

Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§12. Розв'язки рівнянь над скінченними полями

1. Доведіть, що для $m \geq 2$ сума всіх коренів з 1 степеня m дорівнює 0:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \exp\left(\frac{2\pi i k}{m}\right) = 0.$$

2. Опишіть всі розширення \mathbb{F}_{p^s} поля \mathbb{F}_p такі, що слід $Tr : \mathbb{F}_{p^s} \rightarrow \mathbb{F}_p$ є нульовим на \mathbb{F}_p , тобто $Tr(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{F}_p$.
3. Доведіть, що для $x \in \mathbb{F}_{p^s}$ виконується $Tr(x) = 0$ т.т.т.к. $x = y - y^p$ для деякого $y \in \mathbb{F}_{p^s}$.
4. Позначимо $\zeta_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$. Доведіть наступні властивості функції

$$\lambda : \mathbb{F}_{p^s} \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

заданої як $\lambda(x) = \zeta_p^{Tr(x)}$:

- i) $\lambda(x + y) = \lambda(x)\lambda(y)$;
 - ii) $\exists z \in \mathbb{F}_{p^s}$ таке що $\lambda(z) \neq 1$;
 - iii) $\sum_{x \in \mathbb{F}_{p^s}} \lambda(x) = 0$.
5. Доведіть, що для сум Гаусса та Якобі над \mathbb{F}_{p^s} виконується
- i) $g(\varepsilon) = 0$ та $|g(\chi)| = p^{s/2}$ коли $\chi \neq \varepsilon$;
 - ii) $g(\chi)g(\chi^{-1}) = \chi(-1)p^s$.
 - iii) $J(\varepsilon, \varepsilon) = p^s$ та $J(\varepsilon, \chi) = 0$ коли $\chi \neq \varepsilon$;
 - iv) $J(\chi, \chi^{-1}) = -\chi(-1)$ коли $\chi \neq \varepsilon$;
 - v) $J(\chi, \psi) = \frac{g(\chi)g(\psi)}{g(\chi\psi)}$ коли $\chi, \psi, \chi\psi \neq \varepsilon$;
 - vi) $J(\chi^{-1}, \psi^{-1}) = p^s / J(\chi, \psi)$ коли $\chi, \psi, \chi\psi \neq \varepsilon$.
6. Напишіть дзета функцію алгебраїчного многовида $X = \{x^3 + y^3 = 1\}$ над \mathbb{F}_p у випадку коли $p \equiv 1 \pmod{3}$.