Теорія чисел - весняний семестр 2023 року
§14. p-адична метрика та теорема Островського

1. Напишіть словами, що значить умова $|\alpha|_p \leq 1$ для раціонального числа $\alpha \in \mathbb{Q}$. Покажіть, що коли $|\alpha|_p \leq 1$ для кожного простого p, то $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2. Доведіть, що норми $|\cdot|_{p_1}$ та $|\cdot|_{p_2}$ на полі $\mathbb{Q}$ не є еквівалентними коли $p_1 \neq p_2$.

3. Метричний простір (X, d) називається ультраметричним якщо виконується посилена нерівність трикутника

$$d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y)), \qquad \forall x, y, z, \in X.$$

Доведіть, що в ультраметричному просторі

а) кожен трикутник є рівнобедреним;

б) кожна точка кулі є її центром.

4. Запишіть доведення теореми Островського.[1]

5. а) Доведіть, що послідовність $\{x_n\}$ в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ є послідовністю Коші т.т.т.к. $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_{n+1}|_p = 0$.

б) Доведіть, що послідовності Коші $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ є еквівалентними т.т.т.к. $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n|_p = 0$.

в) Нехай X це множина класів еквівалентності послідовностей Коші в $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$. Для класів $x, y \in X$ з представниками $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, покажіть, що $\{x_n + y_n\}$ та $\{x_n y_n\}$ є послідовностями Коші, класи еквівалентності яких не залежать від вибраних представників x та y. Ці класи позначимо як $x + y \in X$ та $xy \in X$ відповідно.

г) Покажіть, що X з цими операціями додавання і множення є полем і функція

$$x \mapsto ||x|| = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p,$$

де $\{x_n\}$ це деякий представник класу x, є добре визначеною нормою на цьому полі.

[1] Див. наприклад книгу N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions.