Задачі 14 (1) $Re(s) > 1$

$$\prod_{p \text{ просте}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_{p \text{ просте}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\right) \circeq$$

$\circeq$ З однозначного розкладу $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ на прості і з того, що для кожного n зі скінченної кількості дужок добутку вище надходять всі степені простих з розкладу n, тому:

$$\circeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

Покажемо, що цей добуток збіжний і $\neq 0$

Знаємо, що $\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$ збіжний для $|z| < 1$

<u>Лема</u>: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n}$ $\left(a_n \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$ збігається до ненульового числа коли $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається

Довення леми:

$$\log\Big(\underbrace{\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-a_n}}_{\neq 0}\Big) = \sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)$$

Покажемо, що існує скінч. границя цих чисел коли $N \to \infty$, тобто що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)$ є збіжним абс.

$$\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m} < \sum_{m=1}^{\infty} |z|^m = \frac{|z|}{1-|z|}$$

Коли $|z| < \varepsilon$, $\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}|z|$

$\forall \varepsilon > 0$ Нехай N таке, що $|a_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|\log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)\right| < \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$$\mathbb{C} \ni \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n} = \exp(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \blacksquare$$

$$\sum_p \left|\frac{1}{p^s}\right| < \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} = \zeta(Re(s)) < \infty$$

Тому з леми випливає, що добуток $\prod_{p\text{ - просте}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ збіжний до ненульового числа.