Теорія чисел - весняний семестр 2023 року

§18. Дзета-функція Рімана, її аналітичне продовження та значення у від'ємних цілих точках

1. Доведіть, що для $\mathrm{Re}(s) > 1$ виконується
$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$
Зокрема покажіть, що добуток у правій частині є збіжним. Ця формула називається добутком Ейлера для дзета-функції.

2. Доведіть наступну теорему Ейлера: для парних $k \geq 2$ виконується
$$\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k \cdot B_k}{2 \cdot k!},$$
де $i \in \mathbb{C}$ це уявна одиниця ($i^2 = -1$) і B_k це k-те число Бернуллі. Для цього розгляньте мероморфну функцію $f(z) = \frac{1}{z^k(e^z-1)}$, знайдіть її полюси та обчисліть лишки. Покажіть, що інтеграл $f(z)dz$ по квадратному контуру з центром в 0 та стороною $\pi(2m+1)$ прямує до 0 коли $m \to \infty$, та зробіть висновок що сума всіх лишків дорівнює 0.

Зауваження. З формули Ейлера зокрема випливає, що $\zeta(k) \in \mathbb{Q}\pi^k$ для парних $k \geq 2$. Наприклад, $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$. Описана тут процедура також працює для непарних $k > 1$. Який висновок вона дає?

3. На лекції ми показали, що для цілих $k \geq 2$ маємо $\zeta(1-k) = -\frac{B_k}{k}$. Зафіксуємо непарне просте число p і розглянемо
$$\zeta^*(s) = (1-p^{-s})\zeta(s).$$
Це "підравлена" дзета-функція, у якій "відсутній" фактор Ейлера для p. Зафіксуємо деяке $m \in \{1, 2, \ldots, p-2\}$. Перевірте, що множина
$$S_m = m + (p-1)\mathbb{Z}_{\geq 0}$$
щільна в $\mathbb{Z}_p$. Скориставшись доведеними на попередній лекції конгруенціями Куммера, покажіть, що функція $k \to \zeta^*(1-k)$ є p-адичною неперервною на S_m, і тому ми можемо продовжити її до функції на $\mathbb{Z}_p$

Зауваження. Для парних ненульових лишків m за модулем $p-1$ функції визначені як
$$\zeta_p^{(m)}(s) = \lim_{\substack{k \to 1-s \\ k \in S_m}} \zeta^*(1-k)$$
називаються гілками p-адичної дзета-функції. Перевірте, що для непарних m маємо $\zeta_p^{(m)}(s) \equiv 0$.

4. (Формула сумування Пуассона) Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ це *швидко спадаюча* диференційовна функція, тобто $|f(x)| = O(|x|^{-c})$ та $|f'(x)| = O(|x|^{-c})$ коли $|x| \to \infty$ для деякого $c > 1$. Перетворення Фур'є f означимо як
$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$
Доведіть, що
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$
Зауваження. Ми скористаємося цією формулою на наступній лекції.