6. Довести, що $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{m}]}$ є евклідовою областю для $m = -11, -7, -3, -2, -1, 2, 3, 5, 13$

Для $m = -2, 2, 1, 3$ доводили раніше.

Визначимо норму $\lambda : \mathbb{Q}[\sqrt{m}] \longrightarrow \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{m} \longmapsto |a^2 - b^2|$, тоді маємо $\lambda^* : O_K \longrightarrow \mathbb{Z}$ т.щ. $\lambda^*(a + b\sqrt{m}) = \begin{cases} |a^2 - mb^2|, & m = 2, 3 \mod 4 \\ |a^2 + b^2 \frac{1-m}{4} + ab|, & m = 1 \mod 4 \end{cases}$

1. $n = 5$

$\alpha = a_1 + a_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = b_1 + b_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$, $\frac{\alpha}{\beta} = x_1 + x_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Існ. $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ т.щ. $|x_1 - y_1| \leq 1/2$, $|x_2 - y_2| \leq 1/2$. $\gamma := y_1 + y_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\lambda(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma) = |(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \frac{1-5}{2} + (x_1-y_1)(y_2-y_2)| \leq |(x_1-y_1)^2 - 2(x_2-y_2)^2| + \max\{(x_1-y_1), (x_2-y_2)\}^2 \leq \max\{(x_1-y_1)^2, 2(x_2-y_2)^2\} + 1/4 \leq 2 \cdot 1/4 + 1/4 = 3/4$

Тоді для $r := \alpha - \beta\gamma \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ маємо, що $\lambda r = \lambda(\beta(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma)) = \lambda\beta\, \lambda(\frac{\gamma}{\beta} - \gamma) \leq \frac{3}{4} \lambda\beta$

2. $n = 13$

Аналогічно для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ визначимо $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ та $\gamma = y_1 + y_2 \frac{1+\sqrt{13}}{2} \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$

$\lambda(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma) = |(x_1-y_1)^2 - 3(x_2-x_2)^2 + (x_1-y_1)(x_2-y_2)| \leq 3(x_2-y_2)^2 \leq 3/4$

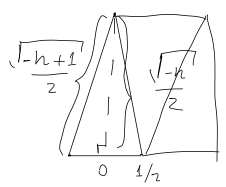
Тоді маємо, що для $r := \alpha - \gamma\beta$ $\lambda r \leq 3/4 \lambda\alpha$

Для випадків $m<0$. $m = -3, -7, -11$ розглянемо елементи $O_{\mathbb{Q}[\sqrt{m}]}$ як точки на комплексній площині (трикутній ґратці для $n = 1 \mod 4$)

Достатньо довести, що для кожної раціональної точки $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ існує $\gamma \in O_{\mathbb{Q}[\sqrt{m}]}$ т.щ. $\lambda(\gamma - \frac{\alpha}{\beta}) < 1$

Для цього достатньо показати, що радіус R описаного кола навколо трикутника ґратки менше 1

Зрозуміло, що $R = \frac{\frac{1-n}{4}}{\sqrt{-n}}$



Для $n = -3$ $R = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{3} < 1$.

Для $n = -7$ $R = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7} < \frac{2 \cdot 3}{7} < 1$

Для $n = -11$ $R = \frac{3}{\sqrt{11}} = \frac{3}{11}\sqrt{11} < \frac{3}{11} \cdot \frac{7}{2} = \frac{21}{22} < 1$.

Маємо, що для $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{n}}{2}]$ існує $\gamma \in \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{n}}{2}]$ т.щ. $\lambda(\alpha - \beta\gamma) \leq \lambda\beta$. $\boxtimes$