Теорія чисел - весняний семестр 2023 року

§4. Цілі елементи та розклад на множники в квадратичних полях

1. Наступна таблиця показує для яких малих вільних від квадратів чисел $m > 0$ кільце цілих в $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ є областю однозначної факторизації. (Після наступної лекції ви дізнаєтесь, як перевірити цей факт за допомогою PARI/GP.)

m	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15
$\mathcal{O}_K$ є ООФ	+	+	+	+	+	-	+	+	+	-

Подайте приклади неоднозначної факторизації на незвідні елементи в кільцях $\mathcal{O}_K$ для $m = 10$ та $m = 15$.

2.* Запишіть доведення теореми про одиниці дійсного квадратичного поля K: існує єдина одиниця кільця $\varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times$ така що $\overline{\varepsilon} < 1 < \varepsilon$ і $\mathcal{O}_K^\times = \{\pm\varepsilon^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Таке ε називається *фундаментальною одиницею* поля K.

Порада: скористуйтеся теорією рівняння Пелля, див. §9.5 у підручнику [NZM].

3. Нехай $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ це квадратичне поле (дійсне або уявне) яке є областю однозначної факторизації. На лекції ми показали, що кожне раціональне просте число p або залишається простим в $\mathcal{O}_K$ або є добутком двох простих $p = \pi_1 \cdot \pi_2$, $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{O}_K$. Відповідно говориться, що p *розщеплюється* або *не розщеплюється* в $\mathcal{O}_K$.

p	розщеплення в $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
2	$2 = (\sqrt{2})^2$
3	простий (бо немає елемента з нормою 3)
5	простий
7	$7 = (3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$ (добуток неасоційованих)
11	простий
13	простий
17	$17 = (5-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})$
19	простий
23	$23 = (5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})$
...	

Побудуйте подібну таблицю розщеплення для $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

*Спробуйте вгадати правило: які прості p розщеплюються у кожному з цих полів?

4. Нехай F це деяке поле і $g \in F[x]$. Фактор $V = F[x]/\langle g\rangle$ є кільцем і є векторним простором над F розмірності $\dim_F V = \deg g$. Покажіть, що V є полем тоді і тільки тоді коли g є незвідним многочленом.

5. Нехай $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}$ є алгебраїчним числом з мінімальним рівнянням $g(\xi) = 0$, $g \in \mathbb{Q}[x]$. Покажіть, що векторний простір

$$\mathbb{Q}(\xi) = \{f(\xi) : f \in \mathbb{Q}[x]\}$$

є полем. Яка розмірність $\mathbb{Q}(\xi)$ як векторного простору над $\mathbb{Q}$?