Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§19. Функціональне рівняння, нулі $\zeta(s)$ та гіпотеза Рімана.
§20. Зв'язок між розподілом простих чисел та нулями дзета функції Рімана.

1. Доведіть, що для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ виконується

$$\int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

2.* Покажіть, що $\zeta(1+it) \neq 0$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$.

3. Нехай $\pi(x) = \#\{p \text{ просте } : p \leq x\}$ це рахуюча функція простих чисел. Доведіть, що твердження Теореми про розподіл простих чисел

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$$

еквівалентне тому, що $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)/x = 1$ для функції Чебишева

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\log(x)}{\log(p)} \right\rfloor \log(p).$$

4. Нехай $g(s)$ це мероморфна функція в околі точки s_0 яка не дорівнює нулю тотожньо. Нехай $M \in \mathbb{Z}$ це порядок занулення $g(s)$ в s_0, тобто таке число, що ряд Лорана для $g(s)$ в s_0 починається в степені M, тобто

$$g(s) = \sum_{m \geq M} c_m (s - s_0)^m, \qquad c_M \neq 0.$$

Покажіть, що

$$\operatorname{Res}_{s=s_0} \left(\frac{g'(s)}{g(s)} \right) = M.$$

5.* Покажіть, що $\zeta'(0) = -\log(2\pi)/2$ скориставшись функціональним рівнянням для $\zeta(s)$.