23 травня

§21. Ряди Діріхле

Peter Gustav
Lejeune Dirichlet
1805 – 1859

<u>Озн-ня</u> (Звичайним) рядом Діріхле наз-ся ряд виду

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad a_n \in \mathbb{C}.$$

У більш загальному випадку, рядами Діріхле наз-ся ряди

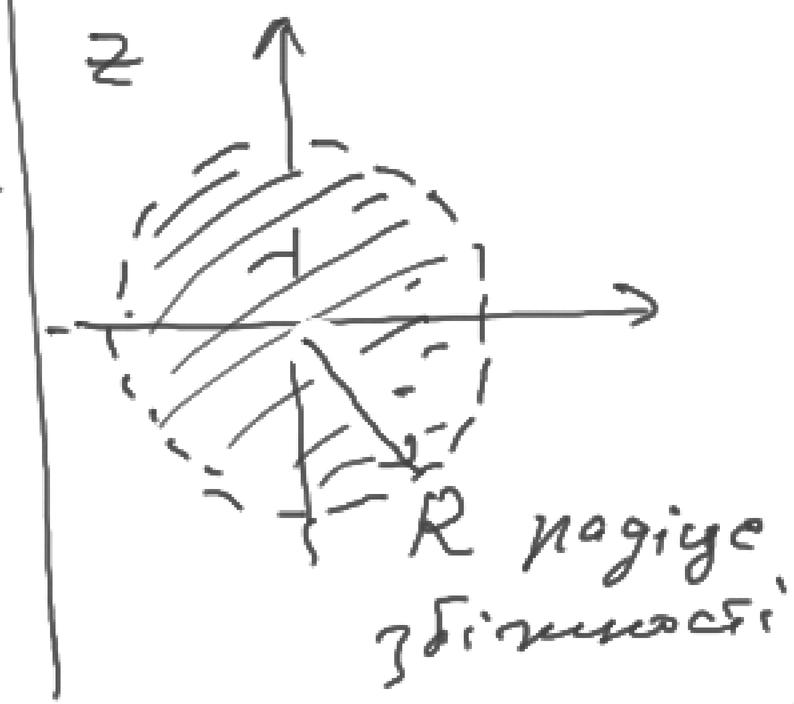
$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

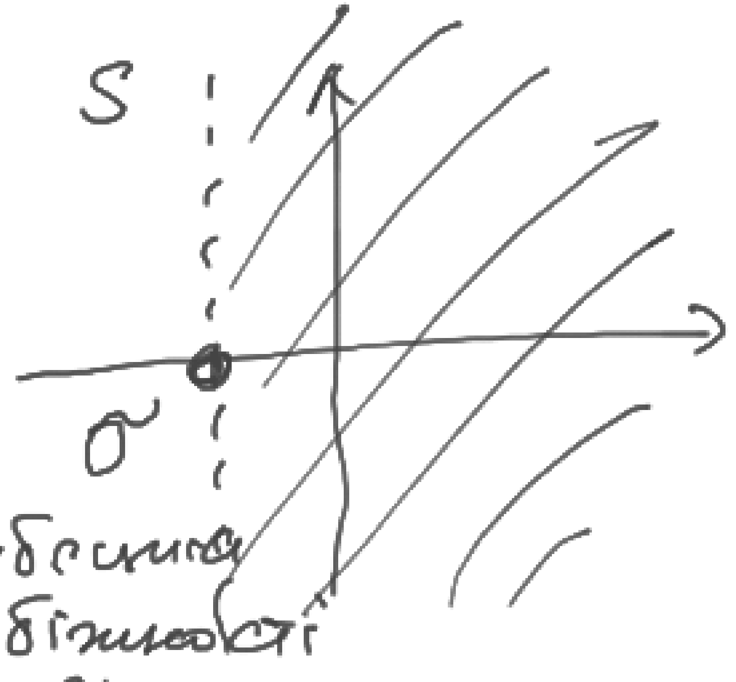
де $\{\lambda_n\}$ це монотонно зростаюча пос-ть дійсних чисел така що

$$\lambda_n \nearrow +\infty, \quad n \to +\infty.$$

Нп. $\lambda_n = \log n$ звичайні ряди Д.

$\lambda_n = n$ степеневі ряди від $z = e^{-s}$





$R = e^{-\sigma}$

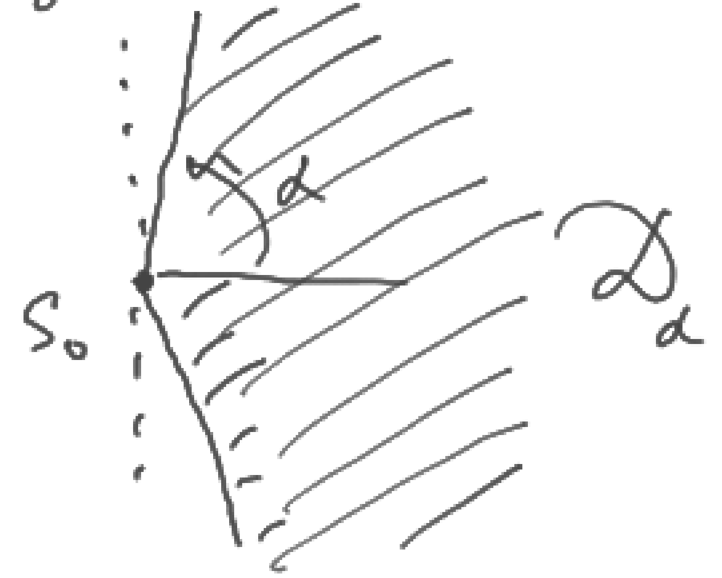
<u>Тв-ня 1</u> Нехай ряд

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

збігається в точці $s = s_0$. Тоді він збігається рівномірно на кожній області виду

$$\mathcal{D}_\alpha = \{ s : Re(s - s_0) \geq 0, \; -\alpha \leq Arg(s - s_0) \leq \alpha \}$$

для деякого $\alpha < \frac{\pi}{2}$.



<u>Дов-ня</u> Не втрачаючи загальності можна вважати, що

- $s_0 = 0 \qquad a_n \to a_n e^{-\lambda_n s_0}$
- $\lambda_n > 0 \quad \forall n$

За припущенням $\sum a_n$ є збіжною.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$ т.щ. $\forall m, m' > N$

$$|A_{m,m'}| < \varepsilon$$

де $A_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n$

сумування Абеля

$$S_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n e^{-\lambda_n s}$$

$$= \sum_{n=m}^{m'-1} A_{m,n} \left(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right) + A_{m,m'} e^{-\lambda_{m'} s}$$

Лема $s = x + iy \quad x > 0$

$0 < \alpha < \beta$

$$|e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}| \le \frac{|s|}{x}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)$$

Дов-ня

$$|e^{-\alpha s} - e^{-\beta s}| = |s| \cdot \left|\int_\alpha^\beta e^{-ts}\,dt\right|$$

$$\le |s| \int_\alpha^\beta e^{-tx}\,dt = \frac{|s|}{x}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right) \boxtimes$$

$$|S_{m,m'}| \le \varepsilon\left(1 + \sum_{n=m}^{m'-1} \frac{|s|}{x}\left(e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}\right)\right)$$

$s \in D_\alpha$

$\iff \frac{|s|}{x} \le \frac{1}{\cos(\alpha)}$

$$|S_{m,m'}| \le \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)}\left(e^{-\lambda_m x} - e^{-\lambda_{m'} x}\right)\right)$$

$$\le \varepsilon\left(1 + \frac{1}{\cos(\alpha)}\right) \boxtimes$$

Наслідок 2 $f(s)$ є голоморфною функцією у півплощині $Re(s) > Re(s_0)$.

$\Uparrow$

Лема Якщо $U \subset \mathbb{C}$ відкрита область і $\{f_n\}$ пос-ть голоморфних ф-цій в U яка збігається до ф-ції f рівномірно на кожній компактній підмножині U.

Тоді f є голоморфною в U і більше того, пос-ть похідних f_n' збігається до f' рівномірно на компактних підмножинах U.

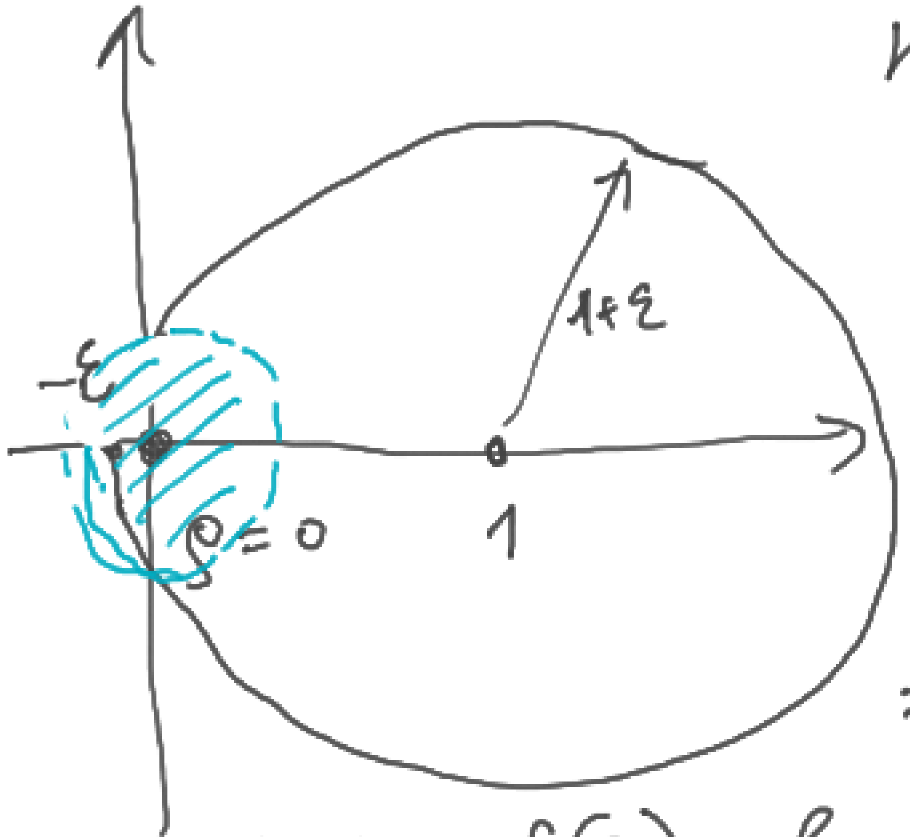
Тв-ня 3 Нехай $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ це ряд Д. з $a_n \geq 0$ $\forall n$, який збігається у півплощині $Re(s) > \rho$.

Якщо $f(s)$ має аналітичне продовження у деякий окіл точки $s = \rho$, тоді $f(s)$ збігається для $Re(s) > \rho - \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$.

Тобто: область збіжності ряду Д. з невід'ємними коефіцієнтами обмежена особливістю розташованою на дійсній прямій.

<u>Дов-ня</u> Без втрати загальності, вважаємо що $\rho = 0$. $\left(\begin{matrix} a_n \to a_n e^{-\lambda_n \rho} \\ s \to s-\rho \end{matrix} \right)$

З припущення $f(s)$ є голоморфною ф-цією у деякому колі $\{s : |s-1| \leq 1+\varepsilon\}$



$\Rightarrow$ ряд Тейлора для $f(s)$ в $s=1$ є збіжним у цьому колі.

$$f^{(r)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-\lambda_n)^r e^{-\lambda_n s}$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\Rightarrow f^{(r)}(1) = (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^r e^{-\lambda_n}$$

$$f(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (s-1)^r f^{(r)}(1)$$

$s = -\varepsilon$

$$f(-\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1+\varepsilon)^r (-1)^r f^{(r)}(1)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1+\varepsilon)^r \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^r e^{-\lambda_n}}_{\text{збіжний ряд з коеф-тами } \geq 0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1+\varepsilon) \lambda_n^r$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n} e^{(1+\varepsilon)\lambda_n} = \sum a_n e^{+\lambda_n \varepsilon}$$

$\Rightarrow$ ряд Д. для $f(s)$ збігається в $s = -\varepsilon$

Тоді з Тв-ня 1
випливає що ряд Д.
для $f(s)$ збіжний
для $Re(s) > -\varepsilon$. $\boxtimes$

Звичайні ряди Д.

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad a_n \in \mathbb{C}$$

Вправа:

- Якщо пос-ть $\{a_n\}$ є обмеженою, то ряд збіжний для $Re(s) > 1$
- Якщо пос-ть часткових сум $A_{m,m'} = \sum_{n=m}^{m'} a_n$ є обмеженою, то ряд є збіжним в півплощині $Re(s) > 0$

$\Uparrow$

(сумування Абеля)

§22. Теорема Діріхле про прості числа у арифметичних прогресіях.

$N > 1$

a взаємнопросте з N

Теорема 1 Існує нескінченно багато простих чисел p таких що

$$p \equiv a \pmod N.$$

Позначимо

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$

множину простих чисел.

Тв-не 2

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = 1.$$

Дов-ня

$$\frac{1}{s-1} < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1}$$

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\log(\zeta(s))}{\log(1/s-1)} = \lim_{s \searrow 1} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{s-1}\right)}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}$$

$= 1$ за правилом Лопіталя

$s>1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

$$\log \zeta(s) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \log\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{-ms}}{m}$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s} + \underbrace{\sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{m\geq 2} \frac{p^{-ms}}{m}}_{\wedge\!\!|}$$

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{m\geq 2} \frac{1}{p^m} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^2} \frac{1}{1-1/p}$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{s\downarrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s}}{\log \zeta(s)} = 1 \qquad \boxtimes$$

<u>Озн-ня</u> Для підмножини $A \subseteq \mathcal{P}$ аналітичною щільністю наз-ся

$$\rho(A) = \lim_{s\downarrow 1} \frac{\sum_{p\in A} \frac{1}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)},$$

якщо така границя існує.

Зауваження Говориться, що природною щільністю $\mathcal{A}$ є число $\varkappa$ якщо існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{p\in\mathcal{A} : p\le n\}}{\#\{p\in\mathcal{P} : p\le n\}} = \varkappa.$$

Можна показати, що в цьому випадку аналітична щільність $\rho(\mathcal{A})$ існує і дорівнює $\varkappa$.

Зауваження Якщо $\#\mathcal{A} < +\infty$, то $\rho(\mathcal{A}) = 0$.

Теорема 4 Нехай $\mathcal{P}_a = \{p\in\mathcal{P} : p\equiv a \pmod N\}$.

Тоді $\rho(\mathcal{P}_a) = \dfrac{1}{\varphi(N)}$.

($\Rightarrow$ Теорема 1)

$G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ мультиплікативна група оборотних лишків

$\#G = \varphi(N)$

Для скінченної комутативної групи G група характерів

$$\widehat{G} = \{ \chi : G \xrightarrow{\text{гомоморфізми}} \mathbb{C}^{\times} \}$$

є неканонічно ізоморфною з G. (Цей факт доводиться за допомогою класифікації: всі такі групи ізоморфні прямим добуткам циклічних груп. Ізоморфізм G і $\widehat{G}$ легко перевірити для циклічної групи.)

Зокрема: $\# \widehat{G} = \# G$, і цим фактом ми будемо користуватися.

<u>Озн-ня</u> (i) Характерами Діріхле за модулем N наз-ся характери $\chi \in \widehat{G}$ групи $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$.

(ii) χ хар-р Діріхле продовжується до функції $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$

$$\chi(n) = \begin{cases} 0, & (n, N) \neq 1 \\ \chi(n \bmod N), & (n, N) = 1 \end{cases}$$

Вправа: показати, що

$$\chi(n_1 n_2) = \chi(n_1)\chi(n_2)$$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Озн-ня Для хар-ра Діріхле χ L-функція Діріхле це ряд

$$L(\chi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Тривіальний хар-р позначимо як

$$\mathbb{1} \in \widehat{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}.$$

Його продовження

$$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 0, & (n,N) \neq 1 \\ 1, & (n,N) = 1 \end{cases}$$

Тв-ня 5 (i) Для $\chi = \mathbb{1}$

$$L(\mathbb{1}, s) = F(s)\zeta(s)$$

де $F(s) = \prod_{p|N} (1 - p^{-s})$.

Зокрема, цей ряд Д. розбігається для $s = 1$ та $\lim_{s \downarrow 1} L(\mathbb{1}, s)(s-1) = \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

(ii) Для $\chi \neq \mathbb{1}$ ряд $L(\chi, s)$ збіжний для $s > 0$.

<u>Дов-ня</u> (i) Для $Re(s) > 1$

$$L(\mathbb{1}, s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,N)=1}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= \prod_{p \nmid N} \frac{1}{1 - 1/p^s}$$

$$= \prod_{p \mid N} (1 - p^{-s}) \quad \zeta(s)$$

(ii) $\chi \neq \mathbb{1}$

$$\sum_{n=m}^{m'} \chi(n)$$ є обмеженими

оскільки для будь-якого нетривіального χ

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

на комутативній групі G, $\# G < +\infty$.

В нашому випадку

$$\left| \sum_{n=m}^{m'} \chi(n) \right| \leq \varphi(N) - 1.$$

Сумування Абеля $\Rightarrow$ ряд D. збігається для $Re(s) > 0$ ⊠

Теорема 6 (Діріхле)

Для $\chi \neq \mathbb{1}$

$$L(\chi, 1) \neq 0.$$

$\Downarrow$

Дов-ня Теореми 4

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \frac{1}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} \overset{?}{=} \frac{1}{\varphi(N)}$$

Розглянемо

$$\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} \quad - \; ?$$

$s > 1$ абс. збіжний

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

$$= \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} + \frac{\chi(p)^2}{p^{2s}} + \dots\right)$$

$$= \prod_{p \nmid N} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$\log L(\chi, s) = \sum_{p} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m\, p^{sm}}$$

$$= \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} + \underbrace{\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^m}{m\, p^{sm}}}$$

обмежена рівномірно по s за абсолютним значенням

$$\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{p^m} < +\infty$$

Нехай $\chi \neq \mathbb{1}$. Тоді за Теоремою 6 $L(\chi, 1) \neq 0 \Rightarrow$

$\log L(\chi, s)$ є обмеженим коли $s \searrow 1$

і тому $\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}$ також є обмеженою коли $s\searrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{\chi(p)}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = 0$$

для $\chi \neq \mathbb{1}$

Для $\chi = \mathbb{1}$ з тв-ня 2 маємо

$$\lim_{s\searrow 1}\frac{\sum_{p\nmid N}\frac{1}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)} = 1.$$

$$\mathcal{P}_a = \{ p \in \mathcal{P} : p \equiv a \pmod N \}$$

$$\rho(\mathcal{P}_a) = \lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}_a} \frac{1}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \chi(a)^{-1} \cdot \underbrace{\lim_{s \searrow 1} \frac{\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{\chi(p)}{p^s}}{\log\left(\frac{1}{s-1}\right)}}_{= \begin{cases} 0, & \chi \neq \mathbb{1} \\ 1, & \chi = \mathbb{1} \end{cases}}$$

$\forall g \in G$

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} \# G, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\varphi(N)} \mathbb{1}(a)^{-1} = \frac{1}{\varphi(N)} \quad \boxtimes$$

Залишилося довести Теорему 6:

$$L(\chi, 1) \neq 0$$

коли $\chi \neq \mathbb{1}$.

$\forall p \qquad a^{-1} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$\frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \underbrace{\chi(a^{-1}p)}_{= \chi(a)^{-1}\chi(p)} = \begin{cases} 1, & p \in \mathcal{P}_a \\ 0, & p \notin \mathcal{P}_a \end{cases}$$

$\operatorname{Re}(s) > 1 \qquad G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(\chi, s)$$

$$= \prod_{\chi \in \widehat{G}} \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

<u>Лема 7</u> $\displaystyle\prod_{\chi \in \widehat{G}} (1 - \chi(p) T)$

$$= \left(1 - T^{f(p)}\right)^{g(p)}$$

де $f(p) =$ порядок p в $G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$

$$g(p) = \frac{\varphi(N)}{f(p)} = \frac{\# G}{\# H}$$

$H = \langle p \rangle \subset G$

підгрупа породжена p

<u>Дов-ня</u> Розглянемо

$$\mathcal{U} \subset \widehat{G}$$

$$\{\chi \in \widehat{G} : \chi(p) = 1\} = \widehat{(G/H)}$$

$$\Rightarrow \# \mathcal{U} = \# \widehat{(G/H)} = \# (G/H) = \frac{\# G}{\# H} = g(p)$$

Ясно, що $\widehat{G}/\mathcal{U} \subset \widehat{H}$.

$$\# \widehat{G}/\mathcal{U} = \frac{\# \widehat{G}}{\# \mathcal{U}} = \frac{\varphi(N)}{g(p)} = f(p) = \# \widehat{H}$$

$$\Rightarrow \widehat{G}/\mathcal{U} = \widehat{H}$$

Кожен характер на H піднімається до хар-ра на G.

$d \geq 1$

$\mu_d := \{ z \in \mathbb{C} : z^d = 1 \} \subset \mathbb{C}^\times$

$\# \mu_d = d$

$$\prod_{w \in \mu_d} (1 - wT) = 1 - T^d$$

H є циклічною групою порядка $f(p)$

$\widehat{H} \cong \mu_{f(p)} \quad \chi \longmapsto \chi(p)$

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} (1 - \chi(p) T) =$$

$$= \left(\prod_{\chi \in \widehat{H}} (1 - \chi(p) T) \right)^{g(p)}$$

$$= \left(1 - T^{f(p)} \right)^{g(p)} \quad \boxtimes$$

З Леми 7 для $Re(s) > 1$ маємо

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{\chi \in \widehat{G}} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}$$

$$= \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid N}} (1 - p^{-f(p)s})^{-g(p)} =$$

$$= \prod_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \nmid N}} \left(1 + \frac{1}{p^{f(p)s}} + \frac{1}{p^{2f(p)s}} + \dots \right)^{g(p)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad \text{де} \quad a_n \geqslant 0$$

Більше того, для $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$

$$\left(1 + \frac{1}{p^{f(p)s}} + \frac{1}{p^{2f(p)s}} + \dots \right)^{g(p)}$$

$$\geqslant 1 + \frac{1}{p^{g(p)f(p)s}} + \frac{1}{p^{2g(p)f(p)s}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{p^{\varphi(N)s}} + \frac{1}{p^{2\varphi(N)s}} + \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \geqslant L(\mathbb{1}, \varphi(N)s)$$

для $s > 1$

Робимо висновок, що цей ряд Діріхле з невід'ємними членами розбігається в $s = \frac{1}{\varphi(N)}$.

Припустимо, що $L(\chi_0, 1) = 0$ для деякого $\chi_0 \in \widehat{G}$.

Тоді $L(\chi_0, s)\, L(\mathbb{1}, s)$ є голоморфною функцією в $s = 1$, і тому добуток

$$\prod_{\chi \in \widehat{G}} L(\chi, s)$$

є голоморфною функцією у півплощині $Re(s) > 0$. (Див. Твер-ня 5.)

Але для $Re(s) > 1$ ця функція дорівнює ряду Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ з $a_n \geq 0$, який розбігається в $s = \frac{1}{\varphi(n)}$.

Це суперечить Тв-ню 3 з §21. Значить $L(\chi, 1) \neq 0$ для всіх $\chi \in \widehat{G}$.

Ми довели Теорему 6. $\boxtimes$

Матеріал сьогоднішньої лекції міститься в книзі J.-P. Serre, A course in arithmetic

Наприкінці наведемо приклад деяких сучасних результатів щодо адитивної структури на множині простих чисел.

Теорема (Green–Tao, 2004) Множина простих чисел P містить як завгодно довгі арифметичні прогресії.

Приклад (2010): числа $43142746595714191 + 23681770 \cdot 223092870 \cdot n$ є простими для $n = 0, 1, \dots, 25$.

Гіпотеза (Erdös) Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$ є така що $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \infty$ $\Rightarrow$ A містить арифметичні прогресії будь-якої довжини