

7.3. Нехай  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ,  $\mathcal{O}_K$  - кільце цілих.

1. Ми  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{a})}$  знаємо, що  $p$  - просте розщеплюється  $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = 1$ .  
(Такого, що  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{a})} \in \text{UFD}$ )

Знаємо, що  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} \in \text{UFD}$ , тому  $p$  - просте розщеплюється в  $\mathcal{O}_K \Leftrightarrow \left(\frac{5}{p}\right) = 1$ .

З квадратичного закону взаємності і вл. символу Лежандра  $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)^2 = (-1)^{\frac{(p-1)(5-1)}{4}} \left(\frac{p}{5}\right) = (-1)^{p-1} \left(\frac{p}{5}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ .

$\left(\frac{p}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1 \pmod{5}$ . Отже, прості вигляду  $p = 5k \pm 2$  залишаються простими в  $\mathcal{O}_K$ .