Теорія чисел - весняний семестр 2023 року

§15. p-адичні неперервні функції

1. Нехай $p \neq 2$ є непарним простим числом. На лекції ми означили p-адичну гамма функцію $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p^\times$ як p-адичну границю
$$\Gamma_p(s) = \lim_{x \to s, x \in \mathbb{Z}_{\geq 2}} (-1)^x \prod_{1 \leq j < x, p \nmid j} j.$$
   а) Обчисліть $\Gamma_p(1)$ та $\Gamma_p(0)$.

   б) Доведіть, що
$$\frac{\Gamma_p(s+1)}{\Gamma_p(s)} = \begin{cases} -s, & s \in \mathbb{Z}_p^\times, \\ -1, & s \in p\mathbb{Z}_p. \end{cases}$$
   в) Для $s \in \mathbb{Z}_p$ напишемо $s = s_0 + ps_1$, де $s_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ та $s_1 \in \mathbb{Z}_p$. Покажіть, що
$$\Gamma_p(s)\Gamma_p(1-s) = (-1)^{s_0}.$$
   г) Обчисліть $\Gamma_p(1/2)$.

2. Нехай $p \neq 2$ є непарним простим числом. Розглянемо послідовність цілих чисел $a_n = \binom{p^n-1}{(p^n-1)/2}$, $n \geq 1$. Покажіть, що $a_n \in \mathbb{Z}_p^\times$ для всіх n. Покажіть, що a_n/a_{n-1} має p-адичну границю коли $n \to \infty$ та обчисліть цю границю.

3. Покажіть, що сума p-адичного степеневого ряду $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є p-адичною неперервною функцією всередині кола збіжності $|x|_p < R$.

4. Нехай $x \in 1 + p\mathbb{Z}$. Тоді ми знаємо (див. задачу 1 у завданні 5), що $x^{p^n} \equiv 1 \mod p^{n+1}$. Покажіть, що у p-адичній метриці
$$a_n = \frac{x^{p^n} - 1}{p^n} \to \log_p(x), \qquad n \to \infty.$$
   Тут $\log_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}(x-1)^m/m \in p\mathbb{Z}_p$ це p-адичний логарифм.