Теорема про конфлікт для пари стохастичних векторів

В. Кошманенко (Інститут математики НАН України, Київ)

Створивши світ,
Бог кожному призначив місце,
та диявол винайшов конфлікт

Аннотация

The mathematical conflict model with discrete set of positions is investigated.
Досліджується математична модель конфлікту з дискретним набором позицій.

1 Вступ

У роботі запропоновано математичну модель конфлікту зі скінченним набором позицій для двох противників. Сумарний розподіл імовірності захоплення довільної позиції дорівнює одиниці для кожного з противників, тобто a priori противники вважаються незнищенними. Боротьба іде лише за "справедливий"перерозподіл конфліктних позицій.

Нехай $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_d\}, d \geq 2$ позначає скінчену множину позицій, що її претендує зайняти (окупувати) кожна з двох альтернативних сторін (противників), яких позначаємо A та B. Повна ймовірність присутності на множині Ω для обох сторін вважається постійною і нормованою на одиницю, тобто $P_A(\Omega) = P_B(\Omega) = 1$. Початковий і незалежний від наявності противника розподіл імовірності присутності кожної зі сторін A та B по позиціях $\omega_i, i = 1, 2, ...d$ довільний:

$$1 = \sum_{i=1}^{d} P_A(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} p_i, p_i \geq 0$$

$$1 = \sum_{i=1}^{d} P_B(\omega_i) = \sum_{i=1}^{d} q_i, q_i \geq 0.$$

Суть конфлікту полягає в неможливості окупувати спірну позицію ω_i противниками A чи B одночасно. Задача полягає в побудові математичної композиції конфлікту між векторами $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_d)$ та $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ...q_d)$, дослідженні еволюції перерозподілу імовірностей $P_A(\omega_i) = p_i$ і $P_B(\omega_i) = q_i, \ i = 1, 2, ...d$ відносно конфліктної композиції, та знаходженні інваріантних станів.

2 Композиція конфлікту для стохастичних векторів

Вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ...p_d) \in \mathbf{R}^d, d \geq 2$ зветься стохастичним, якщо його координати невід'ємні, $p_i \geq 0, i = 1, 2, ...d$, і $l^{\mathbf{1}}$ - норма одинична, $\mid \mathbf{p} \mid = \sum_{i=1}^{d} p_i = 1$.

Кожна пара стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^d$ утворює конфліктну систему, яка нетривіальна, якщо скалярний добуток $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \neq 0$ і тривіальна, якщо $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$. Випадок $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{1}_i$, де $\mathbf{1}_i = (\underbrace{0, ...0}_{i-1}, 1, 0, ...0)$, який відповідає колапс-стану, з подальшого розгляду виключаємо.

Некомутативна конфліктна композиція (позначення $\divideontimes$) між стохастичними векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ з координатами $p_i^{(0)}, q_i^{(0)},\ i = 1, 2, ...d$ визначається таким чином. Парі $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ ставиться у відповідність нова пара стохастичних векторів:

$$\mathbf{p}^1 := \mathbf{p}^0 \divideontimes \mathbf{q}^0 \equiv \mathbf{p}^0 \overset{1}{\divideontimes} \mathbf{q}^0, \;\; \mathbf{q}^1 := \mathbf{q}^0 \divideontimes \mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{q}^0 \overset{1}{\divideontimes} \mathbf{p}^0,$$

з координатами:

$$p_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} \cdot (1 - q_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} p_i^{(0)} \cdot q_i^{(0),c}, p_i^{(0)} \equiv p_i, q_i^{(0)} \equiv q_i \tag{1}$$

$$q_i^{(1)} := \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} \cdot (1 - p_i^{(0)}) \equiv \frac{1}{z_1} q_i^{(0)} \cdot p_i^{(0),c},$$

де нормуючий коефіцієнт z_1 фіксується умовою стохастичності, $\mid \mathbf{p}^1 \mid = \mid \mathbf{q}^1 \mid = 1$:

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0). \tag{2}$$

Координати $p_i^{(1)}, q_i^{(1)}$ в (1) визначені коректно за винятком випадку, коли $\mathbf{p}^0 = \mathbf{1}_i = \mathbf{q}^0$. Степінь конфліктної композиції (позначення $\overset{n}{\divideontimes}$, $n = 1, 2, ...$) між векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ визначається індуктивно:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{p}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{q}^0 := \mathbf{p}^{n-1} \divideontimes \mathbf{q}^{n-1},$$

$$\mathbf{q}^n = \mathbf{q}^0 \overset{n}{\divideontimes} \mathbf{p}^0 := \mathbf{q}^{n-1} \divideontimes \mathbf{p}^{n-1},$$

де координати векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ задаються формулами:

$$p_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} p_i^{(n-1)} \cdot (1 - q_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} \cdot p_i^{(n-1)} \cdot q_i^{(n-1),c}, \tag{3}$$

$$q_i^{(n)} := \frac{1}{z_n} q_i^{(n-1)} \cdot (1 - p_i^{(n-1)}) \equiv \frac{1}{z_n} \cdot q_i^{(n-1)} \cdot p_i^{(n-1),c},$$

з

$$z_n = 1 - (\mathbf{p}^{n-1}, \mathbf{q}^{n-1}).$$

Для фіксованої пари стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ матриця

$$M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} & \cdots & p_d^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} & \ldots & q_d^{(n)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

зветься станом конфліктної системи на n-му кроці конфлікту. Еволюція початкового стану M^0 асоційованого з парою векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0$ задається перетворенням:

$$U(\overset{n}{\divideontimes})M^0 := M^n, \ U(\overset{1}{\divideontimes}) \equiv U(\divideontimes).$$

В цій роботі для конфліктної системи з довільними початковими векторами $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^d$ доведено існування граничних інваріантних станів, $M^\infty = \lim_{n\to\infty} M^n, \quad U(\divideontimes)M^\infty = M^\infty$ та частково описана їх структура.

3 Приклад

Розглянемо в $\mathbf{R}^2$ пару стохастичних векторів $\mathbf{p}^0 = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}), \mathbf{q}^0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)}), \quad p_i^{(0)} \neq 0 \neq q_i^{(0)}$. В силу (1) вже перший крок конфліктної композиції приводить до симетричного стану:

$$U(\overset{1}{\divideontimes})\begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \\ q_1^{(0)} & q_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \ 0 \leq a, b \leq 1.$$

Твердження. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$ *з* $\mathbf{R}^2$ *послідовність станів* $M^n = U(\overset{n}{\divideontimes})M^0 = \begin{pmatrix} p_1^{(n)} & p_2^{(n)} \\ q_1^{(n)} & q_2^{(n)} \end{pmatrix}$ *збігається до одного з інваріантних станів:* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *або* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Якщо* $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i, \ i = 1, 2,$ *то граничний стан є рівноважним,* $M^\infty = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Доведення. Без втрати загальності можна покласти, $M^0 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $0 < a < 1/2, \ b = 1 - a$. Тоді $M^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, де $a_1 = \frac{a^2}{a^2+b^2} = ak_1$, $k_1 = \frac{a}{2a^2-2a+1} < 1$ оскільки $a < a^2 + b^2$ при $a < 1/2$. Отже, $a_1 < a$. За індукцією, для довільного $n \geq 1$

$$a_n = a_{n-1}k_n \equiv a\prod_{i=1}^{n} k_i,$$

де усі $k_i < 1$ і отже $a_n < a_{n-1}$. Це означає, що $a_n \to 0$, відповідно, $b_n \to 1$, при $n \to \infty$. У випадку $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0 \neq \mathbf{1}_i$ безпосередньо перевіряється, що не пізніше ніж на першому кроці конфліктна композиція приводить до рівноважного стану $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. $\square$

4 Теорема про конфлікт

Теорема. *Для довільної пари стохастичних векторів* $\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0 \in \mathbf{R}^d, d \geq 2, \ \mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$, *які утворюють нетривіальну конфліктну систему,* $(\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) \neq 0$, *існують границі:*

$$p_i^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} p_i^{(n)}, \quad q_i^{(\infty)} = \lim_{n\to\infty} q_i^{(n)}, \quad i = 1, ..., d,$$

а послідовність станів M^n визначених згідно з (1) - (4) збігається до інваріантного стану:

$$M^{\infty} = \lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} p_1^{(\infty)} & p_2^{(\infty)} & ... & p_d^{(\infty)} \\ q_1^{(\infty)} & q_2^{(\infty)} & ... & q_d^{(\infty)} \end{pmatrix}, \quad U(\circledast)M^{\infty} = M^{\infty}. \tag{5}$$

При цьому граничні вектори $\mathbf{p}^{\infty} = (p_1^{(\infty)}, p_2^{(\infty)}, ..., p_d^{(\infty)})$, $\mathbf{q}^{\infty} = (q_1^{(\infty)}, q_2^{(\infty)}, ..., q_d^{(\infty)})$ асоційовані з станом M^{∞} ортогональні,

$$\mathbf{p}^{\infty} \perp \mathbf{q}^{\infty}. \tag{6}$$

Якщо початкові вектори однакові, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, та для усіх $i = 1, 2, ..., d$ координати $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$, то граничні вектори також існують, є однаковими, $\mathbf{p}^{\infty} = \mathbf{q}^{\infty}$, і мають рівномірний розподіл:

$$p_i^{(\infty)} = q_i^{(\infty)} = 1/d. \tag{7}$$

Доведення. У випадку $d = 2$ справедливість теореми випливає з Твердження. Нехай $d \geq 3$. Припустимо що $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$. Тоді якщо для якогось i $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, то в силу (1), $p_i^{(1)} > q_i^{(1)}$ також, і отже, $p_i^{(n)} > q_i^{(n)}$ для усіх n. Більш за те, якщо для фіксованого i, $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, то з необхідністю

$$q_i^{(n)} \to 0, n \to \infty. \tag{8}$$

Для доведення (8) достатньо показати, що відношення

$$c_i^{(n)} := \frac{p_i^{(n)}}{q_i^{(n)}} \to \infty, n \to \infty.$$

Очевидно що $c_i^{(0)} > 1$. А в силу $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, числа $k_i^{(0)} := \frac{1-q_i^{(0)}}{1-p_i^{(0)}} > 1$ також. Тому $c_i^{(0)} < c_i^{(1)} = c_i^{(0)} \cdot k_i^{(0)}$. За індукцією

$$1 < c_i^{(0)} < c_i^{(1)} < ... < c_i^{(n)} < c_i^{(n+1)} = c_i^{(n)} \cdot k_i^{(n)} = c_i^{(0)} \cdot k_i^{(0)} \cdot ... \cdot k_i^{(n)}.$$

Більше того, числа $k_i^{(n)}$ строго зростають при $n \to \infty$:

$$1 < k_i^{(0)} < k_i^{(1)} < ... < k_i^{(n)}. \tag{9}$$

Справді, для $k_i^{(1)}$ маємо

$$k_i^{(1)} = \frac{1 - q_i^{(1)}}{1 - p_i^{(1)}} = \frac{1 - \frac{1}{z_1} q_i^{(0)}(1 - p_i^{(0)})}{1 - \frac{1}{z_1} p_i^{(0)}(1 - q_i^{(0)})} = \frac{z_1 - q_i^{(0)}(1 - p_i^{(0)})}{z_1 - p_i^{(0)}(1 - q_i^{(0)})}$$

$$= \frac{1 - q_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)} p_i^{(0)}}{1 - p_i^{(0)} - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) + q_i^{(0)} p_i^{(0)}} = \frac{1 - q_i^{(0)} - I_i^0}{1 - p_i^{(0)} - I_i^0},$$

де

$$0 < I_i^0 := (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) - p_i^{(0)} q_i^{(0)} = \sum_{k \neq i} p_k^{(0)} q_k^{(0)} < \sum_{k \neq i} p_k^{(0)} = 1 - p_i^{(0)}$$

Тепер очевидно, що

$$k_i^{(0)} = \frac{1 - q_i^{(0)}}{1 - p_i^{(0)}} < k_i^{(1)} = \frac{1 - q_i^{(0)} - I_i^0}{1 - p_i^{(0)} - I_i^0}.$$

Аналогічно доводиться, що $k_i^{(1)} < k_i^{(2)}$, і за індукцією одержуємо (9). Отже, з $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ випливає, що $c_i^{(n)} \to \infty$ і тому $q_i^{(n)} \to 0$, бо усі $p_i^{(n)}$ обмежені. Аналогічно, з $p_k^{(0)} < q_k^{(0)}$ для якогось фіксованого k випливає, що $p_k^{(n)} \to 0$. В силу $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{q}^0$ це означає, що $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0$ і $z_n \to 1$ при умові, що у векторів $\mathbf{p}^n$, $\mathbf{q}^n$ усі відповідні координати різні, тобто що є порожньою множина індексів Ω :

$$\Omega_0 := \{i : p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0\} = \emptyset.$$

У свою чергу це означає, що послідовності $p_i^{(n)}, q_k^{(n)}$ при $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$ та $q_k^{(0)} > p_k^{(0)}$ також збігаються на проміжку $[0, 1]$:

$$p_i^{(n)} \to p_i^{(\infty)},\ q_k^{(n)} \to q_k^{(\infty)},\ n \to \infty.$$

При цьому в силу $q_i^{(n)} \to 0$, $p_k^{(n)} \to 0$ граничний стан системи буде інваріантним відносно конфліктної композиції, що доводить (5). Оскільки $(\mathbf{p}^\infty, \mathbf{q}^\infty) = 0$, то справедливе співвідношення (6).

У випадку $\Omega_0 \neq \emptyset$, доведення теореми трохи складніше. Звичайно граничні значення $p_i^{(\infty)}, q_k^{(\infty)}$ для $i, k \notin \Omega_0$ існують як і в попередньому випадку. Це видно з формул (3), оскільки як і раніше, $q_i^{(n)} \to 0$ при $p_i^{(0)} > q_i^{(0)}$, а також $p_k^{(n)} \to 0$ при $q_k^{(0)} > p_k^{(0)}$. Тому в даному випадку нормуючий коефіцієнт можна записати у вигляді

$$z_n = 1 - \sum_{j \in \Omega_0} (p_j^{(n)})^2 - \epsilon_n,$$

де $\epsilon_n \to 0$. З (3) випливає, що хоча б для якоїсь підпослідовності n_k відношення $1 - p_j^{(n_k)}$ до $1 - \epsilon_{n_k} - \sum\limits_{j \in \Omega_0} (p_j^{(n_k)})^2$ прямує до 1, що можливо лише якщо $p_j^{(n_k)} \to 0$. Отже, $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \to 0, n \to \infty$ в загальному випадку, що гарантує справедливість тверджень теореми.

Тепер припустимо, що $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$ і для всіх $i = 1, 2, ..., d$ координати $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$. Тоді з (1) очевидно випливає що $p_i^{(n)} = q_i^{(n)} \neq 0$ для усіх n. Без втрати загальності координати вектора $\mathbf{p}^0$ можна вважати впорядкованими:

$$0 < {p_1}^{(0)} \leq {p_2}^{(0)} \leq ... \leq {p_d}^{(0)} < 1. \tag{10}$$

З (10), в силу $\mathbf{p}^0 = \mathbf{q}^0$, випливає що числа $q_i^{(0),c} := 1 - q_i^{(0)}$ мають зворотну впорядкованість

$$1 > q_1^{(0),c} \geq q_2^{(0),c} \geq ... \geq q_d^{(0),c} > 0, \tag{11}$$

З (11) випливає, що

$$q_1^{(0),c} > z_1 > q_d^{(0),c} \tag{12}$$

Справді, за означенням,

$$z_1 = 1 - (\mathbf{p}^0, \mathbf{q}^0) = \sum_i p_i^{(0)} q_i^{(0),c}.$$

Тому, замінюючи в останній сумі всі числа $q_i^{(0),c}$ на $q_1^{(0),c}$ (або на $q_d^{(0),c}$) і використовуючи рівність $\sum_i p_i^{(0)} = 1$ з (11) одержуємо (12).

Тепер покажемо, що координати вектора $\mathbf{p}^1$ задовольняють нерівності:

$$p_1^{(0)} \leq p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)} \leq p_d^{(0)}, i = 1, 2, ..., d \tag{13}$$

Справді, з (12) безпосередньо випливає, їо $p_1^{(0)} \leq p_1^{(1)}$ та $p_d^{(1)} \leq p_d^{(0)}$. Для доведення нерівностей $p_1^{(1)} \leq p_i^{(1)} \leq p_d^{(1)}$ зауважимо, що їх, завдяки $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$, можна еквівалентно переписати у вигляді

$$p_1^{(0)}(1 - p_1^{(0)}) \leq p_i^{(0)}(1 - p_i^{(0)}) \leq p_d^{(0)}(1 - p_d^{(0)}).$$

А ці співвідношення справедливі в силу того що функція $y = x(1-x)$, $x \in [0,1]$ має симетричний графік відносно точки $x = 1/2$, в якій вона досягає максимуму. Тому

$$y(p_1^{(0)}) \leq y(x) \leq y(1 - p_d^{(0)})$$

для будь-якої точки $x = p_i^{(0)} \in (0,1)$, при умовах: $d \geq 3$, $\sum_i p_i^{(0)} = 1$, та $\min_i p_i^{(0)} \leq x \leq \max_i p_i^{(0)}$. Тепер за індукцією нерівності (13) продовжуються на координати вектора $\mathbf{p}^n$ з довільним n:

$$p_1^{(0)} \leq p_1^{(1)} \leq \cdots \leq p_1^{(n)} \leq p_i^{(n)} \leq p_d^{(n)} \leq \cdots \leq p_d^{(1)} \leq p_d^{(0)}.$$

Звідси в силу стохастичності векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ р з необхідністю одержуємо:

$$\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)} = 1/d = \lim_{n\to\infty} q_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, ..., d, \tag{14}$$

що доводить (7). Зрозуміло, що у випадку $p_i^{(0)} = q_i^{(0)} \neq 0$ лише для $i = 1, 2, ..., m < d$, границі в (14) дорівнюють $1/m$. $\square$

5 Дискусія

Згідно доведеної вище теореми про конфлікт, композиція $\circledast$ (див. (1)) має чисто відштовхувальний (repelling) ефект. В результаті нескінченної (в загальному випадку) боротьби різні супротивники з нетривіальної конфліктної системи (вектори $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$ не тотожні і їх скалярний добуток не нульовий, $(\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n) \neq 0$) розходяться по різним позиціям (вектори $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{q}^\infty$) ортогональні. При цьому на границі, $n \to \infty$, спірні позиції відсутні: принаймні одна з координат $p_i^{(\infty)}$ або $q_i^{(\infty)}$ дорівнює нулю. Рівномірний (паритетний) розподіл реалізується лише для ідентичних сторін.

Зрозуміло, що для побудови досконалішої моделі конфліктів необхідно також забезпечити наявність притягального (attracting) ефекту. Реально він проявляється в зростанні коефіцієнтів претензій (координат векторів $\mathbf{p}^n, \mathbf{q}^n$) окупувати певні позиції одночасно кожною з протилежних сторін при $n \to \infty$. Математично цього можна досягти введенням функціональної (керованої) залежності цих координат від часу, $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$. Зокрема, на кожному кроці композиції $\divideontimes$ координати $p_i^{(n)}$, $q_i^{(n)}$ можуть додатково степенево або експоненціально залежати від аргументу t. Це означає перехід до побудови конфліктних моделей з керуванням (див. наприклад [1]). Закон перетворення функцій розподілу відповідних станів, як і координат $p_i^{(n)}(t)$, $q_i^{(n)}(t)$ можна задавати стохастичними квадратними матрицями.

Відзначимо, що в запропонованій тут моделі конфліктної системи не використовуються поняття платіжної (payoff) функції - основного об'єкту звичайної теорії ігор [2] - [7]. Але в досконалішому варіанті конфліктної композиції ця функція з неохідністю з"являється (див. [8]).

Накінець зауважимо, що в цій роботі введено принцип незнищенності противників. Жодна з сторін не може ані виграти, ані програти, а результатом боротьби є безконфліктний стан. В наступній публікації буде показано, що введена в цій статті композиція конфлікту $\divideontimes$ породжує в просторі $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ векторну динамічну систему, значно складнішу одновимірної [9].

Список литературы

[1] А. Чикрий, К.Г. Дзюбенко, Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов // Проблемы управления и информатики. - 1999. - N 1. C.92-106.

[2] N.N. Vorob'ev, Translated and supplemented by S. Kotz. Applications of Mathematics // Game theory. Lectures for economists and systems scientists, New York - Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[3] A. J. Jones, Mathematics and its Applications. Game theory: mathematical models of conflict, New York - Chichester - Brisbane, 1980.

[4] G. Owen, Game theory, Third edition. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995.

[5] J. S. Armstrong, Assessing Game Theory, Role Playing and Unaided Judgment, // International Journal of Forecasting, 2002.

[6] H. Gintis, A Markov model of production, trade, and money: theory and artificial life simulation. // Comput. Math. Organ. Theory. - 1997. - **3**, N 1, P. 19-41.

[7] K. C. Green, Forecasting decisions in conflict situations: A comparison of game theory, role-playing and unaided judgment, // International Journal of Forecasting, 2002.

[8] V. Koshmanenko, The Theorem on Conflict for Probability Measures, (subm. to publ.) 2002.

[9] W. de Melo, S. van Strien, One-Dimensional Dynamics, Springer, 1993.