Th. Кожна евклідова область є PID

Д-ння: Нехай $I \subset R$ – ідеал, оберемо елемент $x \in I$ з найменшою нормою

Нехай $y \in I$, тоді $y = bx + r$ т.щ. $\lambda r < \lambda x$. Протиріччя з мінімальністю норми, отже $\lambda r = 0$

Маємо, що довільний елемент $y \in I$ має вигляд xb для якогось $b \in R$, тобто $I = (x)$

5. 1) Нехай $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Для довільних $a_1 + a_2\sqrt{2}, b_1 + b_2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ розглянемо $\dfrac{a_1 + \sqrt{2}a_2}{b_1 + \sqrt{2}a} = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Існують $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ т.щ. $|\beta_1 - \alpha_1| \leq 1/2$, $|\beta_2 - \alpha_2| \leq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \lambda(\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} - (\beta_1 + \beta_2\sqrt{2})) = \lambda(\alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_1 - \beta_2)\sqrt{2}) = |(\alpha_1 - \beta_1)^2 - 2(\alpha_2 - \beta_2)^2| \leq \max\{(\alpha_1 - \beta_1)^2, 2(\alpha_2 - \beta_2)^2\} \leq 1/2$

Тоді: $\varphi := (a_1 + a_2\sqrt{2}) - (b_1 + b_2\sqrt{2})(\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\varphi = (b_1 + b_2\sqrt{2})(\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} - (\beta_1 + \beta_2\sqrt{2})) \Rightarrow \lambda\varphi = \lambda(b_1 + b_2\sqrt{2})\lambda(\alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_1 - \beta_1)\sqrt{2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(\beta_1 + \beta_2\sqrt{2})$. Якщо $\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, то $\varphi = 0$.

Отримали φ, $\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}$ т.щ. $a_1 + a_2\sqrt{2} = (b_1 + b_2\sqrt{2})(\beta_1 + \beta_2\sqrt{2}) + \varphi$ і $\lambda\varphi < \lambda(b_1 + b_2)$ або $\lambda\varphi = 0$

2) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$: $a_1 + a_2\sqrt{3}, b_1 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ $\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ т.щ. $|\alpha_1 - \beta_1| \leq \frac{1}{2}$, $|\alpha_2 - \beta_2| \leq \frac{1}{2}$

$\lambda(\alpha_1 - \alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2)\sqrt{3}) = |(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 3(\beta_1 - \beta_2)^2| \leq \max\{(\alpha_1 - \alpha_2)^2, 3(\beta_1 - \beta_2)^2\} \leq \frac{3}{4}$

Тоді: $\varphi := a_1 + a_2\sqrt{3} - (b_1 + b_2\sqrt{3})(\beta_1 + \beta_2\sqrt{3}) = (b_1 + b_2\sqrt{3})(\alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_1 - \beta_2)\sqrt{3}) \Rightarrow \lambda\varphi = \lambda(b_1 + b_2\sqrt{3})\lambda(\alpha_1 - \beta_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\sqrt{3}) = \lambda(b_1 + b_2\sqrt{3})((\alpha_1 - \beta_1)^2 + 3(\alpha_2 - \beta_2)^2) \leq \frac{3}{4}\lambda(b_1 + b_2\sqrt{3})$

3) $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$, $a_1 + a_2\sqrt{-2}, b_1 + b_2\sqrt{-2}$. Розглянемо $\dfrac{a_1 + a_2\sqrt{-2}}{b_1 + b_2\sqrt{-2}} = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$. Нехай $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}$ т.щ. $|\alpha_1 - \beta_1| \leq 1/2$, $|\alpha_2 - \beta_2| \leq 1/2$

$\varphi := a_1 + a_2\sqrt{-2} - (b_1 + b_2\sqrt{-2})(\beta_1 + \beta_2\sqrt{-2})$. $\lambda\varphi = ((\beta_1 - \alpha_1)^2 + 2(\beta_1 - \alpha_2)^2)\lambda(b_1 + b_2\sqrt{-2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(b_1 + b_2\sqrt{-2})$

4) Тв: $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не є евклідовою областю.

Д-ння: Кожна PID є UFD. Оскільки кожна евклідова область є PID, то достатньо показати, що $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ не є UFD.

Наприклад, $(1 - \sqrt{-3})(1 + \sqrt{-3}) = 2 \cdot 2$. Зрозуміло, що 2 не асоційована з $1 \pm \sqrt{-3}$, тому протиріччя з тим, що $\mathbb{Z}[-\sqrt{3}]$ евклідова область. $\blacksquare$