Дзета функція та алгебра

Марія Власенко

Семінар Чернівецького математичного товариства
19 квітня, 2023

I. Базельська проблема

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \approx 1.64493406684\ldots$$

Якщо комусь вдасться знайти те, що досі не піддавалося нашим зусиллям, і якщо він повідомить це нам, то ми будемо йому дуже зобов'язані. — Якоб Бернуллі "Арифметичні пропозиції про нескінченні ряди", 1689

Леонард Ейлер 1735

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{1^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \ldots \in \mathbb{Q}\,\pi^{2k}$$

Числа Бернуллі

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} \pi^{2k} \qquad \text{Л. Ейлер}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \ldots \quad \text{раціональні числа}$$

... які зустрічаються *майже всюди*. Наприклад:

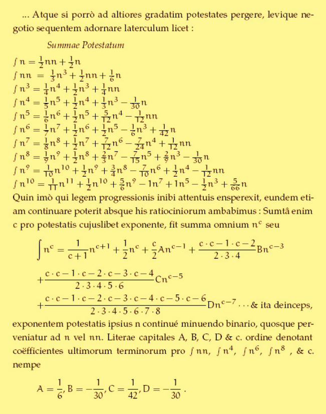
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right)$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)$$

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m$$
$$= \frac{1}{m+1}\left(B_0 \binom{m+1}{0} n^{m+1} + B_1 \binom{m+1}{1} n^m + \ldots + B_m \binom{m+1}{m} n\right)$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m!} z^m \qquad \text{генеруюча функція}$$

Числа Бернуллі і єдність математики



... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$\int n = \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n$$
$$\int nn = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n$$
$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}nn$$
$$\int n^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$
$$\int n^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n$$

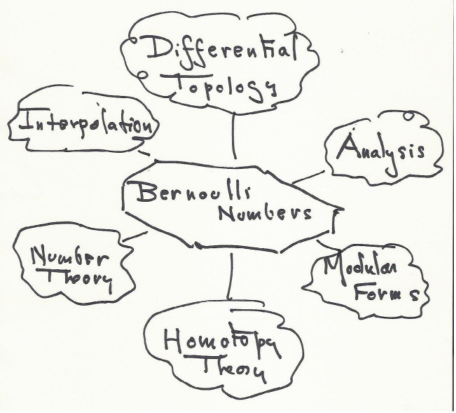
Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7}\ldots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

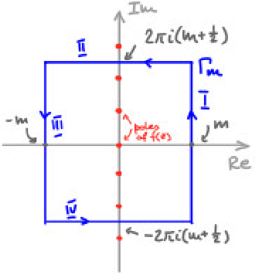
Summae Potestatum
Jacob Bernoulli, XVII ст



Ескіз єдності Математики
Barry Mazur, 2008

Одне з доведень формули Ейлера

$$f(z) = \frac{1}{z^k(e^z - 1)}, \quad k \geq 2$$



$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \Rightarrow$$

$$Res_{z=0} f(z)dz = \frac{B_k}{k!}$$

$$n \neq 0 : Res_{z=2\pi in} f(z)dz = \frac{1}{(2\pi in)^k}$$

$$\int_{\Gamma_m} f(z)dz = O(m^{1-k}), m \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{B_k}{k!} + \frac{1}{(2\pi i)^k} \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^k} = 0$$

$k \geq 2$ непарне: $B_k = 0$, парне: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\frac{(2\pi i)^k \cdot B_k}{2 \cdot k!}$

Дзета функція Рімана в цілих точках

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad Re(s) > 1$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \dots \quad \zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{B_{2k} 2^{2k-1}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

$$\zeta(3) = 1.2020569031595942853997381615114499908\dots$$

$$\zeta(5) = 1.0369277551433699263313654864570341681\dots$$

Теорема (Roger Apéry, 1979) $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$

Теорема (Wadim Zudilin, 2001) Серед чисел $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ хоча б одне є ірраціональним.

Гіпотеза Числа $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{Q}$.

II. Числові поля та дзета функції Дедекінда

Числове поле це скінченне розширення $F \supset \mathbb{Q}$, $\dim_{\mathbb{Q}}(F) = n$.
Кожне таке поле має вигляд

$$F \cong \frac{\mathbb{Q}[x]}{\{f(x) = 0\}} \text{ де } f \in \mathbb{Q}[x] \text{ степеня } n, \text{ нерозкладний}$$

і має n різних вкладень у поле комплексних чисел:

$$\sigma_i : F \hookrightarrow \mathbb{C}, \qquad x \mapsto \xi_i$$

де $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}$ корені $f(x)$

$$\sigma_i(F) = \mathbb{Q}(\xi_i) = \{a_0 + a_1\xi_i + \ldots + a_{n-1}\xi_i^{n-1} : a_j \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$$

$$n = r + 2s$$

$$\xi_1, \ldots, \xi_r \in \mathbb{R}, \quad \xi_{r+1}, \bar{\xi}_{r+1}, \ldots, \xi_{r+s}, \bar{\xi}_{r+s} \in \mathbb{C}$$

дійсні вкладення пари спряжених комплексних

Приклад $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$: $F = \mathbb{Q}[x]/\{x^3 = 2\}$ має $r = 1$ та $s = 1$:

$\xi_1 = 1.25992104\ldots \quad \xi_{2,3} = -0.62996052\ldots \pm i \cdot 1.09112363\ldots$

Алгебраїчні цілі числа

$F \supset \mathbb{Q}$, $\dim_{\mathbb{Q}}(F) = n$

Елемент $\alpha \in F$ називається *цілим* якщо його мінімальне нормоване рівняння має коефіцієнти в $\mathbb{Z}$:

$$\alpha^m + c_1\alpha^{m-1} + \ldots + c_m = 0, \quad c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}.$$

$\mathcal{O}_F = \{$ цілі елементи $F\}$ є кільцем.

Приклад: $F = \mathbb{Q}(i)$, $\mathcal{O}_F = \{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\}$

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathcal{O}_F = \{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

Твердження $\mathcal{O}_F$ є вільним $\mathbb{Z}$-модулем рангу n.

$\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}\alpha_1 + \ldots + \mathbb{Z}\alpha_n$

$d_F = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2 \in \mathbb{Z}$ називається *дискримінантом* поля F

Нп. $d_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^2 = 5$

Неоднозначність факторизації у кільцях цілих

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \qquad \mathcal{O}_F = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$

$$\mathcal{O}_F^\times = \{\alpha \in \mathcal{O}_F : 1/\alpha \in \mathcal{O}_F\} = \{\pm 1\}$$

$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$$

Теорема (Heilbronn-Linfoot 1934, Heegner 1952, Baker-Stark 1967) Єдиними уявними квадратичними полями $F = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m < 0$ вільне від квадратів, у яких $\mathcal{O}_F$ є областю однозначної факторизації є випадки
$m = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163.$

Гіпотеза Серед дійсних квадратичних полів $(m > 0)$ існує нескінченно багато таких, де факторизація є однозначною у кільці цілих.

Однозначність факторизації та “ідеальні числа”

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \qquad \mathcal{O}_F = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$$
$$21 = 3 \cdot 7 = (1 + 2\sqrt{-5})(1 - 2\sqrt{-5})$$

Едуард Куммер (1810-1893): *вкласти $\mathcal{O}_F$ у більшу множину “ідеальних чисел” де*

$$3 = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad 7 = \mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4, \quad 1 + 2\sqrt{-5} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3,\ 1 - 2\sqrt{-5} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4.$$

Річард Дедекінд (1831-1916): *такою множиною можуть бути ідеали кільця $\mathcal{O}_F$!*

Підмножина кільця $I \subseteq R$ називається *ідеалом* якщо

- $(I, +)$ є адитивною підгрупою $(R, +)$
- $r \in R, x \in I \Rightarrow rx \in I$

Приклад: $I = Rr_1 + \ldots + Rr_m = \langle r_1, \ldots, r_m \rangle$ ідеал породжений елементами $r_1, \ldots, r_m$. Ідеали $\langle r \rangle$ називаються головними.

Однозначність факторизації ідеалів за Дедекіндом

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq \mathcal{O}_F$ ідеали

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \{x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m : m \geq 1, x_i \in \mathfrak{a}, y_j \in \mathfrak{b}\}$

$\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ *простий* якщо $x \cdot y \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ або $y \in \mathfrak{p}$

Теорема Кожен ненульовий ідеал $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$ однозначно розкладається у добуток простих ідеалів $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_m^{e_m}$.

$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ якщо $\exists x, y \in \mathcal{O}_F : \langle x \rangle \mathfrak{a} = \langle y \rangle \mathfrak{b}$

$Cl_F = \{$ ідеали $\mathcal{O}_F\}/\sim$ *група класів ідеалів*

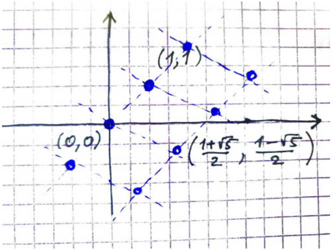
Теорема $\#Cl_F < \infty$

Теорема Наступні твердження є еквівалентними:

- $\mathcal{O}_F$ є областю однозначної факторизації
- кожен ідеал у $\mathcal{O}_F$ є головним
- $\#Cl_F = 1$

“Геометрія чисел” Мінковського

Герман Мінковський (1864-1909)



$F \to M \subset \mathbb{C}^n$

$\alpha \mapsto (\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha))$

$M \cong \mathbb{R}^n$ нерухомі точки інволюції

$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r, \overline{z}_{r+2}, \overline{z}_{r+1}, \dots, \overline{z}_{r+2s}, \overline{z}_{r+2s-1})$

Твердження Образ кільця цілих $\mathcal{O}_F$ це решітка в $M \cong \mathbb{R}^n$ ко-об’єму $d_F \neq 0$.

Твердження Ідеали $\{0\} \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_F$ є вільними $\mathbb{Z}$-модулями ранга n.

Образом $\mathfrak{a}$ в просторі Мінковського M є решітка ко-об’єму $d_F \cdot \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$. Число $N(\mathfrak{a}) = \#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$ називається нормою ідеала $\mathfrak{a}$.

Дзета функція Дедекінда

F числове поле

$$\zeta_F(s) = \sum_{\{0\} \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_F} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad Re(s) > 1$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{m^s} \qquad C_m = \#\{\mathfrak{a} : N(\mathfrak{a}) = m\}$$

Приклад: $F = \mathbb{Q}$

ідеали в $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}$ це $\langle m \rangle = m\mathbb{Z}$, $m \geq 0$

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \zeta(s) \qquad \text{дзета функція Рімана}$$

Лишок в $s = 1$

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$$

$$\zeta_F(s) = \sum_{\{0\}\neq\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_k} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \qquad Re(s) > 1$$

Теорема (аналітична формула для числа класів)

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^r \cdot (2\pi)^s \cdot \# Cl_F \cdot Reg_F}{w_F \cdot \sqrt{|d_F|}}$$

де $r + 2s = n = \deg_{\mathbb{Q}} F$,
w_F це кількість коренів з одиниці в F,
Reg_F це *регулятор* поля (зараз пояснимо що це!)

Теорема Діріхле про оборотні елементи

$$\mathcal{O}_F^\times = \{\alpha \in \mathcal{O}_F : 1/\alpha \in \mathcal{O}_F\} \quad \text{група оборотних елементів}$$

Приклади: $F = \mathbb{Q}(i)$, $\quad \mathcal{O}_F = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, $\quad \mathcal{O}_F^\times = \{\pm 1, \pm i\}$

$$F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \qquad \mathcal{O}_F = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$$

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{2} \qquad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\varepsilon^2 = 3 + 2\sqrt{2}, \quad \varepsilon^3 = 7 + 5\sqrt{2}, \ldots$$

$$\mathcal{O}_F^\times = \{\pm \varepsilon^m; m \in \mathbb{Z}\}$$

Теорема $\mathcal{O}_F^\times = (\mathcal{O}_F^\times)^{tors} \times \mathbb{Z}^{r+s-1}$

$(\mathcal{O}_F^\times)^{tors}$ це корені з одиниці в F, $w_F = \#(\mathcal{O}_F^\times)^{tors}$

Теорема Діріхле та “геометрія чисел”

$$\lambda : F^\times = F \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{r+s}$$
$$\alpha \mapsto (\log|\sigma_1(\alpha)|, \ldots, \log|\sigma_r(\alpha)|, 2\log|\sigma_{r+1}(\alpha)|, \ldots, 2\log|\sigma_{r+s}(\alpha)|)$$
$$\lambda(\alpha \cdot \beta) = \lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$$

Теорема Образ мультиплікативної групи оборотних елементів $\lambda(\mathcal{O}_F^\times)$ це ко-компактна решітка у підпросторі[1]

$$V = \{(x_1, \ldots, x_{r+s}) \in \mathbb{R}^{r+s} : x_1 + \ldots + x_{r+s} = 0\} \cong \mathbb{R}^{r+s-1}.$$

Ко-об'єм решітки $\lambda(\mathcal{O}_F)$ в V називається *регулятором* Reg_F поля F.
Приклад: для $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ маємо $\mathcal{O}_F^\times = \{\pm(1+\sqrt{2})^{\mathbb{Z}}\}$ та $Reg_F = \log(1+\sqrt{2})$.

[1] Для елементів $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$ виконується $\prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha) = \pm 1$.

III. Дзета функція Дедекінда в цілих точках

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s) = \frac{2^r \cdot (2\pi)^s \cdot \# Cl_F \cdot Reg_F}{w_F \cdot \sqrt{|d_F|}}$$

Теорема (Armand Borel, 1977) Для цілих $m \geq 2$

$$\zeta_F(m) \in \mathbb{Q}^\times \cdot \frac{\pi^{mn_\pm} Reg_{m,F}}{\sqrt{|d_F|}}$$

де $n_+ = r + s$, $n_- = s$ та $\pm 1 = (-1)^m$.

Тут $Reg_{m,F}$ це регулятор в K-теорії кільця $\mathcal{O}_F$, пов'язаний з групою $K_{2m-1}(\mathcal{O}_F)$. Борель показав, що

$$\dim_{\mathbb{Q}}(K_\ell(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, \ell \geq 2 \text{ парне} \\ n_\mp, \ell = 2m-1 > 1, \pm 1 = (-1)^m. \end{cases}$$

За означенням вищі регулятори $Reg_{m,F}$ це ко-об'єми деяких решіток у просторах $\cong \mathbb{R}^{n_\pm}$.

Явний опис вищих регуляторів: гіпотеза Заґіра

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} \qquad k\text{й полілогарифм, } k \geq 1$$

Гіпотеза(приблизно)[2]: $Reg_{m,F}$ є $\mathbb{Q}$-лінійною комбінацією добутків $n_{\mp}$ значень функцій полілогарифмів від аргументів в полі K.
Наприклад,

$$\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-7})}(2) = \frac{4\pi^2}{21\sqrt{7}} \left(2 \cdot \mathcal{D}\left(\tfrac{1+\sqrt{-7}}{2}\right) + \mathcal{D}\left(\tfrac{-1+\sqrt{-7}}{4}\right)\right)$$

де

$$\mathcal{D}(z) = \mathrm{Im}\left(Li_2(z) + \log|z|\log(1-z)\right)$$

---

[2] Don Zagier, *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields* (1991)
Herbert Gangl, Don Zagier, *Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series* (2000)

Явний опис вищих регуляторів: гіпотеза Заґіра

Гіпотеза говорить, що подібно до функції $\log|z|$ у відображенні

$$\lambda(\alpha) = (\log|\sigma_1(\alpha)|, \log|\sigma_2(\alpha)|, \ldots)$$

в конструкції регулятора Reg_F, вищі регулятори $Reg_{m,F}$ можуть бути сконструйовані за допомогою функцій

$$\mathcal{D}_m(z) = \mathrm{Im}_{\pm}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2^k B_k}{k!} \log^k|z| \cdot Li_{m-k}(z)\right)$$

де $Im_{\pm}$ означає уявну частину Im або дійсну частину Re коли m парне або непарне відповідно.

Якщо комусь вдасться знайти те, що досі не піддавалося нашим зусиллям, і якщо він повідомить це нам, то ми будемо йому дуже зобов'язані. — Якоб Бернуллі "Арифметичні пропозиції про нескінченні ряди", 1689

Дякую!