

Задача 8

⑤ F — поле з p^n елементами

$$\text{Tr}: F \rightarrow \mathbb{F}_p$$

$$x \mapsto x + x^p + x^{p^2} + \dots + x^{p^{n-1}}$$

i) Оскільки $(x+y)^{p^d} = x^{p^d} + y^{p^d}$, $d \geq 1$,

тому $\text{Tr}(x+y) = \text{Tr}(x) + \text{Tr}(y)$

ii) $a \in \mathbb{F}_p$. Для такого a викон., що

$$a^{p^d} = a, \quad d \geq 1. \quad \text{Тому,}$$

$$\text{Tr}(ax) = ax + (ax)^p + (ax)^{p^2} + \dots + (ax)^{p^{n-1}} =$$

$$= a(x + x^p + x^{p^2} + \dots + x^{p^{n-1}}) = a \text{Tr}(x)$$

iii) Рівняння $x + x^p + \dots + x^{p^{n-1}} = 0$ має не більше p^{n-1} розв'язків в $\mathbb{F}_{p^n} = F$.

$\#F = p^n$, тому $\exists d \in F: \text{Tr}(d) \neq 0$