1. Наступна таблиця показує для яких малих вільних від квадратів чисел $m > 0$ кільце цілих в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ є областю однозначної факторизації. (Після наступної лекції ви дізнаєтесь, як перевірити цей факт за допомогою PARI/GP.)

m	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15
$\mathcal{O}_K$ є ООФ	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-

Подайте приклади неоднозначної факторизації на незвідні елементи в кільцях $\mathcal{O}_K$ для $m = 10$ та $m = 15$.

Задачі 3

1 $m = 10$:

$(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10}) = 2 \cdot 3 = 6$ (*)

Покажемо, що $2, 3, 4 \pm \sqrt{10}$ є незвідними ел-тами.

$N(a+b\sqrt{10}) = a^2 - 10b^2$

Немає ел-тів ξ, для яких $N(\xi) = \pm 2$ або $N(\xi) = \pm 3$, бо $a^2 \not\equiv \pm 2 \pmod{10}$, $a^2 \not\equiv \pm 3 \pmod{10}$ для $\forall a \in \mathbb{Z}/_{10}\mathbb{Z}$

$N(2) = 2^2$ $2 = \xi_1 \cdot \xi_2$ звідний якщо $N(\xi_1) = N(\xi_2) = 2$ або $N(\xi_1) = N(\xi_2) = -2$, що не виконується

Так само для 3, бо $N(3) = 3^2 = 3 \cdot 3 = (-3) \cdot (-3)$

Так само для $4 \pm \sqrt{10}$, бо $N(4 \pm \sqrt{10}) = 6 = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3)$

За Теоремою 5 якщо $O_{\mathbb{Q}(\sqrt{10})}$ це ООФ тоді це ОГІ і незвідні елементи є простими

Оскільки $10 = 4 \cdot 2 + 2$, то $O_{\mathbb{Q}(\sqrt{10})} =$

$= \{a + b\sqrt{10} : a, b \in \mathbb{Z}\}$

Перевіримо чи ~~к~~ якесь з $4 \pm \sqrt{10}$ асоц. з 2 або 3:

Нехай $(4+\sqrt{10}) = 2 \cdot a$. Тоді, якщо розглядати це в $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$, то $a = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ і це є єдиним претендентом на те щоб бути $a \in \mathcal{O}^{\times}_{\mathbb{Q}(\sqrt{10})}$, але $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ і тому $a \notin \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{10})}$, тож $4+\sqrt{10}$ і 2 не асоц.

Так само ~~[illegible]~~ перевіряємо і інші пари.

Отже розклад (*) є неоднозначним

$m = 15$: $(3-\sqrt{15})(3+\sqrt{15}) = (-2) \cdot 3 = -6$

Покажемо, що -2, 3, $3 \pm \sqrt{15}$ незвідні

~~[illegible]~~ $N(a+\sqrt{15}b) = a^2 - 15b^2$

Немає ел-тів ξ, для яких $N(\xi) = \pm 2$ або $N(\xi) = \pm 3$, бо $a^2 \not\equiv \pm 2 \pmod{15}$, $a^2 \not\equiv \pm 3 \pmod{15}$ $\forall a \in \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$

$N(-2) = 4 = 2^2$, $-2 = \xi_1 \cdot \xi_2$ звідний, якщо $N(\xi_1) = N(\xi_2) = 2$ або $N(\xi_1) = N(\xi_2) = -2$, що не виконується

Так само для 3, бо $N(3) = 3^2 = 3 \cdot 3 = (-3) \cdot (-3)$

Так само для $3 \pm \sqrt{15}$, бо $N(3 \pm \sqrt{15}) = -6 = (-2) \cdot 3 = (-3) \cdot 2$

Аналогічно до минулого пункту перевіряється, що жодне з $3 \pm \sqrt{15}$ не асоц. з -2 або 3

Також ~~3~~ з Теореми 5 знаємо, що всі незвідні в цьому кільці є простими