6. (Випадок $p=2$).

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}: \prod_{\substack{1 \le j < 2^n \\ 2 \nmid j}} j \equiv 1 \pmod{2^n}$

(При $n=2$ $\prod_{\substack{1 \le j < 2^2 \\ 2 \nmid j}} j \equiv 1 \cdot 3 \equiv -1 \pmod 4$)

Доведення. При $n=1$ твердження очевидне. Доведемо його для $n \ge 3$.

Серед елементів $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ знайдемо ті квадрати яких рівні одиниці:

$x^2 \equiv 1 \pmod{2^n} \iff 2^n \mid (x-1)(x+1)$

$\iff \exists m \in \{0, \dots, n\}: 2^m \mid (x-1) \wedge 2^{n-m} \mid (x+1)$

$\Rightarrow 2^{\min(m, n-m)}$

При $m=0$, $2^n \mid (x+1) \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{2^n}$

При $m=n$, $2^n \mid (x-1) \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{2^n}$

Інакше існує $k = \min(m, n-m) > 0$ таке, що $2^k \mid (x-1) \wedge 2^k \mid (x+1)$. Тоді $2^k \mid (x+1) - (x-1) \Rightarrow 2^k \mid 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=1 \end{array}\right.$

Враховуючи, що $k>0$, то $k=1$
тобто або $m=1$ або $m=n-1$

а) $m=1$

~~Тоді $2^{n-1} | x$~~ Тоді $2^{n-1} | (x+1)$

$\Rightarrow x \equiv -1 \pmod{2^{n-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}: x = 2^{n-1}z - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2^{n}z + 2^{n-1} - 1 \\ x = 2^{n}z - 1 \end{cases}$

б) $m=n-1$

Тоді $2^{n-1} | (x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \equiv 1 \pmod{2^{n-1}} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}: x = 2^{n-1} + 1$

$\Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}: \begin{cases} x = 2^{n}z + 2^{n-1} + 1 \\ x = 2^{n}z + 1 \end{cases}$

Тоді маємо 4 елементи $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ таких, що $x^2 \equiv 1 \pmod{2^n}$
а саме $1,\ 2^{n-1}-1,\ 2^{n-1}+1,\ 2^n-1$
(помітимо, що при $n=2$ деякі з них рівні між собою, а при $n \geq 3$ вони всі різні).

Тоді всі (ненульові) числа між 1 та 2^n мож без $1,\ 2^{n-1}-1,\ 2^{n-1}+1,\ 2^n-1$ можна розбити на пари взаємообернених елементів.

Λεφ

$$\prod_{1 \le j < 2^n} j \equiv 1 \cdot (2^{n-1} - 1)(2^{n-1} + 1)(-1) \equiv$$

$$2^k \mid j$$

$$\equiv (2^{2n-2} - 1)(-1) \quad (\Xi)$$

$$2n - 2 \geq n \iff n \geq 2$$

(Ξ) $(-1)(-1) \equiv 1 \pmod{2^n}$

(14)