10.5. Для числа $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ порядком $p$ в $m$ називається найбільше невід'ємне ціле число $e \geq 0$ таке, що $p^e | m$. Порядок позначається як $e = \mathrm{ord}_p(m)$. Доведіть, що:

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}$$

де $S_p(n)$ це сума цифр запису $n$ у базі $p$. Якщо коли $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_r p^r$ з цифрами $a_0, \ldots, a_r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, то

$S_p(n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_r$

Доведення:

$$ord_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

$i$-ий доданок відповідає за кількість чисел $\leq n$, що діляться на $p^i$.

Тоді якщо $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_r p^r$, то:

$$ord_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i}^{r} a_j p^{j-i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a_j p^j \sum_{i=1}^{j} p^{-i} = \sum_{j=1}^{r} a_j p^j \frac{p^{-j}-1}{p^{-1}-1} p^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a_j p^j \frac{p^{-j}-1}{1-p} = \sum_{j=1}^{r} a_j \frac{1-p^j}{1-p} =$$

$$= \frac{1}{1-p} \left( \sum_{j=1}^{r} a_j - \sum_{j=1}^{r} a_j p^j \right) =$$

$$= \frac{1}{p-1} \left( \sum_{j=1}^{r} a_j p^j - \sum_{j=1}^{r} a_j \right) =$$

$$= \frac{1}{p-1} \left( n - a_0 - \sum_{j=1}^{r} a_j \right) = \frac{1}{p-1} (n - S_p(n))$$

■