§ 14. p-адична метрика та теорема Островського.

1. Нехай $\alpha = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $|\alpha|_p = p^{\text{ord}_p(\alpha)}$;

$|\alpha|_p \leq 1 \iff \text{ord}_p(\alpha) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b) \geq 0$. Це означає, що дріб, записаний у нескоротному вигляді має знаменник, що не ділиться на p:

$$p \mid b \Rightarrow p \nmid a \Rightarrow \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b) \leq -1.$$

$$\begin{array}{cc} \Updownarrow & \Updownarrow \\ \text{ord}_p(b) \geq 1 & \text{ord}_p(a) = 0 \end{array}$$

Якщо $|\alpha|_p \leq 1$ $\forall p \in \mathbb{P}$, то знаменник b раціонального числа α, записаного у нескоротному вигляді, не має простих дільників, тому $b = 1 \iff \alpha \in \mathbb{Z}$.

2. Нехай $p_1 \neq p_2$; $p_1, p_2 \in \mathbb{P}$. Доведемо, що $|\cdot|_{p_1}$ та $|\cdot|_{p_2}$ не є еквівалентними: послідовність $a_n = p_1^n$ збіжна до 0 в $|\cdot|_{p_1}$:

$$|a_n - 0|_{p_1} = p^{\text{ord}_{p_1}(p_1^n)} = p^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

$$|a_n - 0|_{p_2} = p^{\text{ord}_{p_2}(p_1^n)} = p^0 = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0,$$

тобто a_n збіжна до 0 в $|\cdot|_{p_1}$ і не є збіжною до 0 в $|\cdot|_{p_2}$. Отже, норми $|\cdot|_{p_1}$ та $|\cdot|_{p_2}$ не є еквівалентними.

3. а) Розглянемо ультраметричний простір (X, d), тобто метричний простір, для якого

$$\forall x, y, z \in X \left(d(x,y) \le \max\left(d(x,z), d(y,z)\right)\right). \quad (1)$$

Припустимо, що $\max\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\} = d(x,y)$; (2)
$\max\{d(y,z), d(x,z)\} = d(y,z)$. З нерівності (1), $d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(y,z)\} = d(y,z)$.
З нерівності (2), $d(x,y) \ge d(y,z)$. Тоді $d(x,y) = d(y,z)$, звідси кожен трикутник є рівнобедреним.

б) Припустимо, що $d(x,y) < r$. Доведемо, що $d(x,z) < r \Rightarrow d(y,z) < r$:

$$d(y,z) \le \max\{\underbrace{d(x,y)}_{<r}, \underbrace{d(x,z)}_{<r}\} < r.$$

Отже, $\forall a \in X \left(a \in B_r(x) \Rightarrow a \in B_r(y)\right)$.
Застосовуючи попереднє твердження для $x \to y$, $y \to x$, матимемо

$$\forall a \in X \left(a \in B_r(y) \Rightarrow a \in B_r(x)\right),$$

тому за аксіомою об'ємності, $B_r(x) = B_r(y)$.

5. а) Припустимо, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$, тобто

(1) $$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall k\in\mathbb{N}\ |x_n - x_{n+k}|_p<\varepsilon.$$

Підставляючи $k=1$, отримаємо:

(2) $$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ |x_n - x_{n+1}|_p<\varepsilon$$

(3) $$\iff \lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n+1}|_p = 0.$$

Припустимо (3) ($\iff$ (2)). Доведемо (1).

$$|x_n - x_{n+k}|_p \le \max\{|x_n, x_{n+1}|_p, |x_{n+1}, x_{n+k}|_p\} =$$

$$= \ldots = \max\{\underbrace{|x_n, x_{n+1}|_p}_{<\varepsilon}, \underbrace{|x_{n+1}, x_{n+2}|_p}_{<\varepsilon}, \ldots, \underbrace{|x_{n+k-1}, x_{n+k}|}_{<\varepsilon}\}$$

$$<\varepsilon\quad \forall n>N\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Отже, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n+1}|_p = 0.$$

б)