\tau m_\tau}) \end{bmatrix}, \qquad t, \tau = \overline{1, \alpha}.$$

Предположим, что $\lambda_t = \lambda_{t1}$ и $\lambda_{t2} - \lambda_{t1} = \cdots = \lambda_{tm_t} - \lambda_{tm_t - 1} = \delta_t$. Используя рекуррентные формулы для приближенного вычисления производных функции высших порядков, при $\delta_t \to 0$ и $\delta_\tau \to 0$ имеем

$$\delta_t^{1-i} \delta_\tau^{1-j} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=1}^{j} (-1)^{i+j-p-q} \binom{i-p}{i-1} \binom{j-q}{j-1} \varphi(\lambda_{tp}, \bar{\lambda}_{\tau q}) \to \\ \to \varphi_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau).$$

При этом

$$U \Phi U^* \to \Phi_0 = \Gamma_\varphi \begin{pmatrix} m_1 & \ldots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_\alpha \end{pmatrix}, \tag{48}$$

где

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_\alpha \end{bmatrix}, \qquad U_t = \begin{bmatrix} u_{t1}^{(1)} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ u_{t1}^{(m_t)} & \ldots & u_{tm_t}^{(m_t)} \end{bmatrix},$$

$$u_{tp}^{(i)} = (-1)^{i-p} \binom{i-p}{i-1} \delta_t^{1-i}.$$

На основе формул (47), (48) можно построить последовательность эрмитовых матриц $\Phi_k$, сходящихся по норме к $\Phi_0$ и таких, что $i(\Phi_k) = i(\Phi)$, $k = 1, 2, \ldots$. Если $f \in \mathcal{F}_0^m$, то $\Phi \geq 0$ и $\Phi_k \geq 0$. В силу замкнутости конуса неотрицательно определенных матриц, имеем $\Phi_0 \geq 0$, т.е. выполнено неравенство (41).

Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Пусть заданы матрица $A \in C^{n\times n}$, функция $f \in \mathcal{F}_0^m$ и произвольная положительно определенная матрица $Y \in \mathcal{K}_0$. Тогда спектр $\sigma(A)$ расположен в области $\Lambda_f^+$ в том и только в том случае, когда уравнение (31) имеет единственное положительно определенное решение $X \in \mathcal{K}_0$.*

Доказательство. Если для некоторой матрицы $Y > 0$ уравнение (31) имеет решение $X > 0$, то, согласно лемме 3, $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$. При этом $f$ может быть произвольной функцией класса $\mathcal{F}$.

Пусть $f \in \mathcal{F}_0^m$ и выполнены неравенства (33). Тогда, согласно лемме 7, выполнена система неравенств (32) и (41). Из леммы 5 следует, что для любой матрицы $Y > 0$ уравнение (31) имеет единственное решение $X > 0$ вида (42).

Данное утверждение можно установить без использования леммы 7, исходя из следующих "соображений о непрерывности". Произвольную матрицу $A$ с помощью бесконечно малых возмущений ее элементов можно преобразовать в матрицу $A_\varepsilon$ простой структуры [101]. В частности, полагая

$$A_\varepsilon = A + D, \qquad D = \operatorname{diag}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\},$$

можно подобрать произвольно малые числа $\varepsilon_k$ так, чтобы все собственные значения матрицы $A_\varepsilon$ были различны и при условиях (33) принадлежали области (2). В этом случае, согласно лемме 5, для любой матрицы $Y > 0$ уравнение (31) имеет решение $X_\varepsilon > 0$. Если $\varepsilon \to 0$, то $X_\varepsilon \to X \geq 0$, где $X$ — решение уравнения (31), отвечающее матрицам $A$ и $Y$. Покажем, что $X > 0$ . Согласно лемме 3, существуют матрицы $X_0 > 0$ и $Y_0 > 0$, удовлетворяющие уравнению (31). Выберем малое число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $Y - \delta Y_0 > 0$ [10]. Тогда, согласно доказанному, для данной матрицы уравнение (31) имеет решение $X - \delta X_0 \geq 0$. Следовательно, $X > 0$.

Теорема доказана.

Теорема 1 представляет критерий включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ и является обобщением теоремы Ляпунова [48]. Используемый при этом класс функций $f \in \mathcal{F}_0^m$ является в определенном смысле максимально допустимым. Действительно, если условие (45) нарушено при некоторых $\lambda_t \in \Lambda_f^+$, то, согласно лемме 5, критерий не выполняется для любой матрицы $A$ с собственными значениями $\lambda_t$, $t = \overline{1, m}$. Если степень минимального полинома $m$ матрицы $A$ не известна, то в условиях теоремы 1 можно положить $f \in \mathcal{F}_0^n$.

## § 4. Эрмитовы функции класса $\mathcal{F}_0^m$

При использовании теоремы 1 необходимо решить вопрос о принадлежности заданной функции $f$ классу $\mathcal{F}_0^m$, т.е. проверить выполнение матричного неравенства (45) при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in$ $\in \Lambda_f^+$. Выделим в $\mathcal{F}_0^m$ важные подклассы эрмитовых функций, которые определяются более простыми соотношениями, чем неравенства (45), и содержат некоторые известные классы функций. При этом будем предполагать, что каждое из множеств (2)–(4) непусто.

Прежде всего, отметим, что если эрмитова функция представима в виде $f(\lambda, \mu) = u(\lambda, \mu) - v(\lambda, \mu)$, причем, $\Lambda_f^+ \subset \Lambda_u^+$, а функции $u$ и $v$ удовлетворяют неравенствам

$$|u(\lambda, \bar{\mu})|^2 \geq u(\lambda, \bar{\lambda}) u(\mu, \bar{\mu}),$$

$$|v(\lambda, \bar{\mu})|^2 \leq v(\lambda, \bar{\lambda}) v(\mu, \bar{\mu}), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_f^+,$$

то $u(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0$, $f(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0$ и имеет место разложение

$$1/f(\lambda, \bar{\mu}) = 1/u(\lambda, \bar{\mu}) \sum_{k=0}^{\infty} w^k(\lambda, \bar{\mu}), \tag{49}$$

$$|w(\lambda, \bar{\mu})| < 1, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_f^+,$$

где $w(\lambda, \mu) = v(\lambda, \mu)/u(\lambda, \mu)$. Если функции $u$ и $v$ таковы, что

$$\begin{aligned} U &= \|1/u(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m \geq 0, \\ V &= \|v(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m \geq 0, \end{aligned} \qquad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+, \tag{50}$$

где $m \geq 2$, то они удовлетворяют указанным требованиям и, кроме того, справедливо матричное неравенство

$$\|1/f(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m = U + U \odot U \odot V + U \odot U \odot U \odot V \odot V + \cdots \geq 0,$$

являющееся следствием разложения (49) и известных свойств произведения Шура $\odot$ [101]. Выполнение данного неравенства при $\forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+$ означает, что $f \in \mathcal{F}_0^m$.

Пусть $\mathcal{F}_0$ — класс эрмитовых функций $f$, для которых выполняются соотношения

$$f(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0, \qquad \frac{1}{f(\lambda, \bar{\mu})} = \sum_k \varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_k(\mu)}, \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda_f^+, \tag{51}$$

где $\varphi_k$ — аналитические в области $\Lambda_f^+$ функции. Тогда $\mathcal{F}_0 \subset \subset \mathcal{F}_0^m$ при любом натуральном $m$ (см. доказательство леммы 6). Ряд (51) можно построить, исходя из (49), для подклассов функций $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0^m$ и $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_0^m$, которые определяются соответствующими выражениями

$$\begin{gathered} f = u - v, \\ u(\lambda, \bar{\mu}) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\mu)}, \qquad v(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{k>1} f_k(\lambda)\overline{f_k(\mu)}, \end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered} f = u - v, \\ u(\lambda, \bar{\mu}) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\mu)}, \qquad v(\lambda, \bar{\mu}) = f_2(\lambda)\overline{f_2(\mu)}. \end{gathered} \tag{53}$$

При этом для функций $u$ и $v$ выполнены матричные неравенства (50).

Каждую функцию (5) при условии

$$i_+(\Gamma) = 1 \tag{54}$$

можно представить в виде (52) путем преобразования матрицы $\Gamma$ к диагональной форме. Поэтому класс $\mathcal{F}_1$ определяют соотношения (5) и (54). Аналогично, класс $\mathcal{F}_2$ состоит из функций (5), для которых

$$i_\pm(\Gamma) \le 1. \tag{55}$$

Причем, если $\Lambda_f^+ \ne \varnothing$, то должно выполняться равенство (54).

Обозначим через $\mathcal{F}_1^m$ и $\mathcal{F}_2^m$ классы эрмитовых функций, удовлетворяющих соответствующим условиям

$$i_+\left(\|f(\mu_i, \bar\mu_j)\|_1^m\right) = 1, \qquad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+;$$

$$i_\pm\left(\|f(\mu_i, \bar\mu_j)\|_1^m\right) \le 1, \qquad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \notin \Lambda_f^0.$$

Непосредственно из леммы 6 вытекает включение $\mathcal{F}_1^m \subset \mathcal{F}_0^m$, а из формул (5), (9) и (54) следует, что $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1^m$. Аналогично, в принятых предположениях $\mathcal{F}_2^m$ является подклассом в $\mathcal{F}_0^m$ и содержит $\mathcal{F}_2$.

Таким образом, при $m \ge 1$ имеем следующую схему включений:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}_2 & \subset & \mathcal{F}_1 & \subset & \mathcal{F}_0 & & \\
\cap & & \cap & & \cap & & \\
\mathcal{F}_2^m & \subset & \mathcal{F}_1^m & \subset & \mathcal{F}_0^m & \subset & \mathcal{F}
\end{array}$$

Все выделенные подклассы эрмитовых функций используются в теореме 1. Если $f \in \mathcal{F}_2^m$, то теорема 1 применима для обеих областей $\Lambda_f^+$ и $\Lambda_f^-$.

Изучая алгебраические функции (5) при $f_k(\lambda) = \lambda^k$, построены ограничения в виде неотрицательной определенности матрицы [50]

$$S_\lambda = \Gamma z_\lambda^* z_\lambda \Gamma - f(\lambda, \bar\lambda)\Gamma \ge 0, \tag{56}$$

где $\lambda$ — произвольная точка области (2), а также в терминах ранга и сигнатуры матрицы $\Gamma$ [99]:

$$\operatorname{rang}\Gamma + \operatorname{sign}\Gamma = 2. \tag{57}$$

Эквивалентность условий (56) и (57) установлена в [51]. Равенства (54) и (57) эквивалентны. В условиях (55) можно положить

$$\operatorname{rang}\Gamma = 2, \qquad \operatorname{sign}\Gamma = 0. \tag{58}$$

Ограничения на матрицу $\Gamma$ вида (58) использовались в [17, 120].

Отметим, что равенство (54) эквивалентно каждому из условий

$$S = \Gamma z_0^* z_0 \Gamma - z_0 \Gamma z_0^* \Gamma \geq 0, \qquad z_0 \in Z, \tag{59}$$

$$G = \begin{bmatrix} (z_1\Gamma z_1^*)^{-1} & \cdots & (z_1\Gamma z_m^*)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (z_m\Gamma z_1)^{-1} & \cdots & (z_m\Gamma z_m^*)^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \forall\, z_1, \ldots, z_m \in Z, \tag{60}$$

где $z_0, \ldots, z_m$ — векторы-строки множества $Z = \{z : z\Gamma z^* > 0\} \neq \varnothing$.

Доказательство эквивалентности соотношений (54) и (59) следует из более общих результатов гл. 4. Эквивалентность неравенств (59) и (60) устанавливается в процессе приведения матрицы $G$ к диагональной форме с помощью элементарных преобразований [52]. Все виды ограничений (51)–(60) на матрицу $\Gamma$ можно использовать в теореме 1 для аналитических функций (5) с векторами $z_\lambda, \lambda \in \Lambda_f^+$ [55]. Численная проверка условий (56), (59) или (60) основана на применении известных критериев знакоопределенности эрмитовых матриц. Условия (54), (55), (57) и (58) связаны с расчетом инерции матрицы.

Выделим подкласс функций (5), отвечающих семейству алгебраических кривых второго порядка, полагая

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad z_\lambda = \left[1, \lambda, \lambda^2\right].$$

При вычислении элементов $s_{ij}$ матрицы (56) находим:

$$s_{11} = (\gamma_{12}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{22})\,\lambda\bar{\lambda} + \gamma_{12}\gamma_{31}\lambda^2\bar{\lambda} + \gamma_{13}\gamma_{21}\lambda\bar{\lambda}^2 + \gamma_{13}\gamma_{31}\lambda^2\bar{\lambda}^2,$$

$$s_{12} = \bar{s}_{21} = (\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21})\,\lambda + \gamma_{13}\gamma_{22}\lambda\bar{\lambda}^2 - \gamma_{12}\gamma_{31}\lambda^2,$$

$$s_{13} = \bar{s}_{31} = -\gamma_{13}\gamma_{21}\lambda - \gamma_{13}\gamma_{22}\lambda\bar{\lambda} - \gamma_{13}\gamma_{31}\lambda^2,$$

$$s_{22} = \gamma_{21}\gamma_{12} - \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{22}\gamma_{13}\lambda^2 - \gamma_{22}\gamma_{31}\lambda^2,$$

$$s_{23} = \bar{s}_{32} = \gamma_{21}\gamma_{13} + \gamma_{22}\gamma_{13}\bar{\lambda}, \qquad s_{33} = \gamma_{13}\gamma_{31}.$$

Если $\gamma_{22} \leq 0$ и $\lambda \in \Lambda_f^+$, то все главные миноры матрицы (56) неотрицательны:

$$s_{11} \geq |\lambda|^2|\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{22}\lambda|^2 \geq 0, \qquad s_{22} \geq |\gamma_{21} + \gamma_{22}\bar{\lambda}|^2 \geq 0,$$

$$s_{33} = |\gamma_{13}|^2 \geq 0, \qquad \det S_\lambda \equiv 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = -\gamma_{22}|\lambda|^4|\gamma_{13}|^2 f(\lambda, \bar{\lambda}) \geq 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{31} & s_{33} \end{bmatrix} = -\gamma_{22}|\lambda|^2|\gamma_{13}|^2 f(\lambda, \bar{\lambda}) \geq 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = -\gamma_{22}|\gamma_{13}|^2 f(\lambda, \bar{\lambda}) \geq 0.$$

Следовательно, $f \in \mathcal{F}_1$, если $\gamma_{22} \leq 0$. В этом случае выполнено равенство (54).

## Примеры

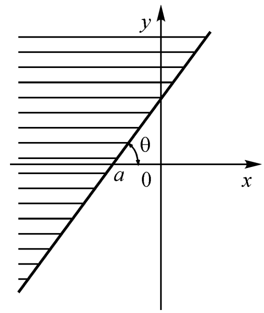
Приведем примеры алгебраических и трансцендентных областей в комплексной плоскости вида

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda\colon f(\lambda, \bar{\lambda}) = z_\lambda \Gamma z_\lambda^* > 0\right\},$$

геометрические свойства которых могут быть использованы в задачах анализа и управления качеством систем. Все функции $f$, которые описывают данные области, принадлежат классу $\mathcal{F}_1$ и, следовательно, удовлетворяют обобщенной теореме Ляпунова. Кроме того, в примерах 1, 2, 13, 14, 16, 20–22 функции $f \in \mathcal{F}_2$ удовлетворяют условиям теоремы инерции (см. § 5). К сожалению, общие геометрические закономерности областей $\Lambda_f^+$, отвечающих классу функций $f \in \mathcal{F}_0^m$, пока не установлены.

Приведенный ниже список функций может быть значительно расширен. При составлении данного списка использовались уравнения важнейших алгебраических кривых порядка $p \leq 6$, а также некоторых трансцендентных кривых вида $\varphi(x, y) = 0$, $x = \operatorname{Re}\lambda$, $y = \operatorname{Im}\lambda$ [94]. На приведенных рисунках каждой области $\Lambda_f^+$ соответствует заштрихованная часть плоскости $C^1$.

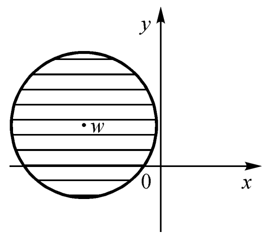
**1.** Прямая $y\cos\Theta = (x-a)sin\Theta$, $0 \leq \Theta \leq \pi/2$.




$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2a\sin\Theta & -\sin\Theta + i\cos\Theta \\ -\sin\Theta - i\cos\Theta & 0 \end{bmatrix},$$

$z_\lambda = [1, \lambda]$.

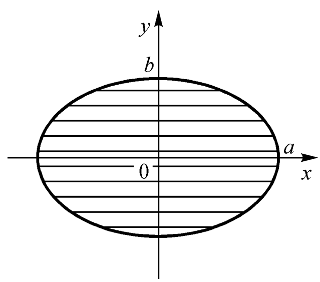
**2.** Окружность $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, $w = a + ib$.




$$\Gamma = \begin{bmatrix} r^2 - |w|^2 & w \\ \bar{w} & -1 \end{bmatrix},$$

$z_\lambda = [1, \lambda]$.

**3.** Эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$.



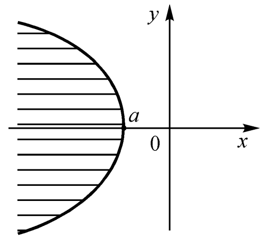

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4a^2b^2 & 0 & a^2-b^2 \\ 0 & -2(a^2+b^2) & 0 \\ a^2-b^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2]$.

**4.** Парабола $x = a - by^2$, $a < 0$, $b > 0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 2a & -1 & b/2 \\ -1 & -b & 0 \\ b/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

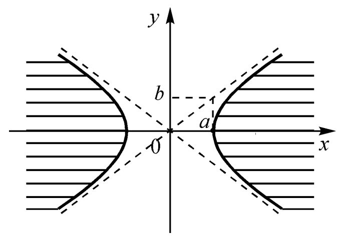
$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$




**5.** Гипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $0 < b \le a$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4a^2b^2 & 0 & a^2+b^2 \\ 0 & 2(b^2-a^2) & 0 \\ a^2+b^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

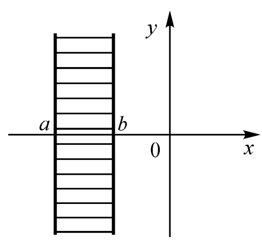
$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$




**6.** Вертикальные прямые $(x - a)(b - x) = 0$, $a < b$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2ab & a+b & -1/2 \\ a+b & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

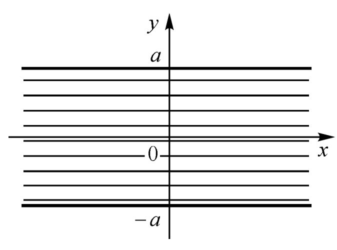
$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$




**7.** Горизонтальные прямые $y^2 = a^2$, $a > 0$.

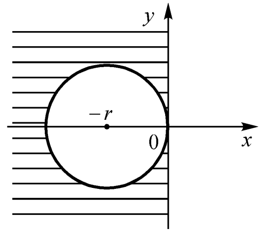
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4a^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$




**8.** Прямая и окружность $x(x^2 + y^2 + 2rx) = 0$, $r \ge 0$.

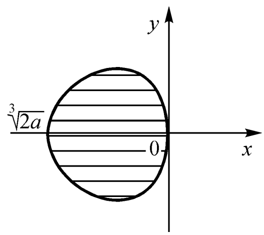
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & -2r & -1 \\ -r & -1 & 0 \end{bmatrix},$$




$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$

**9.** Кривая $2ax - (x^2 + y^2)^2 = 0$, $a < 0$.

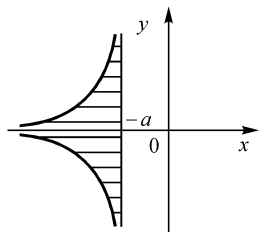
$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$




$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$

**10.** Кривая $(x + a)[y^2(x + a) + b] = 0$, $a > 0$, $b > 0$.

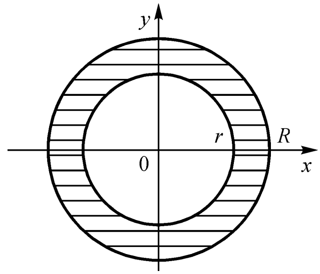
$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4ab & -2b & a^2 & a & 1/4 \\ -2b & -2a^2 & -a & 0 & 0 \\ a^2 & -a & -1/2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$




$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4].$$

**11.** Окружности $(x^2 + y^2 - r^2)(R^2 - x^2 - y^2) = 0$, $0 < r < R$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -r^2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + R^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

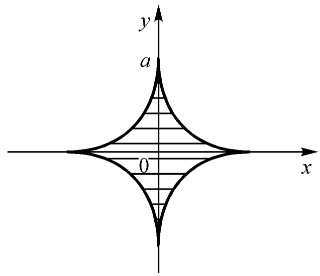



$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$

**12.** Астроида $(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0$, $a>0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 16a^6 & 0 & 0 & 0 & 27a^2 \\ 0 & -48a^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 27a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

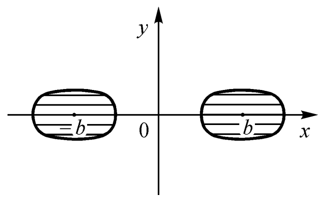
$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4].$$




**13.** Овалы Кассини $(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=a^4-b^4$, $0<a<b$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} a^4-b^4 & b^2 \\ b^2 & -1 \end{bmatrix},$$

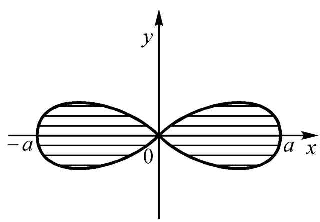
$$z_\lambda = [1, \lambda^2].$$




**14.** Лемниската Бернулли $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $a>0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & a^2 \\ a^2 & -1 \end{bmatrix},$$

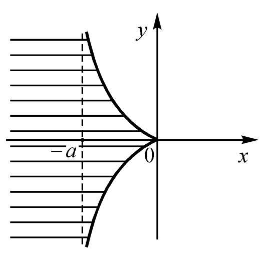
$$z_\lambda = [1, \lambda^2].$$




**15.** Циссоида Диоклеса $x^3+xy^2+ay^2=0$, $a>0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a/2 \\ 0 & -a & -1 \\ a/2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

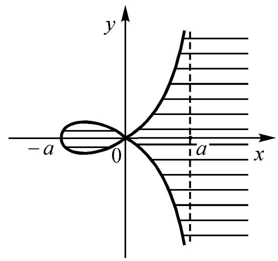
$$z_\lambda = [1, \lambda, \lambda^2].$$



**16.** Строфоида $(x+a)x^2+(x-a)y^2=0$, $a>0$.

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

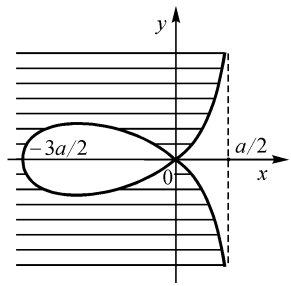
$$z_\lambda=[\lambda+a,\lambda^2].$$




**17.** Трисектриса Маклорена $2x(x^2+y^2)=a(y^2-3x^2)$, $a>0$.

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & -a & -1 \\ -a & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

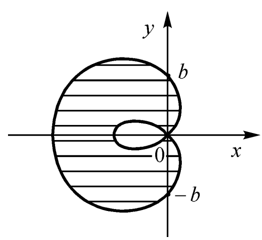
$$z_\lambda=[1,\lambda,\lambda^2].$$




**18.** Улитка Паскаля $(x^2+y^2+2ax)^2=b^2(x^2+y^2)$, $0<b\le\sqrt{2}a$.

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a^2 \\ 0 & b^2-2a^2 & -2a \\ -a^2 & -2a & -1 \end{bmatrix},$$

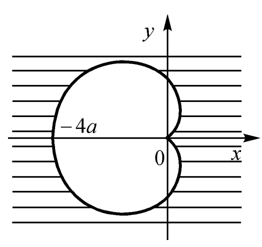
$$z_\lambda=[1,\lambda,\lambda^2].$$




**19.** Кардиоида $(x^2+y^2+2ax)^2=4a^2(x^2+y^2)$, $a>0$.

$$\Gamma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & -2a^2 & 2a \\ a^2 & 2a & 1 \end{bmatrix},$$

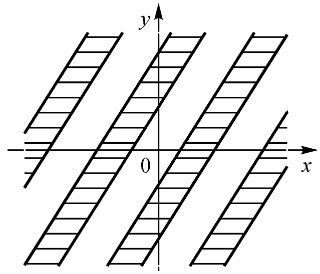
$$z_\lambda=[1,\lambda,\lambda^2].$$



**20.** Семейство прямых $\cos[2(ax - by + c)] = 0$, $w = a + ib$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

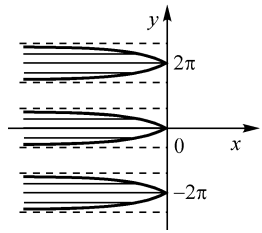
$$z_\lambda = [\cos(w\lambda + c), \sin(w\lambda + c)].$$




**21.** Кривая $\cos y = e^x$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix},$$

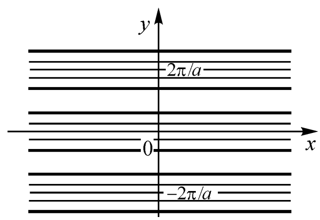
$$z_\lambda = [1, e^\lambda].$$




**22.** Семейство прямых $\cos(ay) = 0$, $a > 0$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

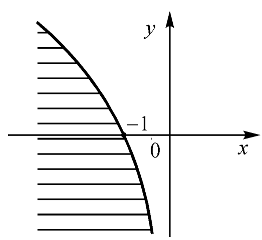
$$z_\lambda = [1, e^{a\lambda}].$$



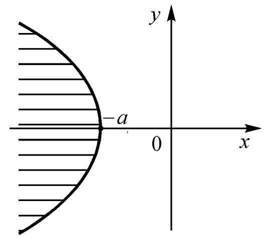

**23.** Показательная кривая $x = -a^y$, $a > 1$.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$z_\lambda = [1, -\lambda/2, a^{\lambda/2i}].$$



**24.** Цепная линия $x = -a\,\mathrm{ch}(y/a)$, $a > 0$.




$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{bmatrix},$$

$$z_\lambda = [1, -\lambda, e^{\lambda/(2ai)}, e^{-\lambda/(2ai)}].$$

## § 5. Теорема инерции

Известно, что матрица $A$ не имеет чисто мнимых собственных значений в том и только в том случае, когда матричное неравенство

$$AX + XA^* > 0$$

разрешимо относительно $X = X^*$. При этом количества собственных значений матрицы $A$, имеющих положительные и отрицательные вещественные части, с учетом кратностей совпадают соответственно с $i_+(X)$ и $i_-(X)$. Данное утверждение дает распределение спектра $\sigma(A)$ относительно мнимой оси в терминах индексов инерции эрмитовых форм (теоремы Островского–Шнайдера [123] и Таусски [128]).

Рассмотрим наряду с уравнением (31) матричное неравенство

$$L_f X > 0, \tag{61}$$

где $L_f$ — оператор (11), построенный для заданных матрицы $A \in C^{n\times n}$ и функции $f \in \mathcal{F}$. Произвольное решение уравнения (31) при $Y > 0$ одновременно является решением неравенства (61).

**Лемма 8.** *Пусть функция $f \in \mathcal{F}$ удовлетворяет соотношениям*

$$i_\pm\left(\Gamma_f\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{pmatrix}\right) \le p_\pm \qquad (\forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda),$$

*где $p_\pm \geq 0$ — целые числа, $\Lambda \subset C^1$ — некоторое открытое множество. Тогда для любых наборов точек $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha \in \Lambda$ и натуральных чисел $m_1, \dots, m_\alpha$, сумма которых не превосходит $m$, выполнены неравенства*

$$i_\pm \left( \Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \right) \leq p_\pm. \tag{62}$$

Доказательство. Воспользуемся методом доказательства леммы 7 и построим последовательность матриц $F_k$ таких, что $i_\pm(F_k) \leq p_\pm$, $F_k - F_0 = \Delta_k \to 0$, $k \to \infty$, где $F_0$ — матрица (8), составленная из частных производных функции $f$.

Если $p_+ = 0$, то $F_k \leq 0$ и $F_0 \leq 0$. Пусть $p_+ \neq 0$ и $VF_0V^* = D > 0$, где $V$ — матрица, составленная из всех левых собственных векторов матрицы $F_0$, отвечающих положительным собственным значениям. Тогда при достаточно больших $k$ выполнены соотношения

$$VF_kV^* = D + V\Delta_kV^* > 0, \quad i_+(F_0) = i_+(VF_kV^*) \leq i_+(F_k) \leq p_+.$$

Аналогично, $i_-(F_0) \leq p_-$, т.е. выполнены неравенства (62).

Лемма доказана.

Используя класс функций $\mathcal{F}_2^m$ (см. § 4), сформулируем утверждение.

**Теорема 2.** *Матричное неравенство (61) имеет решение в том и только в том случае, когда выполнены условия*

$$f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) \neq 0, \qquad t = \overline{1, \alpha}. \tag{63}$$

*При условиях (63) существует решение $X$, удовлетворяющее равенствам*

$$i_f^+(A) = i_+(X), \qquad i_f^-(A) = i_-(X), \qquad i_0(X) = 0. \tag{64}$$

*Если $X$ — решение неравенства (61) при $f \in \mathcal{F}_2^m$, то выполнены соотношения (63) и (64).*

Доказательство. Если в уравнении (31) $Y > 0$, то, согласно (34), выполнены неравенства (63). Используем рекуррентный алгоритм поиска матриц $X$ и $Y$, вытекающий из соотношений (35)–(37) и представляющий решение неравенства (61) при условиях (63). На каждом его шаге должно выполняться неравенство (37), т.е $G > 0$. Кроме того, если $f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k) < 0$, то элемент $h_{kk}$ подчиняется неравенству

$$\delta_k = \frac{\det H_k}{\det H_{k-1}} = h_{kk} - u_k^* H_{k-1}^{-1} u_k < 0.$$

Если же $f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k) > 0$, то должно выполняться строгое неравенство $\delta_k > 0$. Учитывая теорему Якоби для матрицы $H$ и закон инерции Сильвестра, имеем соотношения (64).

Пусть $X$ — решение неравенства (61) и $f \in \mathcal{F}_2^m$. Тогда, согласно лемме 8, выполнены условия (62) при $p_\pm = 1$, а функция (44) представима в виде

$$g(\lambda, \bar{\mu}) = p(\lambda)\overline{p(\mu)} - q(\lambda)\overline{q(\mu)},$$

где $p$ и $q$ — некоторые полиномы. Неравенство (61) с учетом (35) приводится к виду

$$[p(J), q(J)] \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(J)^* \\ q(J)^* \end{bmatrix} = G > 0. \tag{65}$$

Отсюда следует, что $H$ — невырожденная матрица, поскольку

$$\operatorname{rang} H = i_+(H) + i_-(H) \geq i_+(G) = n.$$

Более того, учитывая треугольную структуру $p(J)$ и $q(J)$, можно обнаружить, что все последовательные главные миноры матрицы $H$ ненулевые: $h_k = \det H_k \neq 0$. Поэтому существует разложение [11]

$$H = LDL^*, \qquad D = \operatorname{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}, \tag{66}$$

где $d_k = h_k / h_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$, $h_0 = 1$, $L$ — нижняя треугольная матрица с единичной диагональю. Выделяя последовательные главные подматрицы $G_k$ в (65) с учетом (66), имеем соотношения

$$G_1 = f(\sigma_1, \bar{\sigma}_1) d_1 > 0, \quad G_k = C_k \Delta_k C_k^* + R_k > 0, \quad k = \overline{2, n}, \tag{67}$$

где $C_k = U_k\,[p(J)V_k, q(J)V_k]$, $U_k = [I_k, 0]$, $V_k = L\,[I_{k-1}, 0]^T$,

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} d_1 & & \cdots & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & d_{k-1} & & & \vdots \\ \vdots & & & -d_1 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & \cdots & & -d_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$R_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k)d_k \end{bmatrix}.$$

Используя свойства индексов инерции в соотношениях (67), имеем

$$i_+(G_k) = k \le i_+(\Delta_k) + i_+(R_k) = k - 1 + i_+(R_k).$$

Следовательно, $i_+(R_k) = 1$ и выполнены неравенства

$$f(\sigma_k, \bar{\sigma}_k)d_k > 0,$$

которые с учетом (66) и закона инерции эквивалентны равенствам (64).

Теорема доказана.

Теорема 2 является обобщением известных теорем об инерции [123, 128]. Сформулируем важное ее следствие.

**Следствие 1.** *Пусть $f \in \mathcal{F}_2$, $Y > 0$ и $X$ — решение уравнения*

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(A) X f_j(A)^* = Y. \qquad (68)$$

*Тогда кривая (4) не пересекается со спектром $\sigma(A)$, а в областях (2) и (3) находятся соответственно $i_+(X)$ и $i_-(X)$ собственных значений матрицы $A$ с учетом кратностей.*

## § 6. Расположение собственных значений на плоских кривых

Рассмотрим задачу о принадлежности собственных значений матрицы $A$ плоской кривой (4). В частности, нас интересуют оценки для числа $i_f^0(A)$ и критерии расположения всех собственных значений на кривой (4). Подобные задачи возникают, например, при изучении условий устойчивости и апериодичности некоторых механических систем [16, 17]. В [17, 88] изложены известные методы решения задач о принадлежности корней полинома некоторым кривым, а также связанные с ними технические приложения.

Используем свойства решений однородного матричного уравнения

$$L_f X = 0, \tag{69}$$

где $L_f$ — оператор (11), в частности, (12). Данное уравнение можно рассматривать как задачу нахождения собственных элементов оператора (11), отвечающих его нулевому собственному значению.

**Теорема 3.** *Если уравнение (69) имеет ненулевое неотрицательно определенное решение $X \geq 0$, то на кривой (4) находится, по крайней мере, $\operatorname{rang} X$ собственных значений матрицы $A$:*

$$i_f^0(A) \geq \operatorname{rang} X. \tag{70}$$

*В частности, при $X > 0$ весь спектр матрицы $A$ расположен на кривой (4). Обратно, если $i_f^0(A) \neq 0$, то уравнение (69) имеет неотрицательно определенное решение любого ранга из интервала*

$$0 < \operatorname{rang} X \leq \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} \xi_t, \tag{71}$$

*где $\xi_t$ — геометрическая кратность собственного значения $\lambda_t \in \sigma(A)$.*

Доказательство. Пусть $X \geq 0$ — решение уравнения (69). Тогда, согласно лемме 2, его можно определить с помощью соотношений (26) и (27), полагая $w = 0$. Преобразуем выражение (26), используя разложения идемпотентных компонент [44]

$$A_{t1} = A_t A_t^+, \qquad A_t^+ A_t = I_{n_t}, \qquad t = \overline{1, \alpha}.$$

Множители $A_t$ ($A_t^+$) определяют правые (левые) жордановы цепочки векторов матрицы $A$, отвечающие собственному значению $\lambda_t$ алгебраической кратности $n_t$. Для решения $X$ имеем выражение

$$X = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_0^*} A_t C_{t\tau} A_\tau^* \geq 0, \tag{72}$$

где $C_{t\tau}$ — некоторые матрицы размеров $n_t \times n_\tau$. Если $\lambda_t \in \Lambda_f^0$, то $(t,t) \in \Theta_0^*$. Применяя к выражению (72) неравенство Сильвестра, имеем

$$\operatorname{rang} X \leq \sum_{\lambda_t\in\Lambda_f^0} \operatorname{rang} A_t = \sum_{\lambda_t\in\Lambda_f^0} n_t = i_f^0(A).$$

Следовательно, выполнена оценка (70). При этом, если $X > 0$, то $i_f^0(A) = n$.

Если на кривой (4) имеются собственные значения матрицы $A$, то $\Theta_0^* \neq \varnothing$ и, согласно (30), произвольная неотрицательно определенная матрица

$$X = \sum_{(t,\tau)\in\Theta_0^*} U_t S_{t\tau} U_\tau^* \geq 0 \tag{73}$$

является решением уравнения (69). Поскольку множители $U_k$ имеют полный ранг $\xi_t$, то свободные параметры матриц $S_{t\tau}$ размера $\xi_t \times \xi_\tau$ можно подобрать для любого наперед заданного значения ранга решения из интервала (71).

Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Если матрица $A$ имеет простую структуру, то неравенство $i_f^0(A) \geq \rho$ выполнено в том и только в том случае, когда уравнение (69) имеет неотрицательно определенное решение ранга $\rho$.*

Данный критерий вытекает из теоремы 3 при условиях $n_t = \xi_t$. В этом случае формула (73) определяет общий вид неотрицательно определенного решения уравнения (69).

Отметим, что если функция $f$ обладает свойством

$$\lambda, \mu \in \Lambda_f^0, \qquad \lambda \neq \mu \Rightarrow f(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0, \tag{74}$$

то выражения (72) и (73) можно упростить. Так, при условиях (74) уравнению (69) удовлетворяет любая матрица $X$, представимая в виде

$$X = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} U_t S_t U_t^* \geq 0,$$

где $S_t$ — матрицы размеров $\xi_t \times \xi_t$.

## § 7. Оценки и локализация собственных значений

**1.** Рассмотрим соотношение (31) при условиях $f \in \mathcal{F}$, $A \in C^{n\times n}$ и $X \in \mathcal{K}_0$. В качестве $X$ можно выбрать любую положительно определенную матрицу и вычислить выражение $Y$. Решать уравнение (31) при этом не требуется.

Если $X > 0$, то существуют числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, удовлетворяющие неравенствам

$$\varepsilon_1 X \leq Y \leq \varepsilon_2 X, \qquad \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2. \tag{75}$$

Используя доказательство леммы 3, получаем оценку для области, содержащей спектр матрицы $A$:

$$\varepsilon_1 \leq f(\lambda, \bar{\lambda}) \leq \varepsilon_2, \qquad \lambda \in \sigma(A). \tag{76}$$

Интервал $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ определяется путем решения системы неравенств (75) относительно неизвестных параметров $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$. Уменьшая этот интервал, мы тем самым сужаем область (76), содержащую спектр $\sigma(A)$. Можно установить, что значения параметров $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ вычисленные с помошью соотношений

$$\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon\colon \det(Y - \varepsilon X) = 0\} = \min_{\|z\|=1} \frac{z^* Y z}{z^* X z},$$

$$\varepsilon_1 = \max\{\varepsilon\colon \det(Y - \varepsilon X) = 0\} = \max_{\|z\|=1} \frac{z^* Y z}{z^* X z},$$

представляют одно из решений системы неравенств (75). При этом соответствующий интервал $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ является минимальным [10].

Отметим, что в частном случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ все точки спектра $\sigma(A)$ принадлежат множеству $\Lambda^0_{f-\varepsilon_1}$.

**2.** Пусть в соотношении (69) матрицы $A$ и $X > 0$ заданы, а $f \in \mathcal{F}$ — неизвестная функция. Если, исходя из (69), удается найти какую-либо функцию $f$, то, согласно теореме 3, спектр матрицы $A$ расположен на соответствующей кривой (4). Если мы имеем две такие функции $f$ и $g$, то каждое собственное значение матрицы $A$ является точкой пересечения кривых $\Lambda^0_f$ и $\Lambda^0_g$ вида (4).

Ограничимся классом алгебраических кривых и рассмотрим однородное уравнение

$$\sum_{k,s=0}^{r-1} \gamma_{ks} A^k X A^{sT} = 0,$$

где $A \in R^{n\times n}$ и $X = X^T > 0$ — заданные вещественные матрицы, $\gamma_{ks} = \gamma_{sk}$ — неизвестные коэффициенты. Данное уравнение приводится к системе алгебраических уравнений (см. дополнение 1)

$$G(X)\gamma = 0, \tag{77}$$

где $G(X)$ — некоторая $p \times q$-матрица, $\gamma$ — вектор неизвестных коэффициентов порядка $q$, причем, $p = n(n+1)/2$, $q = r(r+1)/2$. Система (77) имеет нетривиальное решение при условии $\operatorname{rang} G(X) < q$. Матрицу $X$ желательно выбрать так, чтобы данное неравенство выполнялось при минимально возможном значении $r$.

Подпространству решений системы (77) отвечает семейство алгебраических кривых $\Lambda^0_f$, где

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{k,s=0}^{r-1} \gamma_{ks} \lambda^k \mu^s.$$

Каждая из этих кривых проходит через $\alpha$ различных точек $\lambda_t \in \sigma(A)$ и имеет порядок, не превосходящий $2r-2$. Если удается определить два решения системы (77) так, чтобы соответствующие кривые имели $\alpha$ различных точек пересечения, то каждая из этих точек является собственным значением матрицы $A$.

**3.** Пусть заданы матрицы $A, Y > 0$ и функция $f \in \mathcal{F}$. Рассмотрим кривую (4) и ее окрестность $\Lambda^+_{f_\varepsilon}$, где $f_\varepsilon = 1-\varepsilon^2 f^2$, $\varepsilon > 0$ — числовой параметр. Очевидно, $\Lambda^0_f \subset \Lambda^+_{f_\varepsilon}$ и область $\Lambda^+_{f_\varepsilon}$ вырождается в кривую (4) при $\varepsilon \to \infty$. Если $f_\varepsilon \in \mathcal{F}^m_0$, то, согласно теореме 1, матричное уравнение

$$X - \varepsilon L_{f^2} X = Y \tag{78}$$

имеет единственное положительно определенное решение $X = X(\varepsilon)$ в том и только в том случае, когда выполнено включение $\sigma(A) \subset \Lambda^+_{f_\varepsilon}$. Это утверждение при достаточно большом значении $\varepsilon$ может быть использовано для оценки расположения спектра $\sigma(A)$ вблизи кривой (4) с некоторой желаемой точностью.

Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} X(\varepsilon) = X_\infty > 0. \tag{79}$$

где $X(\varepsilon)$ — решение уравнения (78), то матрица $X_\infty$ удовлетворяет однородному уравнению $L_{f^2} X_\infty = 0$ и, согласно теореме 3, выполнено включение $\sigma(A) \subset \Lambda^0_f$. Обратное утверждение устанавливается при дополнительных ограничениях. Так, если матрица $A$ имеет простую структуру, $\sigma(A) \subset \Lambda^0_f$, $f_\varepsilon \in \mathcal{F}^m_0$ и выполнены условия (74), то предельное значение (79) для решения уравнения (78) является положительно определенной матрицей [60].

**4.** Изложим методику локализации спектра $\sigma(A)$, используя и обобщая результаты работы [115] для областей вида

$$\Lambda = \Lambda^+_{f_0} \cap \Lambda^+_{f_1} \cap \dots \cap \Lambda^+_{f_s}, \qquad s \geq 1,$$

где $f_k(\lambda, \mu)$ — заданные эрмитовы функции, $k = \overline{0, s}$. Введем следующие обозначения:

$$f(\lambda, \mu, z) = \sum_{k=0}^{s} f_k(\lambda, \mu) z^k, \qquad F(z) = \sum_{k=0}^{s} F_k z^k,$$

$$F_k = -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\omega} \oint\limits_{\bar{\omega}} f_k(\lambda,\mu)(A-\lambda I)^{-1} \otimes \left(\bar{A}-\mu I\right)^{-1} d\lambda d\mu,$$

где $\otimes$ — знак кронекерового произведения матриц, $\omega$ $(\bar{\omega})$ — замкнутый контур, охватывающий спектр $\sigma(A)$ $(\sigma(\bar{A}))$.

**Теорема 4.** *Пусть выполняются следующие условия:*
*1)* $\Lambda^-_{f_0} \cap \Lambda^-_{f_1} \cap \dots \cap \Lambda^-_{f_s} = \varnothing$*;*
*2)* $f(\lambda, \bar{\lambda}, z) = 0 \Rightarrow z \in R^1$*;*
*3)* $r_k(\lambda,\mu) = \sum\limits_{p+q=k} f_p(\lambda,\bar{\mu}) f_q(\mu,\bar{\lambda}) > 0,\ \forall\ \lambda,\mu \in \Lambda,\ k = \overline{0,2s}$.

*Тогда спектр матрицы $A$ расположен в области $\Lambda$ в том и только в том случае, когда все коэффициенты полинома*

$$\det F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N, \qquad N = sn^2,$$

*положительны.*

Доказательство. Для каждого $z \in C^1$ функции $f$ соответствует оператор $L_f$ типа (10), действие которого в пространстве $n^2$-векторов описывает матрица $F(z)$, т.е

$$L_f X = Y \Leftrightarrow F(z)x = y, \quad x = [x_{1*}, \dots, x_{n*}]^T, \quad y = [y_{1*}, \dots, y_{n*}]^T,$$

где $x_{i*}$ — $i$-я строка матрицы $X$. Спектр оператора $L_f$ состоит из $n^2$ собственных значений $f(\sigma_i, \bar{\sigma}_j, z)$, где $\sigma_i \in \sigma(A)$ (см. § 2), произведение которых составляет выражение

$$\det F(z) \equiv d_\sigma(z) = \left( \prod_i \sum_{k=0}^{s} f_k(\sigma_i, \bar{\sigma}_i) z^k \right) \left( \prod_{i<j} \sum_{k=0}^{2s} r_k(\sigma_i, \sigma_j) z^k \right).$$

Если $\sigma(A) \subset \Lambda$ и выполнены условия 3), то все коэффициенты полиномиальных множителей в данном выражении положительны и, следовательно, полином $d_\sigma(z)$ имеет степень $N$ и положительные коэффициенты. Обратное утверждение является следствием приведенных соотношений и условий 1) и 2). Действительно, все вещественные корни полинома $d_\sigma(z)$ степени $N$ с положительными коэффициентами отрицательны. В частности, полиномы $f(\sigma_i, \bar{\sigma}_i, z)$ должны иметь лишь вещественные отрицательные корни и, следовательно, положительные коэффициенты $f_k(\sigma_i, \bar{\sigma}_i) > 0$, что означает $\sigma(A) \subset \Lambda$.

Теорема доказана.

Теорема 4 сохраняет силу, если вместо условия 3) потребовать, чтобы для любого набора точек $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Lambda$ все коэффициенты полинома $d_\sigma(z)$ степени $N$ были положительными. Выражения для коэффициентов $a_k$ как функций от $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ определяются в результате перемножения всех полиномов $f(\sigma_i, \bar{\sigma}_j, z)$. Например, если $f(\lambda, \mu, z) = f_0(\lambda, \mu) + z$, то данные выражения можно построить с помощью формул Виетта в виде

$$a_{N-p} = \sum_{ni_1+j_1<\cdots<ni_p+j_p} f_0(\sigma_{i_1}, \bar{\sigma}_{j_1}) \cdots f_0(\sigma_{i_p}, \bar{\sigma}_{j_p}), \qquad p = \overline{1, N}.$$

Класс областей $\Lambda$, используемых в теореме 4, достаточно широк. Каждую область вида (2), отвечающую классу функций $\mathcal{F}_1$ (см. § 4), можно описать в виде пересечения некоторых областей так, чтобы выполнялись условия теоремы 4. Теореме 4 удовлетворяет класс $I$-трансформируемых областей [115], при определении которого в случае алгебраических полиномов $f_k$ вместо условия 1) использовались неравенства $f_s(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0$ $(\forall \lambda, \mu \in \Lambda)$, $f_s(\lambda, \bar{\lambda}) \geq 0$ $(\forall \lambda \in C^1)$, а вместо условия 3) — требование устойчивости семейства полиномов $f(\lambda, \bar{\mu}, z)$ $(\lambda, \mu \in \Lambda)$ степени $s$. Последнее ограничение является достаточным для выполнения условия 3).

Если все области $\Lambda^+_{f_k}$ являются простыми, т.е. $\Lambda^0_{f_k} = \partial \Lambda^+_{f_k}$, то при условиях теоремы 4 выполняется следующий критерий:

$$\sigma(A) \subset \bar{\Lambda} \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geq 0, \quad i = \overline{0, N},$$

где $\bar{\Lambda}$ — замыкание области $\Lambda$, $a_i$ — коэффициенты полинома $\det F(z)$.

Рассмотрим случай $s = 1$. В этом случае применение теоремы 4 сводится к вычислению коэффициентов характеристического полинома линейного пучка матриц $F(z) = F_0 + zF_1$ порядка $n^2$. Условие 2) теоремы следует из того, что функции $f_0$ и $f_1$ должны быть эрмитовыми. При условии 1) область $\Lambda$ совпадает с $\Lambda^+_g$, где $g = f_0 f_1$. Условие 3) означает, что $g \in \mathcal{F}_*$, где $\mathcal{F}_*$ — класс эрмитовых функций, обладающих следующим свойством:

$$g(\lambda, \bar{\lambda}) > 0, \qquad g(\mu, \bar{\mu}) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} g(\lambda, \bar{\mu}) > 0.$$

Пусть $f_0 = u - v$ и $f_1 = 1/u$, где $u$ и $v$ — эрмитовы функции такие, что

$$|u(\lambda, \bar{\mu})|^2 \geq u(\lambda, \bar{\lambda}) u(\mu, \bar{\mu}),$$

$$|v(\lambda, \bar{\mu})|^2 \leq v(\lambda, \bar{\lambda}) v(\mu, \bar{\mu}), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Тогда для функции $w = v/u$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} w(\lambda, \bar{\mu}) \leq |w(\lambda, \bar{\mu})| \leq \sqrt{w(\lambda, \bar{\lambda}) w(\mu, \bar{\mu})} < 1, \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Lambda,$$

из которых следует, что $g = 1 - w \in \mathcal{F}_*$ . Если предположить, что

$$U = \|1/u(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m \geq 0,$$

$$V = \|v(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m \geq 0, \qquad \forall\, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda,$$

то при $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda$ выполняются соотношения (см. § 4)

$$W = U \odot V = \|w(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m \geq 0,$$

$$\|1/g(\mu_i, \bar{\mu}_j)\|_1^m = E + W + W \odot W + W \odot W \odot W + \cdots \geq 0,$$

где $\odot$ — знак произведения Шура, $E$ — матрица, все элементы которой равны 1, и, следовательно, $g \in \mathcal{F}_* \cap \mathcal{F}_0^m$.

## § 8. Условия управляемости в обобщенном уравнении Ляпунова

Выше установлена связь между индексами инерции эрмитовых матриц $X$ и $Y$, удовлетворяющих уравнению (31), и расположением спектра матрицы $A$ относительно множеств (2)–(4). Теперь мы расширим множества матриц $X$ и $Y$, используемых при решении задачи о локализации спектра. Для этого нам потребуется понятие управляемости пары матриц, возникшее в теории управляемых систем (см., например, [2-4, 110, 111]).

Пусть $A$ и $R$ — матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно. Построим последовательность блочных матриц

$$P_k(A,R) = \left[R, AR, \ldots, A^{k-1}R\right], \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Пара $(A,R)$ называется управляемой, если для некоторого $k$ матрица $P_k(A,R)$ имеет полный ранг $n$.

**Лемма 9.** *Если $Z = RR^*$, то следующие утверждения эквивалентны:*

*(а) пара матриц $(A,R)$ управляема;*

*(в) существует функция $\varphi \in \mathcal{F}$ такая, что $L_\varphi Z > 0$;*

*(с) пара матриц $(A,Z)$ управляема.*

Доказательство. Выражение (17) для оператора $L_\varphi$ можно привести к виду

$$L_\varphi Z = P_m(A,R)(\Gamma \otimes I)P_m(A,R)^*,$$

где $\otimes$ — знак кронекерового произведения матриц. Если это выражение является невырожденной, в частности, положительно определенной матрицей, то множитель $P_m(A,R)$ имеет полный ранг и пара $(A,R)$ управляема ((в) $\Rightarrow$ (а)).

Рассмотрим последовательность матриц

$$Z_k = P_k(A,R)P_k(A,R)^* \geq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{80}$$

Если пара $(A,R)$ управляема, то, начиная с некоторого номера $k = q$, все матрицы данной последовательности положительно определены. При этом выполнены утверждения (в) и (с), поскольку

$$Z_k = L_{\varphi_k} Z = P_k(A,Z)P_k(A,I)^*,$$

где $\varphi_k(\lambda,\bar{\mu}) = 1 + \lambda\bar{\mu} + \cdots + \lambda^{k-1}\bar{\mu}^{k-1}$.

Тот факт, что (с) влечет (а), следует из неравенства Сильвестра и соотношений

$$P_k(A,Z) = P_k(A,R)\,\mathrm{diag}\,\{R^*, \ldots, R^*\}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Лемма доказана.

**Лемма 10.** *Пусть задана матричная последовательность*

$$Z_1 \geq 0, \quad Z_{k+1} = Z_1 + LZ_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{81}$$

*где $L$ — линейный оператор, оставляющий инвариантным конус неотрицательно определенных матриц ($L\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$). Тогда выполнены соотношения*

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_q = r_{q+1} = \cdots = r, \tag{82}$$

*где $q \leq n - r_1 + 1$, $r_k = \operatorname{rang} Z_k$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство утверждения, обобщающего лемму 10, имеется в [69].

Представим последовательность (80) в виде (81), полагая $Z_1 = RR^*$, $LZ = AZA^*$. Тогда, согласно лемме 10, условие управляемости пары $(A, R)$ означает, что $r_q = n$, где $q$ — наименьшее значение индекса $k$, для которого последовательность рангов $r_k$ в (82) достигает максимальное значение $r = n$. В данном случае выполнена оценка $q \leq \min\{m, n - r_1 + 1\}$ , где $m$ — степень минимального полинома матрицы $A$.

**Теорема 5.** *Пусть матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют уравнению (31). Тогда выполнены следующие утверждения:*

*1) из управляемости пары $(A, Y)$ следует управляемость пары $(A, X)$; обратное утверждение выполнено при условиях $X \geq 0$ и $i_f^0(A) = 0$;*

*2) если $Y \geq 0$ и пара $(A, Y)$ управляема, то $i_f^0(A) = 0$;*

*3) если $X \geq 0$, $Y \geq 0$ и пара $(A, Y)$ управляема, то $i_f^+(A) = n$;*

*4) если $X \geq 0$, $Y \geq 0$ и пара $(A, X)$ управляема, то $i_f^-(A) = 0$;*

*5) если $X \geq 0$, $Y = 0$ и пара $(A, X)$ управляема, то $i_f^0(A) = n$.*

Доказательство. Свойство управляемости пары $(A, R)$ эквивалентно условиям [125]

$$\operatorname{rang}[A - \lambda I, R] = n, \qquad \lambda \in \sigma(A).$$

Эти условия не выполняются в том и только в том случае, когда существует левый собственный вектор $v_t^*$ матрицы $A$, отвечающий собственному значению $\lambda_t$, для которого $v_t^* R = 0$. Если $v_t^* X = 0$, то, согласно (28),

$$v_t^* Y = \sum_{\tau=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{m_\tau} f_{1j}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) v_t^* X A_{\tau j}^* = 0.$$

Поэтому пара $(A, X)$ управляема, если таковой является пара $(A, Y)$.

При $X \geq 0$ равенства $v_t^* X = 0$ и $v_t^* X v_t = 0$ эквивалентны. Если $v_t^* X \neq 0$ и $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) \neq 0$, то $v_t^* Y \neq 0$, поскольку

$$f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) v_t^* X v_t = v_t^* Y v_t, \qquad t = 1, \ldots, \alpha. \tag{83}$$

Тем самым доказано утверждение 1). Равенства (83) используются аналогично при выводе утверждений 2)–5). Если $Y \geq 0$ и $v_t^* Y \neq 0$, то $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) \neq 0$. Если $X \geq 0$, $Y \geq 0$, то из неравенства $v_t^* X \neq 0$ ($v_t^* Y \neq 0$) следует $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) \geq 0$ ($f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) > 0$). В случае $Y = 0$ из $v_t^* X \neq 0$ следует $f(\lambda_t, \bar{\lambda}_t) = 0$. Утверждения 2)–5) можно установить также с помощью леммы 9.

Теорема доказана.

Если некоторый оператор $L$ коммутирует с оператором (11), а матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют уравнению (31), то выражения $\widehat{X} = LX$ и $\widehat{Y} = LY$ также удовлетворяют данному уравнению и, следовательно, могут быть использованы в теоремах 1–3 и 5. При этом снимаются соответствующие ограничения на инерциальные свойства исходных матриц $X$ и $Y$. В частности, в теореме 5 неравенства $X \geq 0$ или $Y \geq 0$ уже не требуются. Если оператор $L$ определяет непустые множества матриц

$$\mathcal{L}(L) = \{Z \colon LZ > 0\}, \qquad \bar{\mathcal{L}}(L) = \{Z \colon LZ \geq 0\},$$

то для включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ достаточно, чтобы уравнение (31) имело решение $X \in \bar{\mathcal{L}}(L)$ при некоторой матрице $Y \in \mathcal{L}(L)$. Если $f \in \mathcal{F}_0^m$, то включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ и $\mathcal{L}(L) \subset L_f \mathcal{L}(L)$ эквивалентны. Последнее утверждение является аналогом теоремы 1.

Пусть $L_\varphi$ и $L_\psi$ — операторы типа (11), описывающие непустые множества матриц

$$\mathcal{L}(L_\varphi),\ \ \mathcal{L}(L_\psi),\ \ L_\varphi\mathcal{K},\ \ L_\psi\mathcal{K},\ \ \bar{\mathcal{L}}(L_\varphi),\ \ \bar{\mathcal{L}}(L_\psi),\ \ L_\varphi\mathcal{K}_0,\ \ L_\psi\mathcal{K}_0,$$

Можно построить различные условия локализации спектра матрицы $A$ в терминах решений уравнения (31), принадлежащих одному из этих множеств. При этом функции $\varphi$ и $\psi$ должны обладать некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть в уравнении (31) $X \in L_\varphi\mathcal{K}$ и $Y \in \mathcal{L}(L_\psi)$. Тогда выполнены соотнощения

$$L_g\widehat{X} = \widehat{Y}, \qquad X = L_\varphi\widehat{X}, \qquad L_\psi Y = \widehat{Y}, \tag{84}$$

где $\widehat{X} \geq 0$, $\widehat{Y} > 0$ — некоторые матрицы, $g = f\varphi\psi$ — произведение функций. Если функции $\varphi$ и $\psi$ выбраны так, что

$$\Lambda_f^- \cap \Lambda_{\varphi\psi}^- = \varnothing, \tag{85}$$

то, согласно лемме 3, спектр $\sigma(A)$ принадлежит области (2). Если же выполнены неравенства

$$\Gamma_{1/g}\begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_\alpha \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0, \qquad g(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \neq 0, \qquad t, \tau = \overline{1, \alpha},$$

то, согласно (84) и лемме 5, уравнение (31) имеет решение $X \in$ $\in L_\varphi\mathcal{K}$ для любой матрицы $Y \in \mathcal{L}(L_\psi)$. Если предположить, что наряду с (85) выполнены условия

$$\begin{gathered} \mu_1, \ldots, \mu_m \in \Lambda_f^+ \Rightarrow \Gamma_{1/g}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \cdots & \mu_m \end{pmatrix} \geq 0, \\ g(\mu_t, \bar{\mu}_\tau) \neq 0, \qquad t, \tau = \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{86}$$

то включения $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$ и $\mathcal{L}(L_\psi) \subset L_f L_\varphi\mathcal{K}$ эквивалентны. Данный критерий сводится к теореме 1 в частном случае $\varphi = \psi \equiv 1$. Условия (86) имеют место, если, например, $g \in \mathcal{F}_0^m$ и $\Lambda_f^+ \subseteq \Lambda_{\varphi\psi}^+$.

Приведем следствия изложенного подхода для класса функций $f \in \mathcal{F}_1$, в частности, $f \in \mathcal{F}_2$.

**Теорема 6.** *Пусть функции $f$ и $\psi$ представлены в виде*

$$f = f_+ - f_-, \qquad \psi = \sum_{j=0}^{s} f_+^{s-j} f_-^{j}, \tag{87}$$

*где*

$$f_+(\lambda, \bar{\mu}) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\mu)}, \qquad f_-(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{i>1} f_i(\lambda)\overline{f_i(\mu)}, \qquad s \geq 1.$$

*Тогда уравнение (31) имеет единственное решение $X > 0$ при условиях*

$$\sigma(A) \subset \Lambda_f^+, \qquad L_\psi Y > 0. \tag{88}$$

*Если $Y \geq 0$, $s = n - \operatorname{rang} Y$ и $X > 0$ — единственное решение уравнения (31), то выполнены условия (88).*

Доказательство. Поскольку $g = f\psi = f_+^{s+1} - f_-^{s+1} \in \mathcal{F}_1$, то выполнены условия (85) и (86). В данном случае $\varphi \equiv 1$. Если $\sigma(A) \subset \Lambda_f^+$, то операторы $L_f$, $L_\psi$ и $L_g$ обратимы. Из теоремы 1 и соотношений (86) и (88) следует, что уравнение (31) имеет единственное решение $X > 0$.

Пусть для некоторой матрицы $Y \geq 0$ уравнение (31) имеет единственное решение $X > 0$. Из обратимости оператора $L_f$ и леммы 3 вытекают неравенства (32), (33) и соотношения

$$f_1(\lambda_t) \neq 0, \qquad 1/f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{1 + \delta(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) + \delta^2(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) + \cdots}{f_1(\lambda_t)\overline{f_1(\lambda_\tau)}},$$

$$|\delta(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)|^2 \leq \delta(\lambda_t, \bar{\lambda}_t)\delta(\lambda_\tau, \bar{\lambda}_\tau) < 1, \qquad t, \tau = \overline{1, \alpha}.$$

Здесь использовано неравенство Коши для функции $\delta = f_-/f_+$. Учитывая формулу (16), имеем разложение обратного оператора

$$L_f^{-1} = L_{f_+}^{-1}(E + L_\delta + L_\delta^2 + \cdots) = L_{f_+}^{-s-1} L_\psi + \Delta_s,$$

где $E$ — тождественный оператор, $\Delta_s \to 0$ $(s \to \infty)$. Матричная последовательность

$$X_1 = L_{f_+}^{-1} Y, \qquad X_{s+1} = X_s + L_\delta X_s = f_1(A)^{-s-1}(L_\psi Y) f_1(A)^{-s-1*}$$

сходится к положительно определенному решению $X$ и удовлетворяет условиям леммы 10. Следовательно, при некотором $s$ достигается строгое неравенство $L_\psi Y > 0$. В частности, можно положить $s = n - \operatorname{rang} Y$.

Теорема доказана.

**Теорема 7.** *Пусть матрицы* $A, Y = RR^* \geq 0$ *и функция* $f \in \in \mathcal{F}_2$ *вида (53) удовлетворяют условию*

$$\operatorname{rang}[F_0 R, \ldots, F_s R] = n, \tag{89}$$

*где* $F_k = f_1^{s-k}(A) f_2^k(A)$, $k = \overline{0, s}$, $s = n - \operatorname{rang} Y$. *Тогда если* $X$ — *решение уравнения*

$$f_1(A) X f_1(A)^* - f_2(A) X f_2(A)^* = Y, \tag{90}$$

*то кривая (4) не пересекается со спектром* $\sigma(A)$, *а в области* $\Lambda_f^+$ $(\Lambda_f^-)$ *находится ровно* $i_+(X)$ $(i_-(X)$ $)$ *собственных значений матрицы* $A$ *с учетом кратностей.*

Доказательство. Представим функции $f$ и $\psi$ в виде (87). При условии (89) имеем неравенство $L_\psi Y = PP^* > 0$. где $P$ — блочная матрица, определенная в (89). Подействуем на обе части уравнения (31) оператором $L_\psi$. В результате приходим к неравенству $L_g X > 0$, где $g = f\psi = f_+^{s+1} - f_-^{s+1} \in \mathcal{F}_2$. Учитывая следствие теоремы 2, имеем соотношения (64).

Теорема доказана.

В [110] утверждение теоремы 7 установлено при условиях управляемости пары матриц $(A, Y)$ и ограничениях

$$h(\lambda_t) \neq h(\lambda_\tau) \quad (t \neq \tau), \qquad h'(\lambda_t) \neq 0 \quad (m_t > 1), \tag{91}$$

где $h(\lambda) = (f_1(\lambda) + f_2(\lambda)) / (f_1(\lambda) - f_2(\lambda))$, $t, \tau = \overline{1, \alpha}$. Эти ограничения эквивалентны совпадению геометрических кратностей собственных значений $\lambda_t$ матрицы $A$ с соответствующими геометрическими кратностями собственных значений $h(\lambda_t)$ матрицы $h(A)$. При использовании ограничения (89), предложенного в [64], в отличие от (91), информация о спектре $\sigma(A)$ не требуется.

Отметим, что для функции $f(\lambda, \bar{\mu}) = 1 - \lambda\bar{\mu}$, описывающей единичную окружность $\Lambda_f^0$, равенство (89) совпадает с условием управляемости пары матриц $(A, R)$.

# *Глава 2*

# Построение аналогов уравнения Ляпунова для матричных функций

Данная глава посвящена анализу спектральных свойств матричных полиномов и функций. Мы построим классы линейных операторов и соответствующих матричных уравнений, выступающих аналогами уравнения Ляпунова в задачах устойчивости и локализации собственных значений. При этом будут использованы различные методы расщепления спектра, основанные на построении контурных интегралов типа Коши, правильной факторизации матричных функций, решении специальных алгебраических систем и определении правых и левых пар матричных функций [63, 73, 75–81].

## § 1. Оператор $M_f$

Пусть $F(\lambda)$ — матрица размеров $n \times n$, составленная из однозначных аналитических функций и удовлетворяющая условию

$$\chi(\lambda) = \det F(\lambda) \not\equiv 0, \qquad \lambda \in C^1. \tag{1}$$

Нули функции $\chi(\lambda)$ являются собственными значениями матрицы $F(\lambda)$ и образуют ее спектр $\sigma(F)$. Выделим некоторое подмножество спектра

$$\sigma_0(F) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_1; \ldots; \lambda_\alpha, \ldots, \lambda_\alpha\}, \tag{2}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — попарно различные собственные значения соответствующих кратностей $n_1, \ldots, n_\alpha$. Для матричного полинома в качестве $\sigma_0(F)$ можно рассматривать весь спектр $\sigma(F)$, состоящий из $l$ собственных значений. В дальнейшем подмножество (2) мы будем определять при использовании методов расщепления спектра.

Построим линейный оператор [58, 61]

$$M_f X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{\omega} \oint\limits_{\bar\omega} f(\lambda, \bar\mu) R_\lambda X R_\mu^* d\lambda d\bar\mu, \tag{3}$$

где $f$ — заданная эрмитова функция, $R_\lambda = F'(\lambda)F^{-1}(\lambda)$ — мультипликативная (логарифмическая) производная матрицы $F(\lambda)$, $\omega$ $(\bar\omega)$ — простой замкнутый контур, охватывающий точки $\lambda_t$ $(\bar\lambda_t)$, $t = 1, \ldots, \alpha$. Оператор $M_f$ является обобщением изученного в главе 1 оператора $L_f$. В случае $f \equiv 1$ выражение (3) приводится к виду

$$MX = \Delta X \Delta^*, \qquad \Delta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} R_\lambda d\lambda, \tag{4}$$

где $\Delta$ — матричный аналог логарифмического вычета функции относительно множества точек $\sigma_0(F)$, причем [13, 24]

$$\operatorname{tr} R_\lambda \equiv \chi'(\lambda)/\chi(\lambda), \qquad \lambda \notin \sigma(F), \qquad \operatorname{tr}\Delta = n_1 + \cdots + n_\alpha = r.$$

Для функций $f$ с разделяющимися переменными используем представление

$$M_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q^*, \qquad F_p = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} f_p(\lambda) R_\lambda d\lambda. \tag{5}$$

Получим аналог формулы (18) гл.1 для оператора $M_f$. Каждое собственное значение $\lambda_t \in \sigma_0(F)$ является полюсом порядка $m_t$ матричной функции $R_\lambda (m_1 + \cdots + m_\alpha = m)$. В некоторой окрестности точки $\lambda_t$ выполнено разложение

$$R_\lambda = \sum_{i=1}^{m_t} \frac{(i-1)!}{(\lambda - \lambda_t)^i} A_{ti} + S_t(\lambda), \tag{6}$$

где $A_{ti}$ — постоянные матрицы, $S_t(\lambda)$ — аналитическая в данной окрестности матрица-функция. Используем ряд Тейлора для функции $f$ в окрестности точек $(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$:

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \frac{(\lambda - \lambda_t)^{i-1}(\bar{\mu} - \bar{\lambda}_\tau)^{j-1}}{(i-1)!(j-1)!},$$

$$f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) = \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial \lambda_t^{i-1} \partial \bar{\lambda}_\tau^{j-1}} f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau).$$

Вычисляя интегралы в (3) с помощью основной теоремы о вычетах, приходим к следующему представлению оператора $M_f$:

$$M_f X = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{m_t, m_\tau} f_{ij}(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) A_{ti} X A_{\tau j}^*. \qquad (7)$$

Коэффициенты разложений (5) и (7) обладают следующими свойствами:

$$\Delta = \sum_{t=1}^{\alpha} A_{t1}, \qquad F_p = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{m_t} \frac{d^{i-1} f_p(\lambda_t)}{d\lambda_t^{i-1}} A_{ti},$$

$$\operatorname{tr} A_{ti} = \begin{cases} n_t, & i = 1 \\ 0, & i > 1 \end{cases}, \qquad \operatorname{tr} F_p = \sum_{t=1}^{\alpha} n_t f_p(\lambda_t).$$

Рассмотрим случай линейного пучка $F(\lambda) = A - \lambda B$. При условии (1) существуют невырожденные матрицы $P$ и $Q$, для которых [11]

$$P(A - \lambda B)Q \equiv \begin{bmatrix} J - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где $J$ и $N$ — квадратные матрицы порядка $r$ и $n-r$ соответственно такие, что $\sigma(J) = \sigma(F)$, $N^\nu = 0$, $I$ — единичная матрица подходящих размеров. Индекс нильпотентности $\nu$ матрицы $N$ определяется максимальной степенью бесконечных элементарных делителей пучка $F(\lambda)$. Учитывая тождество (8), имеем соотношения

$$R_\lambda = -B(A - \lambda B)^{-1} = -P^{-1} \begin{bmatrix} (J - \lambda I)^{-1} & 0 \\ 0 & N(I - \lambda N)^{-1} \end{bmatrix} P, \qquad (9)$$

$$(J-\lambda I)^{-1} = -\sum_{t=1}^{\alpha}\sum_{i=1}^{m_t}\frac{(i-1)!}{(\lambda-\lambda_t)^i}J_{ti}, \qquad (I-\lambda N)^{-1} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\lambda^i N^i,$$

где $J_{ti} = \alpha_{ti}(J)$ — компоненты матрицы $J$, отвечающие собственным значениям $\lambda_t$. Следовательно, для вычисления коэффициентов разложений (5) и (7), согласно (6) и (9), имеем соотношения

$$F_p = \Delta f_p(\Theta), \qquad A_{ti} = \Delta\alpha_{ti}(\Theta), \tag{10}$$

$$\Delta = BZ = P^{-1}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P, \qquad \Theta = AZ = P^{-1}\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P, \tag{11}$$

$$Z = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega}(A-\lambda B)^{-1}d\lambda = Q\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P. \tag{12}$$

При этом, если функции $f_p(\lambda)$ и $\alpha_{ti}(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ принимают нулевые значения, то множитель $\Delta$ в (10) можно опустить. Для приближенного вычисления матриц $\Delta$ и $\Theta$ может быть использовано вытекающее из (9) лорановское разложение

$$R_\lambda = \lambda^{\nu-2}K^{\nu-1} + \cdots + \lambda K^2 + K + \frac{1}{\lambda}\Delta + \frac{1}{\lambda^2}\Theta + \frac{1}{\lambda^3}\Theta^2 + \cdots,$$

где $K$ — некоторая нильпотентная матрица [66, 122]. Матрицы $A_{ti}$ в (10) попарно коммутируют и удовлетворяют соотношениям (см. § 2 гл.1)

$$A_{t1}^2 = A_{t1}, \qquad \sum_{t=1}^{\alpha}A_{t1} = \Delta, \qquad A_{t1}A_{ti} = A_{ti}A_{t1} = A_{ti},$$

$$A_{ti}A_{\tau j} = 0 \quad (t \neq \tau), \qquad A_{ti} = \frac{1}{(i-1)!}(\Theta - \lambda_t\Delta)^{i-1}A_{t1}.$$

Некоторые алгебраические и спектральные свойства операторов $L_f$ распространяются на класс операторов $M_f$ в случае регулярного пучка матриц. В частности, имеем соотношения

$$M_{f_1}M_{f_2} = M_{f_2}M_{f_1} = M_{f_1 f_2}, \qquad c_1M_{f_1} + c_2M_{f_2} = M_{c_1f_1+c_2f_2},$$

$$Mg\,(M_{f_1}, \ldots, M_{f_s}) = M_{g(f_1,\ldots,f_s)},$$

$$M_f W_{t\tau} = f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) W_{t\tau}, \qquad W_{t\tau} = A_{tm_t} C_{t\tau} A^*_{\tau m_\tau} \neq 0,$$

где $c_1$ и $c_2$ — произвольные константы, $g, f_1, \ldots, f_s$ — заданные функции, $C_{t\tau}$ — некоторые матрицы. Если $w$ — собственное значение оператора $M_f$ кратности $q$, то либо $w = f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau)$ и $q \geq n_t n_\tau$, либо $w = 0$ и $q \geq n^2 - r^2$ [73]. С помощью результатов главы 1 можно получить общее представление собственных элементов оператора $M_f$.

## § 2. Матричные функции, допускающие правильную факторизацию

Изучим свойства оператора $M_f$ предполагая, что матричная функция $F(\lambda)$ представима в факторизованном виде

$$\begin{gathered} F(\lambda) = C(\lambda) D(\lambda), \qquad D(\lambda) = A - \lambda B, \\ \sigma(D) = \sigma_0(F), \qquad \sigma(C) \cap \sigma(D) = \varnothing. \end{gathered} \tag{13}$$

С условиями подобной факторизации можно ознакомиться в [82, 83].

**Лемма 1.** *Пусть $\omega$ — замкнутый контур, охватывающий спектр пучка матриц $A - \lambda B$ и отделяющий в комплексной плоскости замкнутую область $\Omega$, $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ — аналитические в области $\Omega$ матрицы-функции. Тогда выполнено равенство*

$$\begin{gathered} 2\pi i \oint\limits_{\omega} C_1(\lambda) S_\lambda C_2(\lambda) d\lambda = \\ = \left( \oint\limits_{\omega} C_1(\lambda) S_\lambda d\lambda \right) \left( \oint\limits_{\omega} S_\lambda C_2(\lambda) d\lambda \right), \end{gathered} \tag{14}$$

*где* $S_\lambda = -B(A - \lambda B)^{-1}$ .

Доказательство. Правую часть равенства (14) представим в виде

$$C = \oint_{\omega}\oint_{\widehat{\omega}} C_1(\lambda)S_\lambda S_\mu C_2(\mu)d\lambda d\mu \qquad (\lambda \in \omega,\ \mu \in \widehat{\omega}).$$

Здесь замкнутый контур $\widehat{\omega}$ целиком охватывает и не пересекает $\omega$. Нетрудно установить, что выполняется следующее тождество:

$$S_\lambda - S_\mu \equiv (\mu - \lambda)S_\lambda S_\mu, \qquad \lambda, \mu \notin \sigma(F). \tag{15}$$

Если $B = I$, то (15) совпадает с тождеством Гильберта для резольвенты $S_\lambda$. Так же, как и в случае резольвенты (см. [14]), имеем

$$C = \oint_{\omega} C_1(\lambda)S_\lambda\left(\oint_{\widehat{\omega}}\frac{C_2(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu\right)d\lambda - \oint_{\widehat{\omega}}\left(\oint_{\omega}\frac{C_1(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda\right)S_\mu C_2(\mu)d\mu =$$

$$= 2\pi i\oint_{\omega} C_1(\lambda)S_\lambda C_2(\lambda)d\lambda.$$

Здесь использованы формула Коши и интегральная теорема, в силу которых

$$\oint_{\widehat{\omega}}\frac{C_2(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu = 2\pi i C_2(\lambda) \quad (\lambda \in \omega), \qquad \oint_{\omega}\frac{C_1(\lambda)}{\mu-\lambda}d\lambda = 0 \quad (\mu \in \widehat{\omega}).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Оператор (3) при условиях (13) представим в виде*

$$M_f X = GL_f(HXH^*)G^*, \tag{16}$$

*где $G \in C^{n\times r}$, $H \in C^{r\times n}$, $L_f$ — оператор, определяемый формулой (11) гл.1 для некоторой матрицы $J \in C^{r\times r}$ со спектром $\sigma(J) = \sigma_0(F)$.*

Доказательство. Вычислим мультипликативную производную факторизованной матрицы (13):

$$F'(\lambda)F^{-1}(\lambda) = C'(\lambda)C^{-1}(\lambda) + C(\lambda)S_\lambda C^{-1}(\lambda).$$

Здесь первое слагаемое не имеет особенностей внутри контура $\omega$. Применяя лемму 1 отдельно к каждому интегралу в (3), получаем

$$M_f X = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\omega}\oint\limits_{\bar\omega} f(\lambda,\bar\mu) U S_\lambda V X V^* S_\mu^* U^* d\lambda d\bar\mu,$$

где

$$U = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega} C(\lambda)S_\lambda d\lambda, \qquad V = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega} S_\lambda C^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

Следовательно, с учетом (9) имеем представление (16). При этом

$$L_f\widehat{X} = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\omega}\oint\limits_{\bar\omega} f(\lambda,\bar\mu)(J-\lambda I)^{-1}\widehat{X}(J-\mu I)^{-1^*} d\lambda d\bar\mu,$$

$$U = [G,0]P, \qquad G = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega} C(\lambda)P^{-1}\begin{bmatrix} (\lambda I - J)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} d\lambda,$$

$$V = P^{-1}\begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad H = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega}\left[(\lambda I - J)^{-1}, 0\right] PC^{-1}(\lambda)d\lambda.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим матричное уравнение

$$M_f X = Y, \tag{17}$$

где $M_f$ — линейный оператор (3), построенный для матричной функции $F(\lambda)$, $f$ — эрмитова функция, описывающая непустые множества

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda\colon f(\lambda,\bar\lambda) > 0\right\}, \qquad \Lambda_f^- = \left\{\lambda\colon f(\lambda,\bar\lambda) < 0\right\},$$

$$\Lambda_f^0 = \left\{\lambda : f(\lambda, \bar\lambda) = 0\right\}.$$

Матрицы $X$ и $Y$ в (17) ищем на множествах эрмитовых матриц, формируемых с помощью оператора $M$ вида (4):

$$\begin{gathered}
\mathcal{X}_{pq} = \left\{X : \widehat{X} = MX,\ i_+(\widehat{X}) = p,\ i_-(\widehat{X}) = q\right\}, \quad \mathcal{X} = \bigcup_{p=0}^{r} \mathcal{X}_{p0}, \\
\mathcal{Y}_{pq} = \left\{Y : Y = M\widehat{Y},\ i_+(Y) = p,\ i_-(Y) = q\right\}, \quad \mathcal{Y} = \bigcup_{p=0}^{r} \mathcal{Y}_{p0}.
\end{gathered} \tag{18}$$

При этом предполагаем, что множители $G$ и $H$ в (16) имеют полный ранг. Последнее ограничение эквивалентно равенству $\operatorname{rang}\Delta = r$, из которого, в частности, следует, что $\mathcal{X}_{r0} \neq \varnothing$ и $\mathcal{Y}_{r0} \neq \varnothing$. Определим количества собственных значений подмножества спектра (2), принадлежащих соответствующим множествам $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$:

$$r_+ = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^+} n_t, \qquad r_- = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^-} n_t, \qquad r_0 = \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} n_t.$$

Из лемм 3–5 гл.1 и формул (16)–(18) вытекают следующие утверждения.

**Лемма 3.** *Если для некоторой матрицы $Y \in \mathcal{Y}_{r0}$ уравнение (17) имеет решение $X \in \mathcal{X}$, то подмножество спектра (2) расположено в области $\Lambda_f^+$. Обратно, если $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^+$, то существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{r0}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{r0}$, удовлетворяющие уравнению (17).*

**Лемма 4.** *Включение $M_f\mathcal{X}_{r0} \subseteq \mathcal{Y}_{r0}$ эквивалентно соотношениям*

$$f(\lambda_t, \bar\lambda_t) > 0, \quad t = \overline{1, \alpha}; \qquad \Gamma_f \begin{pmatrix} m_1 \dots m_\alpha \\ \lambda_1 \dots \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0.$$

*При этом последнее неравенство выполнено в том и только в том случае, когда $M_f\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$.*

**Лемма 5.** *Для любой матрицы $Y \in \mathcal{Y}_{r0}$ уравнение (17) имеет решение $X \in \mathcal{X}_{r0}$ в том и только в том случае, когда*

$$f(\lambda_t, \bar{\lambda}_\tau) \neq 0, \quad t = \overline{1, \alpha}, \quad \tau = \overline{1, \alpha}; \qquad \Gamma_{1/f} \begin{pmatrix} m_1 \dots m_\alpha \\ \lambda_1 \dots \lambda_\alpha \end{pmatrix} \geq 0.$$

Сформулируем аналоги теорем 1–3 гл.1 для матрицы-функции (13).

**Теорема 1.** *Пусть $f \in \mathcal{F}_0^r$. Тогда включение $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^+$ выполнено в том и только в том случае, когда для любой матрицы $Y \in \mathcal{Y}_{r0}$ уравнение (17) имеет решение $X \in \mathcal{X}_{r0}$.*

**Теорема 2.** *Если $M_f X \in \mathcal{Y}_{r0}$, то $r_0 = 0$. Если $r_0 = 0$, то существует матрица $X \in \mathcal{X}_{pq}$ такая, что $M_f X \in \mathcal{Y}_{r0}$ и выполнены равенства*

$$r_+ = p, \qquad r_- = q, \qquad p + q = r. \tag{19}$$

*Если некоторые матрицы $X \in \mathcal{X}_{pq}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{r0}$ удовлетворяют уравнению (17) при $f \in \mathcal{F}_2^r$, то выполнены равенства (19).*

**Теорема 3.** *Если однородное матричное уравнение*

$$M_f X = 0 \tag{20}$$

*имеет решение $X \in \mathcal{X}_{p0}$, то выполнена оценка $r_0 \geq p$. В частности, при $X \in \mathcal{X}_{r0}$ все собственные значения $\lambda_t \in \sigma_0(F)$ расположены на кривой $\Lambda_f^0$. Обратно, если $r_0 \neq 0$, то уравнение (20) имеет решение $X \in \mathcal{X}_{p0}$ при любом $p$ из интервала*

$$0 < p \leq \sum_{\lambda_t \in \Lambda_f^0} \xi_t,$$

*где $\xi_t$ — геометрическая кратность собственного значения $\lambda_t \in \sigma_0(F)$.*

Результаты главы 1, связанные с расширением множеств эрмитовых матриц в задаче о локализации спектра матрицы, можно обобщить для матричной функции (13). В частности, при построении аналогов теоремы 5 мы используем понятие управляемости линейных систем, не разрешенных относительно производных [100, 131].

## § 3. Матричный полином и его сопровождающая линейная форма

При изучении спектральных свойств матричного полинома

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^s A_s \in C^{n\times n}, \qquad \det F(\lambda) \not\equiv 0, \tag{21}$$

можно использовать линейные сопровождающие пучки матриц, собственные значения которых составляют $\sigma(F)$. Известны различные способы построения таких пучков (см., например, [44, 82, 98]). В частности, мы будем использовать следующие блочные матрицы размеров $ns \times ns$:

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s-1} & 0 & \cdots & I \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_{s-1} & A_s \\ I & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{bmatrix}, \quad S_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_s \\ A_2 & A_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & A_s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_s & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Все скалярные спектральные характеристики (собственные значения, конечные и бесконечные элементарные делители) линейных пучков $D(\lambda) = A - \lambda B$ и $L(\lambda) = A - \lambda C$ совпадают и полностью определяют соответствующие спектральные характеристики матричного полинома $F(\lambda)$.

Пусть $\sigma_0(F)$ — некоторое подмножество спектра вида (2) матричного полинома (21), отделяемое в комплексной плоскости контуром $\omega$. Построим оператор $M_f$ для сопровождающего пучка $D(\lambda)$.

Применяя формулу Фробениуса для обращения блочных матриц, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} -D^{-1}(\lambda) &= S_1 W(\lambda) + F_1(\lambda), \\ D'(\lambda)D^{-1}(\lambda) &= S_2 W(\lambda) + F_2(\lambda), \\ \lambda D'(\lambda)D^{-1}(\lambda) &= S_3 W(\lambda) + F_3(\lambda), \end{aligned} \tag{23}$$

где $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$, $F_3(\lambda)$ — некоторые полиномиальные матрицы, $W(\lambda)$ — матрица, имеющая блочную ганкелеву структуру

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} F^{-1}(\lambda) & \lambda F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{s-1}F^{-1}(\lambda) \\ \lambda F^{-1}(\lambda) & \lambda^2 F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{s}F^{-1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{s-1}F^{-1}(\lambda) & \lambda^{s}F^{-1}(\lambda) & \cdots & \lambda^{2s-2}F^{-1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda \notin \sigma(F).$$

Интегрируя равенства (23) по замкнутому контуру $\omega$, охватывающему все точки $\sigma_0(F)$, имеем соотношения

$$Z = S_1 H, \qquad \Delta = BZ = S_2 H, \qquad \Theta = AZ = S_3 H, \tag{24}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \cdots & H_s \\ H_2 & H_3 & \cdots & H_{s+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_s & H_{s+1} & \cdots & H_{2s-1} \end{bmatrix},$$

$$H_p = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \qquad p = 1, 2, \dots.$$

Интегралы $H_p$ удовлетворяют системе соотношений

$$\begin{gathered} A_0 H_1 + A_1 H_2 + \dots + A_s H_{s+1} = 0, \\ A_0 H_2 + A_1 H_3 + \dots + A_s H_{s+2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 H_p + A_1 H_{p+1} + \dots + A_s H_{s+p} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Отсюда следует, что матрицы (24) выражаются через первые $s$ интегралов $H_1, \dots, H_s$. Действительно, блоки $Z_{pq}$ матрицы $Z$ имеют вид

$$Z_{pq} = \begin{cases} \sum\limits_{j=p}^{s} A_j H_{j+q-p+1}, & q < p, \\ H_q, & p = 1, \\ -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j H_{j+q-p+1}, & q \geq p > 1. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь уже нет матриц $H_p$ при $p > s$. Отметим, что если контур $\omega$ охватывает весь спектр $\sigma(F)$, то матрицы $H_p$ совпадают с коэффициентами главной части лорановского разложения резольвенты в окрестности бесконечно удаленной точки

$$F^{-1}(\lambda) = H_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} H_1 + \frac{1}{\lambda^2} H_2 + \dots + \frac{1}{\lambda^s} H_s + \cdots. \tag{26}$$

Оператор $M_f$ для пучка матриц $D(\lambda)$ представляется в виде (7), где коэффициенты $A_{ti}$ определяются соотношениями (10)–(12). Для класса функций $f$ с разделяющимися переменными используем оператор

$$M_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q^*, \tag{27}$$

где

$$F_p = \begin{cases} f_p(\Theta), & f_p(0) = 0, \\ \Delta f_p(\Theta), & f_p(0) \neq 0. \end{cases}$$

Матрицы $\Delta$ и $\Theta$ в (24) и (27) обладают следующими свойствами (см. § 1):

$$\begin{gathered} \operatorname{rang} \Delta = r, \qquad \Delta^2 = \Delta, \\ \Delta\Theta = \Theta\Delta = \Theta, \qquad \sigma_0(F) \subset \sigma(\Theta). \end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, если известны $s$ интегралов $H_1, \dots, H_s$ в соотношениях (24), то свойства оператора $M_f$ и расположение собственных значений $\lambda_t \in \sigma_0(F)$ матричного полинома $F(\lambda)$ относительно множеств $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$ можно описать с помощью лемм 2–5 и теорем 1–3. В § 4 мы построим систему алгебраических соотношений, которым удовлетворяют матрицы $H_1, \ldots, H_s$.

## § 4. Алгебраические системы расщепления спектра

Каждое нетривиальное решение $Z$ алгебраической системы

$$AZ = ZA, \qquad Z = Z^2 \tag{29}$$

определяет проектор матрицы $A$ и некоторое разбиение спектра $\sigma(A)$ на два подмножества. Проекторы матрицы могут быть использованы при расщеплении и локализации ее спектра (см., например, [8]). Построим аналоги системы (29) для матричных пучков, удовлетворяющих условию (1), и изучим возможности их использования в теоремах 1–3.

Рассмотрим систему уравнений

$$AZB = BZA, \qquad Z = ZBZ, \tag{30}$$

где $A$ и $B$ — матрицы регулярного пучка $D(\lambda) = A - \lambda B$, $Z$ — неизвестная матрица. Общее решение системы (30) ищем в виде

$$Z = Q \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} P,$$

где $P$ и $Q$ — невырожденные матрицы преобразования (8). Для нахождения блоков $Z_j$ получаем систему уравнений

$$JZ_0 = Z_0 J, \qquad NZ_3 = Z_3 N, \qquad Z_1 = JZ_1 N, \qquad Z_2 = NZ_2 J,$$

$$Z_0 = Z_0^2 + Z_1 N Z_2, \qquad Z_1 = Z_0 Z_1 + Z_1 N Z_3,$$

$$Z_2 = Z_2 Z_0 + Z_3 N Z_2, \qquad Z_3 = Z_2 Z_1 + Z_3 N Z_3.$$

Поскольку $N$ — нильпотентная матрица, то выполнены равенства $Z_1 = JZ_1 N = J^2 Z_1 N^2 = \cdots = 0$. Блоки $Z_2$ и $Z_3$ также должны быть нулевыми. Поэтому общее решение системы (30) определяется в виде

$$Z = Q \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P, \qquad JZ_0 = Z_0 J, \qquad Z_0 = Z_0^2, \tag{31}$$

где $Z_0$ — произвольный проектор матрицы $J$. При этом, если $r \neq 0$ — ранг матрицы $Z_0$, то для некоторой невырожденной матрицы $S$ выполнены соотношения

$$Z_0 = S^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} S, \qquad SJS^{-1} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

где $J_0 \in C^{r\times r}$. Отсюда следует, что система уравнений (30) имеет непустое множество решений ранга $r$ в том и только в том случае, когда $r$ равно сумме порядков жордановых блоков матрицы $J$, отвечающих некоторому набору элементарных делителей пучка $D(\lambda)$ [64]. Если $S$ — единичная матрица, то решение (31) системы (30) представимо в интегральном виде:

$$Z = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} (A - \lambda B)^{-1} d\lambda, \qquad \operatorname{rang} Z = r.$$

Здесь контур $\omega$ охватывает часть спектра $\sigma_0(D)$, состоящую из $r$ собственных значений с учетом кратностей. В том случае, когда $\sigma_0(D)$ — весь спектр, мы имеем решение системы (30) вида (12) максимального ранга, равного общему количеству собственных значений пучка $D(\lambda)$.

Если $Z$ — решение системы (30) ранга $r$, то, согласно (31) и (32), в соотношениях (5), (7) и (10) можно использовать матрицы

$$\Delta = BZ = G^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G, \quad \Theta = AZ = G^{-1} \begin{bmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G, \tag{33}$$

где

$$G = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} P, \qquad \sigma(J_0) \subset \sigma(D).$$

При этом определено подмножество спектра $\sigma_0(D)$, совпадающее с $\sigma(J_0)$, а матрицы (33) обладают следующими свойствами (см. § 1):

$$
\begin{gathered}
\operatorname{rang}\Delta = r, \qquad \Delta^2 = \Delta, \\
\Delta\Theta = \Theta\Delta = \Theta, \qquad \sigma_0(D) \subset \sigma(\Theta).
\end{gathered} \tag{34}
$$

Следовательно, если операторы (5) и (7) определены с помощью соотношений (10) и (33) для произвольного решения $Z$ системы (30) ранга $r$, то расположение $r$ собственных значений пучка матриц $D(\lambda)$ относительно заданных множеств $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$ можно описать с помощью утверждений теорем 1–3. Система матричных соотношений (17) и (30) служит аналогом уравнения Ляпунова для регулярного пучка матриц $D(\lambda)$.

Отметим, что каждому ненулевому решению $Z$ системы (30) соответствует подмножество спектра $\sigma_0(D) = \sigma(J_0)$, которое совпадает со спектром $r \times r$-матрицы $\Theta_0 = R^*AL$, где $L$ и $R^*$ — множители скелетного разложения

$$
Z = LR^*, \qquad L \in C^{n\times r}, \qquad R \in C^{n\times r}. \tag{35}
$$

Свойства решений линейного уравнения системы (30) можно использовать для понижения размерности в задачах оценки и локализации собственных значений [64, 65]. Так, если матрица (35) удовлетворяет уравнению

$$
AZB = BZA \tag{36}
$$

и $a \notin \sigma(D)$, то спектры регулярных линейных пучков матриц

$$
U(\lambda) = R^*D(\lambda)D(a)^*R, \qquad V(\lambda) = L^*D(a)^*D(\lambda)L
$$

совпадают и образуют некоторое подмножество спектра исходного пучка $D(\lambda)$. При этом, правые (левые) собственные векторы пучка $D(\lambda)$, отвечающие данному подмножеству спектра, определяются в виде линейных комбинаций столбцов (строк) множителя $L(R^*)$ в разложении (35). Используя решения уравнения (36), можно построить регулярные пучки матриц типа $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$, которые при дополнительных ранговых ограничениях на $Z$ не являются унимодулярными [65]. Уравнение (36) эквивалентно тождеству $D(\lambda)ZD(a) \equiv D(a)ZD(\lambda)$, $\lambda \in C^1$. Матрицы (35), для которых выполняется данное тождество, обладают свойствами, аналогичными вышеизложенным, даже в том случае, когда $D(\lambda)$ — регулярная матрица-функция.

Пусть $F(\lambda)$ — матричный полином вида (21), $D(\lambda) = A - \lambda B$ — его сопровождающий пучок, матрицы которого определены в (22) и $\sigma(F) = \sigma(D)$. Представим систему уравнений (30) в виде $2s$ матричных уравнений относительно неизвестных $T_1, \ldots, T_s$.

Сначала рассмотрим случай $s = 2$, полагая

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 & I \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Согласно (30), приходим к системе четырех матричных уравнений относительно $T_1$ и $T_2$:

$$\begin{gathered} A_0T_1A_1 - A_1T_1A_0 = A_2T_2A_0 - A_0T_2A_2, \\ A_0T_1A_2 - A_2T_1A_0 = A_2T_2A_1 - A_1T_2A_2, \\ T_1 = T_1A_1T_1 + T_1A_2T_2 + T_2A_2T_1, \\ T_2 = T_2A_2T_2 - T_1A_0T_1. \end{gathered} \tag{37}$$

Блоки $G_1$ и $G_2$ неизвестной матрицы $Z$ в системе (30) выражаются через $T_1$ и $T_2$:

$$G_1 = A_2T_2, \qquad G_2 = -A_0T_1 - A_1T_2. \tag{38}$$

Кроме того, согласно второму уравнению (30), должны выполняться равенства

$$G_1 = G_1A_1T_1 + G_2A_2T_1 + G_1^2, \qquad G_2 = G_1A_1T_2 + G_2A_2T_2 + G_1G_2.$$

Однако, можно обнаружить, что данные равенства являются следствием соотношений (37) и (38). Следовательно, если $T_1$

и $T_2$ — решение системы (37), то матрицы

$$
\begin{aligned}
\Delta = BZ &= \left[\begin{array}{c|c} A_1T_1 + A_2T_2 & -A_0T_1 \\ \hline A_2T_1 & A_2T_2 \end{array}\right], \\
\Theta = AZ &= \left[\begin{array}{c|c} -A_0T_1 & -A_0T_2 \\ \hline A_2T_2 & -A_0T_1 - A_1T_2 \end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{39}
$$

удовлетворяют соотношениям (34) и могут быть использованы при построении аналогов уравнения Ляпунова в теоремах 1–3 для квадратичного пучка матриц $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2$ (см. формулы (10) и (33)).

Обобщим систему (37) для матричного полинома степени $s \geq 2$. Представим матрицы $A$, $B$ и $Z$ в виде

$$
A = \left[A^{(0)} \,\middle|\, A^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} -A_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & I \end{array}\right],
$$

$$
B = \left[B^{(0)} \mid B^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} A_1 & I & & 0 \\ A_2 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & I \\ A_s & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right],
$$

$$
Z = \left[\begin{array}{c} T \\ \hline G \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} T_1 & T_2 & \cdots & T_s \\ \hline G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{s-11} & G_{s-12} & \cdots & G_{s-1s} \end{array}\right].
$$

Тогда система (30) эквивалентна соотношениям

$$
A^{(0)}TB^{(0)} - B^{(0)}TA^{(0)} = B^{(1)}GA^{(0)} - A^{(1)}GB^{(0)}, \tag{40}
$$

$$
WG \triangleq A^{(1)}GB^{(1)} - B^{(1)}GA^{(1)} = B^{(0)}TA^{(1)} - A^{(0)}TB^{(1)}, \tag{41}
$$

$$T = TB^{(0)}T + TB^{(1)}G, \tag{42}$$

$$G = GB^{(0)}T + GB^{(1)}G. \tag{43}$$

Заметим, что равенство (41) дает явное представление $G$ через $T$:

$$G_{pq} = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{p} A_j T_{q-p+j}, & p < q, \\ \sum_{j=p+1}^{s} A_j T_{q-p+j}, & p \geq q. \end{cases} \tag{44}$$

Причем, оператор $W$, определенный в левой части равенства (41), обратим. Применяя к обеим частям равенства (43) оператор $W$, можно обнаружить, что равенство (43) является следствием соотношений (40), (42) и (44). Подставляя (44) в (40) и (42), приходим к системе $2s$ матричных уравнений относительно неизвестных $T_1, \ldots, T_s$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=p+1}^{s} (A_i T_{i+j-p} A_j - A_j T_{i+j-p} A_i) = 0, \qquad p = \overline{0, s-1}, \\ &T_q = \sum_{i=q}^{s} \sum_{j=i}^{s} T_i A_j T_{q+j-i} - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=-1}^{i-1} T_i A_j T_{q+j-i}, \qquad q = \overline{1, s}, \end{aligned} \tag{45}$$

где $T_0 = A_{-1} = 0$.

Построим блочные матрицы

$$\Delta = BZ = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{s1} & \cdots & \Delta_{ss} \end{bmatrix}, \quad \Theta = AZ = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \cdots & \Theta_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{s1} & \cdots & \Theta_{ss} \end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$\Delta_{pq} = \begin{cases} -\sum_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j}, & p < q, \\ \sum_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j}, & p \geq q, \end{cases}$$

$$\Theta_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{j=0}^{p-1} A_j T_{q-p+j+1}, & p \le q, \\ \sum\limits_{j=p}^{s} A_j T_{q-p+j+1}, & p > q. \end{cases}$$

В случае $s = 2$ система (45) приводится к виду (37), а матрицы (39) и (46) совпадают.

Сопоставляя (25) и (44) и используя структуру решений системы (30) для сопровождающего пучка $D(\lambda)$, имеем следующее утверждение.

**Лемма 6.** *Семейство интегралов*

$$T_p = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda^{p-1} F^{-1}(\lambda) d\lambda, \qquad p = \overline{1, s}, \tag{47}$$

*где $\omega$ — замкнутый контур, отделяющий подмножество спектра $\sigma_0(F)$, представляет одно из решений системы (45).*

**Лемма 7.** *Пусть $T_1, \ldots, T_s$ — нетривиальное решение системы (45). Тогда $\Delta$ является проектором ранга $r$ матрицы $\Theta$, $1 \le r \le ns$, и, по крайней мере, $r$ собственных значений матрицы $\Theta$ с учетом кратностей принадлежат спектру матричного полинома $F(\lambda)$. При этом, если $\lambda \in \sigma(\Theta)$, то либо $\lambda \in \sigma_0(F)$, либо $\lambda = 0$.*

Данное утверждение устанавливается с помощью представления матриц (46) в виде (33) на решениях системы (30). При этом определяется подмножество спектра $\sigma_0(F)$ матричного полинома $F(\lambda)$, совпадающее с $\sigma(J_0)$, а также с $\sigma(R^* A L)$, где $L$ и $R^*$ — множители скелетного разложения (35) соответствующего решения системы (30) [75].

На основе леммы 7 и изложенных построений приходим к следующему выводу.

**Теорема 4.** *Пусть уравнение (17) и множества матриц (18) построены для операторов*

$$M_f X = \sum_{p,q} \gamma_{pq} F_p X F_q^*, \qquad MX = \Delta X \Delta^*,$$

*где*

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{p,q} \gamma_{pq} f_p(\lambda) \overline{f_q(\mu)}, \qquad F_p = \begin{cases} f_p(\Theta), & f_p(0) = 0, \\ \Delta f_p(\Theta), & f_p(0) \neq 0, \end{cases}$$

*а матрицы $\Delta$ и $\Theta$ определены в виде (46) на нетривиальном решении системы (45). Тогда для некоторого подмножества спектра $\sigma_0(F)$ матричного полинома $F(\lambda)$, состоящего из $r = \operatorname{rang} \Delta$ собственных значений, выполнены все утверждения лемм 2–5 и теорем 1–3.*

Таким образом, мы имеем общую методику построения аналогов уравнения Ляпунова и соответствующих теорем о локализации собственных значений для линейных, квадратичных и полиномиальных пучков матриц. Данная методика основана на использовании операторов типа $M$ и $M_f$, формируемых с помощью решений матричной алгебраической системы (45), в частности, интегралов (47) или коэффициентов главной части лорановского разложения резольвенты (26). Обобщенные результаты, представленные в виде теоремы 4, относятся к классу эрмитовых функций $f$ с разделяющимися переменными.

## § 5. Правые и левые пары матричной функции

Пусть $F(\lambda)$ — матрица-функция размеров $n \times n$, аналитическая в некоторой области $\Lambda$. Введем определения, обобщающие понятия блочных собственных значений и векторов матричного полинома [98].

Матрицы $U \in C^{m \times m}$ и $T \neq 0 \in C^{n \times m}$ образуют правую пару $(U, T)$ матрицы-функции $F(\lambda)$, если для некоторой аналитической матричной функции $\Phi(\lambda)$ в окрестности точек $\sigma(U)$ выполнено тождество

$$F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U), \qquad \lambda \in \Lambda. \tag{48}$$

Аналогично определяются левые пары $(U,T)$ матрицы-функции $F(\lambda)$ с помощью тождества

$$TF(\lambda) \equiv (\lambda I - U)\Phi(\lambda), \qquad \lambda \in \Lambda. \tag{49}$$

Если матрица-функция $F(\lambda)$ представлена в виде

$$F(\lambda) = A_0 + a_1(\lambda)A_1 + \cdots + a_s(\lambda)A_s, \tag{50}$$

где $a_j(\lambda)$ — скалярные функции, $A_j$ — постоянные матрицы, то ее правые и левые пары $(U,T)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям

$$A_0T + A_1Ta_1(U) + \cdots + A_sTa_s(U) = 0, \tag{51}$$

$$TA_0 + a_1(U)TA_1 + \cdots + a_s(U)TA_s = 0. \tag{52}$$

Данное утверждение непосредственно следует из (48), (49) и интегрального представления аналитических функций от матрицы $a_j(U)$. Обратно, если матрицы $U$ и $T \neq 0$ удовлетворяют уравнению (51) ((52)), то $(U,T)$ является правой (левой) парой матрицы-функции (50).

Для правых и левых пар матрицы-функции $F(\lambda)$ построим последовательности матриц $E_k$, имеющих соответствующую блочную структуру:

$$E_k = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{k-1} \end{bmatrix}, \qquad E_k = \left[T, UT, \ldots, U^{k-1}T\right], \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{53}$$

Для обеих последовательностей (53) выполняются ранговые соотношения

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_h = r_{h+1} = \cdots = r, \tag{54}$$

где $r_k = \operatorname{rang} E_k$, $h$ — наименьшее значение индекса $k$, при котором $r_k = r_{k+1}$. Максимальное значение $r = r_h$ ранговой последовательности (54) называется индексом наблюдаемости (управляемости) правой (левой) пары $(U, T)$. При этом выполняются следующие оценки:

$$\operatorname{rang} T + h - 1 \le r \le m, \qquad 1 \le h \le m_0, \tag{55}$$

где $m_0$ — степень минимального полинома матрицы $U$. В случае $r = m$ правая (левая) пара $(U, T)$ является наблюдаемой (управляемой). Свойства наблюдаемости и управляемости пары $(U, T)$ эквивалентны соответствующим условиям [125]

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} \lambda I - U \\ T \end{bmatrix} = m, \qquad \operatorname{rang}[\lambda I - U, T] = m, \qquad \lambda \in \sigma(U).$$

Наблюдаемые (управляемые) пары матриц $(U, T)$, удовлетворяющие условию (48) ((49)), будем называть правыми (левыми) собственными парами матрицы-функции $F(\lambda)$. Для таких пар выполнено включение $\sigma(U) \subset \sigma(F)$. Обратное включение $\sigma(F) \subset \sigma(U)$ выполняется при соответствующих условиях

$$\operatorname{rang}[F(\lambda), \Phi(\lambda)] = n, \qquad \lambda \in \sigma(F), \tag{56}$$

$$\operatorname{rang} \begin{bmatrix} F(\lambda) \\ \Phi(\lambda) \end{bmatrix} = n, \qquad \lambda \in \sigma(F). \tag{57}$$

Если $l < \infty$ — количество точек спектра $\sigma(F)$, то при условии (56) ((57)) пара $(U, T)$ имеет максимально возможный индекс наблюдаемости (управляемости) $r = l$.

**Лемма 8.** *Пусть $(U, T)$ — правая (левая) пара матрицы-функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) $r$. Тогда, по крайней мере, $r$ точек спектра $\sigma(U)$ являются собственными значениями матрицы-функции $F(\lambda)$. При условии (56) ((57)) каждая точка спектра $\sigma(F)$ является собственным значением матрицы $U$.*

Доказательство. Пусть выполнено тождество (48). Если $r$ — индекс наблюдаемости пары $(U, T)$, то существует невырожденная матрица $G \in C^{m \times m}$, преобразующая матрицы $U$ и $T$ к виду

$$GUG^{-1} = \begin{bmatrix} U_0 & 0 \\ U_2 & U_1 \end{bmatrix}, \qquad TG^{-1} = [T_0, 0],$$

где $U_0 \in C^{r \times r}$, $T_0 \in C^{n \times r}$, $(U_0, T_0)$ — наблюдаемая пара [7]. Учитывая данное преобразование, согласно (48) получаем соотношения

$$F(\lambda)T_0 \equiv \Phi_0(\lambda)(\lambda I - U_0), \qquad \Phi(\lambda) = [\Phi_0(\lambda), 0]\, G.$$

Если $u_0$ — правый собственный вектор матрицы $U_0$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(U_0)$, то в силу наблюдаемости пары $(U_0, T_0)$, выполнено неравенство $v_0 = T_0 u_0 \neq 0$. Поэтому $v_0$ — правый собственный вектор матрицы-функции $F(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 \in \sigma(F)$. С помощью приведенных соотношений можно установить, что $\det F(\lambda) \equiv \varphi(\lambda) \det(\lambda I - U_0)$, где $\varphi$ — некоторая функция. Следовательно, $\sigma(U_0)$ совпадает с некоторым подмножеством спектра $\sigma_0(F) \subset \sigma(U)$. Если $\lambda_0$ — собственное значение матрицы $U_0$ кратности $n_0$, то $\lambda_0$ является также собственным значением матрицы-функции $F(\lambda)$ кратности $N_0 \geq n_0$. При условии (56) аналогично устанавливается обратное утверждение.

Доказательство утверждений в случае левой пары $(U, T)$ матрицы-функции $F(\lambda)$ вытекает из соотношений

$$G^{-1}UG = \begin{bmatrix} U_0 & U_2 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}, \qquad G^{-1}T = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_0 F(\lambda) \equiv (\lambda I - U_0)\Phi_0(\lambda), \qquad \Phi(\lambda) = G \begin{bmatrix} \Phi_0(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

где $U_0 \in C^{r \times r}$, $T_0 \in C^{r \times n}$, $(U_0, T_0)$ — управляемая пара.

Выделенное подмножество спектра $\sigma_0(F)$, отвечающее правой (левой) паре $(U, T)$, совпадает с наблюдаемой (управляемой) частью спектра $\sigma(U_0)$ матрицы $U$. Если выполнено условие (56)

((57)), то включение $\sigma(F) \subset \sigma(U)$ устанавливается путем умножения слева (справа) тождества (48) ((49)) на левые (правые) собственные векторы матрицы-функции $F(\lambda)$.

Лемма доказана.

Для матричного полинома (21) соотношения, определяющие правые и левые пары $(U,T)$, имеют вид

$$A_0T + A_1TU + \cdots + A_sTU^s = 0, \tag{58}$$

$$TA_0 + UTA_1 + \cdots + U^sTA_s = 0. \tag{59}$$

При этом в (48), (49) $\Phi(\lambda)$ определяется соответствующим выражением:

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_jTU^{j-i}, \qquad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} U^{j-i}TA_j.$$

Если в (58) ((59)) $T$ — матрица полного ранга по столбцам (строкам), то пару $(U,T)$ составляют правые (левые) блочные собственное значение и собственный вектор матричного полинома $F(\lambda)$ [98].

**Лемма 9.** $(U,T)$ — *правая пара матричного полинома (21) индекса наблюдаемости $r$ в том и только в том случае, когда*

$$AE = CEU, \qquad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{rang} E = r. \tag{60}$$

*Аналогично, $(U,T)$ — левая пара матричного полинома $F(\lambda)$ индекса управляемости $r$ в том и только в том случае, когда*

$$EA = UEB, \qquad E = \left[T, UT, , \ldots, U^{s-1}T\right], \qquad \operatorname{rang} E = r. \tag{61}$$

Доказательство. Эквивалентность матричных равенств (58) и (60) ((59) и (61)) является следствием структуры блочных матриц (22). Тот факт, что ранг матрицы $E$ совпадает с индексом наблюдаемости (управляемости) пары $(U, T)$, устанавливается с помощью канонической формы регулярного пучка матриц. Из (8) и (61) следует

$$E = [R, 0]\, P, \qquad RJ = UR, \qquad \operatorname{rang} E = \operatorname{rang}\,[E, UE]\,.$$

Поэтому столбцы матрицы $UE$ и, в частности, блока $U^s T$ линейно выражаются через столбцы матрицы $E$. Аналогично, в (60) строки матрицы $EU$ принадлежат линейной оболочке строк $E$. Следовательно, для матричного полинома наряду с (55) выполняется оценка $h \le s$.

Лемма доказана.

Согласно (22), $AS_1 = S_1 A = S_3$ и $BS_1 = S_1 C = S_2$. Поэтому из (60) ((61)) вытекают соотношения

$$AZ = BZU, \qquad Z = S_1 E \qquad (ZA = UZC, \quad Z = ES_1), \qquad (62)$$

которые также определяют связь между правыми (левыми) парами матричного полинома и его сопровождающего пучка.

Решения системы (45) могут быть использованы при нахождении правых и левых пар матричного полинома. Действительно, первая блочная строка (первый блочный столбец) матрицы $Z$, удовлетворяющей системе

$$AZB = BZA, \qquad Z = ZBZ \qquad (AZC = CZA, \quad Z = ZCZ), \, (63)$$

составляет решение $T_1, \ldots, T_s$ системы (45). В то же время, равенства (62) вытекают из (63) при $U = AZ$ $(U = ZA)$.

**Лемма 10.** *Если* $T_1, \ldots, T_s$ *— решение системы (45), то матрицы*

$$T = [T_1, \ldots, T_s]\,, \quad U = \|U_{pq}\|_1^s\,, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{p-1} A_i T_{q-p+i+1}, & p \le q, \\ \sum\limits_{i=p}^{s} A_i T_{q-p+i+1}, & p > q, \end{cases}$$

*образуют правую пару* $(U, T)$, *а матрицы*

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_s \end{bmatrix}, \quad U = \|U_{pq}\|_1^s, \quad U_{pq} = \begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{q-1} T_{p-q+i+1} A_i, & p \geq q, \\ \sum\limits_{i=q}^{s} T_{p-q+i+1} A_i, & p < q, \end{cases}$$

*левую пару* $(U, T)$ *матричного полинома (21).*

Матричной системе (45) удовлетворяет семейство интегралов (47). Причем, если замкнутый контур $\omega$ охватывает весь спектр $\sigma(F)$, то в лемме 10 $(U, T)$ — правая (левая) пара матричного полинома $F(\lambda)$, для которой выполняются условия (56) ((57)) и $\sigma(F) \subset \sigma(U)$. Данное утверждение следует из кананонической структуры сопровождающих пучков $L(\lambda) = A - \lambda C$ и $D(\lambda) = A - \lambda B$ и блочных преобразований матричных выражений в соотношениях

$$\operatorname{rang}[L(\lambda), CE] = ns, \qquad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} D(\lambda) \\ EB \end{bmatrix} = ns, \qquad \lambda \in \sigma(F),$$

приводящих их к соответствующему виду (56) и (57).

При построении правых и левых пар матричного полинома можно использовать лишь линейные уравнения систем (45) и (63). Так, с помощью (8) нетрудно установить, что если $AZB = BZA$, то для некоторой матрицы $U$ пара $(U, E)$, где $E = (ZB)^k$, $k \geq \nu$, удовлетворяет соотношениям (61). Если при этом $\operatorname{rang} Z = \operatorname{rang}(BZ)$, то в качестве $E$ может быть выбрана также матрица $Z$.

## § 6. Теоремы о локализации собственных значений

Пусть $(U, T)$ — правая (левая) пара матричной функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости (управляемости) $r$ и ей соответствует подмножество спектра $\sigma_0(F) \subset \sigma(F)$, состоящее из $r$ собственных значений (см. § 5). Изучим расположение точек $\sigma_0(F)$ в комплексной плоскости относительно заданных множеств

$$\Lambda_f^+ = \left\{\lambda \colon f(\lambda, \bar\lambda) > 0\right\}, \qquad \Lambda_f^- = \left\{\lambda \colon f(\lambda, \bar\lambda) < 0\right\},$$

$$\Lambda_f^0 = \left\{\lambda \colon f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0\right\},$$

описываемых эрмитовой функцией

$$f(\lambda, \bar{\mu}) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(\lambda)\overline{f_j(\mu)} \equiv z_\lambda \Gamma z_\mu^*.$$

Построим линейное матричное уравнение

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} F_i X F_j^* = EYE^*, \tag{64}$$

где матричные коэффициенты определяются в терминах правой или левой пары $(U, T)$ матрицы-функции $F(\lambda)$. При этом с целью сокращения выкладок в обоих случаях используем одинаковые обозначения. Если $(U, T)$ — правая пара, то

$$F_i = Ef_i(U), \qquad E = \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{h-1} \end{bmatrix}.$$

В случае левой пары $(U, T)$ полагаем

$$F_i = f_i(U)E, \qquad E = \left[T, UT, \ldots, U^{h-1}T\right].$$

Если $F(\lambda)$ — матричный полином степени $s$, то наряду с (55) выполнено неравенство $h \leq s$. Обозначим множества эрмитовых матриц

$$\mathcal{K} = \{X \colon EXE^* \geq 0\},$$

$$\mathcal{K}_{pq} = \{X \colon i_+(EXE^*) = p, \quad i_-(EXE^*) = q\},$$

где $i_\pm(\cdot)$ — индексы инерции эрмитовой матрицы, равные количествам ее положительных и отрицательных собственных значений. Для матрицы $Y$ в уравнении (64) будем использовать следующие ограничения:

$$S_\lambda = EYE^* + E(\lambda I - U)(\lambda I - U)^* E^* \geq 0, \qquad \operatorname{rang} S_\lambda \equiv r, \tag{65}$$

$$S_\lambda = EYE^* + (\lambda I - U)EE^*(\lambda I - U)^* \geq 0, \qquad \operatorname{rang} S_\lambda \equiv r. \quad (66)$$

**Теорема 5.** *Если матрицы $X \in \mathcal{K}$ и $Y \in \mathcal{K}$ удовлетворяют уравнению (64) и условиям (65) ((66)), то подмножество спектра $\sigma_0(F)$, отвечающее правой (левой) паре $(U,T)$ матричной функции $F(\lambda)$, расположено в области $\Lambda_f^+$. Если к тому же выполнено условие (56) ((57)), то $\sigma_0(F) = \sigma(F) \subset \Lambda_f^+$. Обратно, если $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^+$ и $f \in \mathcal{F}_0^r$, то для любой матрицы $Y \in \mathcal{K}$ уравнение (64) имеет решение $X \in \mathcal{K}$.*

**Теорема 6.** *Если матрицы $X \in \mathcal{K}_{pq}$ и $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ удовлетворяют уравнению (64), а $f \in \mathcal{F}_2^r$, то выполнены равенства*

$$r_+ = p, \qquad r_- = q, \qquad r_0 = 0, \qquad (67)$$

*где $r_+$, $r_-$ и $r_0$ — количества точек подмножества $\sigma_0(F)$, принадлежащих соответственно $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$ и $\Lambda_f^0$. Обратно, если для некоторых $p$ и $q$ выполняются равенства (67), то существуют матрицы $X \in \mathcal{K}_{pq}$ и $Y \in \mathcal{K}_{r0}$, удовлетворяющие уравнению (64).*

**Теорема 7.** *Если матрицы $X \in \mathcal{K}_{p0}$ и $Y \in \mathcal{K}_{00}$ удовлетворяют уравнению (64), то выполнена оценка $r_0 \geq p$. В частности, при $p = r$ выполняется включение $\sigma_0(F) \subset \Lambda_f^0$. Обратно, если $r_0 \neq 0$, $Y \in \mathcal{K}_{00}$, $0 < p \leq \xi$, где $\xi$ — сумма геометрических кратностей собственных значений матрицы $U$, принадлежащих множеству $\sigma_0(F) \cap \Lambda_f^0$, то уравнение (64) имеет решение $X \in \mathcal{K}_{p0}$.*

Доказательство теорем 5–7. Пусть $(U,T)$ — правая пара матричной функции $F(\lambda)$ индекса наблюдаемости $r$. Тогда из доказательства леммы 8 вытекают соотношения

$$E = E_0 G_0, \qquad E_0 = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_0 U_0 \\ \vdots \\ T_0 U_0^{h-1} \end{bmatrix},$$

$$G_0 = [I, 0]G, \qquad F_i = E_0 f_i(U_0) G_0,$$

где $(U_0, T_0)$ — правая собственная пара матрицы-функции $F(\lambda)$, $E_0$ и $G_0$ — матрицы полного ранга соответственно по столбцам и по строкам. Поэтому уравнение (64) эквивалентно соотношению

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(U_0) X_0 f_j(U_0)^* = Y_0, \tag{68}$$

где $X_0 = G_0 X G_0^*$, $Y_0 = G_0 Y G_0^*$. Матрица (65) представима в виде

$$S_\lambda = E_0 \left[ (\lambda I - U_0) G_0 G_0^* (\lambda I - U_0)^* + Y_0 \right] E_0^*.$$

Поэтому условия (65) эквивалентны управляемости пары $(U_0, Y_0)$.

Рассматривая случай левой пары $(U, T)$ матрицы-функции $F(\lambda)$ и используя доказательство леммы 8, получаем соотношения

$$E = G_0 E_0, \qquad E_0 = \left[ T_0, U_0 T_0, \ldots, U_0^{h-1} T_0 \right], \qquad G_0 = G \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F_i = G_0 f_i(U_0) E_0, \qquad X_0 = E_0 X E_0^*, \qquad Y_0 = E_0 Y E_0^*,$$

где $(U_0, T_0)$ — левая собственная пара матрицы-функции $F(\lambda)$, $E_0$ и $G_0$ — матрицы полного ранга соответственно по строкам и по столбцам. При этом уравнение (64) также приводится к виду (68), а условия (66) эквивалентны управляемости пары $(U_0, Y_0)$.

В обоих выше рассмотренных случаях условие $X \in \mathcal{K}_{pq}$ означает, что $i_+(X_0) = p$ и $i_-(X_0) = q$. Аналогично, условие $Y \in \mathcal{K}_{pq}$ эквивалентно равенствам $i_+(Y_0) = p$, $i_-(Y_0) = q$.

Следовательно, утверждения теорем 5–7 вытекают из леммы 8, изложенных построений и теорем 1–3, 5 гл. 1 для уравнения (68).

Теоремы 5–7 доказаны.

**Примечание 1.** Условия (56) и (65) теоремы 5 выполняются, если

$$F(\lambda) F(\lambda)^* + \Phi(\lambda) Y \Phi(\lambda)^* > 0, \qquad \lambda \in \Lambda. \tag{69}$$

Условия (66) являются следствием матричного неравенства

$$F(\lambda)F(\lambda)^* + \Theta(\lambda)Y\Theta(\lambda)^* > 0, \qquad \lambda \in \Lambda, \tag{70}$$

где $\Theta(\lambda) = \left[I, \lambda I, \ldots, \lambda^{h-1}I\right]$. Все соотношения (56), (57), (65), (66), (69), (70) в соответствующих утверждениях теоремы 5 должны выполняться лишь в некоторой окрестности точек $\sigma_0(F)$ при $\lambda \notin \Lambda_f^+$. Если $Y > 0$, то условия (65), (66) и (70) выполняются при любых $\lambda$.

**Примечание 2.** Ограничения $f \in \mathcal{F}_0^r$ и $f \in \mathcal{F}_2^r$ в теоремах 5 и 6 выполняются соответственно при $i_+(\Gamma) = 1$ и $i_\pm(\Gamma) \leq 1$ (см. § 4 гл.1). Если $f(\lambda, \bar{\mu}) = f_1(\lambda)\overline{f_1(\lambda)} - f_2(\lambda)\overline{f_2(\lambda)} \in \mathcal{F}_2$, то множество матриц $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ в теореме 6 можно расширить, полагая $Y \in \mathcal{K}_{p0}$, $p \leq r$ и используя специальные ограничения на $f$ и $U$, установленные в [64, 110]. Так, в случае левой пары $(U, T)$ в теореме 6 вместо $Y \in \mathcal{K}_{r0}$ достаточно потребовать (см. теорему 7 гл. 1)

$$\widehat{Y} = EYE^* \geq 0, \qquad \widetilde{Y} = \sum_{i=0}^{r-p} \varphi_i(U)\widehat{Y}\varphi_i(U)^* \geq 0,$$

$$p = \operatorname{rang}\widehat{Y} \leq r = \operatorname{rang}\widetilde{Y},$$

$$\varphi_i(\lambda) = f_1(\lambda)^{r-p-i}f_2(\lambda)^i, \qquad i = \overline{0, r-p}.$$

Отметим, что утверждения теорем 5–7, связанные с применением правых (левых) пар матричной функции $F(\lambda)$, сохраняют силу, если в уравнении (64) и определении множеств $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_{pq}$ вместо матрицы $E$ использовать произведение $WE$ $(EW)$, где $W$ — любая матрица, для которой $\operatorname{rang}(WE) = \operatorname{rang}E$ $(\operatorname{rang}(EW) = \operatorname{rang}E)$. Это позволяет понизить порядок алгебраической системы, к которой сводится уравнение (64). Если подмножество спектра $\sigma_0(F)$, отвечающее заданной паре $(U, T)$, не совпадает с $\sigma(F)$, то при повторном применении теорем 5–7 могут быть использованы методы, подобные процедурам исчерпывания блочных спектральных характеристик матричного полинома [41].

## § 7. Построение достаточных условий локализации спектра

Пусть $\Xi(z) = A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_s A_s$ — многопараметрический пучок матриц размера $n \times n$, удовлетворяющий условию регулярности

$$\det \Xi(z) \not\equiv 0, \qquad z = [z_1, \dots, z_s]^T \in C^s. \tag{71}$$

Спектр $\sigma(\Xi)$ данного пучка определяется как геометрическое место точек $z$, для которых $\det \Xi(z) = 0$. Ставится задача локализации спектра $\sigma(\Xi)$, т.е. построения векторных множеств $\mathcal{Z}$, содержащих все точки $\sigma(\Xi)$.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\sum_{i,j=0}^{s} \gamma_{ij} A_i X A_j^* = Y, \tag{72}$$

где $\gamma_{ij}$ — скалярные коэффициенты, составляющие эрмитову матрицу $\Gamma$. Определим в $C^s$ множество векторов

$$\mathcal{Z} = \left\{ z \colon \operatorname{rang} \Delta(z) + \operatorname{sign} \Delta(z) \geq 2 \right\}, \tag{73}$$

где $\Delta(z) = Z\Gamma Z^*$, $Z = [-z, I_s]$. Дополнение данного множества $\mathcal{Z}_- = C^s \setminus \mathcal{Z}$ состоит из тех векторов $z$, для которых $\Delta(z) \leq 0$.

**Теорема 8.** *Пусть эрмитовы матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют уравнению (72) и соотношениям*

$$\left\| A_i X A_j^* + \Xi(z) C_{ij} \Xi(z)^* \right\|_1^s \geq 0, \qquad z \in \mathcal{Z}_-, \tag{74}$$

$$Y + \Xi(z) S \Xi(z)^* > 0, \qquad z \in \mathcal{Z}_-, \tag{75}$$

*где $C_{ij}$ — блоки некоторой матрицы $C \geq 0$ и $S > 0$. Тогда каждая точка спектра $\sigma(\Xi)$ принадлежит множеству $\mathcal{Z}$.*

Доказательство. Введем блочные матрицы

$$A = [A_0, \dots, A_s], \qquad B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_s \end{bmatrix}, \qquad C = [A_1, \dots, A_s].$$

Матричное уравнение (72) представляется в виде

$$A(\Gamma \otimes X)A^* = Y, \tag{76}$$

где $\otimes$ — знак кронекерового произведения. Пусть $u^* \neq 0$ — левый собственный вектор матрицы $\Xi(z)$, отвечающий точке спектра $z \in \sigma(\Xi)$. Тогда выполнены соотношения

$$u^*A = u^*\left[A_0, C\right] = u^*C\left(\left[-z, I_s\right] \otimes I_n\right) = u^*C\left(Z \otimes I_n\right).$$

При этом $u^*C \neq 0$. В противном случае выполнено неравенство $\operatorname{rang} A < n$, которое противоречит условию (71).

Предположим, что $z \in \mathcal{Z}_-$. Умножая (72) слева (справа) на $u^*$ $(u)$ с учетом (74), (75) и свойств кронекерового произведения, получаем соотношение

$$u^*C\left(\Delta(z) \otimes X\right)C^*u = \operatorname{tr}\left(\Delta(z)W^T\right) = u^*Yu > 0,$$

где

$$W = UBXB^*U^* \geq 0, \qquad U = \begin{bmatrix} u^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u^* \end{bmatrix}.$$

В случае $Y \geq 0$ неравенства $u^*Yu > 0$ и $u^*Y \neq 0$ эквивалентны. Используя разложение неотрицательно определенной матрицы $W^T = RR^* \geq 0$ и переставляя множители под знаком операции $\operatorname{tr}$, приходим к неравенству

$$\operatorname{tr}\left(R^*\Delta(z)R\right) > 0.$$

Отсюда с учетом закона инерции следует, что матрица $\Delta(z)$ не может быть отрицательно полуопределенной, т.е $z \in \mathcal{Z}$. Это противоречит предположению о том, что $z \in \mathcal{Z}_-$. Следовательно, $\sigma(\Xi) \subset \mathcal{Z}$.

Теорема доказана.

**Примечание 3.** Условия (74) ((75)) теоремы 8 выполняются, если $BXB^* \geq 0$ $(Y \geq CHC^*,\ H > 0)$. В частности, для выполнения условий (74) ((75)) достаточно, чтобы $X$ $(Y)$ была неотрицательно (положительно) определенной матрицей. Если $Y \geq 0$, то ограничение (75) эквивалентно тождеству

$$\operatorname{rang}\left[\Xi(z), Y\right] \equiv n, \qquad z \in \mathcal{Z}_-,$$

которое является аналогом условий управляемости и стабилизируемости линейных систем в форме Симона–Миттера [100, 125].

Векторные множества (73), локализующие спектр $\sigma(\Xi)$ в теореме 8, описываются в терминах ранга (rang) и сигнатуры (sign) эрмитовой матрицы $\Delta(z)$ и определяются значениями лишь скалярных коэффициентов уравнения (72). Условие $z \in \mathcal{Z}$ означает, что матрица $\Delta(z)$ имеет, по крайней мере, одно положительное собственное значение. Например, если матрица $\Gamma$ представлена в виде

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma & g^* \\ g & G \end{bmatrix}, \quad \gamma > 0, \quad G_0 = \gamma z_0 z_0^* - G \geq 0, \quad z_0 = (1/\gamma) g,$$

то $\Delta(z) = \gamma(z - z_0)(z - z_0)^* - G_0$ и множество $\mathcal{Z}$ расположено вне $s$-мерного шара:

$$\mathcal{Z} \subset \{z\colon ||z - z_0|| > r\},$$

где $r = \sqrt{\gamma_0/\gamma}$, $\gamma_0 \geq 0$ — минимальное собственное значение матрицы $G_0$. При описании множества (73) может быть использован обобщенный закон инерции [67] (см. главу 4).

Из теоремы 8 вытекает методика построения областей в комплексной плоскости, содержащих спектр матричных функций

$$F(\lambda) \overset{\Delta}{=} \Xi\left(z(\lambda)\right) = A_0 + z_1(\lambda) A_1 + \cdots + z_s(\lambda) A_s, \qquad (77)$$

где $z(\lambda)$ — заданная вектор-функция с компонентами $z_i(\lambda)$, $i = \overline{1, s}$.

**Теорема 9.** *Если эрмитовы матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют соотношениям (72), (74) и (75), причем, в условиях (74) и (75) $z = z(\lambda)$, $\lambda \notin \Lambda$, где $\Lambda = \{\lambda\colon z(\lambda) \in \mathcal{Z}\}$, а $\mathcal{Z}$ — множество вида (73), то спектр матричной функции (77) расположен в области $\Lambda$.*

**Следствие 1.** *Пусть* $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \cdots + \lambda^s A_s$ — *матричный полином и выполнены условия теоремы 9. Тогда спектр* $\sigma(F)$ *расположен в области*

$$\Lambda = \left\{\lambda\colon i_+(\Delta_\lambda) \geq 1, \quad \Delta_\lambda = \Gamma_0 - \lambda\Gamma_1 - \bar{\lambda}\Gamma_1^* + \lambda\bar{\lambda}\Gamma_2\right\}, \tag{78}$$

*где*

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{s1} & \cdots & \gamma_{ss} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{01} & \cdots & \gamma_{0s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{s-11} & \cdots & \gamma_{s-1s} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \gamma_{00} & \cdots & \gamma_{0s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{s-10} & \cdots & \gamma_{s-1s-1} \end{bmatrix}.$$

Доказательство вытекает из соотношений

$$\Delta(z) = S_\lambda \Delta_\lambda S_\lambda^*, \qquad z = [\lambda, \ldots, \lambda^s]^T,$$

$$S_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda^{s-1} & \lambda^{s-2} & \cdots & \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Если $\Delta_\lambda \leq 0$ ($\forall\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda \geq 0$), то область $\Lambda$ расположена в левой полуплоскости. Аналогично, если $\Delta_\lambda \leq 0$ ($\forall\ \lambda\colon |\lambda| \geq 1$), то область $\Lambda$ расположена внутри единичного круга. Эти ограничения на матрицу $\Gamma$ мы используем при построении алгебраических условий устойчивости дифференциальных и разностных систем $s$-го порядка.

**Следствие 2.** *Пусть вектор-функция* $z(\lambda)$ *в (77) и матрица* $\Gamma$ *имеют следующую структуру:*

$$z(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \\ w_\lambda \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \gamma & h^* \\ 0 & h & H \end{bmatrix},$$

$$\gamma < 0, \qquad h \in C^{s-1}, \qquad H = H^* < 0.$$

*Тогда при условиях теоремы 9 спектр матрицы-функции (77) расположен в области*

$$\Lambda = \left\{\lambda \colon \lambda + \bar{\lambda} < \gamma - (h - w_\lambda)^* H^{-1} (h - w_\lambda)\right\}. \tag{79}$$

Для того, чтобы область (79) была расположена в левой полуплоскости, достаточно потребовать

$$\gamma \leq (h - w_\lambda)^* H^{-1} (h - w_\lambda) \qquad (\forall\, \lambda \colon \operatorname{Re} \lambda \geq 0). \tag{80}$$

Например, если $w_\lambda = \left[e^{-\lambda\tau_1}, \ldots, e^{-\lambda\tau_{s-1}}\right]^T$, то условие (80) выполнятся при ограничениях

$$h = 0, \quad \gamma = \gamma_1 \leq 1/\gamma_2 + \cdots + 1/\gamma_s, \quad H = \operatorname{diag}\left\{\gamma_2, \ldots, \gamma_s\right\}, \tag{81}$$

а также в случае

$$\sum_{i=1}^{s-1} (1 + |h_i|)^2 \leq \gamma\mu, \tag{82}$$

где $\mu$ — максимальное собственное значение матрицы $H$. При указанных ограничениях на матрицу $\Gamma$ следствие 2 представляет условия абсолютной устойчивости квазиполинома

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1} A_2 + \cdots + e^{-\lambda\tau_{s-1}} A_s.$$

Отметим, что ограничения типа (81) использовались в [19, 31] при построении алгебраических условий абсолютной устойчивости дифференциально-разностных систем с постоянным запаздыванием. Ограничение (80) является более общим по отношению к (81) и (82).

*Глава 3*

# Анализ спектра и решений линейных динамических систем

Данная глава посвящена применению вышеизложенных результатов исследований к анализу линейных динамических систем, наиболее часто возникающих в приложениях. Для линейного управляемого объекта предлагается метод квадратичной оптимизации, использующий решения обобщенного уравнения Ляпунова и обеспечивающий размещение спектра системы в заданной области. Для линейных дескрипторных систем, а также для дифференциальных и разностных систем второго порядка формулируются новые критерии асимптотической устойчивости и методы построения функций Ляпунова, основанные на решении матричных уравнений. В терминах решений уравнений Сильвестра-Ляпунова формулируются алгебраические условия устойчивости дифференциально-разностных и стохастических систем. Для анализа и численного построения решений линейных дифференциальных и разностных систем развивается общая методика, использующая понятие правых пар матричных полиномов и функций.

## § 1. Локализация спектра и оптимизация линейных управляемых систем

При конструировании реальных систем управления на первый план выдвигаются такие их свойства, как устойчивость и оптимальность. Многие динамические характеристики линейных управляемых систем (время переходного процесса, запас устойчивости, колебательность и т. п.) наиболее полным образом описываются с помощью условий, накладываемых на спектр замкнутой системы [28, 104]. Поэтому большой интерес представляет одновременное решение задач оптимизации и управления спектром (оптимального модального управления [2, 125]).

Достижение фиксированного набора собственных значений замкнутой системы в задаче оптимального модального управления ограничивает возможности удовлетворения других требований (минимизация функционала, физическая реализуемость закона управления и др.). Задавая область желаемого расположения спектра, можно преодолеть или ослабить эти ограничения и построить подходящее субоптимальное управление. Используя результаты главы 1, мы расширим класс допустимых областей локализации спектра замкнутой системы в задаче квадратичной оптимизации при неполной информации о состояниях обьекта.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается линейной стационарной системой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x$ — $n$-вектор фазовых координат объекта, $u$ — $m$-вектор управления, $y$ — $l$-вектор измеряемых выходов, $A, B$ и $C$ — матрицы подходящих размеров ($\operatorname{rang} B = m$, $\operatorname{rang} C = l$). Определим усредненный критерий качества системы [26]

$$J = \int\limits_{\Delta} \rho(x_0) \int\limits_0^{\infty} (x^* Q x + u^* R u) dt dx_0, \tag{2}$$

где $\rho(x_0) > 0$ — весовая функция, определенная на множестве допустимых начальных состояний $x_0 \in \Delta$, $Q = Q^* > 0$ и $R = R^* > 0$ — заданные матрицы.

Пусть желаемые динамические свойства системы характеризуются размещением ее спектра в области

$$\Lambda_f^+ = \{\lambda : f(\bar{\lambda}, \lambda) = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \overline{f_i(\lambda)} f_j(\lambda) > 0\}, \tag{3}$$

целиком расположенной в левой полуплоскости (условие асимптотической устойчивости системы). Ставится задача построения управления в виде линейной обратной связи по выходу

$$u = -Ky, \tag{4}$$

которое обеспечивает наименьшее значение функционала (2) и размещение спектра замкнутой системы (1) в области (3). Формально данную задачу можно представить в виде

$$J(K) = \mathrm{tr}[W(K)\Delta_0] \to \inf_{K\in\mathcal{K}}, \tag{5}$$

где $\Delta_0 = \int\limits_{\Delta} \rho(x_0)x_0x_0^* dx_0$, $\quad \mathcal{K} = \{\mathrm{K} \in \mathrm{C}^{\mathrm{m}\times\mathrm{l}} : \sigma(\mathrm{G}) \subset \Lambda_{\mathrm{f}}^{+}\}$, $\quad G = A - BKC$ — матрица замкнутой системы, $W = W(K) > 0$ — решение уравнения Ляпунова

$$-G^*W - WG = Q + C^*K^*RKC. \tag{6}$$

Построим решение уравнения (6) в виде

$$W = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(G)^* H f_j(G), \tag{7}$$

где $H$ — новая неизвестная матрица. Подставляя (7) в (6), имеем уравнение относительно $H$:

$$\sum_{i,j} \beta_{ij}\varphi_i(G)^* H \varphi_j(G) = Q + C^*K^*RKC, \tag{8}$$

где $\beta_{ij}(\varphi_i)$ — некоторые коэффициенты (функции), представимые через $\gamma_{ij}(f_i)$. Область $\Lambda_{\varphi}^{+}$, отвечающая функции

$$\varphi(\bar\lambda, \lambda) = \sum_{i,j} \beta_{ij}\overline{\varphi_i(\lambda)}\varphi_j(\lambda) = -(\bar\lambda + \lambda) f(\bar\lambda, \lambda),$$

состоит из двух непересекающихся подобластей — области (3) и правой полуплоскости. Если $H$ — решение уравнения (8), то неравенство

$$X = -G^*H - HG > 0 \tag{9}$$

обеспечивает расположение спектра замкнутой системы в области (3). При этом матрица (9) является решением уравнения

$$\sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(G)^* X f_j(G) = Q + C^* K^* RKC. \tag{10}$$

Таким образом, исходная задача сводится к задаче математического программирования. Требуется минимизировать функцию (5), вычисляемую с помощью соотношений (7) и (8), при ограничениях (9). Поиск субоптимального решения задачи можно осуществлять градиентными методами, используя выражение для градиента [106]

$$\frac{dJ}{dK} = 2(RKC - B^* W) F C^*,$$

где $W$ — решение уравнения (6), в частности, матрица (7), а $F$ — решение уравнения

$$-GF - FG^* = \Delta_0. \tag{11}$$

Из необходимого условия минимума функции (5) вытекает соотношение

$$K = R^{-1} B^* W F C^* (C F C^*)^{-1}. \tag{12}$$

Система матричных соотношений (7), (8), (9), (11) и (12) представляет необходимые условия минимума функционала и размещения спектра замкнутой системы в области (3). Если функция $f$ в (3) представима в виде

$$f(\bar\lambda, \lambda) = -(\bar\lambda + \lambda)\psi(\bar\lambda, \lambda), \quad \psi(\bar\lambda, \lambda) = \sum_{i,j} \delta_{ij} \overline{\psi_i(\lambda)} \psi_j(\lambda), \tag{13}$$

то для вычисления матрицы $W$ можно использовать выражение

$$W = \sum_{i,j} \delta_{ij} \psi_i(G)^* X \psi_j(G), \tag{14}$$

где X — решение уравнения (10). В этом случае уравнение (8) не используется.

Построим итерационный процесс по следующим правилам:

1) выбрать $K_0 \in \mathcal{K}$ и положить $s = 0$;

2) вычислить матрицу $G_s = A - BK_sC$;

3) определить матрицы $H_s$ и $F_s$ из уравнений

$$\sum_{i,j} \beta_{ij}\varphi_i(G_s)^* H_s \varphi_j(G_s) = Q + C^* K_s^* R K_s C,$$

$$G_s F_s + F_s G_s^* = -\Delta_0;$$

4) вычислить выражения

$$W_s = \sum_{i,j} \gamma_{ij} f_i(G_s)^* H_s f_j(G_s),$$

$$K_{s+1} = R^{-1} B^* W_s F_s C^* (C F_s C^*)^{-1};$$

5) увеличить s на единицу и возвратиться к п. 2.

Отличие данного итерационного процесса от алгоритма, приведенного в [105], состоит в способе вычисления матричной последовательности $W_s$, Поскольку на каждом шаге $W_s$ является решением уравнения Ляпунова (6), то выполнены неравенства [106]

$$J(K_0) \geq J(K_1) \geq \ldots \geq J(K_s) \geq \ldots \quad .$$

При ограничении (13) матрицы $W_s$ можно определить также с помощью формул (10) и (14). В случае алгебраических областей (3) использование матричных уравнений (8) или (10) вместо уравнения Ляпунова (6) практически не изменяет вычислительные трудности алгоритма. В то же время мы имеем возможность в процессе оптимизации эффективно осуществлять контроль принадлежности спектра системы области (3) с помощью неравенства (9).

В отдельных случаях при условиях управляемости и наблюдаемости системы (1) установлена сходимость матричной последовательности $K_s$ [105,106,127]. Начальное приближение $K_0 \in \mathcal{K}$ можно определить методами модального управления (см., например, [2, 26, 28, 125]).

Отметим, что в случае $C = I_n$ (измерениям доступны все компоненты вектора состояния объекта) последовательность $W_s$ сходится к положительно определенному решению уравнения Риккати

$$A^*W + WA - WBR^{-1}B^*W + Q = 0.$$

При этом оптимальному управлению (4) для системы (1) соответствует предельное значение коэффициентов

$$K = \lim_{s\to\infty} K_s = R^{-1}B^*W.$$

**Примеры.**

1. Рассмотрим систему (1) и функционал (2) с параметрами

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \Delta_0 = I_3,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad R = I_2.$$

В качестве области $\Lambda_f^+$ возьмем внешность круга радиуса $r$ с центром в точке $(-r, 0)$, расположенную в левой полуплоскости (см. §4 гл. 1). В данном случае функция $f \in \mathcal{F}_1$ удовлетворяет условиям (13).

Функционал (2) можно вычислить в виде

$$J(K) = \mathrm{tr}W, \quad W = G^TX + XG + r^{-1}G^TXG,$$

где $X$ — решение матричного уравнения

$$-G^{2T}X - XG^2 - 2G^TXG - r^{-1}G^{2T}XG - r^{-1}G^TXG^2 = Q + K^TK.$$

В качестве начального приближения было использовано решение задачи модального управления

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0,661 & -0,428 & 0,238 \\ -0,237 & 1,24 & 0,005 \end{bmatrix},$$

при котором спектр замкнутой системы $\sigma(G_0) = \{-1{,}5; -1{,}2 \pm 1{,}5i\}$ и значение функционала $J(K_0) = 3,69$. Минимизация проводилась градиентным методом при двух значениях радиуса $r$. При $r = r_0 = 0,4$ получены оптимальные значения параметров

$$K^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,594 & -0,323 & 0,305 \\ -0,323 & 1,21 & -0,213 \end{bmatrix},$$

$$J(K^{(0)}) = 3,663, \quad G^{(0)} = A - BK^{(0)},$$

$$\sigma(G^{(0)}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \quad \lambda_1 = -1,43; \quad \lambda_{2,3} = -1,19 \pm 1,39i.$$

Если $r = r_1 = 0,73$, то значения глобального минимума получить нельзя, поскольку $\lambda_1 \notin \Lambda_f^+$, В этом случае получены субоптимальные значения параметров

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,622 & -0,353 & 0,279 \\ -0,28 & 1,23 & -0,134 \end{bmatrix},$$

$$J(K^{(1)}) = 3,666, \quad G^{(1)} = A - BK^{(1)},$$

$$\sigma(G^{(1)}) = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}, \quad \mu_1 = -1,46; \quad \mu_{2,3} = -1,2 \pm 1,43i.$$

В точке $K^{(1)}$ нарушено условие $X > 0$, так как собственное значение $\mu_1$ расположено на границе области $\Lambda_f^+$.

2. Рассмотрим систему уравнений, описывающую возмущенное движение ракеты с учетом упругих колебаний корпуса как прямого гибкого неоднородного стержня [97]

$$\ddot{z} = [(F_1 - F_2)\varphi + F_3\psi + F_4\delta]/\mu + \sum_{j=1}^{\nu} d_j\eta_j,$$

$$\ddot{\varphi} + c_1\psi + c_2\delta + \sum_{j=1}^{\nu} e_j\eta_j = 0, \quad \psi = \varphi - \dot{z}/v_0,$$

$$\ddot{\eta}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = \xi_j\delta, \quad j = 1, \ldots, \nu,$$

где $z$ - перемещение центра массы ракеты в направлении, перпендикулярном расчетной траектории, $\varphi$ — угол тангажа, $\psi$ — угол атаки, $\delta$ — угол поворота двигателя, $\eta_j$ — $j$-я форма изгибных колебаний, $F_1$ — сила тяги, $F_2$ — осевая сила, действующая на стороны воздушного потока, $F_3$ — составляющая усилия воздушного потока, перпендикулярная продольной оси ракеты, $F_4$ — управляющее усилие, перпендикулярное продольной оси ракеты, $\mu$ — масса ракеты, $v_0$ — скорость ракеты по траектории, $d_j$, $c_j$, $e_j$, $\omega_j$, $\zeta_j$, $\xi_j$ — коэффициенты, определяемые через физические параметры ракеты. Учитывая три формы изгибных колебаний корпуса, приведем данную систему к стандартной форме (1), где $x = [\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \eta_1, \dot{\eta}_1, \eta_2, \dot{\eta}_2, \eta_3, \dot{\eta}_3]^T, \quad u = \delta,$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & a_5 & 0 \\ a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{16} & a_{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{19} & a_{20} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ b_5 \end{bmatrix}.$$

Значения коэффициентов $a_j$ и $b_j$ приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $j$ | $a_j$ | $j$ | $a_j$ | $j$ | $a_j$ | $j$ | $a_j$ | $j$ | $b_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | -0,0458 | 11 | $7 \times 10^{-4}$ | 16 | -169 | 1 | -1,138 |
| 2 | 0,2165 | 7 | 1 | 12 | 1 | 17 | -0,13 | 2 | -0,0348 |
| 3 | -0,0356 | 8 | -0,0133 | 13 | -29,81 | 18 | 1 | 3 | 29,56 |
| 4 | -0,0299 | 9 | $4 \times 10^{-4}$ | 14 | -0,0546 | 19 | -334,3 | 4 | 47,25 |
| 5 | -0,027 | 10 | $6 \times 10^{-4}$ | 15 | 1 | 20 | -0,1828 | 5 | 16,4 |

Матрица $A$ является неустойчивой. Ее спектр состоит из трех вещественных собственных значений, два из которых положительны, и трех комплексно сопряженных пар собственных значений, находящихся в левой полуплоскости и характеризующих соответствующие формы изгибных колебаний корпуса ракеты.

В качестве допустимой области для размещения спектра замкнутой системы выберем область, ограниченную циссоидой Диоклеса (см. §4 гл. 1). Данная область вырождается в левую полуплоскость при $a \to 0$. Это позволяет проводить оптимизацию с учетом размещения спектра, используя общую схему вычислений при различных значениях параметра $a$. Увеличение параметра $a$ приводит к увеличению запаса устойчивости и уменьшению допустимой частоты изгибных колебаний корпуса ракеты. При некоторых значениях $a > a_0$ комплексные собственные значения замкнутой системы могут не принадлежать области $\Lambda_f^+$.

Полагая $a = 0,1$ и используя значения матриц функционала из [97], проводились расчеты стабилизирующего управления по вышеизложенному алгоритму оптимизации при полной информации о векторе состояния $x (C = I)$. В результате получено оптимальное управление в виде линейной обратной связи по состоянию, которое с достаточной точностью совпадает с управлением, полученным в [97] методом решения уравнения Риккати. Сходимость алгоритма наблюдалась уже после пяти итераций, а неравенство $X > 0$, где $X$ — решение уравнения

$$a/2(G^{2T}X+XG^2)-aG^TXG-G^{2T}XG-G^TXG^2 = Q+C^TK^TRKC,$$

эквивалентное размещению спектра системы в области $\Lambda_f^+$, выполнялось на каждой итерации.

Основные трудности, возникающие при реализации найденного закона управления, связаны с определением компонент вектора состояния $x$. Датчики измеряют различные линейные комбинации этих компонент. Приведем результаты расчетов субоптимального управления в виде линейной обратной связи по выходу, предполагая наличие датчиков углового положения, угловых скоростей и акселерометров. Уравнение выходного сигнала $y = Cx$, где

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4,368 \\ 0,02462 & 0 & -0,73673 \\ 0 & -0,04819 & -1,1663 \times 10^{-5} \\ 0,06918 & 0 & 53,7935 \\ 0 & -0,082347 & 0,041957 \\ -0,124168 & 0 & 161,21166 \\ 0 & -0,08976 & 0,08851 \end{bmatrix}^T .$$

Матрицы функционала, выбранные в соответствии с требованием уравновешивания энергий изгибных колебаний и ограничения бокового сноса ракеты, имеют вид

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}, \quad R = 1, \quad \Delta_0 = I_9, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0,05 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0,5 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \mathrm{diag}\{10^{-4},\ 3\times10^{-3},\ 8\times10^{-5},\ 0,0137,\ 19\times10^{-5},\ 0,0621\}.$$

Таблица 2.

| | Субоптимальное управление | Субоптимальное управление с ограничением на спектр |
|---|---|---|
| $k_1$<br>$k_2$<br>$k_3$ | 1,0401<br>1,5558<br>$-0,0177$ | 1,0450<br>1,6164<br>$-0,0179$ |
| $\sigma(G)$ | $-0,0528$<br>$-1,8661 \pm 18,1633i$<br>$-2,9326 \pm 14,1661i$<br>$-0,8486 \pm 5,2828i$<br>$-0,7098 \pm 0,4029i$ | $-0,0530$<br>$-1,8617 \pm 18,0673i$<br>$-3,1098 \pm 14,1555i$<br>$-0,8828 \pm 5,2737i$<br>$-0,7441 \pm 0,3444i$ |
| $J(K)$ | 15,7482 | 15,7510 |

Для рассматриваемой системы получено субоптимальное управление $u = -K_c y$ при $a = 0$, исходя из различных начальных значений для вектора коэффициентов усиления $K_0$. При этом наблюдалась достаточно хорошая сходимость предлагаемого итерационного алгоритма. Результаты расчетов оказались такими же и при $a = a_1 = 0,8$. Это означает, что спектр замкнутой системы расположен в заданной области. Если $a = a_2 = 0,9$, то после четырех итераций нарушалось неравенство $X > 0$, т.е. условие принадлежности спектра области $\Lambda_f^+$,

В таблице 2 приведены полученные значения коэффициентов усиления $[k_1, k_2, k_3] = -K$, спектра замкнутой системы $\sigma(G)$, и функционала $J(K)$, отвечающие субоптимальному управлению при указанных значениях параметра $a$. При $a = a_2$ (субоптимальное управление с ограничением на спектр) частоты упругих

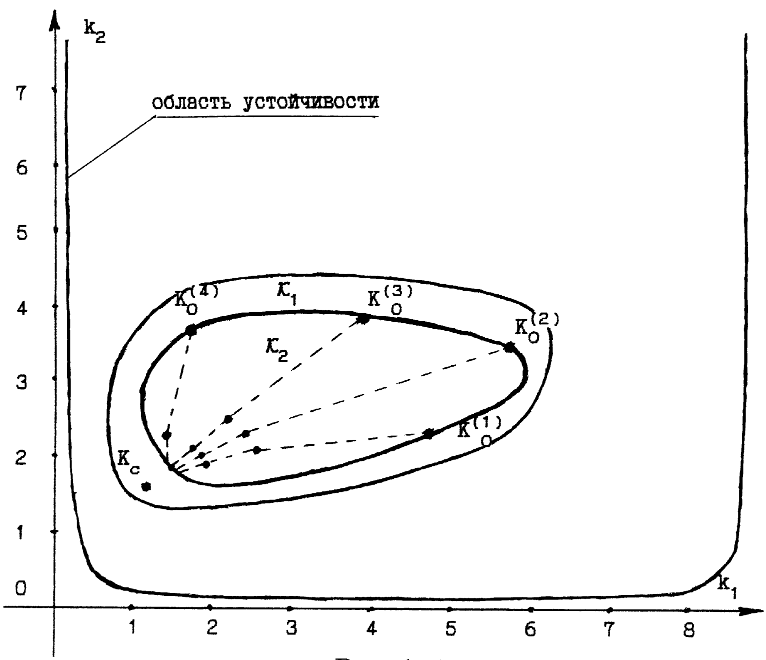



Рис. 1.

колебаний корпуса ракеты меньшие, а степень устойчивости системы большая, чем в случае $a = a_1$.

В плоскости первых двух коэффициентов усиления $k_1$ и $k_2$ (при фиксированном значении $k_3 = -0,0177$) построены области $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, которые соответствуют расположению спектра замкнутой системы в области $\Lambda_f^+$ при $a = 0,8$ и $a = 0,9$ (рис. 1). В этих областях изображено движение текущих значений коэффициентов усиления, исходя из различных начальных приближений $K_0^{(t)}$, $t = 1, \ldots, 4$.

Таким образом, предлагаемый алгоритм, в отличие от известных, позволяет в процессе оптимизации параметров управления осуществлять эффективный контроль динамических характеристик системы, которые выражаются в виде заданной области расположения спектра.

## § 2. Устойчивость вырожденных непрерывных и дискретных систем

Объектами исследования многих прикладных задач являются системы дифференциальных (разностных) уравнений, не разрешенных относительно производных (итераций). Построение решений таких систем и анализ их устойчивости можно проводить на основе теории канонических форм матричных пучков, а также путем использования различных обобщенных обратных матриц [6,11,93,112,132].

В настоящем параграфе предлагаются результаты исследований, связанных с развитием и применением второго метода Ляпунова для непрерывных и дискретных систем вида

$$B\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0; \tag{15}$$

$$Bx_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{16}$$

где $A$ и $B$ — матрицы регулярного пучка $L(\lambda) = A - \lambda B$ размеров $n \times n$, спектр $\sigma(L)$ которого состоит из $l$ собственных значений с учетом кратностей, $x_0$ — вектор начальных состояний. Условия устойчивости дифференциальной (разностной) системы (15)((16)) определяются расположением спектра $\sigma(L)$ относительно мнимой оси (единичной окружности). При этом число

$$\varepsilon = \min_{\lambda\in\sigma(L)}(-Re\lambda) \quad (\varepsilon = \min_{\lambda\in\sigma(L)}(1-|\lambda|))$$

характеризует спектральный запас устойчивости системы (15) ((16)).

Если $B$ — невырожденная матрица, то $l = n$. В этом случае системы (15) и (16) приводятся к форме Коши путем обращения матрицы $B$. Если матрица $B$ вырождена, то выполнено равенство

$$l = n - \sum_{i=1}^{\tau}\nu_i = \mathrm{rang}B - \sum_{i=1}^{\tau}\nu_i + \tau,$$

где $\nu_1,\dots,\nu_\tau$ — степени бесконечных элементарных делителей пучка матриц $L(\lambda)$. Данное равенство вытекает из канонической формы регулярного пучка матриц. Обозначим через $\nu$ максимальное из чисел $\nu_1,\dots,\nu_\tau$. Если $B$ — невырожденная матрица, то полагаем $\nu = 0$. Число $l$ определяет размерность некоторого подпространства $\mathcal{L}$, которому принадлежат начальные состояния и траектории систем (15) и (16). Система (15) с учетом формулы (8) гл. 2 сводится к соотношениям

$$\dot y_1(t) = Jy_1(t), \quad N\dot y_2(t) = y_2(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = Q^{-1}x(t)$$

Поскольку $N^\nu = 0$, то $y_2(t) \equiv 0$ и $x(t) \in \mathcal{L}$ при $t \geq 0$, где $\mathcal{L}$ -линейная оболочка первых $l$ столбцов матрицы $Q$. При этом нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво в том и только в том случае, когда спектр матрицы $J$, совпадающий с $\sigma(L)$, расположен слева от мнимой оси.

Изучим условия устойчивости и спектральные свойства систем (15) и (16) с помощью матричных соотношений

$$\gamma_{00}BXB^* + \gamma_{10}AXB^* + \gamma_{01}BXA^* + \gamma_{11}AXA^* = Y \geq 0, \qquad (17)$$

$$\operatorname{rang}[L(\lambda), Y] \equiv n, \quad \lambda \in C^1, \tag{18}$$

$$\operatorname{rang}(BXB^*) = l. \tag{19}$$

Обозначим через $l_+$, $l_-$ и $l_0$ количества точек спектра $\sigma(L)$, принадлежащих соответствующим множествам

$$\Lambda_+ = \{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) > 0\},$$

$$\Lambda_- = \{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) < 0\},$$

$$\Lambda_0 = \{\lambda : f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0\},$$

где $f(\lambda, \bar{\lambda}) = \gamma_{00} + \gamma_{10}\lambda + \gamma_{01}\bar{\lambda} + \gamma_{11}\lambda\bar{\lambda}$ — заданная эрмитова функция. В качестве $\Lambda_0$ служит некоторая прямая или окружность с центром в точке $\gamma = -\gamma_{01}/\gamma_{11}$, отделяющая области $\Lambda_\pm \subset C^1$.

**Лемма 1.** *Если эрмитовы матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют уравнению (17) при условии (18), то выполнены соотношения*

$$l_+ \le i_+(BXB^*), \quad l_- \le i_-(BXB^*), \quad l_0 = 0. \tag{20}$$

*При этом все равенства в (20) достигаются в том и только в том случае, когда выполнено условие (19). При условии $l_0 = 0$ существуют эрмитовы матрицы $X$ и $Y$, удовлетворяющие соотношениям (17)–(19).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (17)

$$PAQ = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad PBQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

$$X = Q \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^* & X_3 \end{bmatrix} Q^*, \quad PYP^* = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2^* & Y_3 \end{bmatrix},$$

где $P$ и $Q$ — невырожденные матрицы, приходим к уравнениям

$$\gamma_{00}X_1 + \gamma_{10}JX_1 + \gamma_{01}X_1J^* + \gamma_{11}JX_1J^* = Y_1, \tag{21}$$

$$\gamma_{00}X_2N^* + \gamma_{10}JX_2N^* + \gamma_{01}X_2 + \gamma_{11}JX_2 = Y_2, \tag{22}$$

$$\gamma_{00}NX_3N^* + \gamma_{10}X_3N^* + \gamma_{01}NX_3 + \gamma_{11}X_3 = Y_3. \tag{23}$$

При этом с учетом (18) имеем

$$BXB^* = P^{-1} \left[ \begin{array}{cc} X_1 & X_2N^* \\ NX_2^* & NX_3N^* \end{array} \right] P^{-1*}, \tag{24}$$

$$\operatorname{rang}[J - \lambda I, Y_1] \equiv l, \quad \lambda \in C^1. \tag{25}$$

Эквивалентность тождеств (18) и (25) следует из неравенства $Y \geq 0$. Тождество (25) является условием управляемости пары $(J, Y_1)$ в форме Симона-Миттера. Можно показать, что функция f удовлетворяет условиям теорем об инерции для уравнений типа (21) [64,110]. Следовательно, выполнены соотношения (20), причем,

$$l_+ = i_+(X_1) \leq i_+(BXB^*), \quad l_- = i_-(X_1) \leq i_-(BXB^*),$$

где $X_1$ — невырожденная матрица-решение порядка $l$ уравнения (21). При этом равенства достигаются в том и только в том случае, когда выполнено условие (19).

Лемма доказана.

Отметим, что если правая часть уравнения (17) имеет вид

$$Y = BHB^*, \quad H > 0, \tag{26}$$

то выполнено тождество (18). При этом в (22)–(24) выполняются равенства $X_2N^* = 0$ и $NX_3N^* = 0$, а также условие (19) в каждом из случаев: 1)$\nu \leq 1$; 2)$\gamma_{11} = 0$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\nu \leq 2$, $\gamma \notin \sigma(L)$. Если

$$f(\lambda, \bar{\mu}) \neq 0, \quad (\lambda, \mu) \in \sigma(L) \times \sigma(L), \tag{27}$$

то уравнение (17) разрешимо для любой матрицы (26) в каждом из случаев: 1) $\nu \leq 1$; 2)$\gamma_{11} = 0, \nu \leq 2$; 3) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \notin \sigma(L)$; 4) $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma \in \sigma(L)$, $\zeta(\gamma) = \xi(\gamma)$. Здесь $\zeta(\gamma)(\xi(\gamma))$ — алгебраическая (геометрическая) кратность точки спектра $\gamma \in \sigma(L)$. Если $\gamma_{11} = 0$, то для любой матрицы (26) уравнение (17) имеет решение в том и только в том случае, когда выполнены условия (27) и $\nu \leq 2$.

**Лемма 2.** *Пусть уравнению (17) и условию (18) удовлетворяют эрмитовы матрицы вида*

$$X = E\hat{X}E^*, \quad Y = BE\hat{Y}E^*B^*, \tag{28}$$

*где* $E \neq 0$ *— любая матрица, определяемая соотношением*

$$\operatorname{rang}[AE, BE] = \operatorname{rang}(BE). \tag{29}$$

*Тогда выполнены равенства*

$$l_+ = i_+(X), \quad l_- = i_-(X), \quad l_0 = 0. \tag{30}$$

*При условии* $l_0 = 0$ *существуют матрицы* $X$, $Y$ *и* $E$, *для которых выполняются соотношения (17)–(19), (28)–(30).*

Доказательство. Условие (29) означает, что для некоторой матрицы $U$ выполняется равенство $AE = BEU$. Поэтому матрицы $E$, $X$ и $Y$ в (28)–(30) имеют следующую структуру:

$$E = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = Q\begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q^*, \quad Y = P^{-1}\begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1*}, \tag{31}$$

где $X_1 = R\hat{X}R^*$, $Y_1 = R\hat{Y}R^*$, $R$ — матрица размеров $l \times k$, удовлетворяющая равенству $JR = RU$. Подставляя (31) в (17) и (18), приходим к соотношениям (21) и (25). Из (25), в частности, следует, что $\operatorname{rang}R = \operatorname{rang}E = l \leq k$. Равенства (30) вытекают из соотношений (21), (25), (31) и известных теорем инерции. При условии $l_0 = 0$ можно подобрать матрицы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ так, чтобы выполнялись соотношения (17)–(19), (28)–(30).

Лемма доказана.

Если в (29) матрица $E$ имеет полный ранг по столбцам, то она является блочным собственным вектором пучка $L(\lambda)$, отвечающим блочному собственному значению $U$. В этом случае $\sigma(U) \subset \sigma(F)$. Обратное включение $\sigma(F) \subset \sigma(U)$ выполняется при условии

$$\operatorname{rang}[L(\lambda), BE] \equiv n, \quad \lambda \in C^1. \tag{32}$$

Если матрица $Y$ имеет структуру (28), то условие (32) является необходимым для выполнения тождества (18). При этом в случае $\hat{Y} > 0$ условия (18) и (32) эквивалентны.

Условия существования матриц $X$ и $Y$, удовлетворяющих уравнению (17) и имеющих заданную структуру (28), зависят лишь от спектра $\sigma(L)$ и не связаны со свойствами бесконечных элементарных делителей пучка $L(\lambda)$. Если $\nu \leq 3$, то при определении матрицы $E$ в лемме 2 вместо условия (29) может быть использовано линейное уравнение $AE = BS$ относительно $E$ и $S$. При этом лемма 2 остается в силе в каждом из случаев:

1) $\nu \leq 2$;
2) $\nu = 3, \gamma_{11} = 0$;
3) $\nu = 3, \gamma_{11} \neq 0, \gamma \notin \sigma(L)$.

Из леммы 2 вытекают следующие утверждения.

**Лемма 3.** *Если матрицы (28) удовлетворяют уравнению*

$$-AXB^* - BXA^* = Y \geq 0 \tag{33}$$

*при условиях (18) и (29), то на мнимой оси нет точек спектра $\sigma(L)$ и из них ровно $i_+(X)$ и $i_-(X)$ собственных значений находятся соответственно в левой и правой полуплоскости.*

**Лемма 4.** *Если матрицы (28) удовлетворяют уравнению*

$$BXB^* - AXA^* = Y \geq 0 \tag{34}$$

*при условиях (18) и (29), то на единичной окружности нет точек спектра $\sigma(L)$ и из них ровно $i_+(X)$ и $i_-(X)$ собственных значений находятся соответственно внутри и вне единичного круга.*

**Теорема 1.** *Дифференциальная система (15) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существуют зрмитовы матрицы $X$ и $Y$, удовлетворяющие уравнению (33) и соотношениям*

$$BXB^* \geq 0, \quad \mathrm{rang}[L(\lambda), Y] \equiv n, \quad \mathrm{Re}\lambda \geq 0. \tag{35}$$

*Если дифференциальная система (15) асимптотически устойчива, то для любой неотрицательно определенной матрицы вида* $Y = BE\hat{Y}E^*B^* \geq 0$ *уравнение (33) при условии (29) имеет решение* $X = E\hat{X}E^* \geq 0$.

**Теорема 2.** *Разностная система (16) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда существуют эрмитовы матрицы* $X$ *и* $Y$, *удовлетворяющие уравнению (34) и соотношениям*

$$BXB^* \geq 0, \quad \operatorname{rang}[L(\lambda), Y] \equiv n, \quad |\lambda| \geq 1. \tag{36}$$

*Если разностная система (16) асимптотически устойчива, то для любой неотрицательно определенной матрицы вида* $Y = BE\hat{Y}E^*B^* \geq 0$ *уравнение (34) при условии (29) имеет решение* $X = E\hat{X}E^* \geq 0$.

При построении функций Ляпунова для систем (15) и (16) можно использовать решения матричных уравнений

$$-2\alpha B^*XB - A^*XB - B^*XA = B^*YB, \tag{37}$$

$$\beta^2 B^*XB - A^*XA = B^*YB, \tag{38}$$

где $Y = Y^* > 0$, $\alpha \geq 0$ и $0 < \beta \leq 1$ — вещественные числа. Выражение для квадратичной функции Ляпунова определяем в виде

$$v(x) = x^*B^*XBx. \tag{39}$$

**Теорема 3.** *Пусть* $X$ *— решение уравнения (37) и* $B^*XB \geq 0$. *Тогда нулевое решение системы (15) асимптотически устойчиво с запасом* $\varepsilon \geq \alpha$, *а функция (39) и ее производная на нетривиальном решении* $x = x(t)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$v(x) > 0, \quad \frac{dv(x)}{dt} = -x^*(B^*YB + 2\alpha B^*XB)x < 0.$$

**Теорема 4.** *Пусть $X$ — решение уравнения (38) и $B^*XB \geq 0$. Тогда нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво с запасом $\varepsilon \geq 1-\beta$, а функция (39) и ее первая разность на нетривиальном решении $x_k (k = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяют соотношениям*

$$v(x_k) > 0, \quad v(x_{k+1}) - v(x_k) = -x_k^* B^*(Y + (1-\beta^2)X)Bx_k < 0.$$

Функции Ляпунова для устойчивых систем (15) и (16) всегда можно определить в виде (39), полагая, например, в (37) и (38)

$$X = Z^*\hat{X}Z \geq 0, \quad Y = Z^*\hat{Y}Z \geq 0, \quad \hat{Y} > 0,$$

где $Z$ — решение максимального ранга $l$ матричной системы (30) гл. 2. Условия устойчивости систем (15) и (16) описываются в терминах матриц [64]

$$X = E^*\hat{X}E \geq 0, \quad Y = E^*\hat{Y}E \geq 0, \quad \hat{Y} > 0,$$

где $E = (BZ)^s$, $s \geq \nu$, удовлетворяющих уравнениям (37) и (38). При этом в качестве $Z$ можно выбрать решение линейного уравнения $AZB = BZA$, в частности, $Z = (A - zB)^{-1}, z \notin \sigma(L)$.

## § 3. Дифференциальные и разностные системы второго порядка

В задачах анализа и синтеза управляемых физических объектов (транспортных, электромеханических, космических и др.) значительное внимание уделяется методам исследования математических моделей, описываемых системами линейных дифференциальных и разностных уравнений второго порядка

$$Ax(t) + B\dot{x}(t) + C\ddot{x}(t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{40}$$

$$Ax_t + Bx_{t+1} + Cx_{t+2} = g_t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{41}$$

где $x \in R^n$ — вектор обобщенных координат объекта, $A$, $B$ и $C$ — матрицы динамических коэффициентов размера $n \times n$, $g$ — вектор-функция, зависящая от параметров управления, внешних возмущений и т. п. [1,43,89]. Параметры управления обычно определяются в виде динамической обратной связи по состоянию или линейной обратной связи по измеряемому выходу системы. В результате замкнутая система (40) ((41)) является однородной и ее устойчивость описывается расположением спектра квадратичного пучка матриц относительно мнимой оси (единичной окружности).

В тех случаях, когда исходная модель является неавтономной, применяется метод замороженных коэффициентов, согласно которому на заданном интервале движения выбираются наиболее характерные моменты времени и рассматриваются соответствующие системы уравнений с постоянными матричными коэффициентами $A$, $B$ и $C$. О динамике изучаемого объекта, в частности, о его устойчивости, судят по решениям стационарных систем типа (40) или (41).

Важную роль в задаче стабилизации движения выполняют коэффициентные критерии устойчивости, которые формулируются в терминах матриц $A$, $B$ и $C$ в виде систем алгебраических уравнений и неравенств. При построении таких критериев используются различные ограничения на матричные коэффициенты, включая такие требования, как симметричность, невырожденность, положительная определенность и т. п.(см., например, [1, 43, 121]). Так, для колебательных систем с трением свойственны ограничения

$$A = A^*, \quad B = H + K, \quad H = H^* \geq 0, \quad K = -K^*, \quad C = C^*, \tag{42}$$

где $A$ — матрица потенциальных сил, $C$ — матрица инерции, а матрицы $H$ и $K$ характеризуют соответственно демпфирующие и гироскопические силы [25,130].

Нижеизложенный метод анализа устойчивости и спектра систем (40) и (41) сводится к построению и решению матричных алгебраических уравнений. При его обосновании (см. главу 2) в некоторых случаях мы используем единственное ограничение — условие регулярности квадратичного пучка матриц

$$F(\lambda) = A + \lambda B + \lambda^2 C.$$

Матричное уравнение левой блочной спектральной задачи для квадратичного пучка $F(\lambda)$ имеет вид

$$TA + UTB + U^2TC = 0. \tag{43}$$

Пусть известно какое-либо решение $(U, T)$ данного уравнения, для которого $\mathrm{rang} E = r \neq 0$, где $E = [T, UT]$, Согласно лемме 8 гл. 2, существует подмножество спектра $\sigma_0(F)$, состоящее из $r$ собственных значений матрицы $U$. В частности, при ограничении

$$\mathrm{rang}\left[\frac{F(\lambda)}{TB + UTC + \lambda TC}\right] \equiv n, \quad \lambda \in C^1, \tag{44}$$

пара $(U, T)$ имеет максимальный индекс управляемости $r$ и $\sigma_0(F) = \sigma(F) \subset \sigma(U)$.

Сформулируем критерии устойчивости систем (40) и (41), вытекающие из теоремы 5 гл. 2 для соответствующих матричных уравнений

$$-2\alpha X - UX - XU^* = Y, \tag{45}$$

$$\beta^2 X - UXU^* = Y, \tag{46}$$

где $\alpha \geq 0$, $0 < \beta \leq 1$ — вещественные числа, характеризующие спектральный запас устойчивости (см. §2).

**Теорема 5.** *Пусть $(U, T)$ — пара матриц, удовлетворяющих соотношениям (43) и (44). Тогда нулевое решение однородной системы (40) ((41)) асимптотически устойчиво с запасом $\varepsilon \geq \alpha$ ($\varepsilon \geq 1 - \beta$) в том и только в том случае, когда для любой заданной матрицы вида $Y = E\hat{Y}E^*$, где $\hat{Y} > 0$, уравнение (45) ((46)) имеет решение $X = E\hat{X}E^* \geq 0$.*

При построении матриц $U$ и $T$, удовлетворяющих теореме 5, могут быть использованы решения алгебраической системы

$$\begin{gathered} AT_1B - BT_1A = CT_2A - AT_2C, \\ AT_1C - CT_1A = CT_2B - BT_2C, \\ T_1 = T_1BT_1 + T_1CT_2 + T_2CT_1, \\ T_2 = T_2CT_2 - T_1AT_1. \end{gathered} \tag{47}$$

В частности, если $T_1$ и $T_2$ — решение данной системы, то матрицы

$$U = \left[\begin{array}{c|c} -AT_1 & -AT_2 \\ \hline CT_2 & -AT_1 - BT_2 \end{array}\right], \quad T = \left[\begin{array}{c} BT_1 + CT_2 \\ \hline CT_1 \end{array}\right] \tag{48}$$

образуют левую пару квадратичного пучка $F(\lambda)$, т. е. удовлетворяют равенству (43). При этом согласно лемме 7 гл. 2 матрица

$$E = [T, UT] = \left[\begin{array}{c|c} BT_1 + CT_2 & -AT_1 \\ \hline CT_1 & CT_2 \end{array}\right] \tag{49}$$

является проектором ранга $r$ матрицы $U$ и, по крайней мере, $r$ собственых значений матрицы $U$ с учетом кратностей принадлежат спектру $\sigma(F)$ (если $\lambda \in \sigma(U)$, то либо $\lambda \in \sigma(F)$, либо $\lambda = 0$).

Система (47) состоит из двух линейных однородных матричных уравнений и двух матричных уравнений с квадратичной нелинейностью. Ее решения могут быть найдены методами вычислительной математики. Кроме того, мы можем использовать частные решения системы (47) в интегральной форме (см. лемму 6 гл. 2)

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} F(\lambda)^{-1} d\lambda, \quad T_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\omega} \lambda F(\lambda)^{-1} d\lambda, \tag{50}$$

где $\omega$ — замкнутый контур, отделяющий некоторую часть спектра $\sigma_0(F) \subseteq \sigma(U)$. В частном случае $\sigma_0(F) = \sigma(F)$ условия устойчивости системы (40)((41)) полностью определяются расположением ненулевых собственных значений матрицы $U$ относительно мнимой оси (единичной окружности).

Отметим, что при $T_1 = 0$ мы имеем сужение системы (47) вида

$$CT_2A = AT_2C, \quad CT_2B = BT_2C, \quad T_2 = T_2CT_2. \tag{51}$$

Если $C$ — невырожденная матрица, то система (51) имеет решение $T_2 = C^{-1}$. В этом случае $E = I$ и для механической системы (40) при условиях (42) выполняется соотношение $-UX - XU^* = Y \geq 0$, где

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -AC^{-1} \\ I & -BC^{-1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2H \end{bmatrix}.$$

Если к тому же выполнено условие управляемости пары матриц $(U, Y)$, эквивалентное тождеству $\mathrm{rang}[A + \lambda K + \lambda^2 C, \lambda H] \equiv n$, то, согласно теореме инерции [130], на мнимой оси нет собственных значений квадратичного пучка $F(\lambda)$, а количество собственных значений с отрицательной (положительной) вещественной частью равно $i_+(A)+i_+(C)(i_-(A)+i_-(C))$. При этом неравенства $A > 0$ и $C > 0$ соответствуют случаю асимптотической устойчивости системы (40), (42).

Приведем еще одно свойство системы (47), которое также может быть использовано при изучении спектра квадратичного пучка матриц. Определим скелетное разложение ранга $r$ блочной матрицы

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline CT_2 & -AT_1 - BT_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [R_1^*, R_2^*].$$

Если $T_1$ и $T_2$ — решение системы (47), то $r$ собственных значений матрицы $\sum = R_2^* L_2 - R_1^* A L_1$ принадлежат спектру $\sigma(F)$. При этом порядок матрицы $\sum$, равный $r$, может быть значительно ниже порядка матрицы $U$, что весьма важно в задаче на собственные значения. В частности, при $r = 1$ число $\sum \in \sigma(F)$ является собственным значением квадратичного пучка $F(\lambda)$.

Таким образом, задачи анализа устойчивости и стабилизации движения для динамических систем второго порядка (40) и (41) приводятся к решению матричного алгебраического уравнения (43), в частности, системы (47) и соответствующих аналогов уравнения Ляпунова (45) и (46) для квадратичного пучка матриц.

При построении достаточных условий устойчивости и локализации собственных значений квадратичного пучка матриц $F(\lambda)$ можно использовать матричное уравнение

$$\gamma_{11}AXA^* + \gamma_{12}AXB^* + \gamma_{21}BXA^* + \gamma_{13}AXC^* + \gamma_{31}CXA^* + \\ + \gamma_{22}BXB^* + \gamma_{23}BXC^* + \gamma_{32}CXB^* + \gamma_{33}CXC^* = Y, \tag{52}$$

где $X$ и $Y$ — эрмитовы $n\times n$-матрицы, подлежащие определению. Предположим, что наряду с (52) выполнены соотношения

$$Y \geq [B, C]Q[B, C]^*, \quad \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}^* \geq 0, \tag{53}$$

где $Q$ — некоторая положительно определенная матрица. Тогда спектр $\sigma(F)$ расположен в области (см. §7 гл. 2)

$$\begin{gathered} \Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2, \\ \Lambda_1 = \{\lambda : f_1(\lambda, \bar{\lambda}) > 0\}, \\ \Lambda_2 = \{\lambda : f_2(\lambda, \bar{\lambda}) < 0\}, \end{gathered} \tag{54}$$

где $f_1(\lambda, \bar{\lambda}) = \mathrm{tr}\Delta_\lambda, \quad \Delta_\lambda = V_\lambda \Gamma V_\lambda^*, \quad f_2(\lambda, \bar{\lambda}) = \det \Delta_\lambda = z_\lambda^* \hat{\Gamma}^T z_\lambda^*,$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}, \quad V_\lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{bmatrix},$$

$$z_\lambda = \begin{bmatrix} 1, & \lambda, & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{32}\gamma_{23} & \gamma_{13}\gamma_{32} - \gamma_{12}\gamma_{33} & \gamma_{12}\gamma_{23} - \gamma_{22}\gamma_{13} \\ \gamma_{23}\gamma_{31} - \gamma_{21}\gamma_{33} & \gamma_{11}\gamma_{33} - \gamma_{13}\gamma_{31} & \gamma_{13}\gamma_{21} - \gamma_{11}\gamma_{23} \\ \gamma_{21}\gamma_{32} - \gamma_{22}\gamma_{31} & \gamma_{21}\gamma_{12} - \gamma_{11}\gamma_{32} & \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}\gamma_{21} \end{bmatrix}.$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ — присоединенная матрица для $\Gamma$, составленная из алгебраических дополнений ее элементов. Геометрические свойства области $\Lambda$ вида (54) полностью определяются выбором элементов матрицы $\Gamma$. Приведем примеры областей (54), для которых $\Lambda_1 = \emptyset$ и $\Lambda = \Lambda_2$,

1. $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & \delta & \theta \\ \delta & -\delta^2 & \delta \\ \theta & \delta & -1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \delta < 1, \quad -1 < \theta \le 1 - 2\delta^2,$

$$\Lambda = \{\lambda : \eta^2(c - \xi) > \xi(1 + d\xi + \xi^2)\},$$

$$\xi = \mathrm{Re}\lambda, \quad \eta = Im\lambda, \quad c = \frac{2\delta^2 + \theta - 1}{2\delta}, \quad d = \frac{2\delta^2 - \theta + 1}{2\delta}.$$

Область $\Lambda$ расположена слева от мнимой оси, а при $\theta = 1 - 2\delta^2$ вырождается в открытую левую полуплоскость. Соотношения (52) и (53) являются достаточными условиями устойчивости дифференциальной системы (40).

2. $\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\rho \end{bmatrix}, \quad 0 < \rho \le 1/4,$

$$\Lambda = \{\lambda : |\lambda|^2 < \rho + \sqrt{\rho^2 + 2\rho}\}.$$

Область $\Lambda$ расположена внутри единичного круга. Соотношения (52) и (53) являются достаточными условиями устойчивости разностной системы (41).

3. $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & -4\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \ge 0, \quad \Lambda = \{\lambda : |\mathrm{Re}\lambda| > \sqrt{\alpha}\}.$

При условиях (52), (53) и $\alpha = 0$ квадратичный пучок $F(\lambda)$ не имеет чисто мнимых собственных значений.

4. $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\beta \end{bmatrix}, \quad \beta \ge 0, \quad \Lambda = \{\lambda : |\mathrm{Im}\lambda| > \sqrt{\beta}\}.$

При условиях (52), (53) и $\beta = 0$ все собственные значения квадратичного пучка $F(\lambda)$ комплексные.

Отметим, что если $Y > 0$, то всегда можно подобрать матрицу $Q > 0$ так, чтобы выполнялось ограничение на матрицу $Y$ вида (53).

## § 4. Условия устойчивости некоторых классов дифференциально-разностных и стохастических систем

Данный параграф посвящен построению и изучению матричных уравнений, выполняющих роль обобщенного уравнения Ляпунова в задачах устойчивости для некоторых классов дифференциально-разностных и стохастических систем.

1. Рассмотрим систему дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$A_0 x(t) + A_1 \frac{dx(t)}{dt} + \sum_{i=1}^{s-1} A_{i+1} x(t - \tau_i) = 0, \tag{55}$$

где $A_0, \dots, A_s$ — постоянные $n \times n$-матрицы, $\tau_i \geq 0$ — параметры постоянных запаздываний, $x(\theta) = x_0(\theta), t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0, 0 \leq t_0 \leq t$, $\tau = \max\limits_i \tau_i$, $i = \overline{1, s-1}$. При отсутствии запаздываний ($\tau = 0$) система (55) приводится к виду

$$Ax(t) + A_1 \frac{dx(t)}{dt} = 0, \quad A = A_0 + A_2 + \dots + A_s. \tag{56}$$

Нулевое решение системы (55) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что $||x(t)|| < \varepsilon$ при $t > t_0$, как только $||x(\theta)|| < \delta$ при $t_0 - \tau \leq$ $\leq \theta \leq t_0$. Нулевое решение системы (55) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и $||x(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$. Задача об абсолютной устойчивости для системы (55) состоит в построении (алгебраических) условий, накладываемых на матричные коэффициенты, при которых нулевое решение асимптотически устойчиво при любых постоянных значениях запаздываний $\tau_i \geq 0, i = \overline{1, s-1}$.

**Лемма 5 [92].** *Для асимптотической устойчивости системы (55) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матричного квазиполинома*

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + e^{-\lambda\tau_1} A_2 + \ldots + e^{-\lambda\tau_{s-1}} A_s$$

*имели отрицательные вещественные части.*

Из теоремы 9 гл.2 и леммы 5 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Если эрмитовы матрицы $X, Y, Q$ и $G$ удовлетворяют соотношениям*

$$A_0 X A_1^* + A_1 X A_0^* + C(G \otimes X)C^* = Y, \tag{57}$$

$$BXB^* \geq 0, \quad Y \geq CQC^*, \tag{58}$$

$$\gamma \leq g_\lambda^* H^{-1} g_\lambda, \quad \forall\lambda : \mathrm{Re}\lambda \geq 0, \tag{59}$$

*где*

$$B^* = [A_1^*, \ldots, A_s^*], \quad C = [A_1, \ldots, A_s], \quad G = \begin{bmatrix} \gamma & h^* \\ h & H \end{bmatrix},$$

$$Q > 0, \quad H < 0, \quad g_\lambda = h - [e^{-\tau_1\lambda}, \ldots, e^{-\tau_{s-1}\lambda}]^T,$$

*то нулевое решение системы (55) асимптотически устойчиво.*

В случае диагональной матрицы $G$ имеем достаточные условия абсолютной устойчивости системы (55).

**Теорема 7.** *Если эрмитовы матрицы $X$ и $Y$ удовлетворяют соотношениям (58) и уравнению*

$$A_0 X A_1^* + A_1 X A_0^* + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i A_i X A_i^* = Y, \tag{60}$$

*где $\gamma_1 = 1/\gamma_2 + \ldots + 1/\gamma_s$, $\gamma_i < 0$, то система (55) абсолютно устойчива.*

**Примечание.** Утверждения, аналогичные теоремам 6 и 7, могут быть сформулированы в терминах решений сопряженных матричных уравнений

$$A_0^* Z A_1 + A_1^* Z A_0 + B^*(G^T \otimes Z)B = S, \tag{61}$$

$$A_0^* Z A_1 + A_1^* Z A_0 + \sum_{i=1}^{s} \gamma_i A_i^* Z A_i = S. \tag{62}$$

При этом вместо (58) следует использовать неравенства $C^*ZC \geq 0$ и $S \geq B^*QB$. Операторы левых частей уравнений (61) и (62) являются сопряженными к соответствующим операторам уравнений (57) и (60) (см. дополнение 1). Если уравнению (60) ((62)) удовлетворяют положительно определенные матрицы $X$ и $Y$ ($Z$ и $S$), то должно выполняться неравенство $-2\varepsilon < \gamma_1 < 0$, где $\varepsilon$ — спектральный запас устойчивости пучка матриц $A_0 + \lambda A_1$.

Покажем, что решения матричных уравнений (60) и (62) могут быть использованы при построении квадратичных функционалов вида

$$v = x(t)^* X_0 x(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \int_{t-\tau_i}^{t} x(\tau)^* X_i x(\tau) d\tau, \tag{63}$$

удовлетворяющих теореме Ляпунова-Красовского об асимптотической устойчивости системы (55) [36]. В случае $A_1 = I$ известны некоторые способы выбора весовых матриц $X_i \geq 0$, обеспечивающие условия абсолютной устойчивости системы (55) [19, 31, 92, 102, 126]. Следующее утверждение дает общие оценки для этих матриц и производной функционала (63) на решениях системы (55).

**Лемма 6.** *Пусть* $X_0 = A_1^* Z A_1$ *и выполнена система неравенств*

$$A^* Z A_1 + A_1^* Z A \geq Z_0, \quad X_1 \geq Z_1, \ldots, X_{s-1} \geq Z_{s-1}, \tag{64}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} Z_0 & X_1 + A_1^* Z A_2 & \cdots & X_{s-1} + A_1^* Z A_s \\ X_1 + A_2^* Z A_1 & Z_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{s-1} + A_s^* Z A_1 & 0 & \cdots & Z_{s-1} \end{bmatrix} \geq 0, \tag{65}$$

*где $A$ — матрица системы (56), $Z_i \geq 0$ — некоторые неотрицательно определенные матрицы. Тогда производная функционала (63) в силу системы (55) удовлетворяет оценке*

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(55)} \leq -x(t)^* S_0 x(t), \quad t \geq t_0. \tag{66}$$

*где* $S_0 = A^* Z A_1 + A_1^* Z A - Z_0 \geq 0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем известную формулу дифференцирования интеграла по параметру

$$\frac{d}{dt}\int\limits_p^q f(\tau,t)d\tau = \int\limits_p^q \frac{\partial}{\partial t} f(\tau,t)d\tau + f(q,t)\frac{dq}{dt} - f(p,t)\frac{dp}{dt},$$

где $p = p(t), q = q(t)$. В результате получаем выражение для производной функционала в силу системы

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(55)} = -y^* W y, \quad y = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) \\ \vdots \\ x(t-\tau_{s-1}) \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} \begin{matrix} A_0^* Z A_1 + A_1^* Z A_0 - \\ - X_1 - \ldots - X_{s-1} \end{matrix} & A_1^* Z A_2 & \cdots & A_1^* Z A_s \\ A_2^* Z A_1 & X_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_s^* Z A_1 & 0 & \cdots & X_{s-1} \end{bmatrix}.$$

Используя блочные преобразования матрицы $W$, получаем соотношения

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(55)} = -z^*\Omega z, \quad z = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau_1) - x(t) \\ \vdots \\ x(t-\tau_{s-1}) - x(t) \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^*ZA_1 + A_1^*ZA & X_1 + A_1^*ZA_2 & \dots & X_{s-1} + A_1^*ZA_s \\ X_1 + A_2^*ZA_1 & X_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{s-1} + A_s^*ZA_1 & 0 & \dots & X_{s-1} \end{bmatrix}.$$

При условиях (64) и (65) имеем $\Omega \geq \Theta \geq 0$, где $\Theta = \Omega - \Delta$-блочно-диагональная матрица. Отсюда вытекает оценка (66).

Лемма доказана.

Положим

$$X_{i-1} = Z_{i-1} = -\gamma_i A_i^* Z A_i, \quad Z_0 = \sum_{i=2}^{s} D_i^* Z D_i,$$

где $D_i = (-\gamma_i)^{-1/2} A_1 + (-\gamma_i)^{1/2} A_i$, $\gamma_i < 0$, $i = \overline{2, s}$. Тогда выполняются условия леммы 6, если

$$A^*ZA_1 + A_1^*ZA - \sum_{i=2}^{s} D_i^* Z D_i = S, \tag{67}$$

$$\begin{bmatrix} A_1^* \\ A_i^* \end{bmatrix} Z[A_1, A_i] \geq 0, \quad i = \overline{2, s}, \tag{68}$$

где $A$ — матрица системы (56), $S \geq 0$. Нетрудно видеть, что уравнения (62) и (67) эквивалентны, а неравенства (68) являются следствием соотношения $C^*ZC \geq 0$.

Если

$$X_{i-1} = Z_{i-1} = -1/\gamma_i X^{-1}, \quad \gamma_i < 0, \quad i = \overline{2, s},$$

$$Z_0 = A_1^* Z \left( \sum_{i=2}^{s} D_i X D_i^* \right) Z A_1, \quad X^{-1} = A_1^* Z A_1,$$

то для выполнения условий (64) – (65) леммы 6 достаточно, чтобы матрицы $X > 0$ и $Y \geq 0$ удовлетворяли уравнению

$$AXA_1^* + A_1XA^* - \sum_{i=2}^{s} D_iXD_i^* = Y. \tag{69}$$

При этом в соотношении (66) $S_0 = A_1^*ZYZA_1$, Матричные уравнения (60) и (69) эквивалентны.

2. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx(t) = Ax(t)dt + \sum_{i=1}^{s} B_ix(t)dw_i(t), \tag{70}$$

где $A, B_i$ — постоянные $n \times n$-матрицы, $w_i$ — компоненты $s$-мерного стандартного винеровского процесса, $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0$. При изучении условий устойчивости в среднеквадратическом системы (70) используются функции Ляпунова

$$v(x) = x(t)^*Xx(t), \tag{71}$$

где $X$ — положительно определенная матрица, подлежащая определению (см., например, [30,32,108]). Математическое ожидание производной функции (71) в силу системы (70) представляется в виде

$$M\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = x(t)^*\left(A^*X + XA + \sum_{i=1}^{s} B_i^*XB_i\right)x(t).$$

Из второго метода Ляпунова вытекают следующие алгебраические условия асимптотической устойчивости системы (70) в среднеквадратическом [32].

**Теорема 8.** *Если для некоторой положительно определенной матрицы $Y$ матричное уравнение*

$$-A^*X - XA - \sum_{i=1}^{s} B_i^*XB_i = Y \tag{72}$$

*имеет положительно определенное решение $X$, то нулевое решение системы (70) асимптоточески устойчиво в среднеквадратическом.*

Перепишем матричное уравнение (72) в виде

$$LX - PX = Y, \tag{73}$$

где

$$LX = -A^*X - XA, \quad PX = \sum_{i=1}^{s} B_i^* X B_i.$$

При условиях теоремы 8 оператор $L$ является монотонно обратимым, а оператор $P$ монотонный относительно конуса $\mathcal{K}$ неотрицательно определенных матриц порядка $n$ ($P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$). Поэтому результаты работ [30, 69] могут быть использованы при построении различных алгебраических условий устойчивости в среднеквадратическом нулевого решения системы (70). Кроме того, при изучении уравнения (73) можно использовать мажоранты оператора $P$, удовлетворяющие условию $(\hat{P} - P)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ [23]. Если матричное уравнение

$$LZ - \hat{P}Z = S, \tag{74}$$

где $S > 0$, $\hat{P}$ — мажоранта оператора $P$, имеет решение $Z > 0$, то для некоторой матрицы $Y > 0$ уравнение (73) также имеет положительно определенное решение $X > 0$. Для заданного оператора $P$ в качестве мажоранты могут служить линейные операторы [30]

$$\hat{P}X = r_0(X)Q_0, \quad r_0(X) = \mathrm{tr}X, \quad Q_0 = \sum_{i=1}^{s} B_i^* B_i, \tag{75}$$

$$\hat{P}X = \sum_{i=1}^{s} r_i(X)Q_i, \quad r_i(X) = \mathrm{tr}(E_i^* X E_i), \quad Q_i = F_i F_i^*, \tag{76}$$

где $E_i$ и $F_i$ — компоненты скелетных разложений $B_i = E_i F_i^*$, $i = 1, \ldots, s$. Так, если выполнены соотношения

$$\mathrm{tr}H_0 < 1, \quad -A^*H_0 - H_0A = Q_0, \tag{77}$$

то для любой матрицы $S > 0$ уравнение (74) с оператором (75) имеет положительно определенное решение $Z > 0$. Если же выполнена система соотношений

$$\det(I_i - \Sigma_i) > 0, \quad -A^* H_i - H_i A = Q_i, \quad i = \overline{1, s}, \tag{78}$$

где $\Sigma_i$ — последовательные главные подматрицы размеров $i \times i$ неотрицательной матрицы

$$\Sigma = \begin{bmatrix} r_1(H_1) & r_1(H_2) & \dots & r_1(H_s) \\ r_2(H_1) & r_2(H_2) & \dots & r_2(H_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_s(H_1) & r_s(H_2) & \dots & r_s(H_s) \end{bmatrix},$$

то уравнение (74) с оператором (76) также разрешимо в виде $Z > 0$ при любой матрице $S > 0$ (см. дополнение 2).

Каждая из систем соотношений (77) и (78) выполняет роль достаточных условий устойчивости в среднеквадратическом системы (70). При этом спектр матрицы $A$ должен находиться слева от мнимой оси. Условия устойчивости, аналогичные соотношениям (78), можно получить, исходя из уравнения (72), в тех случаях, когда матричные коэффициенты $B_i$ имеют единичный ранг.

Отметим, что методика анализа устойчивости системы (70), основанная на построении и решении матричных уравнений типа (73), может быть распространена на более общие классы дифференциально-разностных стохастических систем. Основные свойства линейных уравнений вида (73) изложены в дополнении 2.

## § 5. Представление решений линейных динамических систем

Изложим методику построения решений линейных динамических систем, основанную на применении правых пар матричных функций. Сначала рассмотрим дифференциальную систему первого порядка

$$Az(t) - B\dot{z}(t) = y(t), \quad z(0) = z_0, \tag{79}$$

где $L(\lambda) = A - \lambda B$ — регулярный пучок матриц. Если матрица $B$ невырождена, то данная система сводится к нормальной форме Коши. В общем случае решение $z(t)$ имеет две составляющие, отвечающие конечным и бесконечным элементарным делителям пучка $L(\lambda)$ (см. §2 гл. 3). Покажем, что эти составляющие можно описать в терминах решений алгебраических систем

$$AE = BEU, \quad BH = AHV. \tag{80}$$

Определим решение и правую часть системы (79) в виде

$$z(t) = Eu(t) + Hv(t), \quad y(t) = -BEp(t) + AHq(t), \tag{81}$$

где $u, v, p$ и $q$ — некоторые вектор - функции. Подставляя данные выражения в (79), с учетом (80) имеем

$$-BE[\dot{u}(t) - Uu(t) - p(t)] + AH[v(t) - V\dot{v}(t) - q(t)] = 0.$$

Следовательно, если при некотором $\nu$ выполняется условие

$$AHV^{\nu}q^{(\nu)}(t) \equiv 0, \tag{82}$$

то система (79) разрешима в виде (81), где

$$u(t) = e^{tU}u_0 + \int\limits_0^t e^{(t-\tau)U}p(\tau)d\tau, \quad v(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} V^i q^{(i)}(t), \tag{83}$$

$q^{(i)}(t)$ — производная i-го порядка вектор-функции $q(t)$.

Рассмотрим дифференциальную систему s-го порядка

$$A_0x(t) + A_1x^{(1)}(t) + \ldots + A_sx^{(s)}(t) = g(t), \tag{84}$$

где $x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}$, $i = \overline{0, s-1}$, $\det F(\lambda) \not\equiv 0$, $F(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{s} \lambda^i A_i$. Правые пары матричных полиномов $F(\lambda)$ и $\lambda^s F(1/\lambda)$ определяются соотношениями

$$\sum_{i=0}^{s} A_iTU^i = 0, \quad \sum_{i=0}^{s} A_iKV^{s-i} = 0. \tag{85}$$

При этом выполняются тождества

$$F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U), \quad F(\lambda)K \equiv \Psi(\lambda)(I - \lambda V), \tag{86}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=0}^{s-1} \lambda^i \Phi_i, \quad \Psi(\lambda) = \sum_{i=0}^{s-1} \lambda^i \Psi_i,$$

$$\Phi_i = \sum_{j=i+1}^{s} A_j T U^{j-i-1}, \quad \Psi_i = \sum_{j=0}^{i} A_j K V^{i-j}, \quad i = \overline{0, s-1}.$$

**Теорема 9.** *Пусть пары матриц $(U,T)$ и $(V,K)$ удовлетворяют равенствам (85) и выполнены соотношения*

$$\det(I - \lambda V) \neq 0, \quad \lambda \in \sigma(F), \tag{87}$$

$$x_0 = Tu_0 + Kv_0, \quad \sum_{j=i}^{s} A_j x_0^{(j-i)} = \Phi_{i-1}u_0 - \Psi_{i-1}Vv_0, \tag{88}$$
$$i = \overline{1, s-1},$$

$$g(t) = \Phi_0 p(t) + \Psi_0 q(t), \quad \Phi_i p(t) + \Psi_i q(t) \equiv 0, \tag{89}$$
$$i = \overline{1, s-1},$$

*где $u_0$, $v_0$, $p(t)$ и $q(t)$ — некоторые векторы. Тогда система (84) разрешима в виде*

$$x(t) = Tu(t) + Kv(t), \tag{90}$$

*где $u(t)$ и $v(t)$ — вектор-функции, определенные в (83).*

*Обратно, если $x(t)$ является решением системы (84), то существуют матрицы $U$, $T$, $V$ и $K$, для которых выполняются все соотношения (85) – (90).*

Доказательство. Перепишем систему (84) и равенства (85) в компактной форме (79) и (80), полагая

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -A_0 \\ I & \dots & 0 & -A_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I & -A_{s-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_s \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} A_1x(t) + \ldots + A_sx^{(s-1)}(t) \\ \vdots \\ A_{s-1}x(t) + A_sx^{(1)}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = -\begin{bmatrix} g(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{s-2} \\ T \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} -\Psi_0 V \\ \vdots \\ -\Psi_{s-2} V \\ K \end{bmatrix},$$

$$BE = \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_{s-2} \\ \Phi_{s-1} \end{bmatrix}, \quad AH = -\begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \vdots \\ \Psi_{s-2} \\ \Psi_{s-1} \end{bmatrix}.$$

При этом, согласно (80)–(83), имеем представление решения $z(t)$ системы (79) вида (81) с соответствующими ограничениями на векторы начальных условий $z_0$ и правой части $y(t)$.

Обратимся к канонической форме регулярного пучка

$$P(A - \lambda B)Q = \begin{bmatrix} J - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}. \tag{91}$$

Согласно (80) и (91), имеем соотношения

$$[E, H] = Q\begin{bmatrix} R & S \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad [BE, AH] = P^{-1}\begin{bmatrix} R & JS \\ 0 & G \end{bmatrix},$$

$$JR = RU, \quad NG = GV, \quad S = JSV.$$

Поскольку $N^\nu = 0$, то $GV^\nu = 0$, где $\nu$ — максимальная степень бесконечных элементарных делителей пучка $L(\lambda)$. Если к тому же выполнено условие (87), то $S = 0$ и в соотношении (82) $HV^\nu = 0$. В частности, если матрица $V$ нильпотентная, то условие (87) выполнено при любых $\lambda$.

Следовательно, при условиях (85)–(89) выражение (81) является решением системы (79). Учитывая блочную структуру вектора $z(t)$, имеем решение вида (90) исходной системы (84).

Остальные равенства для блочных компонент вектора $z(t)$ следуют из соотношений (83), (85) – (90).

Для установления обратного утверждения достаточно положить

$$E = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\sigma}(A-\lambda B)^{-1}d\lambda = Q\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P,$$

$$H = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\omega}(B-\lambda A)^{-1}d\lambda = Q\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}P,$$

$$U = AE = P^{-1}\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P, \quad V = BH = P^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}P,$$

где $\sigma$ и $\omega$ — замкнутые контуры, охватывающие соответственно спектр $\sigma(L)$ и точку 0. Очевидно, $V^{\nu} = 0$ и выполнено условие (87), а матрицы $EB$ и $HA (BE$ и $AH)$ являются ортогональными проекторами, причем, $EB + HA = I (BE + AH = I)$. Поэтому любые векторы $z(t)$ и $y(t)$ представимы в виде (81). В частности, можно положить $u(t) = Bz(t)$, $v(t) = Az(t)$, $p(t) = -y(t)$, $q(t) = y(t)$.

Теорема доказана.

Изложенная методика распространяется на более широкие классы динамических систем. Предположим, что матрица-функция $F(\lambda)$ описывает дифференциальную (разностную) систему

$$F(D)x(t) = g(t), \quad t \geq t_0, \tag{92}$$

где $D$ — оператор дифференцирования (смещения) в случае непрерывного (дискретного) времени $t$, и определены пары матриц $(U, T)$ и $(V, K)$, удовлетворяющие тождествам (86), где $\Phi(\lambda)$ и $\Psi(\lambda)$ — некоторые матричные функции. Тогда при некоторых ограничениях вектор-функции $x(t)$ и $g(t)$ в системе (92) можно определить в виде

$$x(t) = Tu(t) + Kv(t), \quad g(t) = \Phi(D)p(t) + \Psi(D)q(t). \tag{93}$$

Действительно, подставляя данные выражения в (92), получаем

$$\Phi(D)[Du(t) - Uu(t) - p(t)] + \Psi(D)[v(t) - VDv(t) - q(t)] = 0.$$

Если при некотором $\nu$ выполнено тождество

$$\Psi(D)V^{\nu}D^{\nu}q(t) \equiv 0, \tag{94}$$

в частности, $V$ — нильпотентная матрица, то дифференциальная система (92) разрешима в виде (93), где $u(t)$ и $v(t)$ определены в (83). Аналогично, решения разностной системы (92) в случае оператора смещения $D$ при $t = 0, 1, \ldots$ также определяются соотношениями (86), (93) и (94), где

$$u(t+1) = U^{t+1}u_0 + \sum_{i=0}^{t} U^{t-i}p(i), \quad v(t) = \sum_{i=0}^{\nu-1} V^i q(t+i). \tag{95}$$

# *Глава 4*

# Матричные уравнения и закон инерции

В данной главе мы изложим методы исследования линейных матричных уравнений общего вида. Нас интересуют, прежде всего, условия разрешимости и инерциальные свойства эрмитовых решений матричных уравнений, допускающих преобразования (трансформации) их параметров к удобной для изучения канонической форме. В частности, если матричные коэффициенты уравнения одновременно приводимы к треугольному виду преобразованием подобия, то условия однозначной разрешимости данного уравнения определяются лишь диагональными элементами (собственными значениями) преобразованных матричных коэффициентов [118,124]. Аналогичными свойствами обладают матричные уравнения, коэффициенты которых образуют более общие семейства матриц — коллективы [70,74].

## § 1. Оценка ранга матрицы-решения

Рассмотрим линейное матричное уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} c_{ij} A_i X B_j = Y, \tag{1}$$

где $A_i$, $B_j$ и $Y$ — заданные матрицы размеров $p \times n$, $m \times q$ и $p \times q$ соответственно, $c_{ij}$ — скалярные коэффициенты, составляющие матрицу $C$ размера $k \times s$. Пусть уравнение (1) совместно и $X$ —

одно из его решений размера $n \times m$. Соотношение (1) эквивалентно системе [44]

$$AZB = Y, \quad C \otimes X = Z, \tag{2}$$

где $\otimes$ — кронекерово произведение, $A$, $B$ и $Z$ — блочные матрицы вида

$$A = [A_1, \ldots, A_k], \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} c_{11}X & \ldots & c_{1s}X \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1}X & \ldots & c_{ks}X \end{bmatrix}.$$

Наряду с (1) и (2) рассмотрим соотношения [67]

$$W = Z - ZBY^{-}AZ, \quad YY^{-}Y = Y, \tag{3}$$

где $Y^{-}$ — произвольная полуобратная $q \times p$-матрица для $Y$. Согласно (2) и (3), матрица $W$ является решением однородного уравнения

$$AWB = 0. \tag{4}$$

Если $Y$ — матрица полного ранга по столбцам (по строкам),то $WB = 0(AW = 0)$.

**Теорема 1.** *Для матричной системы (2), (3) выполнено равенство*

$$\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X = \operatorname{rang} Y + \operatorname{rang} W. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $P$, $Q$ и $D$ — квадратные невырожденные матрицы порядка соответственно $p$, $q$ и $\delta$ такие, что

$$PYQ = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} Y = \delta \neq 0.$$

Операция полуобращения обладает следующими свойствами [132]:

$$(PYQ)^{-} = Q^{-1}Y^{-}P^{-1}, \quad \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-} = \begin{bmatrix} D^{-1} & U \\ V & S \end{bmatrix},$$

где $U$, $V$ и $S$ — произвольные блоки подходящих размеров. Используя эти соотношения, представим выражение (3) в виде

$$W = Z - ZR_0(L_0ZR_0)^{-1}L_0Z - ZR_1\Delta L_1Z, \tag{6}$$

где $L_0 = [I_\delta, DU]PA, \quad L_1 = [0, I_{q-\delta}]PA, \quad \Delta = S - VDU,$

$$R_0 = BQ\begin{bmatrix} I_\delta \\ VD \end{bmatrix}, \quad R_1 = BQ\begin{bmatrix} 0 \\ I_{p-\delta} \end{bmatrix},$$

$I_\delta$ — единичная матрица порядка $\delta$. При этом выполнены равенства

$$L_0ZR_0 = D, \quad L_1ZR_1 = 0, \quad L_0ZR_1 = 0, \quad L_1ZR_0 = 0,$$

$$L_0W = 0, \quad WR_0 = 0, \quad L_1W = L_1Z, \quad WR_1 = ZR_1.$$

Пусть $L_2$ и $R_2$ — произвольные матрицы такие, что

$$\operatorname{rang} L_3 = kn, \quad L_3 = \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} R_3 = sm, \quad R_3 = [R_0, R_1, R_2].$$

Тогда блочные матрицы $L_4$ и $R_4$ вида

$$L_4 = \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 - L_2ZR_0D^{-1}L_0 - 0.5L_2ZR_1\Delta L_1 \end{bmatrix},$$

$$R_4 = [R_0, R_1, R_2 - R_0D^{-1}L_0ZR_2 - 0.5R_1\Delta L_1ZR_2]$$

имеют полный ранг, равный соответственно $k\ n$ и $s\ m$. Вычисляя и сопоставляя произведения матриц

$$L_3WR_3 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_1ZR_2 \\ 0 & L_2ZR_1 & L_2WR_2 \end{array}\right],$$

$$L_4ZR_4 = \left[\begin{array}{c|cc} D & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L_1ZR_2 \\ 0 & L_2ZR_1 & L_2WR_2 \end{array}\right],$$

видим, что выполнено равенство $\operatorname{rang} Z = \operatorname{rang} W + \delta$. Данное равенство приводится к виду (5), так как $\operatorname{rang}(C \otimes X) = \operatorname{rang} C \operatorname{rang} X$. Если $Y = 0$, то $Y^-$ — произвольная матрица и равенство (5) следует из соотношения

$$\begin{bmatrix} A \\ L_5 \end{bmatrix} W[B, R_5] =$$

$$= \begin{bmatrix} A \\ L_5 - 0.5L_5ZBY^-A \end{bmatrix} Z[B, R_5 - 0.5BY^-AZR_5].$$

Здесь блоки $L_5$ и $R_5$ выбраны так, чтобы левые и правые множители были матрицами полного ранга.

Теорема доказана.

**Примечание 1.** Если потребовать, чтобы полуобратная матрица $Y^-$ удовлетворяла второму условию в системе псевдообращения Пенроуза $(Y^{--} = Y)$[132], то в (6) $\Delta = 0$ и доказательство теоремы 1 упрощается.

**Следствие 1.** *Для любого решения уравнения (1) выполнены неравенства*

$$\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X \geq \operatorname{rang} Y, \tag{7}$$

$$\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X \leq \operatorname{rang} Y - \operatorname{rang} A - \operatorname{rang} B + kn + sm, \tag{8}$$

$$\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X \leq \operatorname{rang} Y + \operatorname{rang}(C^- \otimes X^- - BX^-A). \tag{9}$$

Неравенство (7) непосредственно вытекает из равенства (5). Неравенство (8) является следствием соотношений (3)–(5), а также неравенств Сильвестра и Фробениуса для ранга произведения матриц [10]. Неравенство (9) следует из (5) и равенства $W = Z(Z^- - BY^-A)Z$, где $Z^-$ — полуобратная матрица для $Z$, в частности, $Z^- = C^- \otimes X^-$. Равенство в (7) достигается в том и только в том случае, когда выражение $BY^-A$ является полуобратной матрицей для $Z$.

**Следствие 2.** *Если $BY^-A = C^- \otimes X^-$, то решение $X$ уравнения (1) имеет минимальный ранг.*

**Следствие 3.** *Если матрицы $X_1$, $X_2$, $X_3$ и $X_4$ имеют размеры $p \times q$, $p \times \tau$, $t \times q$ и $t \times \tau$ соответственно, то выполнены равенства*

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}[X_1, X_2] &= \operatorname{rang} X_1 + \operatorname{rang} L, \\ \operatorname{rang}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix} &= \operatorname{rang} X_1 + \operatorname{rang} R, \\ \operatorname{rang}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} &= \operatorname{rang} X_1 + \operatorname{rang} L + \operatorname{rang} R + \operatorname{rang} G, \end{aligned} \tag{10}$$

*где* $L = X_2 - X_1X_1^-X_2, \quad R = X_3 - X_3X_1^-X_1,$

$$G = (I_t - RR^-)T(I_\tau - L^-L), \quad T = X_4 - X_3X_1^-X_2.$$

Для доказательства равенств (10) в теореме 1 полагаем

$$A = [I_p, 0], \quad B = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = 1, \quad Z = X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}.$$

При этом выполнены соотношения

$$Y = X_1, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & L \\ R & T \end{bmatrix}, \quad L_6WR_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & G & 0 \\ R & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где множители $L_6$ и $R_6$ имеют полный ранг и следующую структуру:

$$L_6 = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ (RR^- - I_t)TL^- & I_t - RR^- \\ -0.5RR^-TL^- & RR^- \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} L_6 = p + t,$$

$$R_6 = \begin{bmatrix} I_q & R^-T(L^-L - I_q) & -0.5R^-TL^-L \\ 0 & I_\tau - L^-L & L^-L \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rang} R_6 = q + \tau.$$

Поэтому равенства (10) вытекают из формул (5) и (11) (см. также [33]).

**Следствие 4.** *Имеет место следующий критерий:*

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} X_1 \Leftrightarrow L = 0, \quad R = 0, \quad T = 0.$$

Если $X_1$ — квадратный невырожденный блок, то $X_1^- = X_1^{-1}$, $L = 0$, $R = 0$. В этом случае критерий следствия 4 хорошо известен [11].

## § 2. Инерция эрмитовых решений

Инерцию эрмитовой матрицы $X = X^*$ составляет тройка чисел

$$i(X) = \{i_+(X), i_-(X), i_0(X)\},$$

определяемых количествами ее положительных ($i_+$), отрицательных ($i_-$) и нулевых ($i_0$) собственных значений с учетом кратностей [101]. Если эрмитовы матрицы $X$ и $Y$ связаны соотношением

$$AXA^* = Y, \tag{12}$$

где $A$ — квадратная невырожденная матрица, то $i(X) = i(Y)$. Это означает, что инерция инвариантна относительно конгруэнтного преобразования (закон инерции Сильвестра). Если $A$ — прямоугольная матрица полного ранга по столбцам, то инвариантами преобразования (12) являются индексы инерции $i_\pm$, а также ранг и сигнатура :

$$\operatorname{rang} X = i_+(X) + i_-(X), \quad \operatorname{sign} X = i_+(X) - i_-(X).$$

Очевидно, ранг и сигнатура определяют все три составляющие инерции.

Изучим связь между инерциями матриц $X$ и $Y$, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* = Y, \tag{13}$$

в частности, соотношению (12) без каких-либо ограничений на матричные коэффициенты $A$ и $A_i$. Рассмотрим соотношения (2)–(6) при условиях сопряженности:

$$B = A^*, C = C^*, X = X^*, Y = Y^*, Z = Z^*, W = W^*, Y^- = Y^{-*}. \tag{14}$$

Повторяя доказательство теоремы 1 с учетом равенств $R_i = L_i^*$ и закона инерции, имеем следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Для матричной системы (2), (3) и (14) выполнены равенства*

$$\begin{gathered}
\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X = \operatorname{rang} Y + \operatorname{rang} W, \\
\operatorname{sign} C \operatorname{sign} X = \operatorname{sign} Y + \operatorname{sign} W, \\
i_+(C)i_+(X) + i_-(C)i_-(X) = i_+(Y) + i_+(W), \\
i_-(C)i_+(X) + i_+(C)i_-(X) = i_-(Y) + i_-(W), \\
i_0(C)i_0(X) - ni_0(C) - ki_0(X) = \operatorname{rang} Y - i_0(W).
\end{gathered} \tag{15}$$

**Следствие 5.** *Для любой эрмитовой матрицы-решения $X$ уравнения (13) выполнены неравенства*

$$i_+(Y) \le i_+(C)i_+(X)+i_-(C)i_-(X) \le i_+(Y)+i_+(C^-\otimes X^- - A^*Y^-A),$$

$$i_-(Y) \le i_-(C)i_+(X)+i_+(C)i_-(X) \le i_-(Y)+i_-(C^-\otimes X^- - A^*Y^-A).$$

**Следствие 6.** *Пусть $X = X^*$ — решение уравнения (13) при условии $\operatorname{sign} C = 0$. Тогда выполнено неравенство*

$$\operatorname{rang} C \operatorname{rang} X \ge \operatorname{rang} Y + |\operatorname{sign} Y| = 2\max\{i_+(Y), i_-(Y)\}.$$

*В частности, если $Y > 0$ или $Y < 0$, то при условиях $\operatorname{rang} C = 2$ и $\operatorname{sign} C = 0$ решение $X$ является невырожденной матрицей.*

Приведем следствия теоремы 2 для соотношения (12), полагая

$$C = 1, \quad Z = X, \quad W = X - XA^*Y^-AX,$$

где $A$ — прямоугольная матрица любого ранга. Согласно (15) имеем неравенства

$$i_+(X) \geq i_+(Y), \quad i_-(X) \geq i_-(Y).$$

**Следствие 7.** *Равенства*

$$i_+(X) = i_+(Y), \quad i_-(X) = i_-(Y) \tag{16}$$

*выполнены в том и только в том случае, когда выражение* $A^*Y^-A$ *является полуобратной матрицей для* $X$.

Если $A$ — квадратная невырожденная матрица, то $W = 0$ и выполнены равенства (16), представляющие закон инерции Сильвестра.

**Следствие 8.** *Равенства* $i_+(X) = i_+(Y) + z$ *и* $i_-(X) = i_-(Y)$ *выполнены в том и только в том случае, когда* $W$ *— неотрицательно определенная матрица ранга* $z$. *Аналогично, равенства* $i_+(X) = i_+(Y)$ *и* $i_-(X) = i_-(Y)+z$ *эквивалентны соотношениям* $W \leq 0$, $\operatorname{rang} W = z$.

Данные утверждения могут быть использованы при вычислении индексов инерции эрмитовой матрицы. При этом не требуется каких-либо ограничений на ее миноры, подобных условиям теоремы Якоби [11]. Нахождение инерции матрицы $X$ сводится к применению критериев знакоопределенности матриц $Y$ и $W$. Так, если $p \times n$-матрица $A$ выбрана так, что $Y > 0$ и $W \leq 0$, то $i_+(X) = p$ и $i_-(X) = \operatorname{rang} W$. Аналогично, при условиях $Y < 0$, $W \geq 0$ имеем $i_+(X) = \operatorname{rang} W$ и $i_-(X) = p$. В случае $p = 1$ выполнено следующее утверждение.

**Следствие 9.** *Если для некоторого вектора (строки)* $A$ *эрмитова форма* $AXA^* = \alpha > 0$ *положительна, то соотношения* $i_+(X) = 1$ *и* $\alpha X \leq XA^*AX$ *эквивалентны.*

**Следствие 10.** *Пусть матрица* $X$ *представлена в блочном виде*

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \quad X_1 = X_1^*, \quad X_2 = X_3^*, \quad X_4 = X_4^*.$$

*Тогда наряду с (10) выполнено равенство*

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign} X_1 + \operatorname{sign} G. \tag{17}$$

Доказательство следствия 10 вытекает из формул (11), (15) и того факта, что сигнатуры матрицы $W$ и блока $G$ в (11) совпадают. Равенства (10) и (17) эквивалентны соотношениям

$$i_\pm(X) = i_\pm(X_1)+i_\pm(G)+\operatorname{rang} L, \quad i_0(X) = i_0(X_1)+i_0(G)-2\operatorname{rang} L.$$

В частности, имеем следующие критерии:

$$i_+(X) = i_+(X_1) \Leftrightarrow X_2 = X_1X_1^-X_2, \quad X_4 \le X_3X_1^-X_2;$$

$$i_-(X) = i_-(X_1) \Leftrightarrow X_2 = X_1X_1^-X_2, \quad X_4 \ge X_3X_1^-X_2;$$

$$X \ge 0 \Leftrightarrow X_1 \ge 0, \quad X_4 \ge X_3X_1^-X_2, \quad X_2 = X_1X_1^-X_2;$$

$$X > 0 \Leftrightarrow X_1 > 0, \quad X_4 > X_3X_1^-X_2.$$

Аналогичные результаты можно сформулировать, выделяя в матрице $X$ блок $X_4$.

## § 3. Трансформации и условия разрешимости матричных уравнений

При изучении матричных уравнений важную роль выполняют системы преобразований (трансформаций), приводящие их к более простому виду. В частности, нас интересуют возможности приведения уравнения (1) к аналогичному уравнению с треугольными матричными коэффициентами, условия разрешимости которого хорошо изучены. Рассмотрим два уравнения вида (1):

$$MX \triangleq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}A_iXB_j = Y, \tag{18}$$

$$\hat{M}\hat{X} \triangleq \sum_{i=1}^{\hat{k}}\sum_{j=1}^{\hat{s}} d_{ij}L_i\hat{X}R_j = \hat{Y}. \tag{19}$$

Линейный оператор $M(\hat{M})$ действует из пространства матриц размера $n \times m$ $(\hat{n} \times \hat{m})$ в пространство матриц размера $p \times q$ $(\hat{p} \times \hat{q})$. Согласно (2), имеем представления

$$MX = A(C \otimes X)B, \quad A = [A_1, \dots, A_k],$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_s \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{k1} & \dots & c_{ks} \end{bmatrix},$$

$$\hat{M}\hat{X} = L(D \otimes \hat{X})R, \quad L = \left[L_1, \dots, L_{\hat{k}}\right],$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_{\hat{s}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1\hat{s}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{\hat{k}1} & \dots & d_{\hat{k}\hat{s}} \end{bmatrix}.$$

Определим связь между параметрами и структуру решений уравнений (18) и (19), используя матричную систему преобразований [71]

$$\begin{gathered} P_1 A P^{(2)} = P_3 L P^{(4)}, \quad Q^{(1)} B Q_2 = Q^{(3)} R Q_4, \\ C = S_1 G S_2, \quad D = S_3 G S_4, \\ P_1 Y Q_2 = P_3 \hat{Y} Q_4, \end{gathered} \tag{20}$$

где $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, $Q^{(1)} = S_2 \otimes Q_1$, $Q^{(3)} = S_4 \otimes Q_3$, $P_t$, $Q_t$, $S_t$ и $G$ — некоторые матрицы подходящих размеров. Решения $X$ и $\hat{X}$ строим в виде

$$X(H) = P_2 H Q_1, \quad \hat{X}(H) = P_4 H Q_3, \tag{21}$$

где $H$ — неизвестная матрица. При этом используем ранговые ограничения на матрицы преобразований, в частности,

$$\operatorname{rang} P_1 = p, \quad \operatorname{rang} Q_2 = q, \tag{22}$$

$$\operatorname{rang} P_2 = n, \quad \operatorname{rang} Q_1 = m, \tag{23}$$

$$\operatorname{rang} P_3 = \hat{p}, \quad \operatorname{rang} Q_4 = \hat{q}, \tag{24}$$

$$\operatorname{rang} P_4 = \hat{n}, \quad \operatorname{rang} Q_3 = \hat{m}, \tag{25}$$

$$\operatorname{rang} S_1 = k, \quad \operatorname{rang} S_2 = s, \tag{26}$$

$$\operatorname{rang} S_3 = \hat{k}, \quad \operatorname{rang} S_4 = \hat{s}. \tag{27}$$

**Теорема 3.** *Пусть уравнения (18) и (19) связаны системой (20). Тогда, если выполнены условия (22) и уравнение (19) разрешимо в виде $\hat{X} = \hat{X}(H)$, то $X = X(H)$ является решением уравнения (18). Если выполнены условия (24) и уравнение (18) разрешимо в виде $X = X(H)$, то $\hat{X} = \hat{X}(H)$ — решение уравнения (19).*

Доказательство. Используем заданную структуру решений (21) и вычислим кронекеровы произведения

$$C \otimes X = P^{(2)} F Q^{(1)}, \quad D \otimes \hat{X} = P^{(4)} F Q^{(3)},$$

где $F = G \otimes H$. Если одна из матриц (21) является решением соответствующего уравнения (18) или (19), то, согласно (18)–(21), выполнены равенства

$$P_1 Y Q_2 = P_1 (MX) Q_2 = P_1 A P^{(2)} F Q^{(1)} B Q_2 =$$

$$= P_3 L P^{(4)} F Q^{(3)} R Q_4 = P_3 (\hat{M} \hat{X}) Q_4 = P_3 \hat{Y} Q_4.$$

Так, если $\hat{X}$ — решение уравнения (19) и выполнены условия (22), то $P_1^- P_1 = I_p$, $Q_2 Q_2^- = I_q$ и матрица $X$ удовлетворяет уравнению (18). Аналогично, если $X$ — решение уравнения (18) при условиях (24), то $\hat{X}$ является решением уравнения (19). В этом случае $P_3^- P_3 = I_{\hat{p}}$ и $Q_4 Q_4^- = I_{\hat{q}}$,

Теорема доказана.

Связь между правыми частями уравнений (18) и (19) в системе (20) можно представить в виде

$$Y = P_1^- P_3 \hat{Y} Q_4 Q_2^- + Y_0, \quad \hat{Y} = P_3^- P_1 Y Q_2 Q_4^- + \hat{Y}_0,$$

где $Y_0$ и $\hat{Y}_0$ — произвольные матрицы такие, что $P_1 Y_0 Q_2 = 0$ и $P_3 \hat{Y}_0 Q_4 = 0$. При условиях (22) ( (24) ) теоремы 3 необходимо, чтобы $Y_0 = 0(\hat{Y}_0 = 0)$. Аналогичная связь существует между решениями, имеющими структуру (21). Исключая матрицу $H$, имеем

$$X = P_2 P_4^- \hat{X} Q_3^- Q_1 + X_0, \quad \hat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3 + \hat{X}_0,$$

где $X_0 = P_2 H_0 Q_1$, $\hat{X}_0 = P_4 \hat{H}_0 Q_3$, $H_0$ и $\hat{H}_0$ — произвольные матрицы такие, что $P_4 H_0 Q_3 = 0$ и $P_2 \hat{H}_0 Q_1 = 0$. В частности, при $H_0 = 0$ и $\hat{H}_0 = 0$ имеем следующие утверждения.

**Следствие 11.** *Для того, чтобы матрица $X$ была решением уравнения (18), при условиях (22) и (23) достаточно, а при условиях (23) и (24) необходимо, чтобы матрица $\hat{X} = P_4 P_2^- X Q_1^- Q_3$ удовлетворяла уравнению (19).*

**Следствие 12.** *Для того, чтобы уравнение (18) было разрешимо в виде $X = P_2 P_4^- \hat{X} Q_3^- Q_1$, при условиях (22) и (25) достаточно, а при условиях (24) и (25) необходимо, чтобы матрица $\hat{X}$ удовлетворяла уравнению (19).*

Выделим следующие варианты системы преобразований (20):

$$P_1 A P^{(2)} = L, \quad Q^{(1)} B Q_2 = R, \quad C = S_1 D S_2, \quad P_1 Y Q_2 = \hat{Y}; \tag{28}$$

$$A P^{(2)} = P_3 L, \quad Q^{(1)} B = R Q_4, \quad C = S_1 D S_2, \quad Y = P_3 \hat{Y} Q_4; \tag{29}$$

$$P_1 A = L P^{(4)}, \quad B Q_2 = Q^{(3)} R, \quad S_3 C S_4 = D, \quad P_1 Y Q_2 = \hat{Y}; \tag{30}$$

$$A = P_3 L P^{(4)}, \quad B = Q^{(3)} R Q_4, \quad S_3 C S_4 = D, \quad Y = P_3 \hat{Y} Q_4. \tag{31}$$

Если удается построить систему (28) или (29), то решение уравнения (18) можно определить, согласно (21), в виде $X = X(\hat{X})$, где $\hat{X}$ — решение уравнения (19). Аналогично, при использовании систем (30) и (31) имеем $\hat{X} = \hat{X}(X)$.

Отметим, что каждое из ограничений (22)–(27) позволяет упростить систему (20). Так, если выполнены равенства (24), (25) и (27), то, исходя из (20), можно построить новую систему преобразований вида (28) путем полуобращения матриц полного ранга.

Изучим условия разрешимости уравнений (18) и (19), предполагая, что все матрицы $L_i$ и $R_i$ в системе (20) одновременно имеют квазитреугольную структуру:

$$L_i = \begin{bmatrix} L_{11}^{(i)} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\alpha 1}^{(i)} & \ldots & L_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, \hat{k}};$$

$$R_j = \begin{bmatrix} R_{11}^{(j)} & \ldots & R_{1\beta}^{(j)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & R_{\beta\beta}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad j = \overline{1, \hat{s}}. \tag{32}$$

Размеры диагональных блоков $L_{tt}^{(i)}$ и $R_{\tau\tau}^{(j)}$ обозначим соответственно через $l_{t1} \times l_{t2}$ и $r_{\tau 1} \times r_{\tau 2}$ $(t = 1, \ldots, \alpha; \tau = 1, \ldots, \beta)$. Используя блочную форму матриц

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{11} & \ldots & \hat{X}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{X}_{\alpha 1} & \ldots & \hat{X}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \quad \hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{Y}_{11} & \ldots & \hat{Y}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{Y}_{\alpha 1} & \ldots & \hat{Y}_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

представим уравнение (19) в виде системы $\alpha\beta$ матричных уравнений относительно $\hat{X}_{t\tau}$:

$$K_{11}\hat{X}_{11} = \hat{Y}_{11}, \quad K_{t\tau}\hat{X}_{t\tau} + N_{t\tau}\hat{X} = \hat{Y}_{t\tau}, \quad t + \tau > 2, \tag{33}$$

где $\hat{X}_{t\tau}$ и $\hat{Y}_{t\tau}$ — блоки размеров $l_{t2} \times r_{\tau 1}$ и $l_{t1} \times r_{\tau 2}$ соответственно, $K_{t\tau}$ и $N_{t\tau}$ — линейные операторы, определяемые соотношениями

$$K_{t\tau}\hat{X}_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\hat{k}} \sum_{j=1}^{\hat{s}} d_{ij} L_{tt}^{(i)} \hat{X}_{t\tau} R_{\tau\tau}^{(j)},$$

$$N_{t\tau}\hat{X} = \sum_{\xi=1}^{t} \sum_{\zeta=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{\hat{k}} \sum_{j=1}^{\hat{s}} d_{ij} L_{t\xi}^{(i)} \hat{X}_{\xi\zeta} R_{\zeta\tau}^{(j)}. \tag{34}$$

$$(\xi + \zeta < t + \tau)$$

Пусть все диагональные блоки матриц (32) квадратные: $l_{t1} = l_{t2}$, $r_{\tau 1} = r_{\tau 2}$. Операторы $N_{t\tau}$ действуют лишь на блоки $\hat{X}_{\xi\zeta}$ матрицы $\hat{X}$ при $\xi \le t$, $\zeta \le \tau$ и $\xi + \zeta \ne t + \tau$. Это можно использовать в рекуррентной процедуре исключения неизвестных системы (33), представляющей доказательство следующего утверждения.

**Лемма 1.** *Матричное уравнение (19) с квазитреугольными коэффициентами (32) имеет единственное решение при любой правой части в том и только в том случае, когда обратимы все операторы* $K_{t\tau}$.

Представим оператор уравнения (19) в виде

$$\hat{M} = K + N, \quad K\hat{X} = \begin{bmatrix} K_{11}\hat{X}_{11} & \dots & K_{1\beta}\hat{X}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\alpha 1}\hat{X}_{\alpha 1} & \dots & K_{\alpha\beta}\hat{X}_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

$$N\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & N_{12}\hat{X} & \dots & N_{1\beta}\hat{X} \\ N_{21}\hat{X} & N_{22}\hat{X} & \dots & N_{2\beta}\hat{X} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{\alpha 1}\hat{X} & N_{\alpha 2}\hat{X} & \dots & N_{\alpha\beta}\hat{X} \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Согласно лемме 1, условия обратимости операторов $\hat{M}$ и $K$ совпадают. При этом единственное решение уравнения (19) имеет вид

$$\hat{X} = \hat{Y}_1 + N_1\hat{Y}_1 + \ldots + N_1^{\nu-1}\hat{Y}_1,$$

$$\hat{Y}_1 = K^{-1}\hat{Y} = \begin{bmatrix} K_{11}^{-1}\hat{Y}_{11} & \dots & K_{1\beta}^{-1}\hat{Y}_{1\beta} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{\alpha 1}^{-1}\hat{Y}_{\alpha 1} & \dots & K_{\alpha\beta}^{-1}\hat{Y}_{\alpha\beta} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где $\nu = \alpha + \beta - 1$, $N_1 = -K^{-1}N$. Действительно, операторы $N$ и $N_1$ являются нильпотентными. Их индексы нильпотентности совпадают и не превосходят $\nu$,

Из формул (32) и (35) вытекает следующее утверждение.

**Лемма 2.** *При условиях* (32) *спектр оператора* $\hat{M}$ *состоит из собственных значений операторов* $K_{t\tau}$*:*

$$\sigma(\hat{M}) = \sigma(K) = \bigcup_{t} \bigcup_{\tau} \sigma(K_{t\tau}). \tag{37}$$

Пусть квазитреугольные матрицы (32) являются треугольными, т.е. $l_{t1} = l_{t2} = r_{\tau 1} = r_{\tau 2} = 1$. Тогда действия операторов $K$ и $K^{-1}$ определяют произведения Шура:

$$K\hat{X} = \Omega \odot \hat{X}, \quad K^{-1}\hat{Y} = \Delta \odot \hat{Y}, \tag{38}$$

где

$$\Omega = \Sigma_l D \Sigma_r^T = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_{\alpha 1} & \dots & \omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \dots & 1/\omega_{1\beta} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \dots & 1/\omega_{\alpha\beta} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} L_{11}^{(1)} & \dots & L_{11}^{(\hat{k})} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{\alpha\alpha}^{(1)} & \dots & L_{\alpha\alpha}^{(\hat{k})} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{bmatrix} R_{11}^{(1)} & \dots & R_{11}^{(\hat{s})} \\ \dots & \dots & \dots \\ R_{\beta\beta}^{(1)} & \dots & R_{\beta\beta}^{(\hat{s})} \end{bmatrix}.$$

В этом случае спектр (37) образуют элементы матрицы $\Omega$, а неравенства

$$w_{t\tau} = \sum_{i=1}^{\hat{k}} \sum_{j=1}^{\hat{s}} d_{ij} L_{tt}^{(i)} R_{\tau\tau}^{(j)} \neq 0, \quad t = \overline{1, \alpha}, \tau = \overline{1, \beta}, \tag{39}$$

представляют критерий однозначной разрешимости уравнения (19).

Условия разрешимости и решение исходного уравнения (18) можно получить с помощью (36) и следствий теоремы 3 для различных вариантов системы преобразований (20), в частности, (28)–(31).

## § 4. Инерциальные свойства трансформируемых уравнений

Рассмотрим класс матричных уравнений

$$MX = Y, \quad MX \triangleq \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* \equiv A(C \otimes X)A^*, \tag{40}$$

где $C$, $X$ и $Y$ — эрмитовы матрицы порядка $k$, $n$ и $p$ соответственно. Обозначение блочной матрицы $A = [A_1, \ldots, A_k]$ будем использовать также в качестве семейства $p \times n$ — матриц $A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Изучим свойства оператора $M$ и инерцию эрмитовых решений уравнения (40), используя системы преобразований типа (28)–(31):

$$P_1 A P^{(2)} = L, \quad C = S_1 D S_1^*, \quad P_1 Y P_1^* = \hat{Y}, \quad X = P_2 \hat{X} P_2^*; \tag{41}$$

$$A P^{(2)} = P_3 L, \quad C = S_1 D S_1^*, \quad Y = P_3 \hat{Y} P_3^*, \quad X = P_2 \hat{X} P_2^*; \tag{42}$$

$$P_1 A = L P^{(4)}, \quad S_3 C S_3^* = D, \quad P_1 Y P_1^* = \hat{Y}, \quad P_4 X P_4^* = \hat{X}; \tag{43}$$

$$A = P_3 L P^{(4)}, \quad S_3 C S_3^* = D, \quad Y = P_3 \hat{Y} P_3^*, \quad P_4 X P_4^* = \hat{X}. \tag{44}$$

Предположим, что существует одна из систем преобразований (41)–(44), приводящая к семейству треугольных матриц $L$:

$$L_i = \begin{bmatrix} l_{11}^{(i)} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21}^{(i)} & l_{22}^{(i)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ l_{\alpha 1}^{(i)} & l_{\alpha 2}^{(i)} & \ldots & l_{\alpha\alpha}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, \hat{k}. \tag{45}$$

При этом $P^{(2)} = S_1 \otimes P_2$, $P^{(4)} = S_3 \otimes P_4$, а $P_1, \ldots, P_4$ — некоторые матрицы полного ранга $\alpha$.

Для каждой из систем (41)–(44) определим семейства матриц

$$\mathcal{X} = \bigcup_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{X}_{t\tau}, \quad \mathcal{X}_{t\tau} = \{X : i_+(\hat{X}) = t, \quad i_-(\hat{X}) = \tau\},$$

$$\mathcal{Y} = \bigcup_{t,\tau=0}^{\alpha} \mathcal{Y}_{t\tau}, \quad \mathcal{Y}_{t\tau} = \{Y : i_+(\hat{Y}) = t, \quad i_-(\hat{Y}) = \tau\}.$$

Так, если используются системы (41) или (42), то $\mathcal{X}$ — множество эрмитовых матриц, представимых в виде $X = P_2\hat{X}P_2^*$. При этом, если $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$, то $i_+(X) = t$ и $i_-(X) = \tau$, поскольку $P_2$ — матрица полного ранга по столбцам. Для систем (43) или (44) принадлежность $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ означает, что $\hat{X} = P_4XP_4^*$ — эрмитова матрица с индексами инерции $i_+(\hat{X}) = t \le i_+(X)$ и $i_-(\hat{X}) = \tau \le i_-(X)$. Аналогично, с помощью матриц $P_1$ и $P_3$ описываются множества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_{t\tau}$. Отметим, что если $\alpha = n$ ($\alpha = p$), то в каждом случае (41)–(44) множество $\mathcal{X}(\mathcal{Y})$ состоит из всех эрмитовых $\alpha \times \alpha$ — матриц, а $\mathcal{X}_{\alpha 0}$ ($\mathcal{Y}_{\alpha 0}$) — подмножество положительно определенных матриц. Множества $\mathcal{X}_{00}$ и $\mathcal{Y}_{00}$ являются подпространствами. В частности, для систем (42) и (44), а также (41) и (43) в случае $\alpha = p$, подпространство $\mathcal{Y}_{00}$ нулевое.

**Лемма 3.** *Равенство $\mathcal{Y} = M\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00}$ выполнено в том и только в том случае, когда*

$$\omega_{t\tau} = \sum_{i,j=1}^{\hat{k}} d_{ij} l_{tt}^{(i)} \overline{l_{\tau\tau}^{(j)}} \ne 0, \quad t,\tau = \overline{1,\alpha}. \tag{46}$$

Доказательство. Рассмотрим соотношения

$$\hat{M}\hat{X} = \hat{Y}, \quad \hat{M}\hat{X} \triangleq \sum_{i,j=1}^{\hat{k}} d_{ij} L_i \hat{X} L_j^* \equiv L(D \otimes \hat{X})L^*, \tag{47}$$

где $L$ — семейство треугольных матриц (45). Спектр оператора $\hat{M}$ составляют $\alpha^2$ чисел $\omega_{t\tau}$ и неравенства (46) эквивалентны его обратимости. Операторы $M$ и $\hat{M}$ связаны одним из соотношений

$$P_1(MX)P_1^* = \hat{M}\hat{X}, \quad MX = P_3(\hat{M}\hat{X})P_3^*. \tag{48}$$

Первое (второе) из них выполнено для систем (41) и (43) ( (42) и (44) ). Поэтому $M\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00} \subseteq \mathcal{Y}$, в частности, $M\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Обратное включение $\mathcal{Y} \subseteq M\mathcal{X} + \mathcal{Y}_{00}$ означает, что каждая матрица $Y \in \mathcal{Y}$ представима в виде

$$Y = MX + Y_0, \quad X \in \mathcal{X}, \quad Y_0 \in \mathcal{Y}_{00}, \tag{49}$$

и, в силу ранговых ограничений на $P_1, \ldots, P_4$, эквивалентно разрешимости уравнения (47) при любой правой части, т.е. неравенствам (46).

Лемма доказана.

**Лемма 4.** *Операторы $\hat{M}$ и $\hat{M}^{-1}$ представимы в виде*

$$\hat{M}\hat{X} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \gamma_{t\tau}^{ij} E_{ti} \hat{X} E_{\tau j}^*, \tag{50}$$

$$\hat{M}^{-1}\hat{Y} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \theta_{t\tau}^{ij} E_{ti} \hat{Y} E_{\tau j}^*, \tag{51}$$

*где $\gamma_{t\tau}^{ij}$ и $\theta_{t\tau}^{ij}$ — скалярные коэффициенты, $E_{pq}$ — матрица с единственным ненулевым элементом, равным 1 и расположенным на пересечении $p$-й строки и $q$-го столбца.*

Доказательство. Подставляя в (47) разложения треугольных матричных коэффициентов

$$L_\xi = \sum_{t=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^{t} l_{ti}^{(\xi)} E_{ti}, \quad \xi = 1, \ldots, \hat{k},$$

приходим к выражению (50) для оператора $\hat{M}$. При этом

$$\gamma_{t\tau}^{ij} = \sum_{\xi,\zeta=1}^{\hat{k}} d_{\xi\zeta} l_{ti}^{(\xi)} \overline{l_{\tau j}^{(\zeta)}}, \quad i \leq t, \quad j \leq \tau. \tag{52}$$

Для обратного оператора $\hat{M}^{-1}$, существующего при условиях (46), можно построить аналогичное выражение (51). Действительно, все его матричные коэффициенты, образующиеся в результате применения формул (34)–(36), составляют суммы или произведения левых треугольных матриц и, поэтому, также имеют треугольную структуру. Для вычисления скалярных коэффициентов разложения (51) имеем систему линейных рекуррентных соотношений

$$\gamma_{t\tau}^{t\tau}\theta_{t\tau}^{t\tau} = 1, \quad \sum_{\xi=i}^{t}\sum_{\zeta=j}^{\tau}\gamma_{\xi\zeta}^{ij}\theta_{t\tau}^{\xi\zeta} = 0, \tag{53}$$

$$i \le t, \quad j \le \tau, \quad i + j < t + \tau,$$

вытекающих из тождества $\hat{M}^{-1}\hat{M}\hat{X} \equiv \hat{X}$. Неравенства (46) являются критерием однозначной разрешимости системы (53) при заданных значениях коэффициентов (52).

Лемма доказана.

Построим из скалярных коэффициентов разложений (50) и (51) блочные матрицы

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma_{\alpha 1} & \dots & \Gamma_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_{t\tau} = \begin{bmatrix} \gamma_{t\tau}^{11} & \dots & \gamma_{t\tau}^{1\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{t\tau}^{t1} & \dots & \gamma_{t\tau}^{t\tau} \end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \Theta_{\alpha 1} & \dots & \Theta_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Theta_{t\tau} = \begin{bmatrix} \theta_{t\tau}^{11} & \dots & \theta_{t\tau}^{1\tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{t\tau}^{t1} & \dots & \theta_{t\tau}^{t\tau} \end{bmatrix}, \tag{55}$$

Поскольку $\gamma_{t\tau}^{t\tau} = \omega_{t\tau}$ и $\theta_{t\tau}^{t\tau} = 1/\omega_{t\tau}$, то в (54) и (55) можно выделить главные подматрицы, состоящие из собственных значений операторов (50) и (51), вида

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{\alpha 1} & \dots & \omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1/\omega_{11} & \dots & 1/\omega_{1\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/\omega_{\alpha 1} & \dots & 1/\omega_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \tag{56}$$

**Лемма 5.** *Пусть матрица* $\Gamma$ *имеет лишь одно положительное собственное значение:*

$$i_+(\Gamma) = 1. \tag{57}$$

*Тогда условия (46) и матричное неравенство*

$$\Theta \ge 0 \tag{58}$$

*выполнены в том и только в том случае, когда все диагональные элементы матрицы* $\Omega$ *положительны :*

$$\omega_{11} > 0, \quad \omega_{22} > 0, \quad \dots, \quad \omega_{\alpha\alpha} > 0. \tag{59}$$

Доказательство. Матрица $\Theta$ определена при условиях (46) и $\Delta$ является ее главной подматрицей. Поэтому из (58) следует $\Delta \geq 0$ и выполнены неравенства (59). Пусть выполнены соотношения (57) и (59). Тогда все элементы матрицы $\Omega$ ненулевые. Действительно, индексы инерции $i_\pm$ любой главной подматрицы не превосходят соответствующие индексы инерции всей матрицы [101]. В частности, выполнены неравенства

$$i_\pm(\Omega) \leq i_\pm(\Gamma), \quad i_\pm(\Delta) \leq i_\pm(\Theta). \tag{60}$$

Если $\omega_{t\tau} = 0$ и $t \neq \tau$, то $\Omega$ содержит положительно определенную главную подматрицу второго порядка, расположенную на пересечении строк и столбцов с номерами $t$ и $\tau$. Это, согласно (60), противоречит предположению (57).

Докажем неравенство (58). При условии (57) элементы матрицы (54) разлагаются в виде

$$\gamma_{t\tau}^{ij} = u_{ti}^{(0)}\overline{u_{\tau j}^{(0)}} - \sum_s u_{ti}^{(s)}\overline{u_{\tau j}^{(s)}}, \quad i \leq t, \quad j \leq \tau. \tag{61}$$

Подставляя эти выражения в (50), имеем

$$\hat{M} = \hat{M}_+ - \hat{M}_-, \quad \hat{M}_+\hat{X} = U_0\hat{X}U_0^*, \quad \hat{M}_-\hat{X} = \sum_s U_s\hat{X}U_s^*,$$

где $U_s$ — левые треугольные матрицы с элементами $u_{ti}^{(s)}$ при $i \leq t$. Из (59) и (61) следует, что все диагональные элементы матрицы $U_0$ ненулевые и оператор $\hat{M}_+$ обратим. Собственные значения оператора $W = \hat{M}_-\hat{M}_+^{-1}$ с учетом (59), (61) и неравенства Коши удовлетворяют условиям

$$w_{t\tau} = \left(\sum_s u_{tt}^{(s)}\overline{u_{\tau\tau}^{(s)}}\right) \Big/ \left(u_{tt}^{(0)}\overline{u_{\tau\tau}^{(0)}}\right), \quad |w_{t\tau}|^2 \leq w_{tt}w_{\tau\tau} < 1.$$

Поэтому для оператора $\hat{M}^{-1}$ можно построить выражение

$$\hat{M}^{-1}\hat{Y} = U_0^{-1}(\sum_{s=0}^{\infty} W^s\hat{Y})U_0^{-1*} = \sum_s V_s\hat{Y}V_s^*,$$

где $V_s$ — левые треугольные матрицы с элементами $v_{ti}^{(s)}$ при $i \leq t$. Приведем данное выражение к виду (51):

$$\hat{M}^{-1}\hat{Y} = \sum_{t,\tau=1}^{\alpha} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \check{\theta}_{t\tau}^{ij} E_{ti}\hat{Y}E_{\tau j}^*, \quad \check{\theta}_{t\tau}^{ij} = \sum_s v_{ti}^{(s)}\overline{v_{\tau j}^{(s)}}.$$

Здесь коэффициенты $\check{\theta}_{t\tau}^{ij}$ $(i \leq t, j \leq \tau)$ составляют матрицу $\check{\Theta} = \check{\Theta}^* \geq 0$. Однако, коэффициенты разложения (51) определяются однозначно. Следовательно, $\Theta = \check{\Theta} \geq 0$.

Лемма доказана.

**Лемма 6 [70].** *Если выполнено равенство*

$$i_+(\Omega) = 1, \tag{62}$$

*то условия (46) и матричное неравенство*

$$\Delta \geq 0 \tag{63}$$

*эквивалентны скалярным неравенствам (59).*

Данное утверждение справедливо для любых эрмитовых матриц вида (56) и вытекает из леммы 5 в том случае, когда матрицы (45) являются диагональными. В этом случае все элементы матриц (54) и (55), не принадлежащие соответствующим подматрицам (56), нулевые и в (60) достигаются равенства.

**Лемма 7 [74].** *Пусть $\Delta$ и $H$ — эрмитовы матрицы одинаковых размеров. Тогда неравенство $\Delta \odot H \geq 0$ выполнено при всех $H \geq 0$ в том и только в том случае, когда $\Delta \geq 0$. Строгое неравенство $\Delta \odot H > 0$ выполнено при всех $H > 0$ в том и только в том случае, когда $\Delta \geq 0$ и все диагональные элементы матрицы $\Delta$ положительны.*

Доказательство. Согласно теореме о произведении Шура [101], из $\Delta \geq 0$, $H \geq 0$ ($\Delta > 0, H > 0$) следует $\Delta \odot H \geq 0$ ($\Delta \odot H > 0$). Пусть $E_\varepsilon = E + \varepsilon I$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $I$ — единичная матрица, а все элементы матрицы $E$ равны 1. Очевидно, $E \odot \Delta = \Delta$ и $E_\varepsilon > 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Если неравенство $\Delta \odot H \geq 0$ выполнено для любой матрицы $H > 0$, то $\Delta \odot E_\varepsilon = \Delta + \varepsilon \Delta \odot I \geq 0$ и при $\varepsilon \to 0$ имеем $\Delta \geq 0$.

Пусть $H > 0$, $\Delta \geq 0$ и $\Delta \odot I > 0$. Последнее неравенство означает, что все диагональные элементы матрицы $\Delta$ положительны. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $H_\varepsilon = H - \varepsilon I > 0$ и, следовательно, $\Delta \odot H = \Delta \odot H_\varepsilon + \Delta \odot I > 0$.

Лемма доказана.

**Теорема 4.** *Если выполнены неравенства*

$$\omega_{11} \neq 0, \quad \omega_{22} \neq 0, \quad \ldots, \quad \omega_{\alpha\alpha} \neq 0, \tag{64}$$

*то существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, удовлетворяющие уравнению (40). При этом $t$ и $\tau$ совпадают с количествами положительных и отрицательных чисел (64):*

$$t = \sum_{s=1}^{\alpha} i_+(\omega_{ss}), \quad \tau = \sum_{s=1}^{\alpha} i_-(\omega_{ss}), \quad t + \tau = \alpha. \tag{65}$$

*Если существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, удовлетворяющие условиям (49) при ограничениях*

$$i_+(\Gamma) \leq 1, \quad i_-(\Gamma) \leq 1, \tag{66}$$

*то выполнены соотношения (64) и (65).*

**Теорема 5.** *Если выполнены неравенства (59), то существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, удовлетворяющие уравнению (40). Если существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, удовлетворяющие условиям (49) при ограничении (57), то выполнены неравенства (59).*

**Теорема 6.** *Если выполнены неравенства (46) и (58), то каждая матрица $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$ представима в виде (49) при $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$,* *т. е.*

$$\mathcal{Y}_{\alpha 0} \subseteq M\mathcal{X}_{\alpha 0} + \mathcal{Y}_{00}. \tag{67}$$

*Неравенства (46), (59) и (63) являются следствием включения (67).*

Доказательство теорем 4–6. Если

$$i_+(\hat{X}) = t, \quad i_-(\hat{X}) = \tau, \tag{68}$$

где $\hat{X}$ — решение уравнения (47) при $\hat{Y} > 0$, то, согласно (48), существуют матрицы $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$, удовлетворяющие уравнению (40). В частности, $X \in \mathcal{X}_{\alpha 0}$ при $\hat{X} > 0$. Обратно, если для некоторых $X \in \mathcal{X}_{t\tau}$ и $Y \in \mathcal{Y}_{\alpha 0}$ выполнены соотношения (49), в частности, (40), то существует матрица $\hat{X}$ с индексами инерции (68) такая, что $\hat{M}\hat{X} > 0$.

Пусть $X_s$ и $Y_s$ — последовательные главные подматрицы порядка s соответствующих матриц $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ в уравнении (47), $s = 1, \ldots, \alpha$. Учитывая формулу (50), имеем соотношения

$$Y_s = \sum_{t,\tau=1}^{s} \sum_{i,j=1}^{t,\tau} \gamma_{t\tau}^{ij} E_{ti} X_s E_{\tau j}^*, \quad s = 1, \ldots, \alpha.$$

Здесь матрицы $E_{ti}$ имеют размеры $s \times s$, Согласно теореме 2,

$$i_+(Y_s) \le i_+(\Gamma_s \otimes X_s) \le i_+(\Gamma \otimes X_s) = i_+(\Gamma) i_+(X_s) + i_-(\Gamma) i_-(X_s),$$

где $\Gamma_s$ — главная подматрица матрицы $\Gamma$, состоящая из блоков $\Gamma_{t\tau}$, $t \le s$, $\tau \le s$. Равенства $i_+(Y_s) = s$ выполнены во всех утверждениях теорем 4–6, а в теоремах 5 и 6 $i_+(X_s) = s$. При условиях (66) имеем соотношения $s \le i_+(X_s) + i_-(X_s) = \operatorname{rang} X_s$. Поэтому мы рассматриваем лишь такие матрицы $\hat{X}$, которые удовлетворяют уравнению (47) при $\hat{Y} > 0$ и все последовательные главные миноры которых ненулевые.

Представим подматрицы $X_s$ и $Y_s$ в виде

$$X_s = \begin{bmatrix} X_{s-1} & u_s^* \\ u_s & x_s \end{bmatrix} = \Psi_s \begin{bmatrix} X_{s-1} & 0 \\ 0 & æ_s \end{bmatrix} \Psi_s^*, \tag{69}$$

$$Y_s = \begin{bmatrix} Y_{s-1} & v_s^* \\ v_s & y_s \end{bmatrix} = \Phi_s W_s \Phi_s^* + H_s,$$

где

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} I_{s-1} & 0 \\ u_s X_{s-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad W_s = \Gamma_s \otimes \begin{bmatrix} X_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & æ_s \omega_{ss} \end{bmatrix}.$$

$$\Phi_s = [E_{11}\Psi_s, E_{21}\Psi_s, \ldots, E_{s1}\Psi_s, \ldots, E_{ss}\Psi_s], æ_s = x_s - u_s X_{s-1}^{-1} u_s^*.$$

Отметим, что все элементы матрицы $Y_s$, кроме $y_s$, не зависят от $x_s$, Если $X_{s-1} > 0$, то $X_s > 0$ при $æ_s > 0$. Аналогично, если $Y_{s-1} > 0$ и $y_s > v_s Y_{s-1}^{-1} v_s^*$, то $Y_s > 0$.

При условиях (64) мы можем последовательно выбирать элементы $x_s$ матриц $X_s$ так, чтобы выполнялись неравенства $æ_s \omega_{ss} > 0$, $Y_s > 0$ и равенства

$$i_\pm(X_1) = i_\pm(\omega_{11}), \quad i_\pm(X_s) = i_\pm(X_{s-1}) + i_\pm(\omega_{ss}), \quad s = \overline{2, \alpha}. \quad (70)$$

Это означает, что существует матрица $\hat{X}$ с индексами инерции (68) такая, что $\hat{M}\hat{X} > 0$. В частности, $\hat{X} > 0$ при условиях (59).

Для доказательства обратных утверждений теорем 4 и 5 также используем соотношения (69). Пусть $\hat{Y} = \hat{M}\hat{X} > 0$. Тогда при условиях (66) выполнены соотношения

$$s = i_+(Y_s) > i_+(W_s) = i_+(\Gamma_s)i_+(X_{s-1}) + i_-(\Gamma_s)i_-(X_{s-1}) \quad (71)$$

и с учетом свойства монотонности чисел $i_+(.)$ имеем неравенства $H_s \geq 0$ и $H_s \neq 0$, которые означают,что $æ_s \omega_{ss} > 0$. При этом знаки чисел $æ_s$ и $\omega_{ss}$ совпадают и выполнены равенства (65), (68) и (70). Если же $\hat{X} > 0$, то соотношения (71) также справедливы при условии (57). В этом случае аналогично приходим к неравенствам (59).

Перейдем к доказательству теоремы 6. Включение (67) означает, что для любой матрицы $\hat{Y} > 0$ уравнение (47) имеет решение

$\hat{X} > 0$. Неравенства (46) эквивалентны обратимости оператора (50). Используя спектральное разложение элементов матрицы $\Theta$

$$\theta_{t\tau}^{ij} = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s g_{ti}^{(s)} \overline{g_{\tau j}^{(s)}}, \quad \sigma_s \in \sigma(\Theta), \quad r = \operatorname{rang} \Theta,$$

преобразуем выражение обратного оператора (51) к виду

$$\hat{M}^{-1}\hat{Y} = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s G_s \hat{Y} G_s^*, \tag{72}$$

где

$$G_s = \begin{bmatrix} g_{11}^{(s)} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21}^{(s)} & g_{22}^{(s)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{\alpha 1}^{(s)} & g_{\alpha 2}^{(s)} & \dots & g_{\alpha\alpha}^{(s)} \end{bmatrix}, \quad \operatorname{tr}(G_s G_q^*) = \delta_{sq} = \begin{cases} 1 & s = q \\ 0 & s \neq q \end{cases}.$$

Матричное неравенство (58) эквивалентно скалярным неравенствам $\sigma_s > 0$, $s = 1, \dots, r$. При этом для любой матрицы $\hat{Y} \geq 0$ уравнение (47) имеет решение $\hat{X} = \hat{M}^{-1}\hat{Y} \geq 0$. Более того, если $\hat{Y} > 0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнены неравенства $\hat{X} \geq \varepsilon \hat{X}_0 > 0$ и $\hat{Y} > \varepsilon \hat{Y}_0$, где $\hat{X}_0 > 0$ и $\hat{Y}_0 = \hat{M}\hat{X}_0 > 0$ — некоторые матрицы, существующие при условиях (59).

Покажем, что неравенства (46), (59) и (63) являются следствием включения (67). Если уравнение (47) имеет решение при $\hat{Y} > 0$, то оно разрешимо и для любой правой части $\hat{Y}$. Действительно, произвольную матрицу $\hat{Y}$ и соответствующее решение $\hat{X}$ уравнения (47) можно представить в виде линейных комбинаций эрмитовых положительно определенных матриц (см. доказательство леммы 5 гл.1). Поэтому при условии (67) выполнены неравенства (46) и оператор $\hat{M}$ обратим.

Для любых векторов $a = [a_1, \dots, a_\alpha]^T$ и $b = [b_1, \dots, b_\alpha]^T$, согласно (72), выполнены соотношения

$$b^* \hat{M}^{-1}(aa^*)b = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s |\operatorname{tr}(G_s a b^*)|^2 \geq 0.$$

В частности, если $b_t = \varepsilon^t$ и $a_t = \bar{c}_t/\varepsilon^t$, то при $\varepsilon \to 0$ имеем $c^*\Delta c \geq 0$, где $c = [c_1, \ldots, c_\alpha]^T$ — произвольный вектор. Следовательно, из (67) вытекают неравенства (59) и (63).

Теоремы 4–6 доказаны.

**Примечание 2.** В леммах 5, 6 и теоремах 4–6 вместо условий (57), (62) и (66) можно использовать аналогичные ограничения на индексы инерции матриц $C$ и $D$, Матрица (54) представима в виде

$$\Gamma = ZDZ^\star, \quad Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_\alpha \end{bmatrix},$$

$$Z_t = \begin{bmatrix} l_{t1}^{(1)} & \ldots & l_{t1}^{(\hat{k})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{tt}^{(1)} & \ldots & l_{tt}^{(\hat{k})} \end{bmatrix}, \quad t = 1, \ldots, \alpha.$$

Поэтому выполнены неравенства $i_\pm(\Gamma) \leq i_\pm(D)$. Если используются системы преобразований (43) и (44), то $i_\pm(D) \leq i_\pm(C)$. Для систем (41) и (42) выполнены противоположные неравенства.

**Примечание 3.** Если все матрицы (45) являются диагональными, то операторы (50) и (51) сводятся к произведениям Шура вида (38). В этом случае ограничения (66) и (57), используемые в лемме 5 и теоремах 4 и 5, эквивалентны соотношениям $i_\pm(\Omega) \leq 1$ и $i_+(\Omega) = 1$ соответственно, а в теореме 6, вытекающей из леммы 7, включение (67) эквивалентно системе неравенств (46) и (63). Если в разложении (51) $\theta_{t\tau}^{ij} = 0$ при $(t, i) \notin \sigma$ или $(\tau, j) \notin \sigma$, где

$$\sigma = \{(t, i)/ \max(t - 1, 1) \leq i \leq t \leq \alpha\},$$

то матрицы $G_s$ в (72) имеют левую двухдиагональную форму и включение (67) эквивалентно системе неравенств (46) и (58) (см. дополнение 1).

## § 5. Распределение собственности матричных коллективов

Пусть задано семейство $n \times m$-матриц $A_\lambda$, где $\lambda \in \Lambda$ — некоторое множество индексов. В качестве $A_\lambda$ может выступать матричная функция, однозначно определенная на скалярном или векторном множестве параметров $\Lambda$. Если $\Lambda$ — конечное (счетное) множество, то мы рассматриваем конечный (счетный) набор матриц $A_\lambda$,

Определим классы матричных семейств, используя преобразования

$$P_1 A_\lambda P_2 = L_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda), \tag{73}$$

$$P_1 A_\lambda = L_\lambda P_4 \quad (\lambda \in \Lambda), \tag{74}$$

$$A_\lambda P_2 = P_3 L_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda), \tag{75}$$

$$A_\lambda = P_3 L_\lambda P_4 \quad (\lambda \in \Lambda), \tag{76}$$

где $P_1, \ldots, P_4$ — матрицы полного ранга $\alpha$, не зависящие от $\lambda$, $L_\lambda \in C^{\alpha \times \alpha}$[74]. Семейство $A_\lambda$ называется коллективом порядка $\alpha$, если существуют матрицы $P_1 \in C^{\alpha \times n}$ и $P_2 \in C^{m \times \alpha}$ полного ранга $\alpha$ такие, что все квадратные матрицы $L_\lambda$ вида (73) имеют треугольную форму одного и того же типа ( нижнюю или верхнюю). В частности, если все матрицы $L_\lambda$ диагональные, то $A_\lambda$ — идеальный коллектив порядка $\alpha$. Аналогично, с помощью соотношений (74), (75) и (76) определяются соответственно левый, правый и нейтральный коллективы порядка $\alpha$ [74]. При этом все квадратные матрицы $L_\lambda$ порядка $\alpha$ также имеют треугольную форму и, в силу ранговых ограничений на матрицы преобразований $P_3 \in C^{n \times \alpha}$ и $P_4 \in C^{\alpha \times m}$, представимы в виде (73). Векторы $l_\lambda$ порядка $\alpha$, составленные из диагональных элементов (собственных значений) треугольных матриц $L_\lambda$, образуют собственность коллектива $A_\lambda$,

Определения коллективов с помощью преобразований (73)–(76) при $\alpha = n = m$ эквивалентны. Если $P_2 = P_1^{-1}$, то коллектив $A_\lambda$ порядка $n$ представляет семейство матриц, одновременно приводимых к треугольной форме с помощью преобразования подобия (73). В этом случае векторы собственности $l_\lambda$ состоят из собственных значений соответствующих матриц $A_\lambda$.

Приведем примеры матричных семейств, являющихся коллективами.

1. Семейство аналитических функций от матрицы $A_f = f(A)$. Данный коллектив идеален, если матрица $A$ имеет простую структуру. Используя жорданову форму матрицы $A$, можно построить векторы собственности $l_f$, компонентами которых служат значения функций $f$ на спектре матрицы $A$.

2. Семейства попарно коммутирующих и квазикоммутирующих матриц [101,118]. Их собственностью по отношению к преобразованию подобия служат векторы, составленные из собственных значений каждой матрицы.

3. Аналитическая матрица-функция

$$A_\lambda = \sum_k f_k(\lambda) A_k, \quad \lambda \in C^1,$$

где $f_k$ — скалярные функции, $A_k$ — заданный коллектив. В частности, регулярный пучок $n \times n$-матриц

$$A_\lambda = A - \lambda B, \quad \det A_\lambda \not\equiv 0,$$

является коллективом порядка $n$. Его векторы собственности можно построить, исходя из канонической формы Кронекера [11].

Рассмотрим матричное уравнение (40) и предположим, что семейство матричных коэффициентов A является коллективом порядка $\alpha \le \min\{n, p\}$. Тогда мы можем построить систему преобразований (41), приводящую к уравнению (47) с треугольными коэффициентами (45). При этом скалярные коэффициенты можно оставить без изменений, полагая $C = D$. Если коллектив $A$ является левым, правым или нейтральным, то мы используем соответствующие системы преобразований (43), (42) или (44). Матрица $\Omega$, составленная из собственных значений $\omega_{ij}$ оператора $\hat{M}$, представима в виде

$$\Omega = \Sigma C \Sigma^*, \quad \Sigma = [l_1, \dots, l_k],$$

где $l_t \in C^\alpha$ — векторы собственности коллектива $A$. Теоремы 4–6 дают общую методику изучения и оценки элементов собственности коллектива $A$ в терминах индексов инерции эрмитовых решений уравнения (47). Приведем следствия этих теорем в случае $\alpha = n = p$.

**Теорема 7.** *Матричное неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* > 0 \tag{77}$$

*разрешимо в том и только в том случае, когда* $\omega_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. *При этом существует решение* $X = X^*$, *удовлетворяющее соотношениям*

$$i_+(X) = \sum_{s=1}^{n} i_+(\omega_{ss}), \quad i_-(X) = \sum_{s=1}^{n} i_-(\omega_{ss}), \quad i_0(X) = 0. \tag{78}$$

*Если* $X = X^*$ — *произвольное решение матричного неравенства (77) при ограничениях* $i_\pm(C) \leq 1$, *то выполнены соотношения (78).*

**Теорема 8.** *Если* $\omega_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$, *то существует положительно определенное решение* $X > 0$ *матричного неравенства (77). Обратное утверждение выполняется при ограничении* $i_+(C) = 1$.

**Теорема 9.** *Неравенства* $||1/\omega_{ij}||_1^n \geq 0$, $\omega_{ij} \neq 0$, $i,j = \overline{1,n}$, *необходимы, а соотношения* $i_+(C) = 1$, $w_{ii} > 0$, $i = \overline{1,n}$, *достаточны для того, чтобы уравнение (40) имело положительно определенное решение* $X > 0$ *при любой положительно определенной правой части* $Y > 0$.

Данные утверждения можно усилить в случае идеального коллектива $A$ (см. примечание 3).

**Пример.** Рассмотрим уравнение (40) с оператором

$$MX = A_1 X A_2^* + A_2 X A_1^* + c A_3 X A_3^*,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

где $c \neq -2$ и $a$ — вещественные параметры. Матрицы $A_i$ не приводимы одновременно к треугольному виду преобразованием подобия, но образуют нейтральный коллектив $A$ порядка 2:

$$PA_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad PA_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$PA_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} c+2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1/(c+2) & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Операторы $M$ и $\hat{M}$ связаны соотношением $\hat{M}X = P(MX)P^*$, а матрицы (54) и (55) имеют вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c+2 & a & 3 \\ a & 0 & 2a \\ 3 & 2a & 4 \end{bmatrix},$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 1/(c+2) & -a/(3c+6) & 1/3 \\ -a/(3c+6) & a^2/(3c+6) & -a/6 \\ 1/3 & -a/6 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Условие $c \neq -2$ эквивалентно обратимости оператора $M$, а также совместности неравенства (77). Рассмотрим следующие случаи.

а) $a = 0$. В данном случае коллектив $A$ идеальный и в теоремах 4, 5, 7 и 8 можно положить

$$X = \begin{bmatrix} c+2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad MX = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & (c+2)^2 \end{bmatrix} > 0.$$

Условия $i_\pm(\Omega) \leq 1$, $i_+(\Omega) = 1$ и $\Delta \geq 0$ приводятся к соответствующим неравенствам $c \leq 1/4$, $c \leq 1/4$ и $-2 < c \leq 1/4$. Если $c \leq 1/4$, то для любого решения $X$ неравенства (77) $i_+(X) =$

$= i_+(c+2)+1$ и $i_-(X) = i_-(c+2)$. Неравенство (77) имеет решение $X > 0$ при $c > -2$. Для любой матрицы $Y > 0$ уравнение (40) имеет решение $X > 0$ в том и только в том случае, когда $-2 < c \leq 1/4$.

b) $a \neq 0$. Соотношения $i_\pm(\Gamma) \leq 1$, $i_+(\Gamma) = 1$ и $\Theta \geq 0$ эквивалентны соответствующим условиям $c = 0$, $c \leq 0$ и $-2 < c \leq 0$. В теоремах 4, 5, 7 и 8 можно положить

$$X = \begin{bmatrix} c+2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad MX = \begin{bmatrix} 4\alpha & a(c+2) \\ a(c+2) & (c+2)^2 \end{bmatrix} > 0,$$

где $\alpha > a^2/4$. При этом $i_+(X) = i_+(c+2)+1$, $i_-(X) = i_-(c+2)$. В частности, при $c = 0$ произвольное решение неравенства (77) является положительно определенным. Если $X > 0$ — решение (77) при $c \leq 0$, то необходимо $c > -2$. Уравнение (40) для любой матрицы $Y > 0$ имеет решение $X > 0$ в том и только в том случае, когда $-2 < c \leq 0$.

## § 6. Методы построения решений матричных уравнений

**1. Методы сведения.** Матричное уравнение (1) эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений

$$Gx = y, \tag{79}$$

где

$$G = \sum_{i,j} c_{ij} A_i \otimes B_j^T, \quad x = [x_{1*}, \ldots, x_{n*}]^T, \quad y = [y_{1*}, \ldots, y_{p*}]^T.$$

В данном случае векторы $x$ и $y$ составлены из элементов матриц $X$ и $Y$, упорядоченных по строкам. Системы, аналогичные (79), можно построить, используя другие способы упорядочивания элементов X и Y [21,44].

Критерием совместности системы (79) и, следовательно, матричного уравнения (1) является равенство $\operatorname{rang}[G, y] = \operatorname{rang} G$.

Для любой матрицы $Y \in C^{p\times q}$ уравнение (1) имеет решение $X \in C^{n\times m}$ в том и только в том случае, когда $\operatorname{rang} G = pq$. При этом $x = G^{-}y$. В случае $pq = nm$, $\det G \neq 0$ имеем единственное решение $x = G^{-1}y$.

**2. Методы трансформаций.** Сущность методов трансформаций представляет теорема 3 и ее следствия. Для матричного уравнения (18) строится система (20), преобразующая его к более простому виду (19). Если матричные коэффициенты уравнения (19) имеют квазитреугольную, в частности, треугольную структуру (32), то при условиях леммы 1 решение уравнения (19) строится в виде (36), а решение исходного уравнения (18) определяется с помощью соотношений (21).

Для класса матричных уравнений (40) можно использовать системы преобразований (41)–(44), а при построении их решений использовать формулы (51) и (53).

В качестве примера рассмотрим двучленное уравнение Сильвестра

$$A_1XB_2 - A_2XB_1 = Y. \tag{80}$$

Оператор левой части данного уравнения представим в виде

$$MX = \frac{1}{w}[(a_1A_1 + a_2A_2)X(b_1B_1 + b_2B_2) -$$
$$-(b_1A_1 + b_2A_2)X(a_1B_1 + a_2B_2)],$$

где $w = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. В частности, имеем представление

$$MX = \frac{1}{\lambda - \mu}[A(\lambda)XB(\mu) - A(\mu)XB(\lambda)], \quad \lambda \neq \mu, \tag{81}$$

где $A(\lambda) = A_1 - \lambda A_2$ и $B(\lambda) = B_1 - \lambda B_2$ — пучки матриц размеров $p \times n$ и $m \times q$ соответственно.

При изучении условий разрешимости и построении алгоритмов решения уравнения (80) можно использовать эквивалентные преобразования пучков матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ к канонической форме:

$$P_1A(\lambda)P_2 = \hat{A}_1 - \lambda\hat{A}_2, \quad Q_1B(\lambda)Q_2 = \hat{B}_1 - \lambda\hat{B}_2,$$

где $P_1$, $P_2$, $Q_1$ и $Q_2$ — квадратные невырожденные матрицы. В результате вместо (80) требуется решить более простое уравнение

$$\hat{A}_1\hat{X}\hat{B}_2 - \hat{A}_2\hat{X}\hat{B}_1 = \hat{Y}, \tag{82}$$

где $X = P_2\hat{X}Q_1$, $\hat{Y} = P_1YQ_2$,

Каноническая форма Кронекера произвольного пучка матриц имеет следующую структуру [11]:

$$\begin{bmatrix} J-\lambda I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I-\lambda N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{83}$$

где первые два диагональные блока образуют регулярное ядро, отвечающее конечным и бесконечным элементарным делителям пучка, а диагональные блоки блочно-диагональных матриц $U(\lambda)$ и $V(\lambda)$ имеют вид

$$U_i(\lambda) = [0, I_{k_i}] + \lambda[I_{k_i}, 0], \quad V_j(\lambda) = [0, I_{s_j}]^T + \lambda[I_{s_j}, 0]^T.$$

Здесь $I_r$ — единичная матрица порядка $r$, 0 — нулевой вектор подходящих размеров, а числа $k_i$, $i = \overline{1,t}$ ($s_j, j = \overline{1,\tau}$) совпадают с ненулевыми минимальными индексами для столбцов (строк) пучка. Размеры нулевого диагонального блока $0 \in C^{\xi\times\eta}$ в (83) определяются количеством $\eta(\xi)$ его нулевых минимальных индексов для столбцов (строк).

Через $\Delta(A)$ ($\Delta(A^T)$) обозначим полный набор минимальных индексов для столбцов (строк) пучка $A(\lambda)$ и определим множество точек $\sigma_p(A) = \{\lambda : \operatorname{rang} A(\lambda) < p\}$, обобщающее понятие спектра.

**Теорема 10.** *Для любой матрицы $Y \in C^{p\times q}$ уравнение (80) имеет решение $X \in C^{n\times m}$ в том и только в том случае, когда выполнены соотношения*

$$(\operatorname{rang} A_2 - p)(\operatorname{rang} B_2 - q) = 0, \tag{84}$$

$$\operatorname{rang}[A_1, A_2] = p, \quad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = q, \tag{85}$$

$$\sigma_p(A) \cap \sigma_q(B) = \varnothing, \tag{86}$$

$$k \in \Delta(A), \quad s \in \Delta(B) \Rightarrow k \leq s, \tag{87}$$

$$k \in \Delta(A^T), \quad s \in \Delta(B^T) \Rightarrow k \geq s. \tag{88}$$

*При этом решение $X$ единственно, если $pq = nm$.*

Данное утверждение устанавливается на основе приведения пучков матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ к канонической форме (83) и использования соотношений (81) и (82). При этом матричное уравнение (82) распадается на независимые матричные уравнения, анализ разрешимости которых приводит к соотношениям (84)–(88). В частности, неравенства $k \leq s$ в (87) эквивалентны разрешимости при любой правой части матричных уравнений типа

$$[I_k, 0]\tilde{X}[0, I_s] - [0, I_k]\tilde{X}[I_s, 0] = \tilde{Y},$$

возникающих при наличии ненулевых минимальных индексов для столбцов пучков $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Равенства (85) выражают отсутствие нулевых минимальных индексов для строк $A(\lambda)$ и столбцов $B(\lambda)$.

Отметим, что критерием однозначной разрешимости уравнения (80) (т. е. обратимости оператора $M$) является выполнение одного из следующих требований: a) пучки матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ регулярные и удовлетворяют условиям (84)–(86); b) пучки матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ не имеют регулярных ядер и минимальных индексов для строк, а все элементы множества $\Delta(A) \cup \Delta(B)$ ненулевые и совпадают; c) пучки матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ не имеют регулярных ядер и минимальных индексов для столбцов, а все элементы множества $\Delta(A^T) \cup \Delta(B^T)$ ненулевые и совпадают. В каждом из случаев a), b) и c) выполняется равенство $pq = nm$. В случае регулярных пучков матриц $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ условия (85), (87) и (88) всегда выполняются, а соотношение (86) является ограничением на спектры $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \varnothing$ (см., например, [21, 30]).

Изложенная методика анализа и построения решений уравнения (80) является обобщением методов трансформационного типа, основанных на приведении матриц к форме Шура с помощью ортогональных преобразований [21].

**3. Метод рядов.** Рассмотрим класс матричных уравнений

$$X - WX = Y, \quad \rho(W) < 1, \tag{89}$$

где $\rho(W)$ — спектральный радиус оператора $W : C^{n\times m} \to C^{n\times m}$. Решения таких уравнений представляются в виде сходящегося ряда

$$X = \lim_{s\to\infty} X_s, \quad X_s = Y + WY + \ldots + W^{s-1}Y, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Непосредственное вычисление частичных сумм $X_s$ при больших $n$ и $m$ не является эффективным. Для более быстрого построения решения $X$ с заданной точностью можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$X_{s_0} = Y, \quad X_{s_{k+1}} = X_{s_k} + W^{s_k} X_{s_k}, \quad W^{s_{k+1}} = (W^{s_k})^2,$$

где $s_k = 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$.

Метод рядов предпочтительнее метода сведения в тех случаях, когда требуется экономия машинной памяти и времени расчета. Основной недостаток метода рядов связан с ограничением на спектральный радиус оператора $W$. Например, в случае уравнения Ляпунова для дискретных систем $WX = AXA^*$, где матрица $A$ должна быть сходящейся, т. е. $\rho(A) < 1$.

Отметим, что метод рядов успешно применялся для решения уравнения Ляпунова высокой размерности при расчете систем управления аэрокосмической техники США и СССР (см., например, [3, 46]).

**4. Метод матричной сигнум-функции.** Если вещественные части всех собственных значений матриц $A \in C^{n\times n}$ и $B \in C^{m\times m}$ отрицательны, то для решения уравнения

$$-AX - XB = Y \tag{90}$$

применим метод матричной сигнум-функции, основанный на вычислении последовательностей матриц

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}), \quad B_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k + B_k^{-1}),$$

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + A_k^{-1} Y_k B_k^{-1}),$$

где $A_0 = A$, $B_0 = B$, $Y_0 = Y$ (см., например, [3, 21, 45]). При этом выполнены соотношения

$$-A_k X - X B_k = Y_k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$X = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} Y_k, \quad \mathrm{sgn} A = \lim_{k\to\infty} A_k, \quad \mathrm{sgn} B = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Матричная сигнум-функция $\mathrm{sgn} A$ определяется при условии дихотомии спектра $\sigma(A)$, т. е. отсутствия собственных значений на мнимой оси. При этом

$$(\mathrm{sgn} A)x = \begin{cases} x, & x \in \mathcal{A}_+ \\ -x, & x \in \mathcal{A}_- \end{cases},$$

где $\mathcal{A}_+(\mathcal{A}_-)$ — инвариантное подпространство матрицы $A$, отвечающее части спектра в правой (левой) полуплоскости. В рассматриваемом случае $\mathrm{sgn} A = -I_n$ и $\mathrm{sgn} B = -I_m$,

Следует отметить, что скорость сходимости метода матричной сигнум-функции существенно зависит от близости спектров матриц $A$ и $B$ к мнимой оси.

**5. Интегральные методы.** В теоретических исследованиях используются интегральные представления решений матричных уравнений. Так, в теории управляемых и наблюдаемых систем важную роль выполняет интеграл вида

$$X = \int_0^\infty e^{At} Y e^{Bt} dt, \tag{91}$$

являющийся решением матричного уравнения (90) [2, 3, 44]. При этом матрицы $A$ и $B$ должны быть устойчивыми. Решение более общего класса уравнений

$$MX = Y, \tag{92}$$

где $M$ — линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительные вещественные части, также представимо в интегральной форме

$$X = \int_0^\infty Z(t)dt, \quad Z(t) = e^{-Mt}Y. \tag{93}$$

Здесь $Z(t)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\dot{Z}(t) + MZ(t) = 0, \quad Z(0) = Y. \tag{94}$$

Если $M$ — оператор матричного уравнения (90), то интеграл (93) приводится к виду (91).

Пусть оператор $M$ оставляет инвариантным множество эрмитовых матриц, а система (94) является позитивной относительно конуса неотрицательно определенных матриц, т.е. $Y = Y^* \geq 0$ влечет $Z(t) = Z(t)^* \geq 0$, $\forall t > 0$. Данное свойство системы эквивалентно монотонности (положительности) эволюционного оператора $e^{-Mt}$ [35] (см. дополнение 1).

**Теорема 11.** *Позитивная система (94) асимптотически устойчива в том и только в том случае, когда для любой матрицы* $Y = Y^* > 0$ *уравнение (92) имеет единственное решение* $X = X^* > 0$.

Утверждение необходимости данного критерия вытекает из интегрального представления (93) решения уравнения (92). Утверждение достаточности можно установить с помощью обобщенной теоремы Фробениуса [12]. Действительно, спектральный радиус монотонного оператора $S = M^{-1}e^{-Mt}$ является его собственным значением, т.е.

$$|e^{-\lambda t}/\lambda| \leq e^{-at}/a, \quad \forall \lambda \in \sigma(M),$$

где $a$ — наименьшее положительное вещественное собственное значение оператора $M$. Для выполнения данного неравенства при больших значениях $t > 0$ необходимо, чтобы спектр оператора $M$ находился в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geq a$ (асимптотическая устойчивость системы (94) с запасом $a$).

Отметим, что для класса операторов

$$M = L - P, \quad LX = -A^*X - XA, \quad PX = \sum_{k=1}^{s} B_k^* X B_k, \qquad (95)$$

дифференциальная система (94) является позитивной. Данный факт устанавливается на основе соотношений

$$e^{-Mt} = W(t) + t^3 R(t) = \lim_{k\to\infty} [W(t/k)]^k, \qquad (96)$$

где $W(t) = \frac{1}{2}(e^{-Lt}e^{Pt} + e^{Pt}e^{-Lt})$, $R(t)$ — целая оператор-функция, выполняемых для более широкого класса ограниченных операторов $L$ и $P$. В данном случае из монотонности операторов

$$e^{-Lt}X = e^{A^*t}Xe^{At}, \quad e^{Pt} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k t^k / k!$$

и замкнутости конуса монотонных операторов вытекает монотонность оператора $e^{-Mt}$.

Решение системы (94) с оператором (95) можно рассматривать в качестве матрицы вторых моментов для стохастической системы (70) гл. 3 (см., например, [9, 32]). Асимптотическая устойчивость в среднеквадратичном данной системы равносильна асимптотической устойчивости системы (94) и, согласно теореме 11, существованию положительно определенного решения уравнения (92) для любой положительно определенной правой части.

Свойство позитивности системы (94) и утверждения, аналогичные теореме 11, могут быть установлены для более общих классов операторов вида

$$M = L - P, \quad P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}, \quad \mathcal{K} \subset e^{Lt}\mathcal{K}, \quad \forall t \geq 0,$$

действующих в некотором полуупорядоченном пространстве с конусом $\mathcal{K}$(см. дополнение 2).

Если, например, в качестве $\mathcal{K}$ выступает конус неотрицательных матриц, то свойство позитивности системы (94), определяемое в виде $\mathcal{K} \subset e^{Mt}\mathcal{K}$, $\forall t \geq 0$, сводится к тому, что все внедиагональные элементы матрицы $G$ оператора $M$ неположительны [35]. В этом случае асимптотическая устойчивость системы (94) эквивалентна неотрицательности матрицы $G^{-1}$, а также положительности всех главных ведущих миноров матрицы $G$ [113].

# *Дополнение 1*

# Представления линейных операторов в пространстве матриц

При изучении и использовании матричных уравнений общего вида важную роль выполняют различные представления линейных операторов $M\colon C^{n\times m} \to C^{p\times q}$, в частности,

$$MX = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}A_i X B_j, \tag{1}$$

$$MX = \sum_{t=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{m} x_{t\tau}H_{t\tau}, \tag{2}$$

$$MX = \sum_{t=1}^{\xi}\sum_{\tau=1}^{\zeta} (V_{t\tau}, X)U_{t\tau}, \tag{3}$$

$$MX = \begin{bmatrix} (G_{11}, X) & \dots & (G_{1q}, X) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (G_{p1}, X) & \dots & (G_{pq}, X) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где $(P, Q) \overset{\Delta}{=} \mathrm{tr}(P^*Q)$ — скалярное произведение матриц $P$ и $Q$. Свойства оператора (1) характеризуют матричные семейства $A$, $B$ и матрица весовых коэффициентов $C$. Операторы (2) и (4) определяют блочные матрицы

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{n1} & \dots & H_{nm} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{p1} & \dots & G_{pq} \end{bmatrix}.$$

Выражение (3) является произведением операторов типа (2) и (4).

Если оператор $M$ представлен в виде (2) или (4), то построение условий разрешимости уравнения $MX = Y$ сводится к определению линейно независимых блоков соответствующих матриц $H$ и $G$. Так, в случае $nm = pq$, оператор (2) ( (4) ) обратим в том и только в том случае, когда все блоки $H_{t\tau}$ $(G_{t\tau})$ линейно независимы.

Пусть оператор $M$ задан в стандартной форме (1). Выделим столбцы и строки матричных коэффициентов

$$A_i = [a^i_{*1}, \ldots, a^i_{*n}] = \begin{bmatrix} a^i_{1*} \\ \vdots \\ a^i_{p*} \end{bmatrix}, \quad B_j = [b^j_{*1}, \ldots, b^j_{*q}] = \begin{bmatrix} b^j_{1*} \\ \vdots \\ b^j_{m*} \end{bmatrix}.$$

Тогда в представлениях (2) и (4) данного оператора можно положить

$$H = \begin{bmatrix} a^1_{*1} & \ldots & a^k_{*1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^1_{*n} & \ldots & a^k_{*n} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} b^1_{1*} & \ldots & b^1_{m*} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b^s_{1*} & \ldots & b^s_{m*} \end{bmatrix},$$

$$G^* = \begin{bmatrix} b^1_{*1} & \ldots & b^s_{*1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b^1_{*q} & \ldots & b^s_{*q} \end{bmatrix} C^T \begin{bmatrix} a^1_{1*} & \ldots & a^1_{p*} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^k_{1*} & \ldots & a^k_{p*} \end{bmatrix}.$$

При этом выполнены неравенства $\operatorname{rang} H \le \operatorname{rang} C$, $\operatorname{rang} G \le$ $\le \operatorname{rang} C$. Причем, равенства здесь достигаются в том и только в том случае, когда семейства $A$ и $B$ состоят из линейно независимых матриц. Обратно, исходя из представлений (2) и (4) оператора $M$, можно построить выражения типа (1). При этом параметры $A$, $B$ и $C$ определяются неоднозначно.

При определении сопряженного оператора $M^*\colon C^{p\times q} \to C^{n\times m}$ используем соотношение $(MX, Y) = (X, M^*Y)$. Если оператор $M$ задан в виде (1), то с учетом перестановочности матриц под знаком операции tr имеем

$$M^*Y = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{s} \bar{c}_{ij} A_i^* Y B_j^*.$$

Рассмотрим класс операторов $M$: $\mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_p$, сохраняющих свойство самосопряженности матриц. Таким свойством обладают операторы, описываемые соотношениями (1)–(4) при условиях $A = B^*$, $C = C^*$, $H = H^*$, $V = V^*$, $U = U^*$, $G = G^*$. При этом выполнены неравенства $i_\pm(H) \le i_\pm(C)$, $i_\pm(G) \le i_\pm(C)$, которые могут быть использованы для усиления теорем 4–9 гл. 4. Так, в теоремах 7–9 вместо соотношений $i_\pm(C) \le 1$ и $i_+(C) = 1$ можно использовать аналогичные ограничения на индексы инерции матриц $H$ и $G$.

Можно установить, что линейная независимость матриц $A_1, \dots, A_k$ эквивалентна линейной независимости семейства операторов $A_i X A_j^*$, $i, j = \overline{1, k}$. Произвольному базису в пространстве $C^{p\times n}$ соответствует некоторое представление заданного оператора $M$, в частности,

$$MX = \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A_i X A_j^* \equiv \sum_{t,\tau=1}^{n} x_{t\tau} H_{t\tau}, \tag{5}$$

где $H_{t\tau} = ||h_{t\tau}^{ij}||_{i,j=1}^{p}$, $h_{t\tau}^{ij} = [a_{it}^{(1)}, \dots, a_{it}^{(k)}]C[a_{j\tau}^{(1)}, \dots, a_{j\tau}^{(k)}]^*$. При этом соотношения $M\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_p$, $C = C^*$ и $H = H^*$ эквивалентны. Если матрицы $A_1, \dots, A_k$ линейно независимы, то $i_\pm(C) = i_\pm(H)$.

Выделим некоторые подклассы операторов, сохраняющих свойство самосопряженности матриц. Оператор $M$ называется монотонным (или положительным), если из $X \ge Y$ следует $MX \ge MY$. Монотонный оператор $\hat{M}$ называется мажорантой (минорантой) монотонного оператора $M$, если оператор $\hat{M} - M(M - \hat{M})$ монотонный. Монотонный оператор $M$ называется экстремальным, если он не может быть представлен в виде суммы линейно независимых минорант. Все миноранты экстремального оператора $M$ имеют вид $\alpha M$, $0 \le \alpha \le 1$. Оператор

$M$ называется строго монотонным (сильно монотонным), если $MX > MY$ при $X > Y$ $(X \geq Y, X \neq Y)$. Сильно монотонные (экстремальные) операторы являются внутренними (крайними) точками телесного конуса монотонных операторов [12]. Оператор $M$ называется монотонно обратимым (или положительно обратимым), если для любой матрицы $Y \geq 0$ уравнение $MX = Y$ разрешимо в виде $X = M^+Y \geq 0$, где $M^+$ — некоторый монотонный оператор.

Отметим, что оператор $M$ является монотонным в том и только в том случае, когда монотонный сопряженный оператор $M^*$. Аналогично, свойства строгой и сильной монотонности должны выполняться или не выполняться одновременно для операторов $M$ и $M^*$. Для того, чтобы монотонный оператор $M$ был строго монотонным, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой матрицы $X_0 \geq 0$ выполнялось неравенство $MX_0 > 0$. Действительно, для любой матрицы $X > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $X \geq \varepsilon X_0$ и, следовательно, $MX \geq \varepsilon MX_0 > 0$.

Классы монотонных, строго монотонных, сильно монотонных и монотонно обратимых операторов можно описать в виде соответствующих включений $M\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_p$, $M\mathcal{K}_n^0 \subset \mathcal{K}_p^0$, $M\mathcal{K}_n \backslash \{0\} \subset \mathcal{K}_p^0$, $M^+\mathcal{K}_p \subset \mathcal{K}_n$, где $\mathcal{K}_n(\mathcal{K}_n^0)$ — множество неотрицательно (положительно) определенных матриц порядка $n$. Строго монотонный оператор может быть необратимым. Подтверждением этого факта служит следующий пример

$$MX = X + AXA^*, \qquad A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1/\bar{a} \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Более того, линейный оператор $MX = (\operatorname{tr} X)E$, где $E > 0$, является сильно монотонным, но необратимым.

**Лемма 1.** *Если $AA^* \geq BB^*$, то $B = AC$, где $A \in C^{n\times k}$, $B \in \in C^{n\times s}$, $C \in C^{k\times s}$. При этом $CC^* \leq I_k$, если $\operatorname{rang} A = k$. Обратно, неравенство $AA^* \geq BB^*$ является следствием соотношений $B = AC$ и $CC^* \leq I_k$.*

С помощью леммы 1 можно установить, что в конусе монотонных операторов экстремальными являются операторы типа

$AXA^*$ и $AX^TA^*$. Учитывая леммы 3-7 гл. 4, приведем свойства оператора Шура.

**Лемма 2.** *Пусть* $MX = \Omega \odot X$ $(\Omega \in \mathcal{H}_n)$ — *оператор Шура, тогда:*

1) $M$ — *обратимый* $\Leftrightarrow \omega_{ij} \neq 0 \quad (\forall i, j)$;

2) $M$ — *монотонный* $\Leftrightarrow \Omega \geq 0$;

3) $M$ — *строго монотонный* $\Leftrightarrow \Omega \geq 0$, $\omega_{ii} > 0 \quad (\forall i)$;

4) $M$ — *не является сильно монотонным при* $n > 1$;

5) $M$ — *монотонно обратимый, если* $i_+(\Omega) = 1$, $\omega_{ii} > 0 \quad (\forall i)$;

6) $M$ — *монотонно обратимый* $\Leftrightarrow$ $||1/\omega_{ij}||_1^n \geq 0$, $\omega_{ij} \neq 0$ $(\forall i, j)$.

Используя спектральное разложение матрицы $H$, получим представление оператора (5) с ортонормированными матричными коэффициентами:

$$MX = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s D_s X D_s^*, \tag{6}$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — ненулевые собственные значения матрицы $H$,

$$h_{t\tau}^{ij} = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s d_{it}^{(s)} \overline{d_{j\tau}^{(s)}}, \quad D_s = ||d_{it}^{(s)}||_{i,t=1}^{p,n}, \quad (D_s, D_q) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & s = q, \\ 0, & s \neq q. \end{array} \right.$$

Класс монотонных операторов типа (6) можно определить в терминах вещественных матриц. Выделяя действительные и мнимые части матриц $X = S + iK$ и $D_s = R_s + iG_s$, имеем следующий критерий. Оператор (6) является монотонным в том и только в том случае, когда

$$\tilde{M}\tilde{X} = \sum_{s=1}^{r} \sigma_s \tilde{D}_s \tilde{X} \tilde{D}_s^T \geq 0, \quad \forall \tilde{X} \geq 0,$$

где

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} S & K \\ -K & S \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_s = \begin{bmatrix} R_s & G_s \\ -G_s & R_s \end{bmatrix},$$

$$S^T = S, \quad K^T = -K, \quad s = 1, \ldots, r.$$

Данный критерий вытекает из эквивалентности матричных неравенств $X \geq 0$ и $\tilde{X} \geq 0$.

Если $H \geq 0$, в частности, $C \geq 0$, то оператор (5) монотонный. Однако, оператор (5) может быть монотонным даже в тех случаях, когда $i_-(H) \neq 0$ или $i_-(C) \neq 0$. Простейшим примером такого оператора является оператор транспонирования

$$X^T = \sum_{t,\tau=1}^{n} x_{t\tau} E_{\tau t}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & \ldots & E_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{1n} & \ldots & E_{nn} \end{bmatrix},$$

$$i_\pm(E) = n(n \pm 1)/2,$$

где каждый блок $E_{\tau t}$ имеет единственный ненулевой $(\tau, t)$-элемент, равный 1.

Можно установить, что при выполнении одного из условий

$$\operatorname{rang}[A_1 x, \ldots, A_k x] = k, \quad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} z^* a_{*1}^1 & \ldots & z^* a_{*1}^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^* a_{*n}^1 & \ldots & z^* a_{*n}^k \end{bmatrix} = k,$$

где $x \in C^n$, $z \in C^p$ — некоторые векторы, неравенство $C \geq 0$ эквивалентно монотонности оператора $M$. Аналогично, если для некоторого $x \in C^n$ или $z \in C^p$ выполнено соответствующее условие

$$\operatorname{rang}[D_1 x, \ldots, D_r x] = r, \quad \operatorname{rang} \begin{bmatrix} z^* d_{*1}^1 & \ldots & z^* d_{*1}^r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^* d_{*n}^1 & \ldots & z^* d_{*n}^r \end{bmatrix} = r,$$

то критерием монотонности оператора $M$ служит неравенство $H \geq 0$.

**Лемма 3.** *Оператор (5) является монотонным в том и только в том случае, когда блоки матрицы $H$ представимы в виде*

$$H_{t\tau} = U_t U_\tau^* + V_\tau V_t^*, \quad t,\tau = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для любой матрицы $X \geq 0$ ранга 1 выполняется неравенство $MX \geq 0$, то оператор $M$ монотонный. Данное утверждение следует из линейности оператора $M$ и спектрального разложения неотрицательно определенных матриц. Поэтому, свойство монотонности оператора (5) можно определить в виде:

$$F_z \stackrel{\Delta}{=} ||z^* H_{t\tau} z||_1^n \geq 0, \quad \forall z \in C^p. \tag{8}$$

При этом условия строгой (сильной) монотонности эквивалентны соотношениям $F_z \geq 0$, $F_z \neq 0$, $\forall z \neq 0$ $(F_z > 0, \forall z \neq 0)$.

Если выполнено разложение (7), то для любого $z \in C^p$

$$F_z = ||z^* U_t U_\tau^* z||_1^n + ||z^T \bar{V}_t V_\tau^T \bar{z}||_1^n \geq 0.$$

Обратно, при условиях (8) блоки $H_{t\tau}$ представимы в виде (7). Последнее утверждение является следствием соотношений

$$F_z = L_z L_z^*, \quad f_{t\tau} = z^* H_{t\tau} z \equiv \sum_s l_{ts} \overline{l_{\tau s}},$$

$$h_{t\tau}^{ij} = \partial^2 f_{t\tau} / \partial \bar{z}_i \partial z_j = \sum_s \left( u_{is}^{(t)} \overline{u_{js}^{(\tau)}} + v_{is}^{(\tau)} \overline{v_{js}^{(t)}} + w_{ts}^{ij} \bar{l}_{\tau s} + l_{ts} \overline{w_{\tau s}^{ji}} \right),$$

$$u_{is}^{(t)} = \partial l_{ts} / \partial \bar{z}_i, \quad v_{is}^{(\tau)} = \partial \bar{l}_{\tau s} / \partial \bar{z}_i, \quad w_{ts}^{ij} = \partial^2 l_{ts} / \partial \bar{z}_i \partial z_j,$$
$$z^T = [z_1, \ldots, z_p], \quad t,\tau = \overline{1,n}, \quad s = \overline{1,n}, \quad i,j = \overline{1,p},$$

где $l_{ts}$ — некоторые функции от $z$ и $\bar{z}$, составляющие матрицу $L_z$. При этом для каждого вектора $z \neq 0$ в качестве $L_z$ можно выбрать (единственную) эрмитову неотрицательно определенную матрицу, удовлетворяющую равенству $F_z = L_z^2$ и представимую в виде полинома от $F_z$ [101].

Лемма доказана.

С помощью соотношений (6)-(8) можно получить различные алгебраические условия монотонности оператора $M$. Рассмотрим, например, неравенства (8) и вычислим главные миноры матрицы $F_z$, отвечающие заданным наборам номеров строк и столбцов $t$:

$$\mu_t(z) = w_z^* \Phi_t w_z, \quad t = \{t_1, \dots, t_\nu\},$$

$$1 \le t_1 < \dots < t_\nu \le n, \quad 1 \le \nu \le n.$$

Здесь $w_z$ — вектор порядка $C^\nu_{p+\nu-1}$, состоящий из произведений $z_{j_1} \dots z_{j_\nu}$, а $\Phi_t$ — матрица, определяемая выражениями

$$\Phi_t = ||\phi_t^{ij}||, \quad \phi_t^{ij} = \sum_{\xi,\eta} \det \begin{bmatrix} h_{t_1 t_1}^{\xi_1 \eta_1} & \dots & h_{t_1 t_\nu}^{\xi_1 \eta_\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{t_\nu t_1}^{\xi_\nu \eta_1} & \dots & h_{t_\nu t_\nu}^{\xi_\nu \eta_\nu} \end{bmatrix},$$

$$\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_\nu\}, \quad i = \{i_1, \dots, i_\nu\}, \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_\nu \le p,$$

$$\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_\nu\}, \quad j = \{j_1, \dots, j_\nu\}, \quad 1 \le j_1 \le \dots \le j_\nu \le p,$$

где суммирование проводится по всем наборам индексов $\xi(\eta)$, совпадающим после упорядочивания с $i(j)$. Элементы вектора $w_z$, а также строки (столбцы) матрицы $\Phi_t$, отвечающие наборам индексов $i(j)$, построены в лексикографическом порядке. Из приведенных соотношений вытекают алгебраические условия монотонности оператора $M$:

$$\Phi_t \ge 0, \quad t = \{t_1, \dots, t_\nu\}, \quad 1 \le t_1 < \dots < t_\nu \le n, \quad \nu = \overline{1, n}.$$

Из леммы 3 и соотношений (6) и (7) вытекает общее представление монотонных операторов.

**Теорема 1.** *Линейный оператор $M$ является монотонным в том и только в том случае, когда он представим в виде*

$$MX = \sum_i A_i X A_i^* + \sum_j B_j X^T B_j^*. \tag{9}$$

В разложении (9) каждое слагаемое является экстремальным оператором. Поэтому, согласно теореме 1, монотонные операторы представимы в виде суммы своих экстремальных минорант. В представлении (9) число слагаемых экстремальных минорант можно уменьшить, если некоторые из них линейно выражаются через остальные, в частности, если матрицы $A_i$ (или $B_j$ ) линейно зависимы.

Перейдем к описанию класса монотонно обратимых операторов $M\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_p$. Поскольку конус $\mathcal{K}_n$ в пространстве $\mathcal{H}_n$ воспроизводящий, то ранг монотонно обратимого оператора равен $p^2$ и, следовательно, $p \leq n$. Оператор $MM^*$ обратим, а $M^+ = M^*(MM^*)^{-1}$ — правый обратный оператор монотонно обратимого оператора $M$, т.е. $MM^+ = I$.

Пусть оператор $M$ представлен в виде

$$M \triangleq L - P = L(I - S), \tag{10}$$

где $L$ и $P$ — заданные монотонно обратимый и монотонный операторы соответственно. Тогда оператор $S = L^+P$ — монотонный и спектральное неравенство $\rho(S) < 1$ является критерием монотонной обратимости оператора $I - S$ [35]. Из данного неравенства вытекают условия монотонной обратимости исходного оператора (10), при этом $M^+ = (I - S)^{-1}L^+$. В случае $p = n$ справедливо обратное утверждение.

Учитывая структуру монотонного оператора (9), выделим подкласс монотонно обратимых операторов вида (10):

$$MX = M_0X - M_1X - \ldots - M_rX, \tag{11}$$

$$M_jX = \begin{cases} A_jXA_j^*, & j \in J_1, \\ A_jX^TA_j^* & j \in J_2, \end{cases}$$

где $A_j \in C^{n\times n}$, $J_1$ и $J_2$ — подмножества индексов, для которых $J_1 \cap J_2 = \varnothing$, $J_1 \cup J_2 = \{0, \ldots, r\}$. Действие каждого оператора $M_j$ в пространстве $n^2$-векторов описывает матрица $T_j$ вида

$$T_j = \begin{cases} A_j \otimes \bar{A}_j, & j \in J_1, \\ (A_j \otimes \bar{A}_j)E, & j \in J_2, \end{cases}$$

где $E = \sum_{t,\tau}^{n} E_{t\tau} \otimes E_{\tau t}$.

**Теорема 2.** *Линейный оператор (11) монотонно обратим в том и только в том случае, когда выполнены соотношения*

$$\rho(T) < 1, \quad T(\lambda) = \lambda T_0 - T_1 - \ldots - T_r, \quad \det A_0 \neq 0, \tag{12}$$

*где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка матриц $T(\lambda)$.*

Приведем пример монотонно обратимого оператора, не представимого в виде (11):

$$MX = 6A_1XA_1^* + 5A_2XA_2^* - 3A_3XA_3^* \equiv S \odot X, \quad M^{-1}Y \equiv W \odot Y,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 6 & 3 & 3 \\ 12 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad i_+(S) = 2,$$

$$W = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/12 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 \\ 1/12 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix} > 0.$$

Согласно лемме 2, оператор $M$ является монотонно обратимым. Однако он не представим в виде (11) в силу линейной независимости матричных коэффициентов $A_1$, $A_2$ и $A_3$.

Можно установить, что операторы, представимые в виде (11) с линейно независимыми матричными коэффициентами $A_0, \ldots, A_r$, не являются монотонными. Если оператор $M$ — одновременно монотонный и монотонно обратим, то он является экстремальным оператором типа $AXA^*$ или $AX^TA^*$, где $A$ — некоторая матрица полного ранга по строкам. Соотношения (11), (12) определяют некоторый класс монотонно обратимых операторов. Условия (12) можно распространить на случай $p \leq n$ при ограничении $\operatorname{rang} A_0 = p$. Наиболее общее представление линейных монотонно обратимых операторов пока не установлено.

## *Дополнение 2*

# Линейные уравнения в полуупорядоченном пространстве

Рассмотрим класс линейных уравнений

$$MX \overset{\Delta}{=} LX - PX = Y, \tag{1}$$

где $X$ и $Y$ — элементы полуупорядоченного пространства $\mathcal{E}$ с нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K}$, $L$ и $P$ — заданные операторы. В частности, будем предполагать, что опетатор $P$ монотонный, а оператор $L$ монотонно обратим относительно конуса $\mathcal{K}$, т. е.

$$P\mathcal{K} \subset \mathcal{K} \subset L\mathcal{K}. \tag{2}$$

В широких предположениях уравнения с линейными операторами, возникающие в приложениях, описываются в виде (1), (2) (см., например, [23, 35, 40]). Так, матричные уравнения, лежащие в основе второго метода Ляпунова в теории устойчивости линейных дифференциальных, дифференциально-разностных и некоторых стохастических систем, представимы в виде (1) [30, 31]. При этом в качестве $\mathcal{K}$ выступает конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц порядка $n$.

Определим аналоги понятий ранга, сигнатуры и инерции эрмитовых матриц для элементов пространства $\mathcal{E}$ с воспроизводящим конусом $\mathcal{K}$.

Пусть $Z \geq 0$ — произвольный элемент конуса $\mathcal{K}$. Через $\mathcal{Z}^-$ ($\mathcal{Z}^+$) обозначим множество элементов $X \in \mathcal{K}$, для которых существует число $\alpha > 0$ такое, что $\alpha X \leq Z$ ($\alpha X \geq Z$). Множество $\mathcal{Z}^0 = \mathcal{Z}^+ \cap \mathcal{Z}^-$ порождает отношение эквивалентности:

$X \sim Y \Leftrightarrow X, Y \in \mathcal{Z}^0$. Если $Z > 0$ — внутренний элемент конуса $\mathcal{K}$, то $\mathcal{Z}^- = \mathcal{K}$ и $\mathcal{Z}^+ = \mathcal{K}_0$. Конус $\mathcal{K}$ распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов типа $\mathcal{Z}^0$. Класс $\mathcal{Z}^0$ называется крайним, если $\mathcal{Z}^- = \mathcal{Z}^0 \bigcup \{0\}$. Если класс $\mathcal{Z}^0$ не является крайним, то множество $\mathcal{Z}^-$ содержит нетривиальные классы, отличные от $\mathcal{Z}^0$. Для заданного элемента $Z$ выберем произвольную последовательность классов по следующему правилу:

$$\mathcal{Z}_0^0 = \mathcal{Z}^0, \quad \mathcal{Z}_t^0 \subset \mathcal{Z}_{t-1}^- \backslash \mathcal{Z}_{t-1}^0, \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Если на некотором шаге $t$ выбран крайний класс $\mathcal{Z}_t^0 = \{0\}$, то последовательность (3) имеет конечную длину $t$. Элемент $Z$ имеет конечный ранг $r = r(Z)$, если все последовательности классов, выбираемых согласно (3), конечные и их максимально допустимая длина равна $r$. Конус $\mathcal{K}$ имеет порядок $n$, если $\max\limits_{Z \in \mathcal{K}} r(Z) = n < \infty$.

Пусть $Z \in \mathcal{E}$, Если конус $\mathcal{K}$ воспроизводящий, то существует разложение

$$Z = Z_+ - Z_-, \quad Z_+ \in \mathcal{K}, \quad Z_- \in \mathcal{K}. \tag{4}$$

Обозначим через $i_+(Z)$ $(i_-(Z))$ наименьшее значение ранга $r(Z_+)$ $(r(Z_-))$, которое могут иметь компоненты $Z_+$ $(Z_-)$ в разложениях элемента $Z$ типа (4). Разложение (4) называется инерциальным, если $r(Z_+) = i_+(Z)$ и $r(Z_-) = i_-(Z)$. Числа $r(Z) = i_+(Z) + i_-(Z)$ и $s(Z) = i_+(Z) - i_-(Z)$ определяют соответственно ранг и сигнатуру элемента $Z$. Если $n$ — порядок конуса $\mathcal{K}$, то тройка чисел $i_+(Z)$, $i_-(Z)$ и $i_0(Z) = n - r(Z)$, составляет инерцию $i(Z)$ элемента $Z$.

Отношение эквивалентности, определенное на конусе $\mathcal{K}$, распространяется на все пространство $\mathcal{E}$. Элементы $X$ и $Y$ эквивалентны, если $X_+ \sim Y_+$ и $X_- \sim Y_-$, где $X_\pm$ и $Y_\pm$ — компоненты инерциальных разложений $X$ и $Y$. Очевидно, инерции всех эквивалентных между собой элементов совпадают.

Отметим, что минимальное разложение вида (4) для элементов пространства с миниэдральным конусом является инерциальным и его компоненты однозначно определяются операциями сюпремум и инфимум: $Z_+ = \sup(Z, 0)$, $Z_- = -\inf(Z, 0)$ [23]. Если $\mathcal{K}$ — конус неотрицательно определенных матриц, то инерциальное разложение эрмитовой матрицы описывает ее инерцию и определяется путем конгруэнтного преобразования к диагональной форме.

Введенные инерциальные характеристики и инварианты эрмитовых матриц обладают аналогичными свойствами. В частности, если $X \le Y$, то $i_+(X) \le i_+(Y)$ и $i_-(X) \ge i_-(Y)$. Последние неравенства вытекают из определения чисел $i_\pm(.)$ и соотношения $X_+ - X_- = Y_+ - Y_- - Z$, где $Z \in \mathcal{K}$, $X_\pm$ $(Y_\pm)$ — компоненты инерциального разложения $X(Y)$. Если $X \ge Y \ge 0$, то соотношения $r(X) = r(Y)$ и $X \sim Y$ эквивалентны. Для любых $X, Y \in \mathcal{E}$ выполняется неравенство $r(X+Y) \le r(X) + r(Y)$.

Изложим некоторые общие свойства инерциальных характеристик, определяемых для решений уравнения (1) и элементов итерационного процесса метода последовательных приближений

$$X_0 = G, \quad LX_{t+1} = PX_t + Y, \quad t = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

где $L$ и $P$ — линейные операторы, удовлетворяющие условиям (2). Для любого начального приближения $G \in \mathcal{E}$ неравенство

$$\rho(T) < 1, \tag{6}$$

где $\rho(T)$ — спектральный радиус операторного пучка $T(\lambda) = P - \lambda L$, обеспечивает сходимость последовательности (5) к единственному решению $X$ уравнения (1). При этом, если $MG \le Y$, то данная последовательность монотонно стремится к $X$ “снизу”: $X_0 \le X_1 \le \ldots \le X$. Аналогично, при $MG \ge Y$ имеем оценки “сверху”: $X_0 \ge X_1 \ge \ldots \ge X$. Эти утверждения следуют из предположения (2) и работы [35], где рассматривается случай тождественного оператора $L = E$. Сформулируем более общие утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть исходные параметры процесса (5) подчинены условиям*

$$Y + T(\alpha)G \ge 0, \quad Y - \alpha Y \in L\mathcal{K}, \tag{7}$$

*где $\alpha > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда существует последовательность положительных чисел $\alpha_t$ таких, что*

$$\alpha_0 X_0 \le \alpha_1 X_1 \le \ldots \le \alpha_t X_t \le \ldots \tag{8}$$

*Если же*

$$Y + T(\beta)G \le 0, \quad \beta Y - Y \in L\mathcal{K}, \tag{9}$$

*где $\beta > 0$, то для некоторых $\beta_t > 0$ выполнены неравенства*

$$\beta_0 X_0 \ge \beta_1 X_1 \ge \ldots \ge \beta_t X_t \ge \ldots \tag{10}$$

Доказательство. Образуем последовательность чисел $\alpha_t$, удовлетворяющих условиям

$$0 < \alpha_0 \le \alpha\alpha_1, \quad \alpha_t^2 \le \alpha_{t-1}\alpha_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

В случае $G \notin \mathcal{K}$ потребуем, чтобы выполнялось равенство $\alpha_0 = \alpha\alpha_1$. Если $X_{t+1} \notin \mathcal{K}$ при некотором $t$, то полагаем $\alpha_t^2 = \alpha_{t-1}\alpha_{t+1}$. Из (7) и (11) следует $\alpha_0 X_0 \le \alpha_1 X_1$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству (7), если, например, оператор $L$ одновременно монотонно обратим и монотонный. Покажем, что из неравенства $\alpha_{t-1}X_{t-1} \le \alpha_t X_t$ следует $\alpha_t X_t \le \alpha_{t+1}X_{t+1}$. Согласно (5),

$$L(\alpha_t X_{t+1} - \alpha_{t-1}X_t) = P(\alpha_t X_t - \alpha_{t-1}X_{t-1}) + (\alpha_t - \alpha_{t-1})Y.$$

Если $\alpha < 1$ ($\alpha > 1$), то полагаем $\alpha_t > \alpha_{t-1}$, $Y \in L\mathcal{K}$ ($\alpha_t \le \alpha_{t-1}$, $-Y \in L\mathcal{K}$). Если же $\alpha = 1$, то второе условие (7) выполняется автоматически не зависимо от $Y$.

Учитывая свойства (2) операторов $L$, $P$ и последовательности (11), имеем

$$\alpha_{t+1}X_{t+1} - \alpha_t X_t \ge \frac{\alpha_t}{\alpha_{t-1}}(\alpha_t X_{t+1} - \alpha_{t-1}X_t) \ge 0.$$

Следовательно, $\alpha_t X_t \le \alpha_{t+1}X_{t+1}$, $t = 0, 1, \ldots$.

Аналогично, исходя из (5),(9) и последовательности $\beta_t$ вида

$$\beta_0 \ge \beta\beta_1 > 0, \quad \beta_t^2 \ge \beta_{t-1}\beta_{t+1}, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

можно установить цепочку неравенств (10). При выборе $\beta_{t+1}$ в (12) возможно строгое неравенство, если $X_{t+1} \in \mathcal{K}$.

Теорема доказана.

**Примечание 1.** Все миноры второго порядка бесконечных ганкелевых матриц

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

построенных согласно (11) и (12), соответственно неотрицательны и неположительны. Если $\alpha = 1$ ($\beta = 1$), то в (8) ((10)) можно положить $\alpha_t = 1$ ($\beta_t = 1$), $t = 0, 1, \ldots$, При этом ограничения на $Y$ отсутствуют. В остальных случаях $Y \in L\mathcal{K}$ или $-Y \in L\mathcal{K}$.

**Примечание 2.** Если $Y \in \mathcal{K}$, то в условиях (7) в качестве $G$ может быть выбран произвольный собственный вектор операторного пучка $T(\lambda)$, отвечающий собственному значению $\alpha$, Учитывая теорему Крейна-Рутмана о спектральном радиусе монотонного оператора [40], можно положить $\alpha = \rho(T)$, $G \in \mathcal{K}$. При этом, если в (8) и (11) $\alpha_t = 1/\alpha^t$, то $X_{t+1} \geq \alpha X_t$, $X_t \geq \alpha^t G$, $t = 0, 1, \ldots$. В случае сходимости (6) при $t \to \infty$ имеем $X \geq 0$. Это означает, что оператор $M = L - P$ монотонно обратим. Отметим также, что при $\alpha = 1$ и $Y = LG$ из (7) и (8) следует оценка $X \geq G$, $PX \geq 0$.

**Следствие 1.** *При условиях (7) сигнатура элементов процесса (5) не убывает: $s(X_0) \leq s(X_1) \leq \ldots \leq s(X_t)$. Если ее максимальное значение достигается на $k$-й итерации, то все элементы $X_t$ при $t \geq k$ имеют одну и ту же инерцию. Аналогично, условия (9) обеспечивают цепочку неравенств $s(X_0) \geq$ $\geq s(X_1) \geq \ldots \geq s(X_t)$. Причем, после достижения минимального значения сигнатуры инерция элементов процесса (5) не изменяется.*

Доказательство утверждений следствия 1 вытекает из соотношений (8) и (10), очевидного равенства $s(\alpha X) = \operatorname{sign} \alpha \, s(X)$ и свойства монотонности сигнатуры: $X \le Y \Rightarrow s(X) \le s(Y)$.

**Следствие 2.** *Пусть $G \in \mathcal{K}$ и выполнены условия (7). Тогда*

$$r(X_0) < r(X_1) < \ldots < r(X_k) = r(X_{k+1}) = \ldots = m. \qquad (13)$$

*При этом из неравенства*

$$c_0 X_0 + \ldots + c_t X_t + X_{t+1} \le 0, \qquad (14)$$

*где $c_0, \ldots, c_t$ — вещественные числа, следует оценка*

$$k \le min\{t, m - r(G)\}. \qquad (15)$$

Если $G \in \mathcal{K}$, то $X_t \in \mathcal{K}$ и в следствии 1 $s(X_t) = r(X_t)$, $t = 0, 1, \ldots$. Максимальное значение ранга в (13) достигается на $k$-й итерации, когда $X_k \sim X_{k+1}$. При этом $X_t \sim X_k$ при всех $t \ge k$. Этот факт наблюдается при последовательном сопоставлении двух соседних итераций (5) с учетом следующих свойств отношения эквивалентности. Если $P$ — монотонный оператор, то из $U \sim V$ следует $PU \sim PV$; если оператор $L$ монотонно обратим, то из $LU \sim LV$ следует $U \sim V$ $(U, V \in \mathcal{K})$. Оценка (15) вытекает из соотношений (8) и (14). Действительно, если неравенство (14) разрешимо относительно $c_0, \ldots, c_t$, то $X_{t+1} \le cX_t$, где

$$c = |c_0|\alpha_t/\alpha_0 + \ldots + |c_{t-1}|\alpha_t/\alpha_{t-1} + |c_t| > 0.$$

С другой стороны, $X_{t+1} \ge (\alpha_t/\alpha_{t+1})X_t$, следовательно, $X_{t+1} \sim X_t$.

**Следствие 3.** *Пусть выполнены условия (6), (7) и неравенство*

$$h(S)Z = (h_0 E + h_1 S + \ldots + h_t S^t)Z \ge 0, \qquad (16)$$

*где $S = PL^{-1}$, $Z = MG - Y$, $G \ge 0$, $h_0, \ldots, h_t$ — вещественные коэффициенты, $h_t > 0$. Тогда решение $X \in \mathcal{K}$ уравнения (1) эквивалентно $X_t$ и выполнены соотношения (13)-(15).*

Доказательство данного утверждения устанавливается на основе следствия 2 и соотношения

$$L^{-1}h(S)Z = h_0 X_0 + (h_1 - h_0)X_1 + \ldots + (h_t - h_{t-1})X_t - h_t X_{t+1} \ge 0.$$

Отметим, что условие (16) выполнено, если $h$ — аннулирующий полином оператора $S$. В случае $Z \in \mathcal{K}$ для выполнения условия (16) достаточно, чтобы оператор $h(S)$ был монотонным. Если операторы $L$ и $P$ коммутируют, то в следствии 3 вместо (16) можно использовать неравенство

$$(h_0 L^t + h_1 P L^{t-1} + \ldots + h_t P^t) Z \geq 0.$$

Проверка последнего неравенства не связана с обращением оператора $L$.

В заключение, изложим некоторые общие свойства решений уравнения (1), а также специальную методику, связывающую анализ класса уравнений (1) с теорией линейных матричных уравнений.

**Лемма 1.** *Пусть $L$ — обратимый оператор и выполнено включение $P\mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$. Тогда для любого $Y \in L\mathcal{K}$ уравнение (1) имеет решение $X \in \mathcal{K}$ в том и только в том случае, когда выполнено неравенство (6).*

Доказательство. При условии $P\mathcal{K} \subset L\mathcal{K}$ оператор $S = L^{-1}P$ монотонный и его спектральный радиус $\rho(S)$ совпадает с $\rho(T)$. Поэтому неравенство (6) обеспечивает существование обратного оператора

$$(E - S)^{-1} = E + S + S^2 + \ldots = M^{-1}L,$$

где $M = L - P$. Данный оператор монотонный, что эквивалентно включению $L\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$. При этом в качестве $\mathcal{K}$ может выступать клин, в частности, произвольный конус.

Пусть выполнены включения $P\mathcal{K} \subset L\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$. Поскольку $L$ — обратимый оператор, а конус $\mathcal{K}$ воспроизводящий, то оператор $M$ также обратим. При этом $S$ — монотонный, а $E - S$ — монотонно обратимый операторы. Следовательно, выполнена оценка $\rho(S) < 1$ [35].

Лемма доказана.

Если $L$ — монотонно обратимый оператор, то при условии $L\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$ оператор $M$ также монотонно обратим. Поэтому из леммы 1, а также леммы 25.1 и теоремы 25.4 [35] вытекают следующие свойства уравнения (1).

**Теорема 2.** *Пусть операторы $L$ и $P$ удовлетворяют условиям (2) с нормальным воспроизводящим конусом $\mathcal{K}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) оператор $M = L - P$ монотонно обратим ($\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$);*

*2) выполнено спектральное неравенство (6).*

*Если $\mathcal{K}_0 \neq \varnothing$ — множество внутренних точек конуса $\mathcal{K}$, то утверждения 1) и 2) эквивалентны каждому из утверждений:*

*3) для любого $Y \in \mathcal{K}_0$ уравнение (1) имеет решение $X \in \mathcal{K}_0$;*

*4) существуют $X \in \mathcal{K}_0$ и $Y \in \mathcal{K}_0$, удовлетворяющие уравнению (1).*

Сформулируем аналог теоремы 11 гл. 4 для уравнения (1).

**Теорема 3.** *Пусть экспоненциальный оператор $e^{-Mt}$ при $\forall t \geq 0$ монотонный относительно нормального воспроизводящего конуса $\mathcal{K}$. Тогда оператор $M$ монотонно обратим в том и только в том случае, когда его спектр расположен в открытой правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$.*

Доказательство данного утверждения осуществляется так же, как и в случае матричных уравнений (см. доказательство теоремы 11 гл. 4) с использованием теоремы Крейна-Бонсалла-Карлина о спектральном радиусе монотонного оператора [35].

Если в теореме 3 $M = L - P$ и операторы $e^{-Lt}$ и $e^{Pt}$ монотонны, то оператор $e^{-Mt}$ также монотонный (см. формулу (96) гл. 4). В частности, можно положить $M = aE - P$, $a > 0$. Отметим также, что монотонность оператора $e^{-Lt}$ эквивалентна монотонной обратимости оператора $e^{Lt}$, а оператор $e^{Pt}$ при $t \geq 0$ монотонный, если таковым является оператор $P$. Это следует из соответствующих соотношений

$$e^{-Lt}e^{Lt} \equiv E, \quad e^{Pt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}P^k.$$

Предположим, что монотонный оператор $P$ в уравнении (1) имеет следующую структуру:

$$PX \equiv QRX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_{ij}(X) Q_{ij}, \tag{17}$$

где

$$QZ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} Q_{ij}, \quad Q\hat{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K},$$

$$RX = \begin{bmatrix} r_{11}(X) & \dots & r_{1m}(X) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1}(X) & \dots & r_{nm}(X) \end{bmatrix}, \quad R\mathcal{K} \subset \hat{\mathcal{K}},$$

$r_{ij} \in \mathcal{E}^*$ — линейные функционалы, $Q_{ij} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ и $\hat{\mathcal{K}} \subset C^{n\times m}$ — заданные нормальные воспроизводящие конусы. В качестве $\hat{\mathcal{K}}$ могут выступать, например, конусы неотрицательных и неотрицательно определенных матриц.

Построим матричное уравнение

$$Z - WZ = G, \tag{18}$$

где $W$ — линейный оператор, действующий в пространстве матриц $C^{n\times m}$ и определяемый соотношениями

$$WZ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij} W_{ij}, \quad W_{ij} = RH_{ij}, \quad LH_{ij} = Q_{ij}.$$

Данный оператор представим в виде $W = RL^{-1}Q$ и при условиях (2) и (17) является монотонным относительно конуса $\hat{\mathcal{K}}$.

Пусть $\rho(W)$ — спектральный радиус оператора $W$, являющийся его собственным значением. Если $\lambda \in \sigma(T)$ — собственное значение пучка операторов $T(\lambda) = P - \lambda L$, то $\lambda \in \sigma(W)$ или $\lambda = 0$. Действительно, из равенства $PV = \lambda LV$ следует $WU = \lambda U$, где $U = RV$. При этом, если $U \neq 0$, то $\lambda \in \sigma(W)$. Если же $U = 0$, то $\lambda = 0$, поскольку $V \neq 0$. Аналогично, если $\lambda \in \sigma(W)$, то либо $\lambda \in \sigma(T)$, либо $\lambda = 0$. Следовательно, $\rho(W) = \rho(T)$ и с учетом теоремы 2 имеем следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть выполнены соотношения (2) и (17). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*1) для любого $Y \in \mathcal{K}$ уравнение (1) имеет решение $X \in \mathcal{K}$;*

*2) для любой матрицы $G \in \hat{\mathcal{K}}$ уравнение (18) имеет решение $Z \in \hat{\mathcal{K}}$;*

*3) $\rho(W) < 1$.*

Построим матрицу оператора $W$ относительно единичного базиса:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} r_{11}(H_{11})\ldots r_{11}(H_{1m}) & \ldots & r_{11}(H_{n1})\ldots r_{11}(H_{nm}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{1m}(H_{11})\ldots r_{1m}(H_{1m}) & \ldots & r_{1m}(H_{n1})\ldots r_{1m}(H_{nm}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1}(H_{11})\ldots r_{n1}(H_{1m}) & \ldots & r_{n1}(H_{n1})\ldots r_{n1}(H_{nm}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{nm}(H_{11})\ldots r_{nm}(H_{1m}) & \ldots & r_{nm}(H_{n1})\ldots r_{nm}(H_{nm}) \end{bmatrix}.$$

Собственные значения данной матрицы образуют спектр оператора $W$. Если в разложении (17) $Q_{ij} \in \mathcal{K}$, а в качестве $\hat{\mathcal{K}}$ выступает конус неотрицательных $n \times m$-матриц, то все элементы матрицы $\Sigma$ неотрицательны. В этом случае можно воспользоваться известными методами оценки спектрального радиуса неотрицательных матриц [11, 101]. Так, неравенство $\rho(\Sigma) < r$ выполнено в том и только в том случае, когда все последовательные главные миноры матрицы $rI - \Sigma$ положительны [11].

**Следствие 4.** *Пусть выполнены условия (2), (17) и все элементы матрицы $\Sigma$ неотрицательны. Тогда оператор $M = L - P$ монотонно обратим в том и только в том случае, когда все последовательные главные миноры матрицы $I - \Sigma$ положительны.*

**Следствие 5.** *Пусть выполнены условия следствия 4, а также*

$$\max_{i,j} r_{ij}(H) < 1, \quad LH = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Q_{ij}.$$

*Тогда для любого $Y \in \mathcal{K}$ уравнение (1) имеет решение $X \in \mathcal{K}$.*

В случае телесных конусов $\mathcal{K}$ и $\hat{\mathcal{K}}$ теорему 4 можно усилить и дополнить утверждениями, связанными с использованием множеств внутренних точек $\mathcal{K}_0$ и $\hat{\mathcal{K}}_0$ (см. теорему 2). Установим связь между условиями разрешимости на $\mathcal{K}_0$ и $\hat{\mathcal{K}}_0$ соответствующих уравнений (1) и (18), предполагая, что $Y \in \mathcal{K}$, $G \in \hat{\mathcal{K}}$ и выполнены соотношения (2) и (17).

Если $\rho(W) < 1$, то уравнение (18) имеет решение $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$ в том и только в том случае, когда для некоторого $k$ выполняется условие

$$G + WG + \cdots + W^k G \in \hat{\mathcal{K}}_0.$$

Для оценки числа $k$ можно использовать следствие 2 теоремы 1. Если $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$ — решение уравнения (18), то при условии $Q\hat{\mathcal{K}}_0 \subset$ $\subset L\mathcal{K}_0$ уравнение (1) разрешимо в виде

$$X = L^{-1}QZ \in \mathcal{K}_0, \quad Y = QG \in \mathcal{K}.$$

Пусть правые части уравнений (1) и (18) связаны соотношениями

$$Y = LH \in \mathcal{K}, \quad G = RH \in \hat{\mathcal{K}},$$

где $H \in \mathcal{K}$. Тогда, если $X \in \mathcal{K}_0$ — решение уравнения (1) и выполнено условие $R\mathcal{K}_0 \subset \hat{\mathcal{K}}_0$, то матрица $Z = RX \in \hat{\mathcal{K}}_0$ удовлетворяет уравнению (18). Обратно, если матрица $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$ удовлетворяет уравнению (18) при условии

$$Y + Q\hat{\mathcal{K}}_0 \subset L\mathcal{K}_0, \tag{19}$$

то уравнение (1) имеет решение $X \in \mathcal{K}_0$, для которого $Z = RX$. Включение (19) означает, что уравнение $L\tilde{X} = \tilde{Y}$ имеет решение $\tilde{X} \in \mathcal{K}_0$, как только $\tilde{Y} = Y + QZ$ и $Z \in \hat{\mathcal{K}}_0$. Для его выполнения достаточно одного из условий $Y \in \mathcal{K}_0$, $H \in \mathcal{K}_0$, $Q\hat{\mathcal{K}}_0 \subset \mathcal{K}_0$ или $Q\hat{\mathcal{K}}_0 \subset L\mathcal{K}_0$. В случае $\ker R = 0$ уравнение (1) имеет решение $X$ тогда, и только тогда, когда выражение $Z = RX$ является решением матричного уравнения (18).

# Список литературы


[1] *Абгарян К.А., Рапопорт И.М.* Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1969. – 378 с.

[2] *Андреев Ю.Н.* Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 3. – С. 5–50.

[3] *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая шк., 1989. – 447 с.

[4] *Бахилина И.М., Лернер Д.М.* Свойства уравнения Ляпунова с неотрицательной матрицей свободных членов // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 5. – С. 182–184.

[5] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

[6] *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.

[7] *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. – Киев: Выща шк., 1975. – 328 с.

[8] *Валеев К.Г.* Расщепление спектра матрицы. – Киев: Выща шк., 1986. – 272 с.

[9] *Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И.* Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. – М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 1996. – 258 с.

[10] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

[11] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 532 с.

[12] *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 478 с.

[13] *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сборник. – 1971. – 84(126), № 4. – С. 607–629.

[14] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[15] *Далецкий Ю.Л.* Об одном линейном уравнении относительно элементов нормированного кольца // Успехи мат. наук. – 1959. – 14, 1(85). – С. 165–168.

[16] *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

[17] *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука, 1979. – 304 с.

[18] *Жабко А.П., Харитонов В.Л.* Методы линейной алгебры в задачах управления: Учеб.пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1993. – 320 с.

[19] *Зеленцовский А.Л.* Устойчивость с вероятностью 1 решений систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений Ито // Укр. мат. журн. – 1991. – 43, № 2. – С. 147–151.

[20] *Зубов В.И.* Проблема устойчивости процессов управления. – Л.: Судостроение, 1980. – 256 с.

[21] *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984. – 192 с.

[22] *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – 330 с.

[23] *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 546 с.

[24] *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. – 1961. – 77, № 1. – С. 11–14.

[25] *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. Т. 2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.

[26] *Кириченко Н.Ф.* Введение в теорию стабилизации движения. – Киев: Выща шк., 1978. – 184 с.

[27] *Кириченко Н.Ф.* Аналитическое представление возмущенных псевдообратных матриц // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 98–107.

[28] *Кожинская Л.И., Ворновицкий А.Э.* Управление качеством систем. – М.: Машиностроение, 1979. – 123 с.

[29] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.

[30] *Кореневский Д.Г., Мазко А.Г.* Положительно определенные решения матричных уравнений Сильвестра-Ляпунова. – Киев, 1986. – 52 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 86.41).

[31] *Кореневский Д.Г., Мазко А.Г.* Компактная форма алгебраического критерия абсолютной (по запаздыванию) устойчивости решений линейных дифференциально-разностных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – 41, № 2. – С. 278–282.

[32] *Кореневский Д.Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (Алгебраические критерии). – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.

[33] *Корсуков В.М.* Некоторые свойства обобщенных обратных матриц // Вырожденные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1982. – С. 19–37.

[34] *Кошляков В.Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

[35] *Красносельский М.А., Лифшиц Т.А., Соболев А.Н.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.

[36] *Красовский Н.Н.* Применение второго метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием // Прикл. математика и механика. – 1956. – 20, № 3. – С. 315–327.

[37] *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1964. – 154, № 6. – С. 1258–1261.

[38] *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Труды междунар. симпоз. по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. Т. 2. – М.: Наука, 1965. – С. 283–322.

[39] *Крейн М.Г., Наймарк М.А.* Метод симметричных и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. – Харьков: Го с. науч. – техн. изд-во Украины, 1936. – 42 с.

[40] *Крейн М.Г., Рутман М.А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. – 1948. – 3, № 1. – С. 3–35.

[41] *Кублановская В.Н., Хазанов В.Б.* Исчерпывание в спектральных задачах для пучков матриц // Вычисл. процессы и системы. – 1987. – Вып. 5. – С. 138–147.

[42] *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

[43] *Лазарян В.А., Длугач Л.А., Коротенко М.Л.* Устойчивость движения рельсовых экипажей. – Киев: Наук. думка, 1972. – 198 с.

[44] *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

[45] *Ларин В.Б.* Построение решения обобщенного уравнения Ляпунова // Докл. АН. – 1993. – 328, № 1. – С. 13–21.

[46] *Ларин В.Б.* Методы решения алгебраических уравнений Риккати // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика. – 1983, № 2. – С. 186–199.

[47] *Луковский И.А., Барняк М.Я., Комаренко А.Н.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. – Киев: Наук. думка, 1984. – 228 с.

[48] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.

[49] *Мазко А.Г.* Матричное уравнение Ляпунова для некоторого класса областей, ограниченных алгебраическими кривыми // Автоматика. – 1980. – № 3. – С. 45–50.

[50] *Мазко А.Г.* Критерий принадлежности спектра матрицы произвольной области из некоторого класса // Автоматика. – 1980. – № 6. – С. 54–59.

[51] *Мазко А.Г., Харитонов В.Л.* О матричной проблеме Рауса-Гурвица для одного класса алгебраических областей // Динамика и устойчивость механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 124–127.

[52] *Мазко А.Г.* Матричный алгоритм синтеза оптимальных линейных систем с заданными спектральными свойствами // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 33–41.

[53] *Мазко А.Г.* Матричные неравенства в задаче стабилизации линейных систем // Динамика и устойчивость сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 59–62.

[54] *Мазко А.Г.* Обобщение теоремы Ляпунова для класса областей, ограниченных алгебраическими кривыми // Автоматика. – 1982. – № 1. – С. 89–91.

[55] *Мазко А.Г.* Оценка расположения спектра матрицы относительно широкого класса алгебраических и трансцендентных кривых // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 103–109.

[56] *Мазко А.Г.* Теория распределения спектра матрицы относительно алгебраических и трансцендентных кривых. – Киев, 1983. – 40 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 83.5).

[57] *Мазко А.Г.* Распределение спектра матрицы относительно заданных множеств в комплексной плоскости // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 121–129.

[58] *Мазко А.Г.* Распределение корней матричного полинома относительно плоских кривых // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С. 90–96.

[59] *Мазко А.Г.* Обобщение теоремы Ляпунова для областей, ограниченных алгебраическими и трансцендентными кривыми // Автоматика. – 1985. – № 3. – С. 50–55.

[60] *Мазко А.Г.* Оценка расположения спектра матрицы относительно плоских кривых // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, № 1. – С. 38–42.

[61] *Мазко А.Г.* Матричный аналог логарифмического вычета в задаче распределения корней матрицы-функции // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 115–120.

[62] *Мазко А.Г.* К определению инвариантов эрмитовой и ранга прямоугольной матриц // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 121–123.

[63] *Мазко А.Г.* Распределение спектра регулярного пучка матриц относительно плоских кривых // Укр. мат. журн. – 1986. – 38, № 1. – С. 127–131.

[64] *Мазко А.Г.* К задаче распределения спектра регулярного пучка матриц // Прямые методы в задачах динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 99–110.

[65] *Мазко А.Г.* Матричные уравнения коммутации в обобщенной проблеме собственных значений // Прикладные задачи динамики и устойчивости механических систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 98–102.

[66] *Мазко А.Г.* О локализации спектра матричного полинома // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 61–69.

[67] *Мазко А.Г.* Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн. – 1988. – 40, № 4. – С. 525–528.

[68] *Мазко А.Г.* Оценка инвариантов блочных матриц методом полуобращения // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 41–43.

[69] *Мазко А.Г.* Монотонное приближение к решениям линейных уравнений // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С. 44–51.

[70] *Мазко А.Г.* Матричные уравнения и коллективы. – Киев, 1989. – 44 с. – (Препр./АН УССР. Ин-т математики; 89.83).

[71] *Мазко А.Г.* Трансформации матричных уравнений и неравенств // Моделирование динамических процессов взаимодействия в системах тел с жидкостью. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 106–119.

[72] *Мазко А.Г.* Матричные уравнения и позитивно обратимые операторы // Проблемы динамики и устойчивости многомерных систем. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 78–89.

[73] *Мазко А.Г.* Обобщенное уравнение Ляпунова для регулярного пучка матриц // Математические методы исследования прикладных задач динамики тел, несущих жидкость. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. – С. 67–76.

[74] *Мазко А.Г.* Трансформации и инерция решений линейных матричных уравнений // Укр. мат. журн. – 1993. – 45, № 1. – С. 60–68.

[75] *Мазко А.Г.* Отщепление и локализация спектра матричного полинома // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 10. – С. 15–19.

[76] *Мазко А.Г.* Построение аналогов уравнения Ляпунова для матричного полинома // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 3. – С. 337–343.

[77] *Мазко О.Г.* Узагальнене рівняння Ляпунова і його застосування в задачах стійкості та локалізації спектра // Автореф. ди с. ... д-ра фіз. – мат. наук. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – 24 с.

[78] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и устойчивость некоторых классов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1996. – 48, № 8. – С. 1074–1079.

[79] *Мазко А.Г.* Распределение спектра и представление решений вырожденных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 7. – С. 930–936.

[80] *Мазко А.Г.* Локализация спектра и представление решений линейных динамических систем // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 10. – С. 1348–1448.

[81] *Мазко А.Г.* Матричные уравнения и неравенства в задачах локализации спектра // Вопросы аналитической механики и ее применений. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 201–216.

[82] *Маркус А.С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. – Кишинев: Штинца, 1986. – 259 с.

[83] *Маркус А.С.,Мацаев В.И.* О спектральной факторизации голоморфных оператор-функций // Мат. исследования. – 1978. – Вып.47. – С. 71–100.

[84] *Мартынюк А.А.* Устойчивость движения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1975. – 352 с.

[85] *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.,* Кулик В.Л. Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.

[86] *Новицький В.В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. – К.: Ін-т математики НАН України, 1995. – 150 с.

[87] *Пароди М.* Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 170 с.

[88] *Постников М.М.* Устойчивые многочлены. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

[89] *Рабинович Б.И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.

[90] *Радзиевский Г.В.* Задача о полноте корневых векторов спектральной теории оператор-функций. – Успехи мат. наук. – 1982. – № 5. – С. 81–145.

[91] *Рвачев В.Л.* Теория $R$-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

[92] *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1983. – 359 с.

[93] *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax' + Bx = f$ // Дифференц. уравнения. – 1975. – 11, № 1. – С. 1996–2010.

[94] *Савелов А.А.* Плоские кривые. – М.: Физматгиз, 1960. – 293 с.

[95] *Самойленко Ю.С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.

[96] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.

[97] *Фишер Е.Е.* Применение квадратичной функции штрафа в качестве критерия при расчете линейной системы управления гибкой ракетой // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – № 7. – С. 61–68.

[98] *Хазанов В.Б.* О некоторых спектральных характеристиках $\lambda$-матриц // Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. – Л.: Наука, 1984. – 139. – С. 111–124.

[99] *Харитонов В.Л.* Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы // Автоматика и телемеханика. – 1981. – № 5. – С. 42–47.

[100] *Хасина Е.Н.* Об управлении вырожденными линейными динамическими системами // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 4. – С. 30–37.

[101] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

[102] *Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – К.: Изд-во Киев. ун-та, 1997. – 226 с.

[103] *Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н.* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1949. – 26. – С. 1–331.

[104] *Чернецкий В.И., Дидук Г.А., Потапенко А.А.* Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. – Л.: Энергия, 1970. – 374 с.

[105] *Anderson B.D.O., Moor I.B.* Linear optimal control. – New York: Prentise-Hall, 1971.

[106] *Athans M., Levine W.S.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable

Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1970. – AC-15, No 1. – P. 44–50.

[107] *Barnett S., Saraton R.E.* Location of Matrix Eigenvalues in the Complex Plane // IEEE Trans. Automat. Control. – 1982. – AC-27, No 4. – P. 966–967.

[108] *Boyd S., Ghaoui L. El, Feron E., Balakrishman V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // Studies in Applied Mathematics, vol. 15. – Philadelphia, PA, 1994. – 193 p.

[109] *Bulgakov A.Ya.* The basic of guaranted accuracy in the problem of separation of invariant subspaces for non-selfadjoint matrices // Siberian Advances in Mathematics. – 1991. – 1, No 2. – P. 1–56.

[110] *Carlson D., Hill R.D.* Controllability and Inertia Theory for Functions of a Matrix // J. Math. Anal. Appl. – 1977. – 59. – P. 260–266.

[111] *Carlson D, Schneider H.* Inertia Theorems, the Semidefinite Case // J. Math. Anal. Appl. – 1963. – 6. – P. 430–446.

[112] *Douglas J.B.* Lyapunov-Like Equations and Reachability / Obser- vability Grammians for Descriptor Systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1987. – AC-32, No 4. – P. 343–348.

[113] Fiedler M., Pták V. On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minores // Czech. Math. J. – 1962. – 12(87). – P. 382–400.

[114] *Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Exact and approximate solutions of some operator equations based on the Cayley transform // Linear Algebra & Appl. – 1998. – 282. – P. 97–121.

[115] *Gutman S., Chojnowski F.* Root-Clustering Criteria ( I ); The Composite-Matrix Approach // IMA J. Math. Contr. & Inf. – 1989. – 6. – P. 275–288.

[116] *Gutman S., Chojnowski F.* Root-Clustering Criteria ( II ); Linear Matrix Equations // IMA J. Math. Contr. & Inf. – 1989. – 6. – P. 289–300.

[117] *Gutman S., Jury E.I.* A general theory for matrix root-clustering in subregions of the complex plane // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1981. – AC-26, No 4. – P. 853–863.

[118] *Hill R.D.* Inertia theory for simultaneously triangulable complex matrices // Linear Algebra & Appl. – 1969. – 2. – P. 131–142.

[119] *Howland J.L.* Matrix equations and the separation of matrix eigenvalues // J. Math. Anal. & Appl. – 1971. – 33. – P. 683–691.

[120] *Kalman R.E.* Algebraic characterization of polynomials whose zeros lie in a certain algebraic domains // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1969. – 64, No 3. – P. 818–823.

[121] *Leang S. Shieh, Mohamad M. Mehio, Rani M. Dib.* Stability of the Second Order Matrix Polynomial // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1987. – AC-32, No 3. – P. 231–233.

[122] *Lewis F.L.* Futher Remarks on the Cayley-Hamilton Theorem and Leverrier's Method for the Matrix Pencil // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1986. – AC-31, No 9. – P. 869–870.

[123] *Ostrowsky O., Schneider H.* Some theorems on the inertia of general matrices // J. Math. Anal. & Appl. – 1962. – 4. – P. 72–84.

[124] *Schneider H.* Positive operators and an inertia theorem // Numer. Math. – 1965. – 7. – P. 11–17.

[125] *Simon I.D., Mitter S.K.* A theory of modal control // Inf. and Contr. – 1968. – 13. – P. 316–353.

[126] *Skorodinskii V.I.* Iterational method of construction of Lyapunov-Krasovskii functionals for linear systems with delay // Automation and Remoute Control. – 1990. – 51, No 9. – P. 1205 – 1212.

[127] *Söderström T.* On some algorithms for design of optimal constrained regulators // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1978. – AC-23, No 6. – P. 1100–1101.

[128] *Taussky O.* A generalization of a theorem of Lyapunov // J. Soc. Ind. Appl. Math. – 1961. – 9. – P. 640–643.

[129] *Wimmer H.K.* Generalization of Theorems of Lyapunov and Stein // Linear Algebra & Appl. – 1975. – 10. – P. 139–146.

[130] *Wimmer H.K.* Inertia Theorems for Matrices, Controllebility and Linear Vibrations // Linear Algebra & Appl. – 1974. – 8. – P. 337–343.

[131] *Yamada T., Luenberger D.G.* Generic Controllability Theorems for Descriptor Systems // IEEE Trans. Autom. Contr. – 1985. – AC-30, No 2. – P. 144–152.

[132] *Zuhair Nashed M.* Generalized Inverses and Applications. – New York etc.: Academic Press, 1976. – 1054 p.

# Указатель обозначений

$$\left.\begin{array}{l} R^n \text{ — вещественное} \\ C^n \text{ — комплексное} \end{array}\right\} \; n\text{-мерное векторное пространство;}$$

$$\left.\begin{array}{l} R^{n\times m} \text{ — пространство вещественных} \\ C^{n\times m} \text{ — пространство комплексных} \end{array}\right\} \; \text{матриц размера } n \times m;$$

$$A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{n,m} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \text{ — } \begin{array}{c} \text{матрица размера } n \times m \\ \text{с элементами } a_{ij}; \end{array}$$

$I_n$ — единичная матрица порядка $n$;

0 — нулевая матрица, нулевой скаляр или вектор;

$$\left.\begin{array}{l} A^T \text{ — транспонированная} \\ A^* \text{ — сопряженная} \\ A^{-1} \text{ — обратная} \\ A^- \text{ — полуобратная} \\ A^+ \text{ — псевдообратная} \end{array}\right\} \; \text{матрица к матрице } A;$$

$f(A)$ — аналитическая функция от матрицы $A$;

$LX$, $L_f X$, ... — линейные операторы (преобразования $X$);

$\operatorname{Ker} L$ — ядро оператора (матрицы);

$\Lambda_f^0$ — аналитическая кривая, описываемая уравнением $f(\lambda, \bar{\lambda}) = 0$;

$\Lambda_f^{\pm}$ — открытые области, ограниченные кривой $\Lambda_f^0$ ;

$$\left.\begin{array}{l}\sigma(A) \text{ — спектр}\\ \det A \text{ — детерминант}\\ \mathrm{tr}A \text{ — след}\\ i(A) \text{ — инерция}\\ \mathrm{rang}A \text{ — ранг}\\ \mathrm{sign}A \text{ — сигнатура}\end{array}\right\} \text{ матрицы } A;$$

$i_+(A)$, $i_-(A)$, $i_0(A)$ — количества положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы $A$ с учетом кратностей;

$i_f^+(A)$, $i_f^-(A)$, $i_f^0(A)$ — количества точек спектра $\sigma(A)$, принадлежащих соответствующим множествам $\Lambda_f^+$, $\Lambda_f^-$, $\Lambda_f^0$;

$$\left.\begin{array}{l}A \otimes B \text{ — кронекерово произведение}\\ A \odot B \text{ — произведение Шура}\end{array}\right\} \text{ матриц } A \text{ и } B;$$

$\oint$ — интеграл типа Коши по замкнутому контуру $\omega$;

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}_{pq}$, $\mathcal{Y}_{pq}$ — множества в пространстве матриц;

$\mathcal{H}_n$ ($\mathcal{K}_n$) — множество эрмитовых (неотрицательно определенных) матриц порядка $n$;

$\mathcal{K}_0$ — множество внутренних точек конуса $\mathcal{K}$;

$$\left.\begin{array}{l}r(X) \text{ — ранг}\\ s(X) \text{ — сигнатура}\\ i(X) \text{ — инерция}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{элемента полуупорядоченного}\\ \text{пространства } X \in \mathcal{E};\end{array}$$

$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = C_p^q$ — число сочетаний из $p$ элементов по $q$, равное $\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

*Научное издание*

**Мазко** Алексей Григорьевич

# ЛОКАЛИЗАЦИЯ СПЕКТРА И УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Компьютерный набор и верстка *В.А. Чубенко*
*Г.Н. Малиновская*

Подп. к печати 15.12.99. Формат 60×84/16. Бумага тип. Офс. печ.
Физ. печ. л. 11. Усл. печ. л. 9,6. Тираж 350 экз. Зак. 194.

Оригинал-макет подготовлен на персональных компьютерах
и отпечатан в Институте математики НАН Украины
252601, Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.