УДК 517.983.27

А. М. Алілуйко, О. Г. Мазко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІНВАРІАНТНІ КОНУСИ ТА СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ*

Methods for stability and positivity analysis of linear differential equations are presented. Invariance conditions are established for classes of circular-type and ellipsoidal-type cones. Algebraic conditions of the exponential stability of linear positive systems are proposed in terms of the maximal proper pairs of a matrix polynomial.

Викладено методику дослідження стійкості та позитивності систем лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку. Встановлено умови інваріантності класів конусів типу кругових та еліпсоїдальних. Запропоновано алгебраїчні умови експоненціальної стійкості лінійних позитивних систем на основі поняття максимальних власних пар матричного полінома.

Вступ. При моделюванні складних технічних, біологічних та інших об'єктів використовуються диференціальні або різницеві системи рівнянь, у фазовому просторі яких існують інваріантні множини, зокрема конуси. Такі особливості систем необхідно враховувати і використовувати в якісних методах дослідження, в задачах аналізу стійкості та керування (див., наприклад, [1 – 3]).

У даній роботі викладено методику дослідження позитивності та стійкості лінійних динамічних систем у напівупорядкованому просторі. Для аналізу стійкості таких систем розроблено спеціальні методи, що базуються на спектральних властивостях позитивних та позитивно оборотних операторів. Знайдено умови інваріантності конусів типу кругового та їх узагальнень, що дозволяє, зокрема, розв'язати задачу позитивної стабілізації систем відносно даних конусів за допомогою динамічних компенсаторів. Умови інваріантності еліпсоїдальних конусів та експоненціальної стійкості лінійних диференціальних і різницевих систем сформульовано у вигляді матричних нерівностей. З огляду на поняття максимальних власних пар матричного полінома запропоновано алгебраїчні умови експоненціальної стійкості лінійних диференціальних систем довільного порядку.

1. Означення і допоміжні факти. Інерцією симетричної матриці $S = S^T \in R^{n\times n}$ будемо називати трійку чисел $i(S) = \{ i_+(S), i_-(S), i_0(S) \}$, де $i_+(S)$, $i_-(S)$ і $i_0(S)$ — відповідно кількість додатних, від'ємних і нульових власних значень S, враховуючи кратності.

Наведемо деякі означення і факти з теорії конусів і операторів у напівупорядкованому просторі. Опукла замкнена множина $\mathcal{K}$ дійсного нормованого простору $\mathcal{E}$ називається клином, якщо $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ для будь-яких $\alpha, \beta \geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ з лезом $\mathcal{K} \bigcap -\mathcal{K} = \{0\}$ є конусом. Спряжений конус $\mathcal{K}^*$ формують лінійні функціонали $\varphi \in \mathcal{E}^*$, що набувають невід'ємних значень на елементах $\mathcal{K}$, причому $\mathcal{K} = \left\{ X \in \mathcal{E} : \varphi(X) \geq 0 \ \ \forall \varphi \in \mathcal{K}^* \right\}$. Простір із конусом напівупорядкований: $X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \in \mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ з непорожньою множиною внутрішніх точок $\operatorname{int}\mathcal{K} = \{X : X > 0\}$ є тілесним. Конус $\mathcal{K}$ називається нормальним, якщо із $0 \leq X \leq Y$ випливає $\|X\| \leq \nu \|Y\|$, де ν — універсальна стала. Найменше таке число ν є сталою нормальності конуса. Якщо $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ є відтворюючим. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли спряжений конус $\mathcal{K}^*$

* Виконано при частковій підтримці НДР № 0105U001108.

— відтворюючий. Типовими прикладами нормальних відтворюючих конусів у скінченновимірних просторах є множина векторів із невід'ємними елементами і множина симетричних невід'ємно визначених матриць.

Нехай у банаховому просторі $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ виділено конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ називається монотонним, якщо із $X \geq Y$ випливає $MX \geq MY$. Монотонність лінійного оператора рівносильна його позитивності: $X \geq 0 \Rightarrow MX \geq \geq 0$. Якщо $M\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то оператор M — скрізь позитивний. Лінійний оператор M називається позитивно оборотним, якщо $\mathcal{K}_2 \subset M\mathcal{K}_1$, тобто для будь-якого $Y \in \mathcal{K}_2$ рівняння $MX = Y$ має розв'язок $X \in \mathcal{K}_1$. Якщо $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворюючий конус і $M_1 \leq M \leq M_2$, то з позитивної оборотності операторів M_1 і M_2 випливає позитивна оборотність оператора M, причому $M_2^{-1} \leq \leq M^{-1} \leq M_1^{-1}$ [1]. Критерієм позитивної оборотності класу операторів $M = L - - P$, $P\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset L\mathcal{K}_1$, де $\mathcal{K}_2$ — нормальний відтворюючий конус, є нерівність $\rho(T) < 1$ $\big(\rho(T)$ — спектральний радіус в'язки операторів $T(\lambda) = P - \lambda L\big)$ [4]. У випадку тілесного конуса $\mathcal{K}_2$ ця нерівність еквівалентна умові $M\mathcal{K}_1 \cap \cap \operatorname{int}\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$.

Нехай $X(t) = \Phi(t, t_0, X_0) \in \mathcal{E}$ — стан деякої динамічної системи, що описується неперервно диференційовною функцією при $t \geq t_0 \geq 0$. Якщо задано оператор $\Omega(t, t_0): \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, що однозначно визначає перехід із початкового стану $X(t_0) = X_0$ у стан $X(t)$ при $t > t_0$, то $\Phi(t, t_0, X_0) = \Omega(t, t_0)X_0$. При цьому

$$\Omega(t_0, t_0) = E, \quad \Omega(t+\tau, t_0) = \Omega(t, \tau)\cdot\Omega(\tau, t_0) \quad \forall\, t, \tau \geq t_0,$$

де E — тотожний оператор. Система має інваріантну множину $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ із $X_0 \in \mathcal{K}_0$ випливає $X(t) \in \mathcal{K}_t$ при $t \geq t_0$. Якщо $\mathcal{K}_t$ — конус, то ним породжені нерівності між елементами простору в кожний момент часу t позначимо символами типу $\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}$ або $\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}$.

Визначимо властивості систем відносно змінного конуса [5]. Динамічна система, що має інваріантний конус $\mathcal{K}_t$, позитивна відносно даного конуса. Система називається монотонною відносно конуса $\mathcal{K}_t$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_{20} \Rightarrow X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_2(t), \quad t > t_0, \tag{1.1}$$

де $X_k(t) = \Phi(t, t_0, X_{k0})$, $k = 1, 2$. Класи позитивних і монотонних систем позначимо символами $\mathcal{M}_0$ і $\mathcal{M}$. Для класів систем, що мають властивість (1.1) при додаткових обмеженнях $X_{20} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in -\mathcal{K}_0$ і $X_{20} \in -\mathcal{K}_0$, використовуємо відповідні позначення $\mathcal{M}_1^+$, $\mathcal{M}_2^+$, $\mathcal{M}_1^-$ і $\mathcal{M}_2^-$. Належність диференціальної системи

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0, \tag{1.2}$$

вказаним класам можна встановити за допомогою елементів спряженого конуса. Зокрема, система (1.2) є позитивною і монотонною відносно тілесного конуса $\mathcal{K}_t$, якщо $t < \tau \Rightarrow \mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_\tau$ і виконуються відповідні умови [5]

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}_t^*, \quad \varphi(X) = 0 \Rightarrow \varphi\big(F(X, t)\big) \geq 0, \tag{1.3}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y, \quad \varphi \in \mathcal{K}_t^*, \quad \varphi(X - Y) = 0 \Rightarrow \varphi\big(F(Y, t) - F(X, t)\big) \geq 0, \tag{1.4}$$

де $\mathcal{K}_t^*$, $t \geq 0$, — спряжений конус.

Ізольований стан рівноваги $X \equiv 0$ динамічної системи називаємо стійким в $\mathcal{K}_t$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із умови $X_0 \in \mathcal{S}_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{ X \in \mathcal{K}_t : \| X \| \leq \varepsilon \}$. Якщо при цьому для певного $\delta_0 > 0$ із $X_0 \in \mathcal{S}_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то стан $X \equiv 0$ системи є асимптотично стійким у $\mathcal{K}_t$. Якщо стан $X \equiv 0$ системи з інваріантним конусом $\mathcal{K}_t$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він стійкий (асимптотично стійкий) у $\mathcal{K}_t$.

Аналогічно означаються інваріантні множини, властивості позитивності і монотонності відносно конуса і стійкості в $\mathcal{K}_t$ для динамічних систем із дискретним часом.

2. Конуси кругового та еліпсоїдального типів. Розглянемо у просторі R^{n+1} множину

$$\mathcal{K}(Q, h) = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T Q z \geq 0,\ z^T Q h \geq 0 \right\}, \tag{2.1}$$

де $Q = Q^T$ — симетрична матриця з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$, h — довільний вектор такий, що $h^T Q h > 0$. Гіперплощина $\mathcal{P} = \left\{ z : z^T Q h = 0 \right\}$ розділяє множини $\mathcal{K}(Q, h)$, $-\mathcal{K}(Q, h)$ і проходить через їх єдину спільну точку $z = 0$. Очевидно, що $\mathcal{K}(Q, h) = \mathcal{K}(Q, h_1)$ для довільного внутрішнього вектора $h_1 \in \operatorname{int} \mathcal{K}(Q, h)$. Зокрема, h може бути власним вектором матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню [6].

Лема 2.1. *Множина $\mathcal{K}(Q, h)$ є конусом.*

Доведення. Відомо, що $i_+(Q) = 1$ лише тоді, коли [7]

$$S = Q - \frac{1}{\omega} Q h h^T Q \leq 0,$$

де $\omega = h^T Q h > 0$. Якщо $z_1 \in \mathcal{K}(Q, h)$ і $z_2 \in \mathcal{K}(Q, h)$, то, використовуючи розклад $S = -R^T R$ і нерівність Коші, отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{\omega} z_1^T Q h h^T Q z_1 + z_1^T S z_1 = \alpha^2 - a^T a \geq 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_1^T Q h \geq 0, \quad a = R z_1,$$

$$\frac{1}{\omega} z_2^T Q h h^T Q z_2 + z_2^T S z_2 = \beta^2 - b^T b \geq 0,$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\omega}} z_2^T Q h \geq 0, \quad b = R z_2,$$

$$\frac{1}{\omega} z^T Q h h^T Q z + z^T S z = \alpha^2 - a^T a + \beta^2 - b^T b + 2(\alpha\beta - a^T b) \geq 0,$$

де $z = z_1 + z_2$. Отже, $z_1 + z_2 \in \mathcal{K}(Q, h)$.

Якщо $z \in \pm \mathcal{K}(Q, h)$, то $z^T Q h = 0$, $z^T Q z = z^T S z = 0$, $Q z = S z = 0$ і $z = 0$. Тут враховано невиродженість Q й еквівалентність співвідношень $z^T S z = 0$ і $S z = 0$ для матриці $S \leq 0$.

Властивість конуса $\alpha \mathcal{K}(Q, h) \subset \mathcal{K}(Q, h)$ при $\alpha \geq 0$ очевидна.

Лему доведено.

Множина внутрішніх точок конуса $\mathcal{K}(Q, h)$, його границя та спряжений конус відповідно мають вигляд

$$\operatorname{int}\mathcal{K}(Q, h) = \left\{ z \in \mathcal{K}(Q, h) \colon z^T Qz > 0,\ z^T Qh > 0 \right\},$$

$$\partial\mathcal{K}(Q, h) = \left\{ z \in \mathcal{K}(Q, h) \colon z^T Qz = 0 \right\}, \quad \mathcal{K}^*(Q, h) = Q\mathcal{K}(Q, h).$$

Нехай T — невироджена матриця перетворення

$$T^T QT = \Delta \overset{\Delta}{=} \operatorname{diag}\{-1, \ldots, -1, 1\}, \quad h = Tg.$$

Тоді $\mathcal{K}(Q, h) = T\mathcal{K}(\Delta, g)$, причому $\mathcal{K}(\Delta, e)$, де $e = [\,0, \ldots, 0, 1]^T$, збігається з круговим конусом Мінковського

$$\mathcal{K}(\Delta) = \left\{ z \in R^{n+1} \colon z^T = \left[\, x^T, u \right],\ \|x\| \le u \right\}, \tag{2.2}$$

де $\|x\| = \sqrt{x^T x}$. Отже, $\mathcal{K}(Q, h) = \alpha T\mathcal{K}(\Delta)$, де $\alpha = e^T T^{-1} h$, тобто $\mathcal{K}(Q, h)$ збігається з $T\mathcal{K}(\Delta)$ $(-T\mathcal{K}(\Delta))$, якщо $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$.

Оскільки $\mathcal{K}(\Delta)$ є нормальним конусом із сталою нормальності 1, то конус $\mathcal{K}(Q, h)$ також нормальний, його стала нормальності не перевищує $\sqrt{t_- / t_+}$, де $t_- (t_+)$ — мінімальне (максимальне) власне значення матриці TT^T.

Побудуємо матрицю T за допомогою спектрального розкладу

$$Q = \gamma h h^T - H\Gamma H^T = GDG^T, \quad \sigma(Q) = \{-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n, \gamma\}, \tag{2.3}$$

де $\gamma > 0$, $\Gamma = \operatorname{diag}\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} > 0$, $D = \operatorname{diag}\{-\gamma_1, \ldots, -\gamma_n, \gamma\}$, $G = [H, h]$, $h^T h = 1$, $H^T H = I$, $h^T H = 0$, $GG^T = G^T G = I$. Конус (2.1) визначаємо у вигляді

$$\mathcal{K}(Q) = \left\{ z \in R^{n+1} \colon z^T Qz \ge 0,\ z^T h \ge 0 \right\}, \tag{2.4}$$

де h — нормований власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню γ. При цьому виконуються співвідношення

$$\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1}) = Q\mathcal{K}(Q), \quad \mathcal{K}(Q) = G\mathcal{K}(D) = T\mathcal{K}(\Delta),$$

$$\mathcal{K}(D) = L\mathcal{K}(\Delta), \quad T = GL, \quad L = \operatorname{diag}\left\{ \gamma_1^{-1/2}, \ldots, \gamma_n^{-1/2}, \gamma^{-1/2} \right\}.$$

Зазначимо, що належність вектора z конусу $\mathcal{K}(Q)$, зокрема $\mathcal{K}(\Delta)$, описується в термінах невід'ємно визначених матриць:

$$z \in \mathcal{K}(Q) \Leftrightarrow u_z \ \ge\ 0, \quad \gamma u_z^2 \Gamma^{-1} \ \ge\ U_z U_z^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_z \Gamma^{-1} & U_z \\ U_z^T & u_z \gamma \end{bmatrix} \ge 0,$$

де $u_z = h^T z$, $U_z = H^T z$.

Класу конусів типу $\mathcal{K}(Q)$ належить так званий світловий конус [8]

$$\mathcal{K}_a = \left\{ z \in R^{n+1} \colon \|z\| \le (a, z) \right\}, \tag{2.5}$$

де $(a, z) = a^T z$ — скалярний добуток, a — заданий вектор із нормою $\|a\| > 1$. Дійсно, множина (2.5) описується у вигляді (2.4), якщо покласти $Q = aa^T - I$ і $h = \|a\|^{-1} a$. При цьому $\gamma = a^T a - 1$, $i(Q) = \{1, n, 0\}$. Оскільки $Q^{-1} = \dfrac{1}{\gamma} aa^T - I$, то $\mathcal{K}_a^* = \mathcal{K}_b$, де $b = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} a$. У випадку $\|a\| = \sqrt{2}$ конус $\mathcal{K}_a$ самоспряжений.

Розглянемо у просторі R^{n+m} множини векторів [9]

$$\mathcal{K}_p(\mu_\alpha) = \left\{ z \in R^{n+m} : z^T = \left[x^T, u^T \right],\ u \in R_+^m,\ \|x\|_p \le \mu_\alpha(u) \right\}, \tag{2.6}$$

$$\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) = \left\{ w \in R^{n+m} : w^T = \left[y^T, v^T \right],\ v \in R_+^m,\ \|y\|_q \le \sigma_\beta(v) \right\}, \tag{2.7}$$

де $\mu_\alpha(u) = \alpha \min_k u_k$, $\sigma_\beta(v) = \beta \sum_k v_k$, $R_+^m \subset R^m$ — конус векторів із невід'ємними елементами, $\|a\|_p$ — одна з таких векторних норм:

$$\|x\|_1 = \sum_k |x_k|, \quad \|x\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \max_k |x_k|.$$

Нехай параметри α, β, p і q задовольняють співвідношення

$$\alpha\beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p \ge 1, \quad q \ge 1. \tag{2.8}$$

Тоді для кожної із уведених норм множини (2.6) і (2.7) є тілесними конусами, причому виконуються нерівності

$$|y^T x| \le \|x\|_p \|y\|_q, \quad v^T u \ge \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v). \tag{2.9}$$

У випадку $p > 1$ ($q > 1$) перша нерівність (2.9) — нерівність Гельдера.

Лема 2.2. *При умовах* (2.8) $\mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha) = \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$.

Доведення. Якщо $z \in \mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ і $w \in \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$, то згідно з (2.8) і (2.9) маємо

$$y^T x + v^T u \ge -\|x\|_p \|y\|_q + \mu_\alpha(u)\sigma_\beta(v) \ge 0.$$

Це означає, що $\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) \subset \mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha)$.

Зворотне включення $\mathcal{K}_q(\sigma_\beta) \supset \mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha)$ також виконується. Дійсно, нехай $y^T x + v^T u \ge 0$ для довільного вектора $z \in \mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$. Тоді, очевидно, $v \in R_+^m$ і для встановлення нерівності $\|y\|_q \le \sigma_\beta(v)$ слід розглянути такі випадки:

$$1)\ p = 1, \quad q = \infty, \quad x_k = \begin{cases} -y_s, & k = s, \\ 0, & k \ne s, \end{cases} \quad u = \beta \|x\|_1 e;$$

$$2)\ p = \infty, \quad q = 1, \quad x_k = \begin{cases} -1, & y_k \ge 0, \\ 1, & y_k < 0, \end{cases} \quad u = \beta \|x\|_\infty e;$$

$$3)\ p > 1, \quad q > 1, \quad x_k = \begin{cases} -|y_k|^{q/p}, & y_k \ge 0, \\ |y_k|^{q/p}, & y_k < 0, \end{cases} \quad u = \beta \|x\|_p e,$$

де $|y_s| = \|y\|_\infty$, $e = [1, \ldots, 1]^T$. Для кожного з них виконується співвідношення

$$y^T x + v^T u = -\|x\|_p \|y\|_q + \|x\|_p \sigma_\beta(v) \ge 0,$$

звідки випливає, що $\|y\|_q \le \sigma_\beta(v)$, тобто $w \in \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$.

Лему доведено.

3. Умови позитивності та стійкості лінійних систем. Лінійна диференціальна система у банаховому просторі

$$\dot{z} = Mz, \quad z \in \mathcal{E}, \quad t \ge 0, \tag{3.1}$$

де $M : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — обмежений оператор, має інваріантний конус $\mathcal{K}$, тобто є позитивною відносно $\mathcal{K}$, якщо $e^{Mt}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ для будь-якого $t \ge 0$. Лінійна різницева система

$$z_{k+1} = Mz_k, \quad z_k \in \mathcal{E}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2}$$

має інваріантний конус $\mathcal{K}$, якщо оператор $M \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ — позитивний відносно $\mathcal{K}$.

Умови існування інваріантних тілесних конусів у просторах скінченновимірних систем (3.1) і (3.2) описуються за допомогою спектра $\sigma(M)$ [10, 11]. Система (3.1) позитивна відносно деякого тілесного конуса тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\alpha(M) \overset{\Delta}{=} \max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(M)\} \in \sigma(M),$$
$$\lambda \in \sigma(M), \quad \operatorname{Re}\lambda = \alpha(M) \;\Rightarrow\; d(\lambda) \leq d\big(\alpha(M)\big),$$

де $d(\cdot)$ — кратність власного значення матриці як кореня її мінімального полінома. Аналогічно, система (3.2) позитивна відносно деякого тілесного конуса тоді і тільки тоді, коли

$$\rho(M) \overset{\Delta}{=} \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\} \in \sigma(M),$$
$$\lambda \in \sigma(M), \quad |\lambda| = \rho(M) \;\Rightarrow\; d(\lambda) \leq d\big(\rho(M)\big).$$

Якщо останні умови доповнити нерівністю $d\big(\rho(M)\big) \leq 3$ $\big(d\big(\rho(M)\big) \leq 2$ у випадку $\rho(M) = 0\big)$ і вимагати, щоб жорданова канонічна форма матриці M мала не більше одного блока порядку ≥ 2 з власними значеннями $\lambda \in \sigma(M)$ при $|\lambda| = \rho(M)$, то отримаємо критерій існування інаріантного еліпсоїдального конуса (2.4) для системи (3.2) [12].

Умови стійкості систем (3.1) і (3.2), позитивних відносно нормальних відтворюючих конусів, описуються в термінах позитивних розв'язків алгебраїчних рівнянь (див., наприклад, [13, 14]). Зокрема, критерієм асимптотичної стійкості позитивної системи (3.2) є включення $\mathcal{K} \subset (E - M)\mathcal{K}$. Для системи (3.1) має місце наступне твердження [15].

Теорема 3.1. *Позитивна система* (3.1) *експоненціально стійка тоді і тільки тоді, коли оператор* $-M$ *є позитивно оборотним*: $\mathcal{K} \subset -M\mathcal{K}$. *Якщо* $\mathcal{K} \subset (\gamma E - M)\mathcal{K}$ $\forall\, \gamma \geq 0$, *то система* (3.1) *експоненціально стійка і позитивна відносно* $\mathcal{K}$.

Встановимо достатні умови експоненціальної стійкості системи (3.1) у вигляді позитивної оборотності двох операторів.

Теорема 3.2. *Якщо для деякого* γ_0 *виконуються умови*

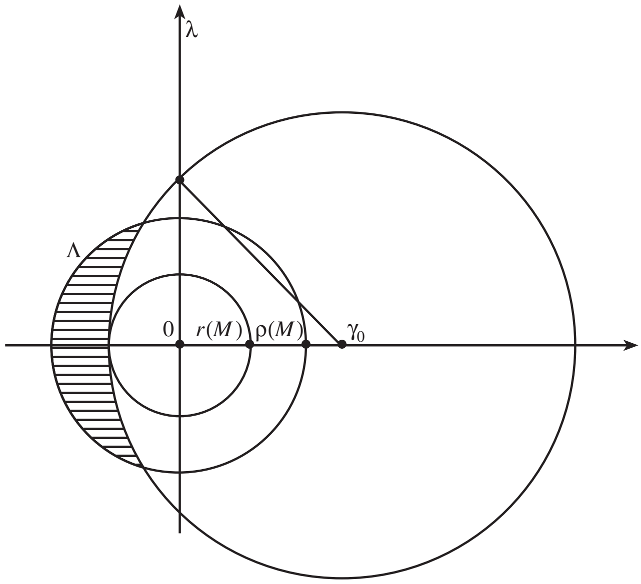
$$\mathcal{K} \subset -M\mathcal{K} \cap (\gamma_0 E - M)\mathcal{K}, \quad \gamma_0 > \frac{\rho^2(M) - r^2(M)}{2r(M)}, \tag{3.3}$$

де $\rho(M)$ — *спектральний радіус оператора* M, $r(M) \overset{\Delta}{=} \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\}$, *то система* (3.1) *є експоненціально стійкою.*

Доведення. Із (3.3) випливає, що оператори $-M^{-1}$ і $(\gamma_0 E - M)^{-1}$ мають інваріантний конус $\mathcal{K}$. Їхні спектри складаються з відповідних чисел $-1/\lambda$ і $1/(\gamma_0 - \lambda)$ при $\lambda \in \sigma(M)$. За теоремою про спектральний радіус позитивного оператора маємо нерівності

$$|\lambda| \geq -\alpha, \quad |\gamma_0 - \lambda| \geq \gamma_0 - \beta, \quad \lambda \in \sigma(M),$$

де $\alpha, \beta \in \sigma(M)$ — деякі дійсні точки спектра. Якщо $0 \leq \gamma \leq \gamma_0$, то $-M \overset{\mathcal{K}}{\leq} \gamma E - M \overset{\mathcal{K}}{\leq} \gamma_0 E - M$ і кожний оператор $\gamma E - M$ повинен бути позитивно оборотним (теорема про двосторонню оцінку позитивно оборотного оператора [1]). Отже, в розглядуваному випадку α і β збігаються і дорівнюють числу $-r(M)$.



Λ — область розміщення спектра $\sigma(M)$.

Якщо виконується оцінка для γ_0 в (3.3), то спектр оператора M належить деякій області Λ, що розташована зліва від уявної осі (див. рисунок). Це є критерієм експоненціальної стійкості системи (3.1).

Теорему доведено.

Встановимо умови позитивності систем (3.1) і (3.2) відносно еліпсоїдальних конусів $\mathcal{K}(Q)$ типу (2.4) і наведемо їх застосування в задачі аналізу стійкості.

Лема 3.1. *Якщо* $P = P^T$, *то* $z^T P z \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}(Q) \Leftrightarrow \exists\, \alpha \geq 0 : P \geq \alpha Q$.

Доведення. Відомо, що $w^T P w \geq 0$ при $w \in \mathcal{K}(\Delta)$ лише тоді, коли існує таке $\alpha \geq 0$, що виконується нерівність $P \geq \alpha \Delta$ [16]. Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}(\Delta)$, то, покладаючи $z = Tw$ і використовуючи закон інерції, отримуємо критерій невід'ємності квадратичної форми $z^T P z$ на конусі $\mathcal{K}(Q)$ у вигляді матричної нерівності $P \geq \alpha Q$.

Лему доведено.

Введемо такі позначення:

$$M = [R, l] = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}, \quad R = [\, r_1, \ldots, r_n] = \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix},$$

$$A = [a_1, \ldots, a_n], \quad b^T = [b_1, \ldots, b_n], \quad c^T = [c_1, \ldots, c_n].$$

Теорема 3.3. $\mathcal{K}(Q)$ *є інваріантним конусом системи* (3.2) *тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$M^T Q M \geq \alpha Q, \quad h^T M h \geq 0, \quad h^T M Q^{-1} M^T h \geq 0, \tag{3.4}$$

де $\alpha \geq 0$ — *деяке невід'ємне число.*

Доведення. Спочатку покажемо, що $\mathcal{K}(\Delta)$ є інваріантним конусом матриці M тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$l \in \mathcal{K}(\Delta), \quad M \Delta M^T \geq \alpha \Delta, \tag{3.5}$$

де $\alpha \geq 0$ — деяке невід'ємне число. Включення $M\mathcal{K}(\Delta) \subset \mathcal{K}(\Delta)$ означає, що

$$S_z = \begin{bmatrix} uI & x \\ x^T & u \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow S_{Mz} = \begin{bmatrix} (c^T x + du)I & Ax + bu \\ x^T A^T + ub^T & c^T x + du \end{bmatrix} \geq 0,$$

тобто для довільних $z \in \mathcal{K}(\Delta)$ і $g \in R^{n+1}$ повинні виконуватись співвідношення

$$g^T S_{Mz} g = l_g^T z \geq 0, \quad l_g^T = \left[g^T S_{r_1} g, \ldots, g^T S_{r_n} g, g^T S_l g \right],$$

$$S_l = \begin{bmatrix} dI & b \\ b^T & d \end{bmatrix}, \quad S_{r_i} = \begin{bmatrix} c_i I & a_i \\ a_i^T & c_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Враховуючи самоспряженість конуса $\mathcal{K}(\Delta)$, маємо $l_g \in \mathcal{K}(\Delta)$, тобто

$$g^T S_l g = w^T l \geq 0, \quad (g^T S_l g)^2 - \sum_{i=1}^{n} \left(g^T S_{r_i} g\right)^2 = w^T S w \geq 0,$$

де

$$g = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \quad w = \Phi(g) = \begin{bmatrix} 2vy \\ y^T y + v^2 \end{bmatrix}, \quad S = ll^T - RR^T = M \Delta M^T.$$

Легко встановити, що нелінійне перетворення $\Phi : R^{n+1} \to R^{n+1}$ зберігає конус $\mathcal{K}(\Delta)$, більш того, $\Phi\left(\mathcal{K}(\Delta)\right) = \mathcal{K}(\Delta)$. Тому можна скористатись лемою 3.1.

Отже, критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}(\Delta)$ для матриці M має вигляд (3.5).

Оскільки $\mathcal{K}(Q) = T\mathcal{K}(\Delta)$, то умови $M\mathcal{K}(Q) \subset \mathcal{K}(Q)$ і $M_T \mathcal{K}(\Delta) \subset \mathcal{K}(\Delta)$, де $M_T = T^{-1} M T$, еквівалентні. Останній стовпчик матриці M_T згідно з розкладом (2.3) має вигляд $l_T = \gamma^{-1/2} T^{-1} M h$. Тому умови (3.5) для вектора l_T і матриці M_T зводяться до вигляду

$$h^T M h \geq 0, \quad h^T M^T Q M h \geq 0, \quad M Q^{-1} M^T \geq \alpha Q^{-1}. \tag{3.6}$$

Відомо, що матриця M має інваріантний конус $\mathcal{K}$ тоді і тільки тоді, коли матриця M^T має інваріантний конус $\mathcal{K}^*$. В даному випадку $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$. Отже, отриманий критерій інваріантності конуса $\mathcal{K}(Q)$ типу (3.6) на основі закону інерції зображується у вигляді (3.4), причому параметр α належить інтервалу $0 \leq \alpha \leq \gamma^{-1} h^T M^T Q M h$.

Теорему доведено.

Зазначимо, що теорема 3.3 узагальнює основний результат роботи [6] для еліпсоїдальних конусів типу $\mathcal{K}(Q)$.

Теорема 3.4. $\mathcal{K}(Q)$ *є інваріантним конусом системи* (3.1) *тоді і тільки тоді, коли для деякого* $\alpha \in R^1$ *виконується матрична нерівність*

$$M^T Q + Q M \geq \alpha Q. \tag{3.7}$$

Доведення. Критерій позитивності системи в термінах спряженого конуса $\mathcal{K}^*(Q) = \mathcal{K}(Q^{-1})$ згідно з (1.3) має вигляд

$$z \in \mathcal{K}(Q), \quad w \in \mathcal{K}^*(Q), \quad w^T z = 0 \Rightarrow w^T M z \geq 0. \tag{3.8}$$

Покажемо, що з ортогональності ненульових векторів $z \in \mathcal{K}(Q)$ і $w \in$

$\in \mathcal{K}^*(Q)$ випливає $w = \beta Qz$, де $\beta > 0$. Нехай $w = Qg$, де g — деякий вектор, і виконуються співвідношення

$$z^T Qz \geq 0, \quad w^T Q^{-1} w = g^T Qg \geq 0, \quad w^T z = g^T Qz = 0.$$

Тоді якщо $V = [z, g]$ — матриця повного рангу 2, то для довільного $\varepsilon > 0$

$$G_\varepsilon = V^T(Q + \varepsilon I)V = \begin{bmatrix} z^T Qz & 0 \\ 0 & g^T Qg \end{bmatrix} + \varepsilon V^T V > 0.$$

Звідси випливає, що вектори z і g повинні бути лінійно залежними. У протилежному випадку для деякого $\varepsilon > 0$ маємо суперечність:

$$1 = i_+(Q) = i_+(Q + \varepsilon I) \geq i_+(G_\varepsilon) = 2.$$

Отже, $w = \beta Qz$, причому $\beta > 0$, оскільки $z^T h > 0$ і $w^T h > 0$.

Умова (3.8) означає, що $z^T(M^T Q + QM)z \geq 0$ для довільного $z \in \mathcal{K}(Q)$, що згідно з лемою 3.1 еквівалентно умові (3.7).

Зауважимо, що в даному випадку $z \in \partial\mathcal{K}(Q)$, тобто $z^T Qz = 0$. Тому умова (3.7) забезпечує інваріантність конуса $\mathcal{K}(Q)$ для системи (3.1) при деякому $\alpha \in R^1$. Можна встановити, що $\alpha \leq 2h^T Mh$.

Теорему доведено.

Узагальнимо теорему 3.4 для неавтономної системи

$$\dot{z} = M(t)z, \quad t \geq 0, \tag{3.9}$$

у фазовому просторі якої задано змінний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q_t)$. Нехай елементи матриць $M(t)$ і $Q_t = Q_t^T$ є неперервними функціями часу t.

Теорема 3.5. *$\mathcal{K}(Q_t)$ є інваріантним конусом системи* (3.9) *тоді і тільки тоді, коли виконується матрична нерівність*

$$\dot{Q}_t + M^T(t)Q_t + Q_t M(t) \geq \alpha(t)Q_t, \quad t \geq 0. \tag{3.10}$$

де $\alpha(t)$ — деяка функція.

Доведення. Нехай $T(t)$ — така невироджена матриця, що $T^T(t)Q_t T(t) \equiv \Delta$. Тоді за допомогою перетворення $z = T(t)w$ отримуємо систему

$$\dot{w} = N(t)w, \quad N(t) = T^{-1}(t)M(t)T(t) - T^{-1}(t)\dot{T}(t), \tag{3.11}$$

яка має інваріантний круговий конус $\mathcal{K}(\Delta)$ лише тоді, коли $\mathcal{K}(Q_t)$ є інваріантним конусом початкової системи (3.9). За теоремою 3.4 критерій позитивності системи (3.11) відносно $\mathcal{K}(\Delta)$ має вигляд

$$N^T(t)\Delta + \Delta N(t) \geq \alpha(t)\Delta,$$

де $\alpha(t)$ — деяка функція. Остання нерівність після множення зліва і справа відповідно на $T^{-1T}(t)$ і $T^{-1}(t)$ з використанням тотожності

$$\dot{Q}_t + T^{-1T}(t)\dot{T}^T(t)Q_t + Q_t \dot{T}(t)T^{-1}(t) \equiv 0$$

зводиться до вигляду (3.10).

Теорему доведено.

Теорема 3.6. *Нехай існують симетрична матриця Q з інерцією $i(Q) = \{1, n, 0\}$ і сталі $\alpha \in R^1$ і $\beta > 0$, для яких виконуються нерівності*

$$M^T Q + QM \geq \alpha Q, \quad M^T QM \leq \beta Q,$$
$$h^T M^{-1} h \leq 0, \quad h^T (M^T QM)^{-1} h \geq 0, \tag{3.12}$$

де h *— власний вектор матриці* Q, *що відповідає її єдиному додатному власному значенню. Тоді диференціальна система* (3.1) *експоненціально стійка і має інваріантний конус* $\mathcal{K}(Q)$.

Даний результат є наслідком теорем 3.1, 3.3 і 3.4. Аналогічне твердження має місце для системи (3.2).

Теорема 3.7. *Нехай існують симетрична матриця* Q *з інерцією* $i(Q) = \{1, n, 0\}$ *і сталі* $\alpha > 0$ *і* $\beta > 0$, *для яких разом з* (3.4) *виконуються нерівності*

$$M_1^T QM_1 \leq \beta Q, \quad h^T M_1^{-1} h \geq 0, \quad h^T \left(M_1^T QM_1\right)^{-1} h \geq 0, \tag{3.13}$$

де $M_1 = I - M$. *Тоді різницева система* (3.2) *асимптотично стійка і має інваріантний конус* $\mathcal{K}(Q)$.

***Приклад* 3.1.** Розглянемо диференціальну систему

$$\dot{z} = Mz, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5a & 4a-5 & a-4 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

де a — дійсний параметр. Оскільки $\sigma(M) = \{-2 \pm i, a\}$, то система має інваріантний еліпсоїдальний конус $\mathcal{K}(Q)$ лише тоді, коли $\alpha(M) = a \in \sigma(M)$. Разом з матричною нерівністю (3.7) розглянемо матричне рівняння

$$M^T Q + QM - \alpha Q = I. \tag{3.15}$$

Згідно з теоремою інерції його розв'язок повинен задовольняти умови

$$i_\alpha^+(M) = i_+(Q), \quad i_\alpha^-(M) = i_-(Q), \quad i_0(Q) = 0,$$

де $i_\alpha^+(M)$ $\left(i_\alpha^-(M) \right)$ — кількість власних значень матриці M, розташованих справа (зліва) від прямої $2\,\mathrm{Re}\,\lambda = \alpha$. Будемо вважати, що $\alpha = a - 2$, тоді $i(Q) = \{1, 2, 0\}$.

Якщо $a = -1$, то $\alpha = -3$ і з рівняння (3.15) знаходимо

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3,8 & 1,2 \\ 8 & 1,2 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0,89719 \\ 0,38737 \\ 0,21211 \end{bmatrix}, \quad i(Q) = \{1, 2, 0\}.$$

Розв'язуючи систему нерівностей (3.12) відносно a, α і β при знайдених Q і h, отримуємо $a = -0,81697$, $\alpha = -2,9682$, $\beta = 1,07585$. Отже, виконуються умови теореми 3.6, при яких система (3.14) є експоненціально стійкою і має інваріантний конус $\mathcal{K}(Q)$.

Встановимо умови інваріантності конусів типу $\mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ для системи (3.2), використовуючи блочне зображення матриці

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad A = \left\| a_{ij} \right\|_1^n, \quad B = \left\| b_{ij} \right\|_1^{n,m},$$
$$C = \left\| c_{ij} \right\|_1^{m,n}, \quad D = \left\| d_{ij} \right\|_1^m.$$

Для позначення k-го стовпчика і s-го рядка довільної матриці X будемо використовувати відповідні символи типу x_{*k} і x_{s*}^T. Знайдемо умови того, що

$$\|x\|_p \le \mu_\alpha(u) \Rightarrow \|Ax+Bu\|_p \le \mu_\alpha(Cx+Du).$$

З огляду на співвідношення

$$\|Ax+Bu\|_p \le \|A\|_p\|x\|_p + \sum_{j=1}^{m}|b_{*j}|u_j \le h^T u, \qquad \|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p,$$

$$h^T = \left[\frac{\alpha}{m}\|A\|_p + \|b_{*1}\|_p, \ldots, \frac{\alpha}{m}\|A\|_p + \|b_{*m}\|_p\right], \qquad \mathcal{K}_p^*(\mu_\alpha) = \mathcal{K}_q(\sigma_\beta)$$

намагатимемося задовольнити нерівності

$$\alpha c_{s*}^T x + (\alpha d_{s*} - h)^T u \ge 0, \qquad \alpha\|c_{s*}\|_q \le \sigma_\beta(\alpha d_{s*} - h), \quad s = \overline{1,m}.$$

Отже, умови інваріантності конуса $\mathcal{K}_p(\mu_\alpha)$ для системи (3.2) мають вигляд

$$\|A\|_p + \beta\sum_{j=1}^{m}\|b_{*j}\|_p + \alpha\|c_{s*}\|_q \le \sum_{j=1}^{m} d_{sj},$$

$$d_{sj} \ge \frac{1}{m}\|A\|_p + \beta\|b_{*j}\|_p, \qquad s = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m},$$

де $p>1$, $q>1$, $\alpha\beta=1$, $1/p+1/q=1$, $\|A\|_p$ — узгоджена матрична норма з векторною нормою $\|x\|_p$. Зокрема,

$$\|A\|_1 = \max_j\sum_i|a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{1/2}, \qquad \|A\|_\infty = \max_i\sum_j|a_{ij}|.$$

У випадках $p=2$ і $p=\infty$ маємо критерії

$$M\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)\subset\mathcal{K}_2(\mu_\alpha) \;\Leftrightarrow\; l_j\in\mathcal{K}_2(\mu_\alpha), \quad M_k\Delta M_k^T \ge \alpha_k\Delta,$$

$$M\mathcal{K}_\infty(\mu_\alpha)\subset\mathcal{K}_\infty(\mu_\alpha) \;\Leftrightarrow\; d_{kj} \ge \beta|b_{sj}|, \quad \sum_{i=1}^{n}|\alpha c_{ki} \pm a_{si}| \le \sum_{j=1}^{m}(d_{kj} \pm \beta b_{sj}),$$

де

$$l_j = \begin{bmatrix} b_{*j} \\ d_{*j}\end{bmatrix}, \qquad M_k = \begin{bmatrix} A & \beta\sum_j b_{*j} \\ \alpha c_{k*}^T & \sum_j d_{kj}\end{bmatrix}, \qquad \alpha_k \ge 0, \quad s = \overline{1,n}, \quad j,k = \overline{1,m}.$$

У випадку $p=2$ можна встановити також такі достатні умови:

$$Q_k > 0, \quad Q_k \ge \sum_{i=1}^{n} P_{ki}Q_k^{-1}P_{ki}, \quad k = \overline{1,m} \;\Rightarrow\; M\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)\subset\mathcal{K}_2(\mu_\beta),$$

де

$$Q_k = \beta\sum_{j=1}^{m}Q_{kj}, \qquad P_{ki} = \begin{bmatrix}\alpha c_{ki}I & a_{*i} \\ a_{*i}^T & \alpha c_{ki}\end{bmatrix}, \qquad Q_{kj} = \begin{bmatrix}\alpha d_{kj}I & b_{*j} \\ b_{*j}^T & \alpha d_{kj}\end{bmatrix}.$$

При доведенні використовують зображення конусів $\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)$ і $\mathcal{K}_2(\sigma_\beta)$ у термінах невід'ємно визначених матриць, зокрема

$$\mathcal{K}_2(\mu_\alpha) = \left\{\begin{bmatrix}x\\u\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}\mu_\alpha(u)I & x \\ x^T & \mu_\alpha(u)\end{bmatrix} \ge 0\right\}.$$

Умови позитивності і монотонності нелінійних диференціальних систем відносно конуса $\mathcal{K}_2(\mu_\alpha)$ наведено в [17].

4. Позитивність та стійкість лінійних диференціальних рівнянь s-го порядку. Розглянемо диференціальну систему s-го порядку

$$A_0 x(t) + A_1 x^{(1)}(t) + \ldots + A_s x^{(s)}(t) = 0, \qquad x^{(i)}(0) = x_0^{(i)}, \quad i = \overline{0, s-1}, \tag{4.1}$$

де $x(t) \in R^n$ — вектор фазових координат, $t \geq 0$, $A_i \in R^{n \times n}$ — коефіцієнти регулярного матричного полінома $F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \ldots + \lambda^s A_s$. Повний стан системи (4.1) характеризує вектор-функція $y(t)$, що є розв'язком диференціальної системи першого порядку

$$A\, y(t) = B\, \dot{y}(t), \qquad y(0) = y_0, \quad t \geq 0, \tag{4.2}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -A_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & I & 0 \end{bmatrix}, \qquad y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Тому інваріантні множини і властивості позитивності даної системи відносно конусів будемо визначати у фазовому просторі R^{ns}:

$$y(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ x^{(1)}(0) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(0) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}} \Rightarrow y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x^{(s-1)}(t) \end{bmatrix} \in \hat{\mathcal{K}},$$

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 \\ \mathcal{K}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{K}_{s-1} \end{bmatrix}, \quad t \geq 0.$$

При цьому значення $x(t)$ будуть належати множині $\mathcal{K}_0$.

Нехай (U, T) — довільна (права) власна пара матричного полінома $F(\lambda)$, що визначається з умов [4]

$$A_0 T + A_1 T U + \ldots + A_s T U^s = 0, \qquad \operatorname{rank} E = m, \qquad E \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} T \\ TU \\ \vdots \\ TU^{s-1} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

де $T \in C^{n \times m}$, $U \in C^{m \times m}$. Тоді спектр матриці U є підмножиною спектра $\sigma(F)$ матричного полінома $F(\lambda)$. Відомо також, що (U, T) є власною парою $F(\lambda)$ тоді і тільки тоді, коли (U, E) — власна пара лінійної в'язки $L(\lambda) = A - \lambda B$, тобто

$$AE = BEU, \qquad \operatorname{rank} E = m. \tag{4.4}$$

Зазначимо, що спектри $\sigma(L)$ і $\sigma(F)$ збігаються.

Власну пару (U, T) матричного полінома $F(\lambda)$ будемо називати максимальною, якщо у співвідношеннях (4.3) число m набуває максимально можливого значення. Якщо (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$, то m збігається з кількістю власних значень $F(\lambda)$ з урахуванням кратності.

Лема 4.1. *Власна пара (U, T) матричного полінома $F(\lambda)$ є максимальною тоді і тільки тоді, коли виконуються умови*

$$\operatorname{rank}[\, F(\lambda), \Phi(\lambda)\,] \equiv n, \qquad \Phi(\lambda) \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{s} \lambda^{i-1} \sum_{j=i}^{s} A_j T U^{j-i}, \quad \lambda \in \sigma(F). \tag{4.5}$$

Доведення. Нехай (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$. Тоді (U, E) є максимальною власною парою в'язки $L(\lambda)$. Використаємо канонічну форму Кронекера регулярної в'язки [18] і структуру матриці E в (4.4):

$$P(A - \lambda B)Q = \begin{bmatrix} J - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda N \end{bmatrix}, \qquad E = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad JR = RU, \tag{4.6}$$

де $J \in C^{m \times m}$, $\sigma(J) = \sigma(L)$, P і Q — невироджені матриці, N — нільпотентна матриця, всі елементи якої є нулями за винятком можливо, одиниць, розташованих на головній наддіагоналі. У даному випадку R є квадратною невиродженою матрицею і неважко встановити тотожність

$$\operatorname{rank}[A - \lambda B, BE] \equiv ns, \quad \lambda \in C^1,$$

яка за допомогою еквівалентних блочних перетворень зводиться до вигляду (4.5).

Умови (4.5) можна переписати у вигляді

$$v^T F(\lambda) = 0, \quad v \neq 0 \;\Rightarrow\; v^T \Phi(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in F(\lambda),$$

а матричне рівняння в (4.3) еквівалентне тотожності

$$F(\lambda)T \equiv \Phi(\lambda)(\lambda I - U), \quad \lambda \in C^1.$$

Нехай v^T — лівий власний вектор матричного полінома $F(\lambda)$, що відповідає власному значенню $\lambda \in \sigma(F)$. Тоді з останньої тотожності при умовах (4.5) випливає, що $u^T = v^T \Phi(\lambda)$ є лівим власним вектором матриці U, що відповідає її власному значенню $\lambda \in \sigma(U)$. Це означає, що (U, T) — максимальна власна пара матричного полінома $F(\lambda)$.

Лему доведено.

Наступне твердження може бути корисним для чисельного знаходження власних пар матричного полінома.

Лема 4.2. *Якщо $(n \times m)$-матриці $R_0, \ldots, R_s$ задовольняють умови*

$$A_0 R_0 + A_1 R_1 + \ldots + A_s R_s = 0, \tag{4.7}$$

$$\operatorname{rank} S_0 = \operatorname{rank}[S_0, S_1] = m \leq sn, \qquad S_0 \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} R_0 \\ \vdots \\ R_{s-1} \end{bmatrix}, \qquad S_1 \overset{\Delta}{=} \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_s \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

то матриці

$$U = \left(S_0^T S_0\right)^{-1} S_0^T S_1, \quad T = R_0, \tag{4.9}$$

складають власну пару матричного полінома $F(\lambda)$, *тобто задовольняють співвідношення* (4.3).

Доведення. При умовах (4.8) існує єдиний розв'язок рівняння $S_0 U = S_1$, що визначений в (4.9). При цьому S_0 збігається з E, а матричне рівняння (4.7) зводиться до вигляду (4.3).

Лему доведено.

Лема 4.3. *Нехай* (U, T) — *власна пара матричного полінома* $F(\lambda)$. *Тоді* $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$ *є інваріантною множиною системи* (4.1) *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{K}$ — *інваріантна множина системи*

$$\dot{z} = Uz, \quad z(0) = z_0, \quad t \geq 0. \tag{4.10}$$

Зокрема, система (4.1) *є позитивною відносно конуса* $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$ *лише тоді, коли система* (4.10) *позитивна відносно конуса* $\mathcal{K}$.

Доведення. Будуємо розв'язок системи (4.2) у вигляді $y(t) = Ez(t)$. Враховуючи (4.4) і (4.6), отримуємо співвідношення

$$BE(\dot{z} - Uz) = 0, \quad BE = P^{-1}\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rank}(BE) = \operatorname{rank} E = m$, то $y(t)$ є розв'язком системи (4.2) тоді і тільки тоді, коли $z(t)$ задовольняє (4.10). Тому система (4.2) (а разом з нею і (4.1)) має інваріантний конус типу $E\mathcal{K}$ лише тоді, коли $\mathcal{K}$ є інваріантним конусом системи (4.10).

Лему доведено.

Наступне твердження є наслідком теореми 3.1 і того факту, що максимальна власна пара матричного полінома повністю визначає його спектр, тобто $\sigma(U) = \sigma(F)$.

Теорема 4.1. *Нехай* (U, T) — *максимальна власна пара матричного полінома* $F(\lambda)$ *така, що система* (4.10) *позитивна відносно нормального тілесного конуса* $\mathcal{K}$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними*:

1) *система* (4.1) *експоненціально стійка*;

2) $\operatorname{Re}\lambda < 0 \ \ \forall \lambda \in \sigma(U)$;

3) $\mathcal{K} \subset -U\mathcal{K}$;

4) $\exists z_0 \in \operatorname{int}\mathcal{K}: \ Uz_0 \in -\operatorname{int}\mathcal{K}$.

Сформулюємо достатні умови позитивності й експоненціальної стійкості системи (4.1). Припустимо, що виконується включення

$$B\hat{\mathcal{K}} \subset (\gamma B - A)\hat{\mathcal{K}} \quad \forall \gamma \geq 0, \tag{4.11}$$

де $\hat{\mathcal{K}} \subset R^{ns}$ — деяка множина. Тоді згідно з (4.6) маємо такі включення:

$$\hat{\mathcal{K}}_1 \subset (\gamma I - J)\hat{\mathcal{K}}_1, \quad -(N + \gamma N^2 + \ldots + \gamma^{\nu-2} N^{\nu-1})\hat{\mathcal{K}}_2 \subset \hat{\mathcal{K}}_2,$$

де $\hat{\mathcal{K}} = Q_1\hat{\mathcal{K}}_1 + Q_2\hat{\mathcal{K}}_2$, $Q = [Q_1, Q_2]$, ν — індекс нільпотентності матриці N. Множина $\hat{\mathcal{K}}$ буде інваріантною для системи (4.2) лише тоді, коли $\hat{\mathcal{K}}_2 = \{0\}$. Якщо $\hat{\mathcal{K}}_1$ — нормальний відтворюючий конус, то за теоремою 3.1 перше включення забезпечує позитивність відносно $\hat{\mathcal{K}}_1$ й експоненціальну стійкість системі $\dot{z} = Jz$. У цьому випадку система (4.2) є експоненціально стійкою і має інваріантну множину $\hat{\mathcal{K}} = Q_1\hat{\mathcal{K}}_1$, що є конусом розмірності $\dim\hat{\mathcal{K}} = m$ лише тоді, коли $\hat{\mathcal{K}}_1$ — відтворюючий конус. Аналогічну структуру має множина $\hat{\mathcal{K}} = M_\alpha^\nu\mathcal{K} = Q_1(\alpha I - J)^{-\nu}\mathcal{K}_1$, де $M_\alpha \overset{\Delta}{=} (\alpha B - A)^{-1}B$, $\mathcal{K} = Q_1\mathcal{K}_1 + Q_2\mathcal{K}_2$, $\alpha \notin \sigma(F)$. Зокрема, можна покласти $\alpha = 0$.

На основі теореми 3.2 і наведених міркувань отримуємо наступні твердження.

Теорема 4.2. *Якщо для деякого* γ_0 *виконуються умови*

$$B\hat{\mathcal{K}} \subset -A\hat{\mathcal{K}} \bigcap (\gamma_0 B - A)\hat{\mathcal{K}}, \qquad \gamma_0 > \frac{\rho^2(F) - r^2(F)}{2r(F)}, \tag{4.12}$$

де $\rho(F) \overset{\Delta}{=} \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\}$, $r(F) \overset{\Delta}{=} \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\}$, $\hat{\mathcal{K}} = M_\alpha^\nu\mathcal{K}$ — *нормальний конус розмірності* m, *то система* (4.1) *є експоненціально стійкою.*

Теорема 4.3. *Якщо для деякої максимальної власної пари* (U, T) *матричного полінома* $F(\lambda)$ *виконується включення*

$$\mathcal{K} \subset (\gamma I - U)\mathcal{K} \quad \forall\, \gamma \ge 0, \tag{4.13}$$

де $\mathcal{K}$ — *нормальний відтворюючий конус, то система* (4.1) *є експоненціально стійкою і має інваріантний конус* $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K}$.

Зауважимо, що включення (4.13) випливає із (4.11), якщо покласти $\hat{\mathcal{K}} = E\mathcal{K} = Q_1 R\mathcal{K}$ і врахувати рівність $JR = RU$.

***Приклад* 4.1.** Розглянемо диференціальну систему другого порядку

$$A_0 x + A_1\dot{x} + A_2\ddot{x} = 0, \tag{4.14}$$

де

$$A_0 = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Їй відповідає матрична квадратична в'язка

$$F(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 8 & \lambda + 1 \\ -4\lambda - 9 & \lambda + 1 \end{bmatrix},$$

спектр якої $\sigma(F) = \{-4 \pm i, -1\}$. Використавши в системі MATHCAD конструкцію „Given…Find", знайдемо максимальну власну пару цієї в'язки

$$U = \begin{bmatrix} -1{,}525 & 0{,}53 & 0 \\ 0{,}688 & -3{,}686 & 1{,}595 \\ 3{,}448 & 0 & -3{,}79 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -0{,}13 & 0{,}26 & -0{,}103 \\ 3{,}299 & 1{,}309 & -0{,}073 \end{bmatrix}.$$

Позадіагональні елементи матриці U невід'ємні, а обернена до неї

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}822 & -0{,}118 & -0{,}05 \\ -0{,}476 & -0{,}34 & -0{,}143 \\ -0{,}748 & -0{,}108 & -0{,}309 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{K}}{\le} 0,$$

де $\mathcal{K} = R_+^3$ — конус невід'ємних векторів.

Отже, виконуються умови теореми 4.1 і система (4.14) є експоненціально стійкою. Більш того, згідно з лемою 4.3 вона має інваріантний конус

$$\hat{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_0 \\ \mathcal{K}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_0 = T\mathcal{K}, \quad \mathcal{K}_1 = TU\mathcal{K}. \tag{4.15}$$

На основі теореми 3.4 знайдемо максимальну власну пару (U, T) квадратичної в'язки $F(\lambda)$ і параметри еліпсоїдального конуса $\mathcal{K}(Q) \subset R^3$, що задовольняють теорему 4.1. Систему нерівностей

$$U^T Q + QU \geq \alpha Q, \quad U^T QU \leq \beta Q, \quad h^T U^{-1} h \leq 0, \quad h^T (U^T QU)^{-1} h \geq 0$$

задовольняють такі значення параметрів:

$$U = \begin{bmatrix} -1{,}67 & 0{,}479 & 0{,}037 \\ 0{,}071 & -3{,}343 & 1{,}028 \\ 7{,}627 & 0{,}245 & -3{,}987 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0{,}148 & 0{,}022 & -0{,}066 \\ 2{,}208 & 0{,}395 & -0{,}027 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 27 & 17 & 8 \\ 17 & -3{,}8 & 1{,}2 \\ 8 & 1{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0{,}897 \\ 0{,}387 \\ 0{,}212 \end{bmatrix}, \quad \alpha = -2{,}96, \quad \beta = 1{,}115.$$

Тут (U, T) є максимальною власною парою $F(\lambda)$, $i(Q) = \{1, 2, 0\}$, а h — власний вектор матриці Q, що відповідає її єдиному додатному власному значенню.

Отже, згідно з теоремою 4.1 система (4.14) є експоненціально стійкою і має інваріантний конус типу (4.15), де $\mathcal{K} = \mathcal{K}(Q)$ — еліпсоїдальний конус.

1. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
2. *Hirsch M. W., Smith H.* Competitive and cooperative systems: mini-review. Positive systems // Lect. Notes in Control and Inform. Sci. – 2003. – **294**. – P. 183–190.
3. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics: novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 301 p.
4. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999.– **28**. – 216 с.
5. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 2. – С. 198–213.
6. *Stern R. J., Wolkowicz H.* Exponential nonnegativity on the ice cream cone // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1991. – **12**, № 1. – P. 160–165.
7. *Мазко А. Г.* Полуобращение и свойства инвариантов матриц // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 525–528.
8. *Hirsch M. W.* Stability and convergence in strongly monotone dynamical systems // J. reine und angew. Math. – 1988. – **383**. – P. 1–53.
9. *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 28–45.
10. *Vandergraft J. S.* Spectral properties of matrices which have invariant cones // SIAM J. Appl. Math. – 1968. – **16**. – P. 1208–1222.
11. *Elsner L.* Monotone und Randspektrum bei vollstetigen Operatoren // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1970. – **36**. – P. 356–365.
12. *Stern R. J., Wolkowicz H.* Invariant ellipsoidal cones // Linear Algebra and Appl. – 1991. – **150**. – P. 81–106.
13. *Мильштейн Г. Н.* Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 35–42.
14. *Мазко А. Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 323–330.
15. *Мазко А. Г.* Позитивные и монотонные системы в полуупорядоченном пространстве // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 164–173.
16. *Loewy R., Schneider H.* Positive operators on the ice-cream cone // J. Math. Anal. and Appl. – 1075. – **49**. – P. 375–392.
17. *Мазко А. Г.* Позитивная стабилизация многосвязных систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 2. – С. 130–142.
18. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Одержано 14.12.2005