9 травня

§18. Дзета-функція Рімана, її аналітичне продовження та значення у цілих точках

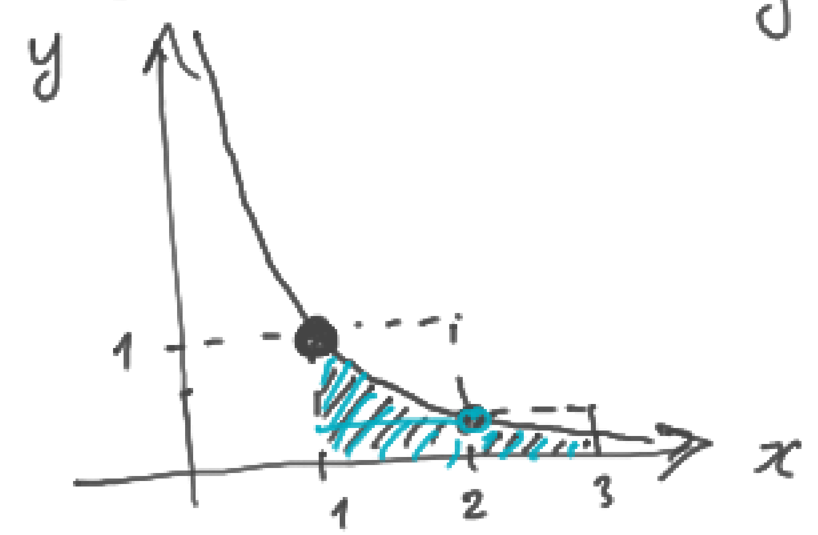
$s \in \mathbb{R} \quad s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

<u>Тв-ня 1</u> Цей ряд збіжний для $s > 1$ та маємо

$$\frac{1}{s-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{1}{s-1}.$$

<u>Дов-ня</u> $\quad y = \frac{1}{x^s} \quad s > 1$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \int_1^{\infty} x^{-s}\,dx = \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{s-1}$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}}_{\zeta(s)-1} < \int_1^{\infty} x^{-s}\,dx = \frac{1}{s-1}$$

$\boxtimes$

Наслідки:

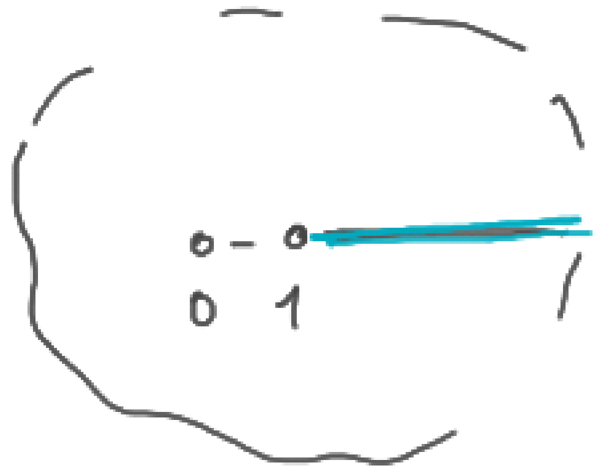
- $\zeta(s)$ є монотонно спадаючою для $s>1$ тому що кожне $\frac{1}{n^s}$ є монотонно спадаючим
- $\lim\limits_{s\to 1+} (s-1)\zeta(s) = 1$

  $\lim\limits_{s\to 1+} \zeta(s) = +\infty$
- оскільки $\frac{1}{n^s} = 1$ для $n=1$

  $$1 < \zeta(s) < 1 + \frac{1}{s-1}$$

  і тому $\lim\limits_{s\to +\infty} \zeta(s) = 1.$

Розширення на $s \in \mathbb{C}$:



Нагадаємо:
$$e^s = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s^m}{m!}$$

має нескінченний радіус збіжності; $R = \frac{1}{\limsup\limits_{m} \sqrt[m]{a_m}}$

ф-ла Стірлінга

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!}{\sqrt{2\pi m}\left(m/e\right)^m} = 1$$

$$\lim_{m\to\infty} \left[\log(m!) - \log\left(\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m\right)\right] = 0$$

$$\log(m!) - \frac{1}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(m) - m\log\left(\frac{m}{e}\right)$$

$$\frac{1}{m}\log(m!) - \log\left(\frac{m}{e}\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$$\frac{\sqrt[m]{m!}}{m/e} \to 1$$

$\Rightarrow$ e^s є голоморфною функцією в $\mathbb{C}$

$n \geq 1$ $\quad \frac{1}{n^s} = e^{-s \log(n)} \quad s \in \mathbb{C}$

$f_N(s) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$ голоморфна в $\mathbb{C}$

<u>Тв-ня 2</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ збігається абсолютно у півплощині $Re(s) > 1$ і його сума є голоморфною функцією у цій області.

<u>Дов-ня</u>

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}}$$

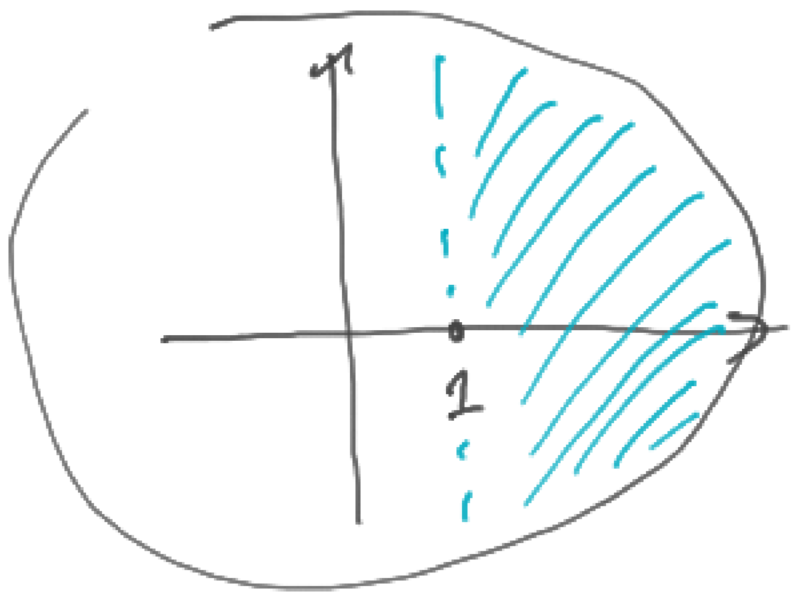
$$|e^s| = \left| e^{Re(s) + i\, Im(s)} \right| = e^{Re(s)}$$

Тому для $\forall \varepsilon > 0$ пос-ть голоморфних функцій $\{f_N(s)\ ;\ N \geq 1\}$ є рівномірно збіжною у області $\{s : Re(s) \geq 1 + \varepsilon\}$.

Тому границя $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ є голоморфною у $\{s : Re(s) \geq 1 + \varepsilon\}$ для $\forall \varepsilon > 0$. $\boxtimes$

Це доведення показує, що

$$|\zeta(s)| \leq \zeta(\mathrm{Re}(s)).$$



<u>Теорема 3</u> $\zeta(s)$ має мероморфне продовження на всю $\mathbb{C}$; її єдиним полюсом є простий полюс в $s=1$ і

$$\mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta(s) = 1.$$

($\Leftrightarrow$ $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ є голоморфною функцією в $\mathbb{C}$).

<u>Підготовка</u>

<u>Озн-ня</u> Гамма-функція для $\mathrm{Re}(s) > 0$ задається як

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

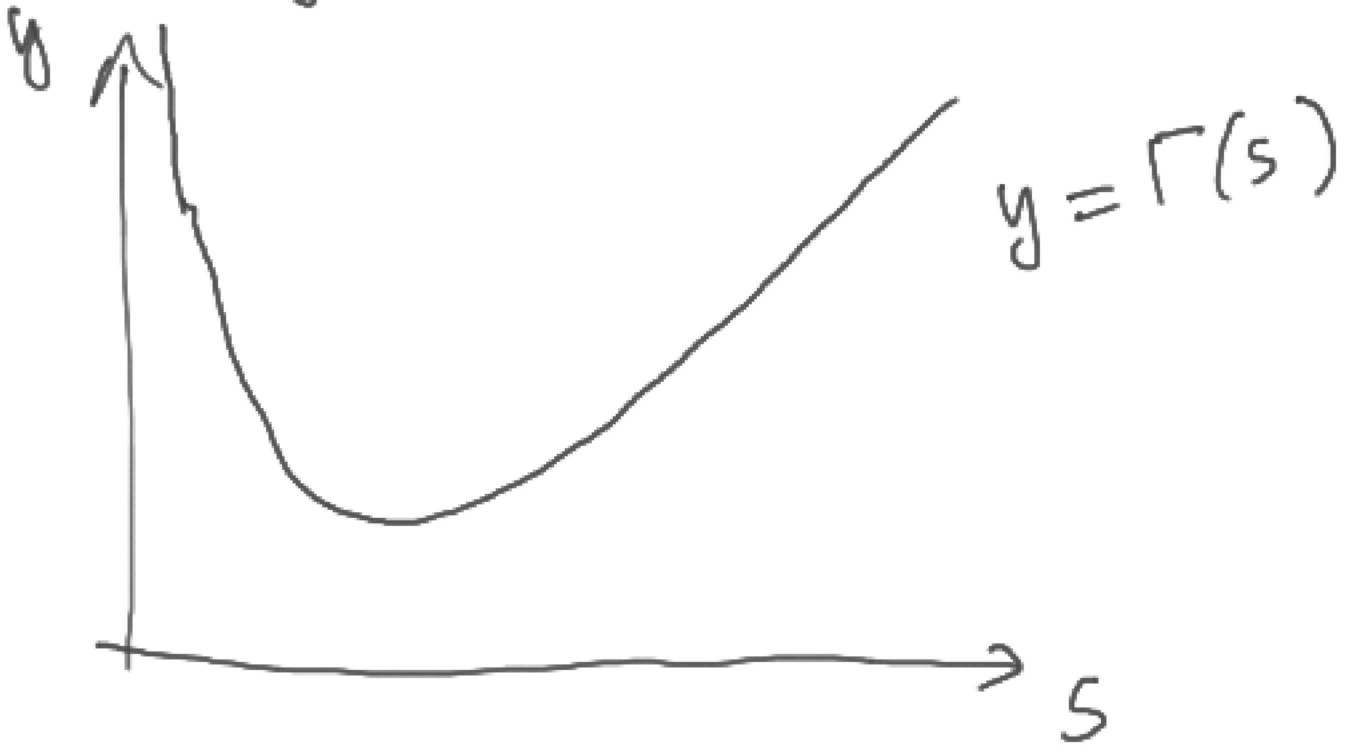
<u>Зауваження</u> Для $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ інтеграл збігається бо e^{-t} швидко спадає коли $t \to \infty$ і нам потрібно $s > 0$ щоби інтеграл збігався в $t = 0$.

Для $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$

$$|\Gamma(s)| = \left| \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt \right|$$

$$\le \int_0^\infty |t^{s-1}| e^{-t}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^{Re(s)-1} e^{-t}\, dt = \Gamma(Re(s))$$



<u>Тв-ня 4</u> $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ для $Re(s) > 0$.

<u>Дов-ня</u> $s\Gamma(s) = s\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$

$$= \int_0^\infty e^{-t}\, d(t^s) = t^s e^{-t}\Big|_0^\infty$$

$$- \int_0^\infty t^s\, d(e^{-t}) = \int_0^\infty t^s e^{-t}\, dt = \Gamma(s+1)$$

☒

$\Rightarrow$ $n \geq 1$ цілих

$\Gamma(n) = (n-1)!$

За індукцією:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$$

...

Тв-ня 5 Існує мероморфна в $\mathbb{C}$ функція $\Gamma(s)$ така що

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$$

і рівна $\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt$ для всіх s т.щ. $Re(s) > 0$.

Єдиними особливостями $\Gamma(s)$ є прості полюси в недодатніх цілих точках $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

$$\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s) = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

$m \geq 0$

Дов-ня Продовжуємо до $Re(s) > -1$ просто з

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s};$$

для $Re(s) > -2$

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)}$$

і так далі.

$$\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s) = \operatorname{Res}_{s=-m} \frac{\Gamma(s+m+1)}{s(s+1)\ldots(s+m)}$$

$$= \left.\frac{\Gamma(s+m+1)}{s(s+1)\ldots(s+m-1)}\right|_{s=-m} \cdot \underbrace{\operatorname{Res}_{s=-m} \frac{1}{s+m}}_{=1}$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{-m\cdot(-m+1)\cdots(-m+m-1)} = \frac{(-1)^m}{m!} \quad \boxtimes$$

$\rightsquigarrow$ мероморфне продовження $\zeta(s)$:

$\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt \cdot \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{s-1} e^{-n\cdot t/n} d\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du$$

$$= \int_0^\infty u^{s-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nu} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{s-1} e^{-u}}{1-e^{-u}} du$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{\frac{u}{1-e^{-u}}}_{= \sum_{n=0}^\infty B_n \frac{(-u)^n}{n!}} u^{s-2} e^{-u} du$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^N \frac{B_n (-1)^n}{n!} u^{n+s-2} e^{-u} du$$

$$+ \int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{u}{1-e^{-u}} - \sum_{n=0}^N \frac{B_n (-u)^n}{n!}\right)}_{O(u^{N+1}),\ u \to 0+} u^{s-2} e^{-u} du$$

Другий інтеграл є голоморфною функцією від s в області $\mathrm{Re}(N+s)>0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s)>-N$.

Перший інтеграл $=$

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^{N} \frac{B_n(-1)^n}{n!} u^{n+s-2} e^{-u}\,du$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{B_n(-1)^n}{n!} \Gamma(n+s-1)$$

є мероморфною функцією в $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$

$\Gamma(s)\zeta(s)$ є мероморфною функцією в $\mathbb{C}$ з можливими простими в $s=1,0,-1,-2,\ldots$

$$\mathrm{Res}_{s=-m} \Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=0}^{m+1} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \cdot \mathrm{Res}_{s=-m} \Gamma(n+s-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \mathrm{Res}_{s=n-m-1} \Gamma(s)$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} \frac{(-1)^n B_n}{n!} \frac{(-1)^{m+1-n}}{(m+1-n)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} \underbrace{\sum_{n=0}^{m+1} \binom{m+1}{n} B_n}_{\substack{\parallel \\ B_{m+1}(1) = (-1)^{m+1} B_{m+1}}}$$

$\Downarrow$

Згадаємо:

$$B_N(1-x) = (-1)^N B_N(x)$$

$$B_N(0) = B_N$$

$$\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s)\zeta(s) = \frac{B_{m+1}}{(m+1)!}.$$

$B_{m+1} = 0 \quad m>0$, парне

$\Rightarrow \Gamma(s)\zeta(s)$ є голоморфною в $s=-m \quad m>0$, парне

$s = -2, -4, -6, \dots$

$\Rightarrow \zeta(-m) = 0 \quad m>0$ парне

$$\operatorname{Res}_{s=0} \Gamma(s)\zeta(s) = B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{s=0} \Gamma(s) = 1$$

$$\Rightarrow \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

$s = -1, -3, -5, \dots$

$m = 1, 3, 5, \dots$

$$\zeta(-m) = \frac{\operatorname{Res}_{s=-m} \zeta(s)\Gamma(s)}{\operatorname{Res}_{s=-m} \Gamma(s)}$$

$$= \frac{\frac{B_{m+1}}{(m+1)!}}{\frac{(-1)^m}{m!}} = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}$$

$$= -\frac{B_{m+1}}{m+1}$$

бо m непарне.

Теорема 3 випливає з наступної

<u>Теорема 6</u> $\Gamma(s) \neq 0 \ \forall s \in \mathbb{C}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{\Gamma(s)}$ є голоморфною функцією в $\mathbb{C}$.

Теорема 3: $\zeta(s)\Gamma(s)$ є мероморфною в $\mathbb{C}$ має прості полюси в $1, 0, -1, -3, -5, \dots$

$\times \frac{1}{\Gamma(s)}$ + ми вже перевірили, що $\zeta(s)$ голоморфна в $s = -m$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Дов·ня Теореми 6

Доведемо наступну формулу (Ейлера):

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^s}{(1+s/n)}$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{t}{N}\right)^N = e^{-t}$$

$\mathrm{Re}(s)>0$:

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{s-1}\,dt$$

$$\int_0^N \left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{s-1}\,dt$$

$$= N^s\int_0^1 (1-u)^N u^{s-1}\,du$$

$$= N^s\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k\int_0^1 u^{s+k-1}\,du$$

$$= N^s\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k\binom{N}{k}}{s+k} = \frac{N^s\cdot N!}{s(s+1)\ldots(s+N)}$$

Лема

Дов-ня леми

$$\frac{N!}{s(s+1)\dots(s+N)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{s+k}$$

$$a_k = \operatorname{Res}_{s=-k} \frac{N!}{s(s+1)\dots(s+N)}$$

$$= \frac{N!}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{фактор } -k+k=0 \\ \text{відсутній}}}{-k(-k+1)\cdot\ldots\cdot}(-k+N)} = (-1)^k \binom{N}{k}$$

$\boxtimes$

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} \Gamma_N(s)$$

$\operatorname{Re}(s) > 0$

Позначимо

$$\Gamma_N(s) = \frac{N^s \cdot N!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N)}$$

$$\frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)} = \left(\frac{N+1}{N}\right)^s \frac{N+1}{s+N+1}$$

$$\Gamma_{N+1}(s) = \Gamma_1(s) \prod_{n=1}^{N} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)} \prod_{n=1}^{N} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n+1}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{N} \left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

$$\times \left(1+\frac{s}{N+1}\right)^{-1}$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} \Gamma_N(s)$$

$$= \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} \right).$$

Оскільки

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s \left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{s}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

то $\log\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$n \to \infty$

і тому

цей добуток є збіжним до ненульового ? числа для кожного $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

$$\log|\Gamma(s)| < \infty \Rightarrow \Gamma(s) \neq 0.$$

$\boxtimes$

Ми показали, що

- $\zeta(s)$ є мероморфною в $\mathbb{C}$
- $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ є цілою (голоморфною в $\mathbb{C}$)
- $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$

  $\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1}, \quad m \geq 1$