4. a) $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ – поле

$(a + b\sqrt{m}) + (c + d\sqrt{m}) = a + c + (b + d)\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[m]$

$(a + b\sqrt{m})(c + d\sqrt{m}) = ac + bdm + (ad + bc)\sqrt{m} \in \mathbb{Q}[\sqrt{m}]$

$\frac{a + b\sqrt{m}}{c + d\sqrt{m}} = \frac{(a + b\sqrt{m})(c - d\sqrt{m})}{c^2 - d^2 m} = \frac{ac - bdm + (bc - ad)\sqrt{m}}{c^2 - d^2 m} = \frac{ac - bdm}{c^2 - d^2 m} + \frac{bc - ad}{c^2 - d^2 m}\sqrt{m} = q_1 + q_2\sqrt{m}, \quad q_{1,2} \in \mathbb{Q}$

$(e + f\sqrt{m})(a + b\sqrt{m} + c + d\sqrt{m}) = (e + f\sqrt{m})(a + c + (b + d)\sqrt{m}) = e(a + c) + fm(b + d) + \sqrt{m}(f(a + c) + e(b + d))$

$\parallel$

$ea + fbm + (eb + fa)\sqrt{m} + ec + fdm + (ed + fc)\sqrt{m}$

$fm(b + d) + e(a + c) + \sqrt{m}(eb + fa + ed + fc) = e(b + d) + f(a + c)$ $\boxed{\text{k}}$

b) Опишіть $O_K = \mathbb{Q}_m \cap \overline{\mathbb{Z}}$

$O_K = \{a + b\sqrt{m} \mid a, b \in \mathbb{Q}$ т.щ. $\exists\, f x \in \mathbb{Z}[x]$ – нормований, $f(a + b\sqrt{m}) = 0\}$

Нехай, $a + b\sqrt{m}$ є коренем $fx = (x - a)^2 - b^2 m = x^2 - 2ax + a^2 - b^2 m \in \mathbb{Z}[x]$

Такий поліном дійсно мінімальний, оскільки $a + b\sqrt{m}$ не раціональне

$fx \in \mathbb{Z}[x] \Leftrightarrow 2a,\ a^2 - b^2 m \in \mathbb{Z}$

$2a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}$ або $a = \frac{2k + 1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

1. $a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b^2 m \in \mathbb{Z}$: якщо $b = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$, то $b^2 m = x^2 \frac{m}{y^2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{m}{y^2} \in \mathbb{Z}$. Протиріччя з вільністю від квадратів $\Rightarrow b \in \mathbb{Z}$

2. $a = \frac{2k + 1}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a^2 - b^2 m = \frac{4k^2 + 4k + 1 - 4b^2 m}{4} = \overbrace{k^2 + k}^{\mathbb{Z}} - b^2 m + 1/4 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b^2 m \in \mathbb{Z} + 1/4 \Leftrightarrow b = \mathbb{Z} + 1/2$ ($b^2 m = x + \frac{1}{4}$, $x \in \mathbb{Z}$. $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q} \Rightarrow b^2 m = \frac{\alpha^2}{\beta^2} m \in \mathbb{Z} + 1/4$

$\frac{\alpha^2}{\beta^2} m = x + 1/4$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \underline{b = \mathbb{Z} + 1/2}$.)

$\Updownarrow$

$b^2 m = \frac{4l^2 + 4l + 1}{4} m = l^2 m + lm + m/4 \in \mathbb{Z} + 1/4 \Leftrightarrow m = 1 \mod 4.$

Маємо, що для $a, b \in \mathbb{Q}$ $a + b\sqrt{m} = a - b + 2b\frac{1 + \sqrt{m}}{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$

Зрозуміло що $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{m} \longleftrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{1 + \sqrt{m}}{2}$, тому маємо, що

$a + b\sqrt{m} \longmapsto a - b + 2b\frac{1 + \sqrt{m}}{2}$

$$\boxed{O_{\mathbb{Q}[\sqrt{m}]} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \sqrt{m}\,\mathbb{Z}, & m = 2, 3 \mod 4 \\ \mathbb{Z} \oplus \frac{1 + \sqrt{m}}{2}\mathbb{Z}, & m = 1 \mod 4 \end{cases}}$$