5. Нехай $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ є алгебраїчним числом з мінімальним рівнянням $g(\xi) = 0$, $g \in \mathbb{Q}[x]$. Покажіть, що векторний простір

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{ f(\xi) ; f \in \mathbb{Q}[x] \}$$

є полем. Яка розмірність

$\mathbb{Q}(\xi)$ як векторного простору над $\mathbb{Q}$?

Розглянемо відображення:

$$h: \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}(\xi)$$

задане як $h(f) = f(\xi)$ $\forall f \in \mathbb{Q}[x]$.

Легко зрозуміти, що h є гомоморфізмом кілець (з одиницею) та $\mathbb{Q}$-лінійним перетворенням.

В обох випадках

$\operatorname{Ker} h = \{ f \in \mathbb{Q}[x] : f(\xi) = 0 \} = \langle g \rangle$.

Тоді за теоремою про гомоморфізм (в одному випадку кілець (з одиницями), в іншому ~~во~~ векторних просторів)

Отримуємо, що

$$\mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle \cong \operatorname{Im} h = \mathbb{Q}(\xi)$$

~~При цьому ізоморфізм~~
Тобто $\mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle$ і $\mathbb{Q}(\xi)$
ізоморфні і як кільця (з одиницями)
і як векторні простори.

Так як вони ізоморфні
як кільця (з одиницями), то $\mathbb{Q}[x]/\langle g\rangle$ є
полем (з незвідності g),
а тому $\mathbb{Q}(\xi)$ є полем.

Так як вони ізоморфні
як векторні простори, то

$\dim \mathbb{Q}(\xi) = \dim \mathbb{Q}[x]/\langle g \rangle = \deg g$