Задачі 10

(1) Оскільки маємо, що $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ як кільця $m \longmapsto x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, де $x_n = m \bmod p^n$, то

$$-1 \longmapsto (p-1, p^2-1, p^3-1, \dots)$$

Розглянемо послідовність

$$X = \left(\frac{p^n - 1}{2} ;\ n \geq 1\right) \in \mathbb{Z}_p$$

Вона справді в $\mathbb{Z}_p$, бо

$$\frac{p^{n+1}-1}{2} - \frac{p^n - 1}{2} = p^n \underbrace{\frac{p-1}{2}}_{\in \mathbb{Z}} \vdots\, p^n$$

Оскільки $2 \longmapsto (2, 2, 2, \dots)$ і

$$2 \cdot X = (2, 2, 2, \dots)\left(\frac{p-1}{2}, \frac{p^2-1}{2}, \dots\right) = (p-1, p^2-1, \dots) = -1,$$ то

за вкладенням кілець $X = -\frac{1}{2}$

Неважко впевнитись, що p-адичний розклад для X має вигляд

$$-\frac{1}{2} = X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p-1}{2} p^n \quad \text{і тоді}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p-1}{2} p^n = \frac{p+1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p-1}{2} p^n,$$

при цьому $\frac{p+1}{2} < p$, тож це справді p-адичний розклад для $\frac{1}{2}$

Оскільки $a_n = \frac{(p^{n+1}-1) - (p^n - 1)}{p^n} = p - 1$, то p-адичним розкладом -1 є $\sum_{n=0}^{\infty} (p-1) p^n$