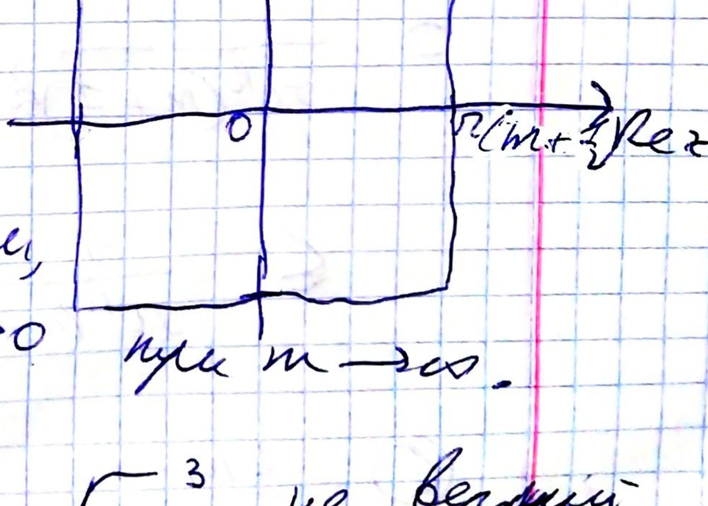
11.2. Довести, що для парних $k \geq 2$ виконується

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k \cdot B_k}{2 \cdot k!}$$

Розглянемо мероморфну функцію $f(z) = \dfrac{1}{z^k(e^z - 1)}$ та квадратний контур Γ_m з центром в нулі та стороною $\pi(2m+1)$.

Розглянемо

$$\int_{\Gamma_m} f(z)\,dz.$$



Хочемо показати, що $\int_{\Gamma_m} f(z)\,dz \to 0$ при $m \to \infty$.

Нехай Γ_m^1 та Γ_m^3 це верхній та нижній відрізок контура, а Γ_m^2 та Γ_m^4 правий та лівий.

Тогда:

$$\left|\int_{\Gamma_m^1} f(z)\,dz\right| \leq (2m+1)\pi \sup_{z\in\Gamma_m^1} |f(z)| \;ⓢ$$

При $z \in \Gamma_m^1$ имеем $\operatorname{Im} z = \pi(m+\frac{1}{2})$ і

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^k(e^z-1)}\right| = \frac{1}{|z|^k|e^z-1|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k|e^z-1|} = \cancel{\frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k|e^{\operatorname{Re} z}}}$$

$$= \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k|e^{\operatorname{Re} z+\pi(m+\frac{1}{2})i}-1|} =$$

$$= \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k|e^{\operatorname{Re} z}\cdot \underbrace{e^{\pi m i}}_{\in\mathbb{R}}-1|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k\cdot 1}$$

$$ⓢ \;\leq \frac{(2m+1)\pi}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k} \longrightarrow 0, \text{ при } m\to\infty$$

бо $k\geq 2$

$\overline{\Gamma_m^1} = \Gamma_m^3$ і $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$

тому ~~аналогічно~~ отримуємо, що при $z \in \Gamma_m^3$:

$$|f(z)| = |\overline{f(z)}| = |f(\underbrace{\overline{z}}_{\in \Gamma_m^1})| \le \frac{1}{\pi^k (m+\frac{1}{2})^k}$$

тому

$$\left|\int_{\Gamma_m^3} f(z)dz\right| \le (2m+1)\pi \sup_{z \in \Gamma_m^3} |f(z)| \le$$

$$\le \frac{(2m+1)\pi}{\pi^k (m+\frac{1}{2})^k} \longrightarrow 0, \text{ при } m \to \infty$$

бо $k \ge 2$.

Тепер подивимось на Γ_m^2 та Γ_m^4.

При $z \in \Gamma_m^2$ маємо $\mathrm{Re}\, z = \pi(m+\frac{1}{2})$

тоді:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^k(e^z-1)|} = \frac{1}{|z|^k |e^z - 1|} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^k (m+\frac{1}{2})^k (|e^z| - 1)} = \frac{1}{\pi^k (m+\frac{1}{2})^k (e^{\mathrm{Re}\, z} - 1)} =$$

$$= \frac{1}{\pi^k (m+\frac{1}{2})^k (e^{\pi(m+\frac{1}{2})} - 1)}$$

Тоді:

$$\left|\int_{\Gamma_m^2} f(z)\,dz\right| \le \frac{(2m+1)\pi}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k(e^{\pi(m+\frac{1}{2})}-1)}$$

$\to 0$ при $m \to \infty$ за рахунок експоненти.

При $z \in \Gamma_m^4$ маємо $Re\, z = -\pi(m+\frac{1}{2})$ тоді:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^k|e^z-1|} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k(1-|e^z|)} = \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k(1-e^{Re\,z})}$$

$$= \frac{1}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k(1-e^{-\pi(m+\frac{1}{2})})}$$

Тоді:

$$\left|\int_{\Gamma_m^4} f(z)\,dz\right| \le \frac{(2m+1)\pi}{\pi^k(m+\frac{1}{2})^k(1-e^{-\pi(m+\frac{1}{2})})}$$

$\to 0$ при $m \to \infty$, бо $k \ge 2$.

Отже

$$\left|\int_{\Gamma_m} f(z)dz\right| \leq \left|\int_{\Gamma_m^1} f(z)dz\right| +$$

$$+\left|\int_{\Gamma_m^2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Gamma_m^3} f(z)dz\right| +$$

$$+\left|\int_{\Gamma_m^4} f(z)dz\right| \longrightarrow 0$$

при $m \longrightarrow \infty$.

Тоді використовуючи теорему Коші про лишки отримуємо, що:

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \operatorname*{Res}_{z=2\pi m i} f(z) = 0 \quad (*)$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^k(e^z-1)} =$$

$= [z=0$ – полюс порядку $k+1] =$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{z^{k+1}}{z^k(e^z-1)}\right)\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)\right) = \frac{B_k}{k!}$$

При $m \neq 0$:

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi m i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=2\pi m i} \frac{1}{z^k(e^z-1)} =$$

$$= \left[z = 2\pi m i \text{ -простий полюс} \right] =$$

$$= \left.\frac{\frac{1}{z^k}}{\frac{d}{dz}(e^z-1)}\right|_{z=2\pi m i} = \left.\frac{\frac{1}{z^k}}{e^z}\right|_{z=2\pi m i} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi m i)^k} \frac{1}{e^{2\pi m i}} = \frac{1}{(2\pi m i)^k}$$

Так як k парне то протилежні m дають однаковий внесок тому з $(*)$ отримуємо

$$\frac{B_k}{k!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi m i)^k} = 0$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k} = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{2 \cdot k!}$$

$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k B_k}{2k!}$$

Зауваження: для кожного $k > 1$ описана процедура дає висновок, що $B_k = 0$

$\square$