16 травня

§19. Функціональне рівняння, нулі $\zeta(s)$ та Гіпотеза Рімана

Твердження 1 $\zeta(s) \neq 0$ коли $Re(s) > 1$.

Дов-ня $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

$$= \prod_{p \text{ просте}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right)$$

$$= \prod_{p \text{ просте}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Покажемо, що цей добуток збіжний і $\neq 0$.

$$\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m}$$

збіжний для $|z| < 1$.

Лема $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - a_n}$ $\quad a_n \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $a_n \to 0, n \to \infty$

збігається до ненульового числа коли $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається

Дов-ня леми $\lim_{N \to \infty} \underbrace{\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - a_n}}_{\neq 0}$

$$\log\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-a_n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)$$

Покажемо що існує скінченна границя цих чисел коли $N \to \infty$, Тобто, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right) \text{ є збіжним. абсолютно}$$

$$\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}\right|$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{m} < \sum_{m=1}^{\infty} |z|^m = \frac{|z|}{1-|z|}$$

Коли $|z|<\varepsilon$, $\left|\log\left(\frac{1}{1-z}\right)\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}|z|$.

$\forall \varepsilon>0$ нехай N т.щ. $|a_n|<\varepsilon$ $\forall n \geq N$

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)\right| < \frac{1}{1-\varepsilon}\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$$

$$< \infty.$$

$$\mathbb{C} \ni \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{1}{1-a_n}\right)$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-a_n} = \exp(\lambda) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$\boxtimes$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$\sum_p \left|\frac{1}{p^s}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}}$$

$$= \zeta(Re(s)) < \infty$$

З леми випливає що $\zeta(s) \neq 0$.

$\boxtimes$

Теорема 2 Нехай

$$\zeta^*(s) = \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}\zeta(s).$$

Тоді $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$

для всіх $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Дов-ня Нехай $\mathrm{Re}(s) > 1$.

$$\zeta^*(s) = \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt{\pi})^s} \int_0^{\infty} t^{s/2-1} e^{-t}\, dt$$

$$u = \frac{t}{n^2\pi}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u^{s/2-1} e^{-n^2\pi u}\, du$$

$$= \int_0^{\infty} u^{s/2-1} \omega(u)\, du$$

де $\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi u}$

Проаналізуємо, для яких s інтеграл є збіжним.

Коли $u \to \infty$:

$$\omega(u) < \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi u} = \frac{e^{-\pi u}}{1-e^{-\pi u}}$$

спадає експоненційно $\Rightarrow$

$$|u^{s/2-1}\omega(u)| = u^{\frac{\mathrm{Re}(s)}{2}-1}\omega(u)$$

інтегровна при $u \to \infty$ для $\forall s$

$\forall \alpha > 0$

$$s \mapsto \int_\alpha^\infty u^{s/2-1}\,\omega(u)\,du$$ це

<u>ціла</u> функція

голоморфна

для всіх $s \in \mathbb{C}$

Коли $u \to 0$?

<u>Лема</u> Позначимо $(u \in \mathbb{R}_{>0})$

$$\theta(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 u} = 1 + 2\omega(u).$$

* тета-функція Якобі

Ця функція задовольняє

$$\theta\left(\frac{1}{u}\right) = \sqrt{u}\,\theta(u)$$

<u>Дов-ня</u> Використаємо формулу Пуассона

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

для $f(x) = e^{-\pi u x^2}$.

Тут $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y} f(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x y - \pi u x^2}\,dx$$

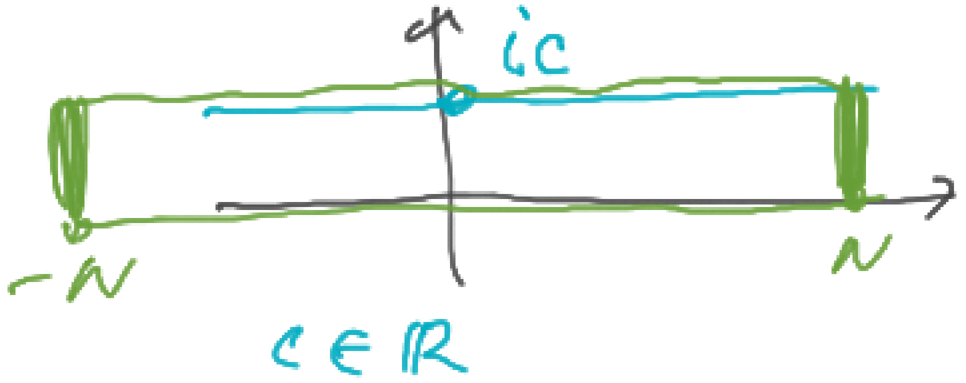
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u \left(x + i\frac{y}{u}\right)^2 - \pi\frac{y^2}{u}}\,dx$$

$$= e^{-\pi \frac{y^2}{u}} \int_{i\frac{y}{u}-\infty}^{i\frac{y}{u}+\infty} e^{-\pi u s^2}\, ds \qquad (v = \sqrt{u}\, s)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\pi \frac{y^2}{u}} \underbrace{\int_{i\frac{y}{\sqrt{u}}-\infty}^{i\frac{y}{\sqrt{u}}+\infty} e^{-\pi v^2}\, dv}_{=1} \quad \text{(вправа)}$$

Ідея:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$$



$$f(x) = e^{-\pi u x^2}$$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-\pi \frac{y^2}{u}}$$

Ф.П. $\Rightarrow$ $\theta(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}\, \theta\left(\frac{1}{u}\right)$ $\boxtimes$

$$\omega\left(\tfrac{1}{u}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\theta\left(\tfrac{1}{u}\right) - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{u}\,\theta(u) - 1\right)$$

$$= \sqrt{u}\,\omega(u) + \frac{\sqrt{u}}{2} - \frac{1}{2}$$

$u^{s/2-1}\omega(u)\,du$ коли u біля 0

$u \to 1/u$ це u біля ∞

$$-u^{-s/2-1}\,\omega\left(\tfrac{1}{u}\right) du$$

$$= -\left(u^{-s/2-1/2}\,\omega(u) + \frac{u^{-s/2-1/2}}{2} - \frac{u^{-s/2-1}}{2}\right) du$$

$$\int_0^{*} u^{s/2-1}\,\omega(u)\,du$$

абсолютно збіжний в $u=0$

коли $-\frac{Re(s)}{2} - 1/2 < -1$

$$-\frac{Re(s)}{2} < -1/2$$

$$Re(s) > 1$$

$$\zeta^*(s) = \frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}\zeta(s)$$

$$= \int_0^\infty u^{s/2-1}\,\omega(u)\,du$$

$$= \int_0^1 + \int_1^\infty$$

$t = 1/u$

$$= \int_\infty^1 \left(\frac{1}{t}\right)^{s/2-1} \omega\left(\frac{1}{t}\right) d\left(\frac{1}{t}\right) + \int_1^\infty u^{s/2-1}\,\omega(u)\,du$$

$d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{dt}{t^2}$

$$= \int_1^\infty t^{-s/2-1}\left(t^{1/2}\omega(t) + \frac{t^{1/2}-1}{2}\right) dt$$

$$+ \int_1^\infty u^{s/2-1}\,\omega(u)\,du$$

$\zeta^*(s)$

$$= \int_1^\infty t^{\frac{(1-s)}{2}-1}\,\omega(t)\,dt + \int_1^\infty t^{s/2-1}\,\omega(t)\,dt$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{\frac{1-s}{2}-1}\,dt}_{=\frac{1}{s-1}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_1^\infty t^{-s/2-1}\,dt}_{\frac{1}{s}}$$

Ми бачимо, що права частина це мероморфна функція з єдиними (простими) полюсами в $s=0,1$ і симетрична відносно $s \longleftrightarrow 1-s$

$\boxtimes$

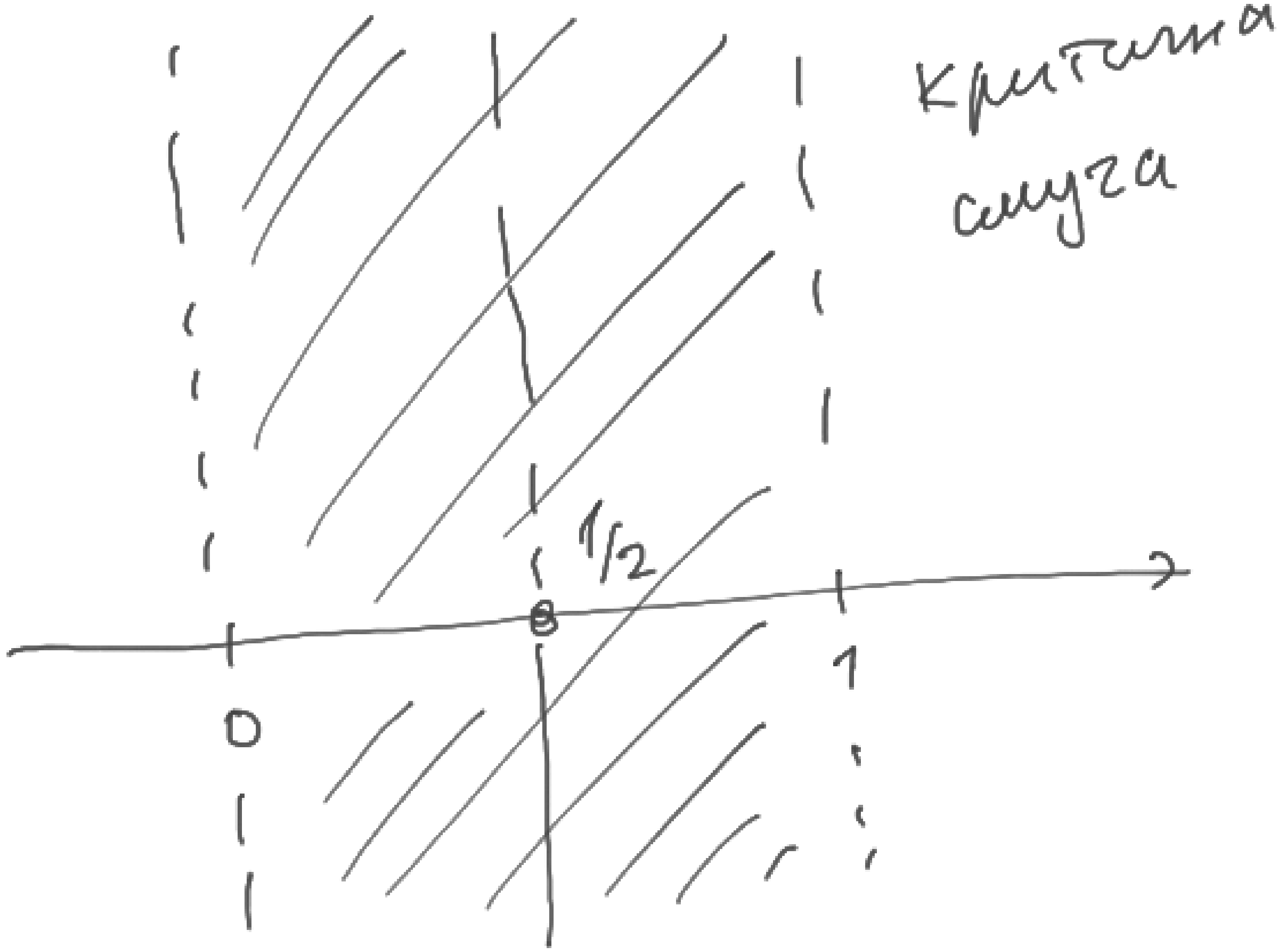
$$\zeta^*(s) = \underbrace{\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}}_{\neq 0 \ \forall s \in \mathbb{C}} \zeta(s)$$

$$\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$$

і оскільки $\zeta^*(s) \neq 0$ при $\mathrm{Re}(s) > 1$ ($\Leftarrow$ Тв-ня 1)

$\Rightarrow$ $\zeta^*(s) \neq 0$ при $\mathrm{Re}(s) < 0$

$\Rightarrow$ в півплощині $\mathrm{Re}(s) < 0$ єдиними нулями $\zeta(s)$ $\in$ $s = -2, -4, -6, \ldots$



<u>Гіпотеза Рімана</u> Всі нулі $\zeta(s)$ у критичній смузі $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ знаходяться на прямій $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

<u>Вправа</u>* Доведіть, що $\zeta(1+it) \neq 0$ для $t \in \mathbb{R}$.

§20. Теорема про розподіл простих чисел. Зв'язок між розподілом простих чисел та нулями $\zeta(s)$. (Огляд)

Озн-ня Для $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\pi(x) = \#\{2 \leq p \leq x : p \text{ просте}\}$$

це рахуюча функція простих чисел.

Теорема (Hadamard, de la Vallée-Poussin 1896)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x} = 1$$

Історія: гіпотези

Legendre 1798 $\quad \pi(x) \sim \frac{x}{A \log x + B}$

1808 $\quad A = 1 \quad B = -1{,}08366\ldots$

Gauss 1792-93 $\quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$

1838 Legendre

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

різниця є функцією повільного зростання

З цієї гіпотези $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log(t)}}{x/\log(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\log(x)}}{\frac{1}{\log(x)} + \frac{1}{\log(x)^2}} = 1$$

правило Лопіталя

<u>Озн-ня</u> (Чебишев)

$$\psi(x) = \sum_{\substack{(k,p):\\ p^k \le x}} \log(p) = \sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p$$

ψ - функція

<u>Вправа</u> Теорема $\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

Функція Мангольдта

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{якщо } n = p^k \text{ для деяких } p, k \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$$

та

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

$Re(s) > 1$

Дов-ня:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1-p^{-s})$$

$$(\log \zeta(s))' = -\sum_p \frac{\log p \cdot p^{-s}}{1-p^{-s}}$$

$$= -\sum_p \left(\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}} + \dots \right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

⊠

$\{a_n\}$

$$A(x) = \sum_{n \le x} a_n$$ рахуюча функція

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$ ряд Діріхле

Зв'язок $A(x) \longleftrightarrow f(s)$?

для $\forall$ гладкої $g(x)$ трюк Абеля

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(A(n) - A(n-1)\big) g(n)$$

$A(0) := 0$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A(n) \big(g(n) - g(n+1) \big)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} A(n) \int_n^{n+1} g'(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\infty} A(x)\, g'(x)\,dx$$

Візьмемо $g(x) = x^{-s}$

$g'(x) = -s\, x^{-s-1}$

$\Rightarrow$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = s \int_0^{\infty} A(x)\, x^{-s-1}\,dx$$

перетворення Мелліна від $A(x)$

Теорема (формула Перрона)

Нехай ряд Діріхле $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ є рівномірно та абсолютно збіжним для $Re(s)>\sigma$. Тоді

$$\frac{f(s)}{s}=\int_0^{\infty}A(x)\,x^{-s-1}dx$$

для $Re(s)>\sigma$. Обернене перетворення задається як

$$A_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{f(s)}{s}x^s ds$$

для будь-якого $c>\max(\sigma,0)$. Тут $A_0(x)=\frac{A(x+)+A(x-)}{2}$.

Застосовуючи формулу Перрона для $a_n=\Lambda(n)$ отримуємо

$\forall c > 1$

$$\psi_0(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} x^s \frac{ds}{s}$$

Рухаючи $c \to -\infty$ і перевіривши, що контурні інтеграли $\to 0$ можна отримати наступну формулу:

$$\psi_0(x) = -\sum_{\substack{\rho:\ \text{полюси} \\ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{1}{s}}} \operatorname{Res}_{s=\rho} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \right)$$

Для мероморфних функцій

$$g(s) = \sum_{n=M}^{\infty} c_n (s-\rho)^n$$

$c_M \neq 0$

$M \in \mathbb{Z}$

наз-ся порядком нуля g в $s=\rho$

$M<0 \iff g$ має полюс в ρ

<u>Вправа</u>: $\frac{g'(s)}{g(s)}$ є голоморфною в $s=\rho$ якщо $M=0$, а при $M \neq 0$ має простий полюс і

$$\operatorname{Res}_{s=\rho} \frac{g'(s)}{g(s)} = M$$

$$\psi_0(x) = -\sum_{\rho} \mathrm{Res}_{s=\rho}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{x^s}{s}\right)$$

ρ : полюси $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\dfrac{1}{s}$

$$\rho = 1: \quad \mathrm{Res}_{s=1}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{x^s}{s}\right) = -x$$

(пропустимо критичну смугу)

$$\rho = 0: \quad \mathrm{Res}_{s=0}\left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{x^s}{s}\right) = \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

$= \log(2\pi)$ (вправа)

$$\zeta^*(1-s) = \zeta^*(s)$$

парне

$\rho = -m$: $\quad m = 2, 4, 6, \dots$

$$\mathrm{Res}_{s=-m}\left(\frac{\zeta'(s)\,x^s}{\zeta(s)\,s}\right) = -\frac{x^{-m}}{m}$$

$$\sum_{m=2,4,6,\dots} -\frac{x^{-m}}{m} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{-2k}}{k}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(1 - x^{-2}\right)$$

$$\boxed{\psi_0(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) - \sum_{\substack{\rho:\ \zeta(\rho)=0 \\ 0 \le \mathrm{Re}(\rho) \le 1}} \frac{x^\rho}{\rho}}$$

Ріманн 1859